Оглавление

1. Глава 1. Понятие пыли Кантора
   1.1 Понятие пыли Кантора
   1.2 Размерность множеств Кантора
   1.3 Канторова лестница
2. Глава 2. Фазовые пластинки на основе множеств Кантора
3. Заключение
4. Список использованных источников
5. Приложения

Введение

Современная физика отошла от парадигмы, основанной на использовании и поиске лишь детерминистических законов. Такие законы описывают объекты исследования с помощью усредненных характеристик в пренебрежении различными возмущениями. В тех случаях, когда имеющиеся возмущения невелики, такое “усредненное” описание рассматриваемой физической системы достаточно хорошо отражает ее реальное поведение, и использование детерминистических законов оправданно. В иных, не менее важных ситуациях, случайные отклонения могут оказаться настолько значительными, что говорить о детерминированном изменении состояния системы становится невозможным.

Сложное непредсказуемое поведение физической системы (называемое в дальнейшем стохастическим) может быть обусловлено случайными изменениями ее параметров, случайными внешними воздействиями, а также развитием в системе разнообразных неустойчивостей. Последняя причина часто приводит к развитию в системе так называемого детерминированного хаоса. Указанные факторы приводят к стохастизации сигналов и структур, характеризующих поведение и состояние системы. Для изучения процессов стохастизации чаще всего привлекаются разнообразные вероятностные подходы.

В основе таких подходов лежат методы статистического анализа случайных величин и функций. Часто они сводятся к определению таких характеристик как плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсия, моменты высоких порядков, автокорреляционные функции, спектральные плотности. При проведении статистического анализа широко используются элементы математической статистики, включающие теорию выборок, оценки доверительных интервалов, проверку

статистических гипотез, способы аппроксимации экспериментальных данных. Указанные методы и подходы давно стали традиционными и весьма подробно описаны во многих руководствах. Наряду с ними в последние годы получили распространение и некоторые менее известные способы обработки сигналов, основанные, в частности, на фрактальном, мультифрактальном анализах и вейвлет-преобразованиях. Отличительная особенность последних состоит в том, что они наряду с глобальными характеристиками стохастических процессов (получающихся в результате использования процедуры усреднения по большим временным интервалам), позволяют вскрыть особенности их локальной структуры.

Важной характеристикой методов, основанных на фрактальных представлениях и вейвлет-преобразованиях, является их универсальность. Они используются для исследования широкого круга сложных нерегулярных явлений как в естественных, так и в гуманитарных науках. В курсовой работе рассмотрены те варианты методик, которые в наибольшей степени соответствуют специфике оптических исследований.

В оптических системах записи и обработки информации сигналом может являться зависимость интенсивности света от пространственных координат.

Структурой мы будем называть множество расположенных в пространстве точек, характеризующих геометрию исследуемого объекта. На рассматриваемом множестве может быть задана мера. Если мерой является интенсивность света, то расположенное в плоскости множество точек может рассматриваться в качестве оптического изображения.

Глава 1.

Понятие пыли Кантора

1.1 Понятие пыли Кантора

Классическое множество Кантора, или пыль Кантора, названо по имени Георга Кантора, который описал его в 1883 году. Существование пыли Кантора отмечалось до этого Генри Смитом в 1875 году или еще ранее. Это множество хорошо известно студентам из курса математического анализа как пример множества нулевой меры Лебега, чья мощность равна мощности континуума. Фрактальные свойства пыли Кантора имеют огромное значение, особенно учитывая тот факт, что многие известные фракталы являются близкими родственниками этого множества.

Построение классической пыли Кантора начинается с выбрасывания средней трети (не включая концы) единичного отрезка. То есть исходное множество есть отрезок [0,1], и первый шаг состоит в удалении открытого интервала (1/3,2/3). На следующем и всех остальных шагах мы выкидываем среднюю треть (не включая концы) всех отрезков текущего уровня. Таким образом, мы получаем (рис. 2.1) последовательность множеств:

Рис. 1.1 Построение пыли Кантора

$$\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_1 &= [0,1/3] \cup [2/3,1] \\ C_2 &= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1] \\ &\vdots \\ C \end{aligned}$$

Предельное множество C, которое представляет собой пересечение множеств, называется классической пылью Кантора. В дальнейшем мы будем называть его просто канторовой пылью.

Свойства канторовой пыли.

1. Канторова пыль есть самоподобный фрактал размерности

$$d = \log(2)/\log(3) \approx 0,6309,$$

2. Канторова пыль не содержит интервалов положительной длины. Это очевидно из построения.

3. Сумма длин интервалов, удаленных при построении множества C, в точности равна 1. Чтобы показать это, рассмотрим следующее доказательство. Длина первого интервала, который мы выкинули, составляет 1/3.

Чтобы получить $\boxed{4}$ мы выкинули два интервала, каждый длиной $\boxed{5}$. На следующем шаге мы выбросили $\boxed{6}$интервалов, каждый длиной $\boxed{7}$, и т. д. Таким образом, сумма длин удаленных интервалов S составляет:

$$S = 1/3 + 2/3^2 + 2^2/3^3 + \cdots + 2^{n-1}/3^n + \cdots.$$

Но это выражение можно переписать в виде:

$$S = (1/3)(1 + 2/3 + (2/3)^2 + (2/3)^3 + \cdots),$$

и с помощью формулы для суммы геометрической прогрессии, а именно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1,$$

мы получаем:

$$S = (1/3)\frac{1}{1-2/3} = 1.$$

Можно предположить, что если в C что-нибудь и осталось после удаления всех этих интервалов, то, наверное, не очень много. Однако это не так, что подтверждается следующим свойством.

4. Удивительный результат сравнения множества Кантора с интервалом состоит в том, что мощности этих множеств равны. Два множества обладают равной мощностью, если существует взаимно однозначное соответствие между точками этих множеств. В случае конечных множеств данное утверждение тривиально. Для бесконечных множеств, таких как интервал или множество Кантора, понятие мощности требует аккуратного обращения. В качестве простой иллюстрации сказанного достаточно заметить, что отрезки [0,1] и [0,2] — равной мощности, несмотря на то, что второй интервал в два раза длиннее первого. Взаимно однозначное соответствие в этом случае задается отображением .

5. Классическая канторова пыль представляет собой пример компактного, совершенного и вполне разрывного множества.

Более того, можно утверждать, что топологически классическое множество Кантора определяется как компактное, совершенное и вполне разрывное множество. Это означает, что любое компактное, совершенное и вполне разрывное множество можно непрерывно преобразовать в пыль Кантора, причем существует обратное преобразование, с помощью которого можно восстановить исходное множество. Любое такое множество принято называть множеством Кантора. Не следует думать, однако, что все множества Кантора самоподобны. Более того, даже фрактальная размерность различных самоподобных множеств Кантора не обязательно совпадает.

1.2 Размерность множеств Кантора

Множество Кантора является прототипом фрактала.
Фрактал - это объект, который кажется автомодельным
При разной степени увеличения. Один из
Характерными особенностями фракталов является их фрактальная размерность.
Фрактальная размерность по существу является мерой
Самоподобие (его иногда называют
Размерность подобия). Фрактальная размерность
Больше топологической размерности. Есть
Многие конкретные определения фрактальной размерности.
Основным типом фрактальной размерности является HausdorffBesicovitch
Измерение, основанное на
Определение меры Хаусдорфа [2]. Одна версия
Размерности Хаусдорфа-Безиковича дается формулой
Формула:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}},$$

где N - число самоподобных кусков, а
r - коэффициент сжатия.
Отметим, что существует несколько различных способов

Вычисление фрактальной размерности произведем по формуле:

$$D(\mathbb{C}(3)) = \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{k \log 2}{k \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} \doteq 0.631.$$

В случае набора Кантора $\mathbb{C}(n), n = 2m + 1,$ m = 1,2,3… , мы имеем $(m+1)^k$ (self-similar) тут интервал длины $\left(\frac{1}{n}\right)^k$ после шага k^{th} имеем:

$N = (m+1)^k$ and $r = \left(\frac{1}{n}\right)^k$, отсюда :

$$D(\mathbb{C}(n)) = \frac{\log(m+1)^k}{\log(2m+1)^k} = \frac{\log(m+1)}{\log(2m+1)} < 1.$$

Канторский набор $\mathbb{C}(n)$ - объект с фракталом
Размерность меньше единицы, между точками
(Топологическая размерность нуля) и прямая
(Топологическая размерность), для каждого $n = 2m+1, m = 1, 2, 3, \dots$.
Отсюда вытекатет следующая теорема:

При $\{\mathbb{C}(2m+1)\}_{m=1}^{\infty}$ выходит последовательность Канторовых множеств.

Тогда последовательность их размерностей $\{D(\mathbb{C}(2m+1))\}_{m=1}^{\infty}$
увеличивается и более того: $\lim_{m\to\infty} D(\mathbb{C}(2m+1)) = 1.$
Доказательство:
Определим три вещественные функции

$f: [1,\infty) \to R,\ f(x) = \log(x+1),$
$g: [1,\infty) \to R,\ g(x) = \log(2x+1),$
$h: [1,\infty) \to R,\ h(x) = \frac{\log(x+1)}{\log(2x+1)}.$

Чтобы доказать, что функция h возрастает на
Интервал $[1;\ \infty)$, мы вычислим его первый вывод.

$$h'(x) = \left(\frac{\log(x+1)}{\log(2x+1)}\right)' =$$

$$= \frac{\frac{(\log e)\log(2x+1)}{x+1} - \frac{(\log(x+1))\log e}{2x+1}}{(\log(2x+1))^2} =$$

$$= \frac{(\log e)[\log(2x+1)^{2x+1} - \log(x+1)^{x+1}]}{(\log(2x+1))^2(x+1)(2x+1)} =$$

$$= \frac{(\log e)\left[\log\frac{(2x+1)^{2x+1}}{(x+1)^{x+1}}\right]}{(\log(2x+1))^2(x+1)(2x+1)}.$$

Обратим внимание, что

$$\frac{\log e}{(\log(2x+1))^2(x+1)(2x+1)} > 0$$

for every $x \in [1,\infty)$.
У нас есть

$$\log\frac{(2x+1)^{2x+1}}{(x+1)^{x+1}} = \log\frac{(2x+1)^{x+1}(2x+1)^{x}}{(x+1)^{x+1}} =$$

$$= \log\left(\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{x+1}(2x+1)^{x}\right) =$$

$$= \log\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{x+1} + \log(2x+1)^{x} =$$

$$= (x+1)\log\left(1+\frac{x}{x+1}\right) + x\log(2x+1) > 0$$

for every $x \in [1,\infty)$.

Мы доказали, что $h'(x) > 0$ для каждого $x \in [1,\infty)$, так функция принимает вид : $h(x) = \frac{\log(x+1)}{\log(2x+1)}$ растет на промежутке $[1,\infty)$,

И, следовательно, последовательность $\left\{\frac{\log(m+1)}{\log(2m+1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ что явно также увеличивается.

Подсчитаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{\log(2x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log(x+1))'}{(\log(2x+1))'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\log e}{x+1}}{\frac{2\log e}{2x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = 1.$$

Hence,

$$\lim_{m\to\infty} D(\mathbb{C}(2m+1)) = \lim_{m\to\infty}\frac{\log(m+1)}{\log(2m+1)} = 1.$$

Набор Кантора имеет много интересных свойств

И последствия в области теории множеств,

Топологии и фрактальной теории. Применение

Теория фракталов к теории алгебраических структур

Был представлен на десятой Международной конференции

По теории нечетких множеств и приложениям в Липтовском

Ян (1-5 февраля 2010 г.) [3]. Фрактальная разность

Poset (вкратце, фрактальный D-poset) был определен как

Специальное склейка MV-алгебр [4]. В этом смысле,

Фракторный D-пакет Кантора является «0-1-вставкой»

MV-алгебра.

1.3 Канторова лестница

Канторова лестница — пример непрерывной монотонной функции

$[0,1] \to [0,1]$, которая не является константой, но при этом имеет производную, равную нулю в почти всех точках (сингулярной функции). Иногда называется «Чёртовой лестницей»

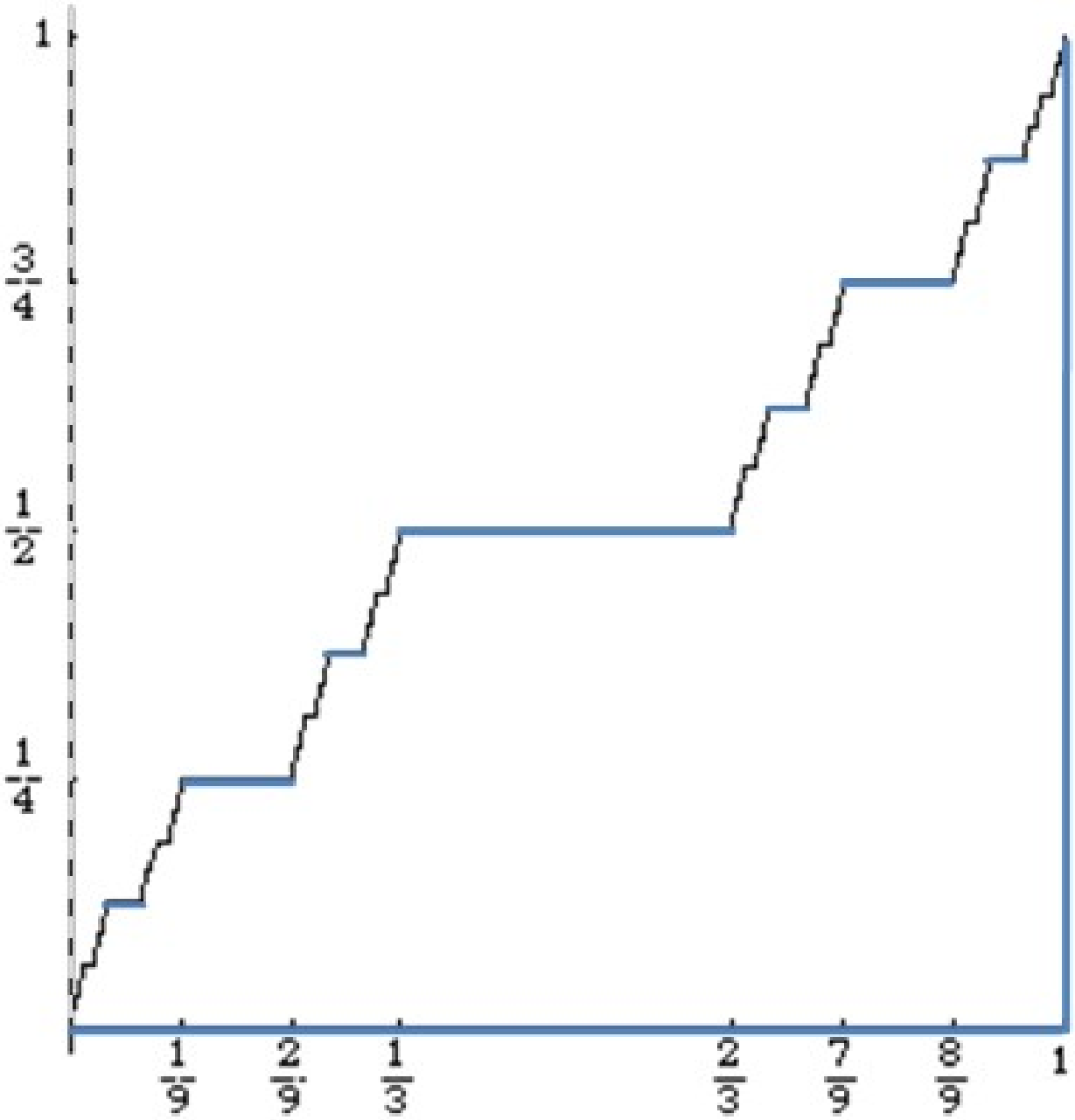


Рисунок 1.2 Чертова лестница

В математике функция Кантора является примером функции, непрерывной, но не абсолютно непрерывной. Его также называют тернарной функцией Кантора, функцией Лебега, сингулярной функцией Лебега, функцией Кантора-Витали, лестницей Дьявола, функцией лестницы Кантора [2] и функцией Кантора-Лебега [3]. Георг Кантор (1884) представил функцию Кантора и упомянул, что Шеффер указал, что это контрпример к расширению основной теоремы исчисления, утверждаемой Гарнаком. Функция Кантора

обсуждалась и популяризировалась Шейффером (1884), Лебегом (1904) и Виталием (1905).

Определение Чертовой лестницы:

Чтобы формально определить функцию Кантора c: [0,1] → [0,1], x в [0,1] и получить c (x) следующими шагами:

Экспресс x в базе 3.

Если x содержит 1, замените каждую цифру после первого 1 на 0.

Замените все 2 с 1 сек.

Интерпретируйте результат как двоичное число. Результатом является c (x).

Например:

1/4 становится 0.02020202 ... в базе 3. Нет 1, так что следующий этап все еще 0.02020202 ... Это переписывается как 0.01010101 ... При чтении в базе 2 это соответствует 1/3 в базе 10, Поэтому c (1/4) = 1/3.

1/5 становится 0.01210121 ... в базе 3. Цифры после первого 1 заменяются на 0s, чтобы произвести 0.01000000 ... Это не переписано, так как нет 2s. При чтении в основании 2 это соответствует 1/4 в основании 10, поэтому c (1/5) = 1/4.

200/243 становится 0.21102 (или 0.211012222 ...) в основании 3. Цифры после первого 1 заменяются на 0s для получения 0,21. Это переписывается как 0.11. При чтении в основании 2 это соответствует 3/4 в основании 10, поэтому c (200/243) = 3/4.

Свойства чертовой лестницы:

Функция Кантора ставит под сомнение x наивные интуиции о непрерывности и мере; Хотя он непрерывно всюду и имеет почти всюду нулевую производную, $c(x)$ идет от 0 до 1, так как идет от 0 до 1, И принимает каждое значение между ними. Функция Кантора является наиболее часто цитируемым примером действительной функции, которая является равномерно непрерывной (точнее, она является непрерывной по Гёльдеру с показателем α = log 2 / log 3), но не является абсолютно непрерывной. Он постоянен на отрезках вида (0.x1x2x3 ... xn022222 ..., 0.x1x2x3 ... xn200000 ...), и каждая точка, не входящая в набор Кантора, находится в одном из этих интервалов, поэтому ее производная 0 вне множества Кантора. С другой стороны, она не имеет производной в любой

точке несчетного подмножества канторовского множества, содержащего описанные выше интервальные концы.

Функцию Кантора можно рассматривать также как кумулятивную функцию распределения вероятностей меры Бернулли 1 / 2-1 / 2 μ, поддерживаемой на множестве Кантора: $c(x) = \mu([0, x])$

Это распределение, называемое распределением Кантора, не имеет дискретной части. То есть соответствующая мера является безатомной. Именно поэтому в функции нет скачкообразных скачков; Любой такой скачок соответствовал бы атому в мере.

Однако никакая непостоянная часть функции Кантора не может быть представлена как интеграл от функции плотности вероятности; Интегрирование любой предполагаемой функции плотности вероятности, не являющейся почти всюду нулем на любом интервале, даст положительную вероятность некоторому интервалу, которому данное распределение присваивает нулевую вероятность. В частности, как указывал Виталий (1905), функция не является интегралом от ее производной, хотя производная существует почти всюду.

Функция Кантора является стандартным примером сингулярной функции.

Функция Кантора не убывает, и, в частности, ее график определяет спрямляемую кривую. Шеффер (1884) показал, что длина дуги его графика равна 2.

<u>Альтернативные определения</u>

Итеративная конструкция:

Ниже мы определим последовательность {fn} функций на единичном отрезке, сходящуюся к функции Кантора.

Пусть $f0$ (x) = x.

Тогда для каждого целого n ≥ 0 следующая функция fn + 1 (x) будет определяться через fn (x) следующим образом:

Let $f_{n+1}(x) = 0.5 \times f_n(3x)$, when $0 \le x \le 1/3$;

Let $f_{n+1}(x) = 0.5$, when $1/3 \le x \le 2/3$;

Let $f_{n+1}(x) = 0.5 + 0.5 \times f_n(3x - 2)$, when $2/3 \le x \le 1$.

Три определения совместимы в концевых точках 1/3 и 2/3, потому что fn (0) = 0 и fn (1) = 1 для каждого n по индукции. Можно проверить, что fn поточечно сходится к функции Кантора, определенной выше. Кроме того, сходимость является равномерной. Действительно, разделив на три случая, в соответствии с определением fn + 1, видим, что

Три определения совместимы в концевых точках 1/3 и 2/3, потому что

fn (0) = 0 и fn (1) = 1 для каждого n по индукции. Можно проверить, что fn поточечно сходится к функции Кантора, определенной выше. Кроме того, сходимость является равномерной. Действительно, разделив на три случая, в соответствии с определением fn + 1, видим, что

$$\max_{x\in[0,1]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|, \quad n \ge 1.$$

Если f обозначает предельную функцию, то для любого n ≥ 0,

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \le 2^{-n+1} \max_{x\in[0,1]} |f_1(x) - f_0(x)|.$$

Кроме того, выбор начальной функции не имеет значения, если $f0$ (0) = 0, $f0$ (1) = 1 и $f0$ ограничено.

Фрактальный объем:

Функция Кантора тесно связана с множеством Кантора. Канторово множество C можно определить как множество тех чисел в интервале [0, 1], которые не содержат цифру 1 в своем разложении base-3 (триадика), за исключением того, что за 1 следует только нули можно заменить на 0222, чтобы избавиться от любых 1). Оказывается, что канторовское множество является фракталом с (бесчисленным) бесконечным числом точек (нульмерный объем), но нулевой длиной (одномерный объем). Только D-

мерный объем H_D (в смысле меры Хаусдорфа) принимает конечное значение, где $D = \log(2)/\log(3)$ - фрактальная размерность C. Мы можем определить функцию Кантора в качестве D-мерного объема сечений канторовского множества:

$$f(x) = H_D(C \cap (0, x)).$$

Обобщения:

Допустим,что $y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}$ - двоичное разложение действительного числа 0 ≤ y ≤ 1 в двоичных разрядах b_k = {0,1}. Тогда рассмотрим функцию

$$C_z(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k.$$

Для z = 1/3 обратная функция x = 2 $C_{\frac{1}{3}}$ (y) является функцией Кантора. То есть y = y (x) - функция Кантора. В общем случае для любого z <1/2 C_z (y) выглядит как повернутая на его стороне функция Кантора, причем ширина шагов становится шире по мере приближения z к нулю.

Как упоминалось выше, функция Кантора также является кумулятивной функцией распределения меры на множестве Кантора. Различные функции Кантора или лестницы Дьявола можно получить, рассмотрев различные меры без вероятности атома, поддерживаемые на множестве Кантора или других фракталах. В то время как функция Кантора имеет производную 0 почти всюду, текущие исследования сосредоточены на вопросе о размере множества точек, где верхняя правая производная отличается от нижней правой производной, в результате чего производная не существует. Этот анализ дифференцируемости обычно дается в терминах фрактальной размерности, причем размер Хаусдорфа является самым популярным выбором. Эта линия исследований была начата в 90-х годах Дарстом [4], который показал, что размерность Хаусдорфа множества недифференцируемости функции Кантора является квадратом его поддержки, $(\log 2/\log 3)^2$. Совсем недавно Фалконер [5] показал, что это соотношение квадратов справедливо для всех регулярных, особых мер.

$$\dim_H \left\{ x : f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mu([x, x+h])}{h} \text{ does not exist} \right\} = (\dim_H \operatorname{supp}(\mu))^2$$

Позже, Troscheit [6] получает более полную картину множества, где производная не существует для более общих нормализованных мер Гибб, поддерживаемых на самосогласованных и автомодельных множествах.

Функция вопросительного знака Германна Минковского слабо напоминает функцию Кантора, видимая как «сглаженная» форма последней; Его можно построить, перейдя от разложения непрерывной дроби к двоичному разложению, так же, как функцию Кантора можно построить, перейдя от тернарного разложения к двоичному разложению. Функция вопросительного знака имеет интересное свойство иметь исчезающие производные при всех рациональных числах.

Выводы по Главе 1 :

Глава 2

Фазовые пластинки на основе множеств Кантора

Известно, что радиально-симметричные ДОЭ, формируют вдоль оптической оси набор локальных фокусов, распределение которых определяется пространственным спектром от радиальной функции оптического элемента. Используя это свойство, можно формировать определённых последовательностей фокусов и/или нулевых значений, в том числе пропорциональных распределениям специальных функций, например, Эйри и Гаусса–Эрмита [11].Теоретическое объяснение данного эффекта базируется на сведении преобразования Френеля–Ханкеля к одномерному преобразованию Фурье. Такой подход применялся в различных работах, причем использовался не только для определения продольной картины, формируемой обычными и фрактальными зонными пластинками [2, 8, 12], но и для итерационного расчёта ДОЭ, формирующих заданное распределение вдоль оптической оси [13, 14]. Кроме осевого распределения, важной характеристикой является поперечный размер
светового пятна в фокусе. Для оценки этого размера используется полная ширина на уровне полуспада от максимального значения (full width at half maximum англ. FWHM) -ширина, рассчитанная как разница между максимальным и минимальным значениями аргумента функции, взятыми на уровне равном половине её максимального значения.
В случае нормального распределения полная ши рина на уровне половинной амплитуды
определяется выражением:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad (1)$$

где σ есть стандартное отклонение, x_0 может быть любым значением (ширина функции не зависит от переноса). Отношение между FWHM и стандартным отклонением определяется выражением:

$$FWHM = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma \approx 2,355\sigma. \qquad (2)$$

Рисунок 2.1 Процесс построения множества Кантора.

Одним из геометрических фракталов является множество Кантора (рис.2.2), которое позволяет математически описать процесс удаления зон пластинки Френеля или их пространственное преобразование. Зонные пластинки Френеля представляют собой чередующиеся прозрачные и непрозрачные кольцевые зоны, радиус которых при освещении плоской волной определяется формулой: $r_m = \sqrt{m\lambda b},$

где m – номер зоны; λ – длина волны;

b – расстояние до экрана. И она является основой для построения ФЗП [1].

Будем считать, что интенсивность в данной точке на оптической оси, обеспечивается вращением инвариантной функции зрачка, описанной R(r), освещенная плоской монохроматической волной. В приближении Френеля эта величина задается как функция от осевого расстояния до плоскости зрачка z как

$$I(z) = \left(\frac{2\pi}{\lambda z}\right)^2 \left| \int_0^a R(r) \exp\left(-i\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr \right|^2 . \qquad (3)$$

В уравнении (1) a – максимальный размер зрачка; λ - длина волны света. Необходимо выразить коэффициент пропускания зрачка как функцию новой переменной, определенной как $\xi = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 0,5.$

таким образом, что $q(\xi) = p(r)$. С помощью безразмерной осевой координаты $u = a^2/2\lambda z$ интенсивность вдоль оптической оси может быть выражена как

$$I(u) = 4\pi^2 u^2 \left| \int_{-0,5}^{0,5} q(\xi) \exp(-i2\pi u\xi) d\xi \right|^2 .$$

Из этого результата несложно отметить, что поведение I(u) в основном определяется квадратным модулем преобразования Фурье.

Рассмотрим теперь функцию зрачка q (ξ) , которая имеет фрактальную структуру. Таким образом, от известных свойств фракталов и их преобразований Фурье, это приводит к заключению, что такой элемент обеспечивает интенсивность вдоль оптической оси с фрактальным профилем. Мы назвали такой вид зрачка фрактальная зонная пластинка, потому что они могут быть созданы из стандартных зонных пластинок Френеля в некоторых случаях. Несмотря на то, что может использоваться создание структуры ФЗП любого одномерного фрактала, мы сосредоточим внимание на двоичных канторовых множествах.

Известно, что ФЗП состоит из поочередно прозрачных и непрозрачных зон, радиусы которых пропорциональны квадратному корню из натуральных чисел. Бинарная функция с периодом p может быть записана как

$$q(\xi) = q_{ZP}(\xi, p) = rect(\xi) rect\left(\frac{\mathrm{mod}\left(\xi + \frac{p-1}{z}, p\right)}{p} \right),$$

где функция mod(x,y) дает остаток от деления x на y. Рассмотрим частный случай множества Кантора (рис. 2.2). На первом этапе (S=1) начальный отрезок делится на нечетное количество число сегментов 2N-1, и сегменты в четных позициях удаляются. Оставшиеся N сегментов первого этапа также делятся и удаляются и т.д. В математических терминах функция коэффициента пропускания ФЗП может быть описана как периодическая функция

$$q(\xi) = q_{ZP}(\xi, NS) = \prod_{i=0}^{S} q_{ZP}\left(\xi, \frac{2}{(2N-1)^i}\right).$$

Рисунок 2.2 показывает ФЗП, сгенерированную из триадического множества Кантора при S=5.

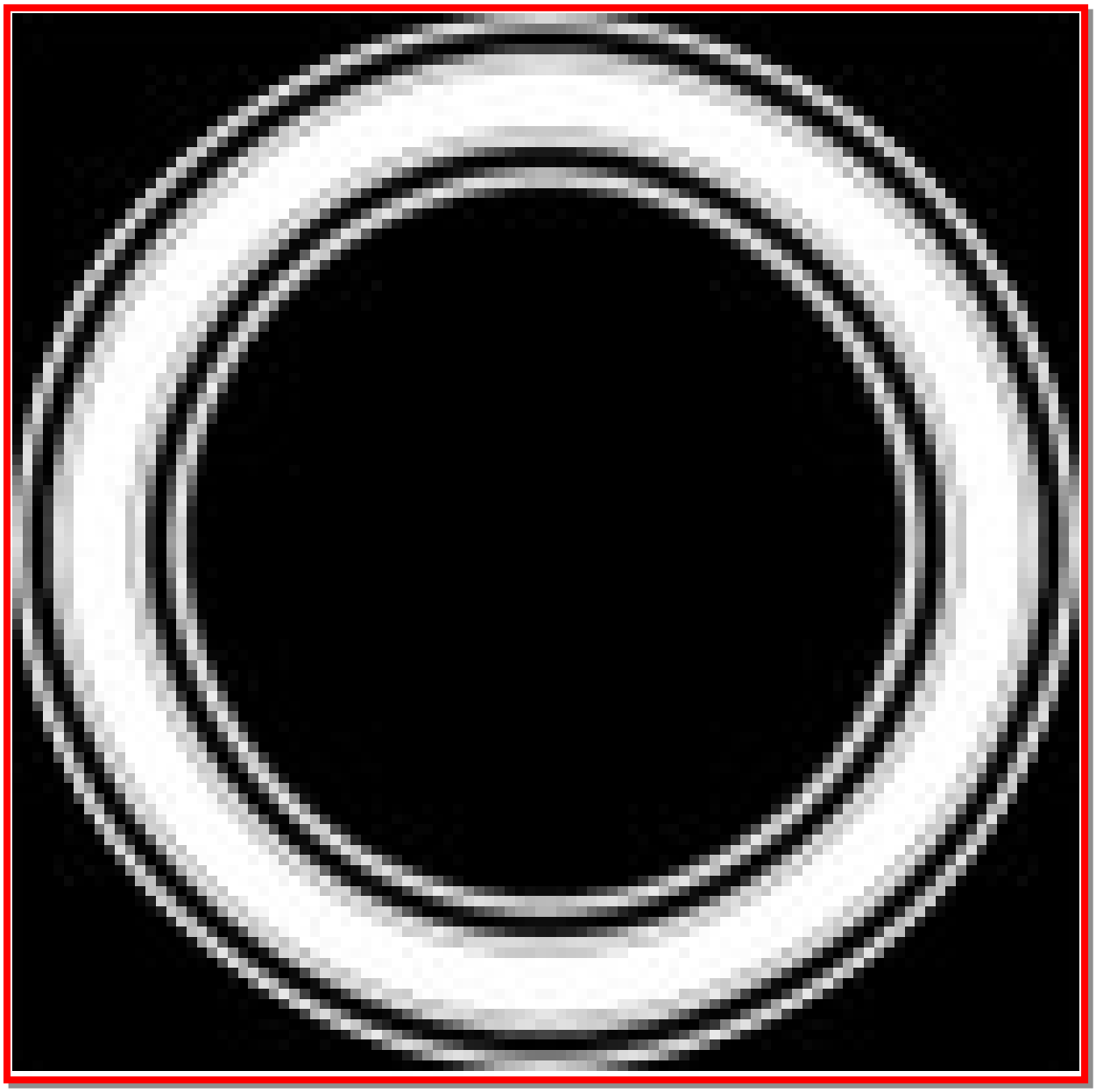


Рисунок 2.2 ФЗП 5 порядка генерации

Численные результаты

Разрешающая способность линзы зависит от его числовой апертуры и длины волны све та, при которой ведется наблюдение объекта. Рассмотрим дифракцию плоской ограниченной волны на обычной зонной пластинке и ФЗП в параксиальной области. Для получения результатов воспользуемся преобразова нием Френеля:

$$U(\xi,\eta,z)=\frac{ik}{2\pi z}\exp(ikz)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)\exp\left[\frac{ik}{2z}\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\right]dxdy$$

Для расчетов были использованы следующие параметры: длины волны λ = 0,000532 мм, радиус элемента R = 3 мм, фокус обычной зоной пластинки f = 2500 мм, что соответствует числовой апертуре NA = 0,0012. На рис.2.3-2.5

показаны результаты расчетов, позволя ющие сравнить дифракцию на обычной и фрактальной зонной пластинке.

A)

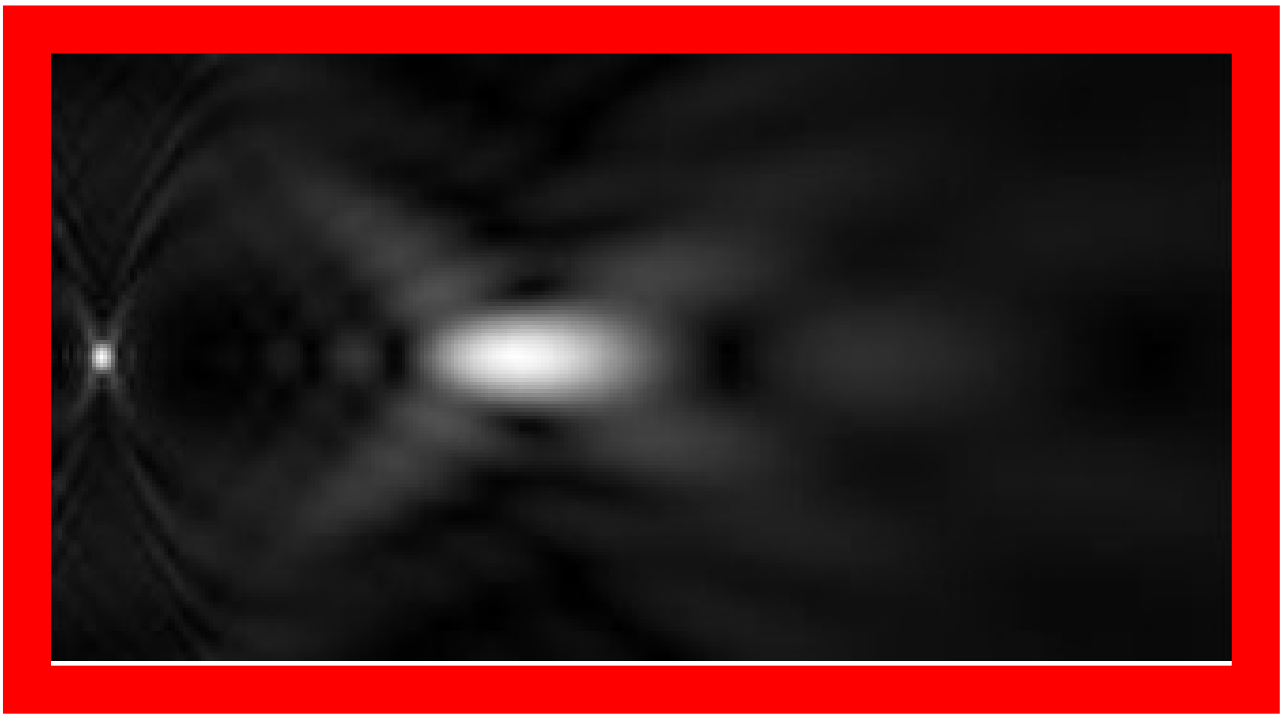
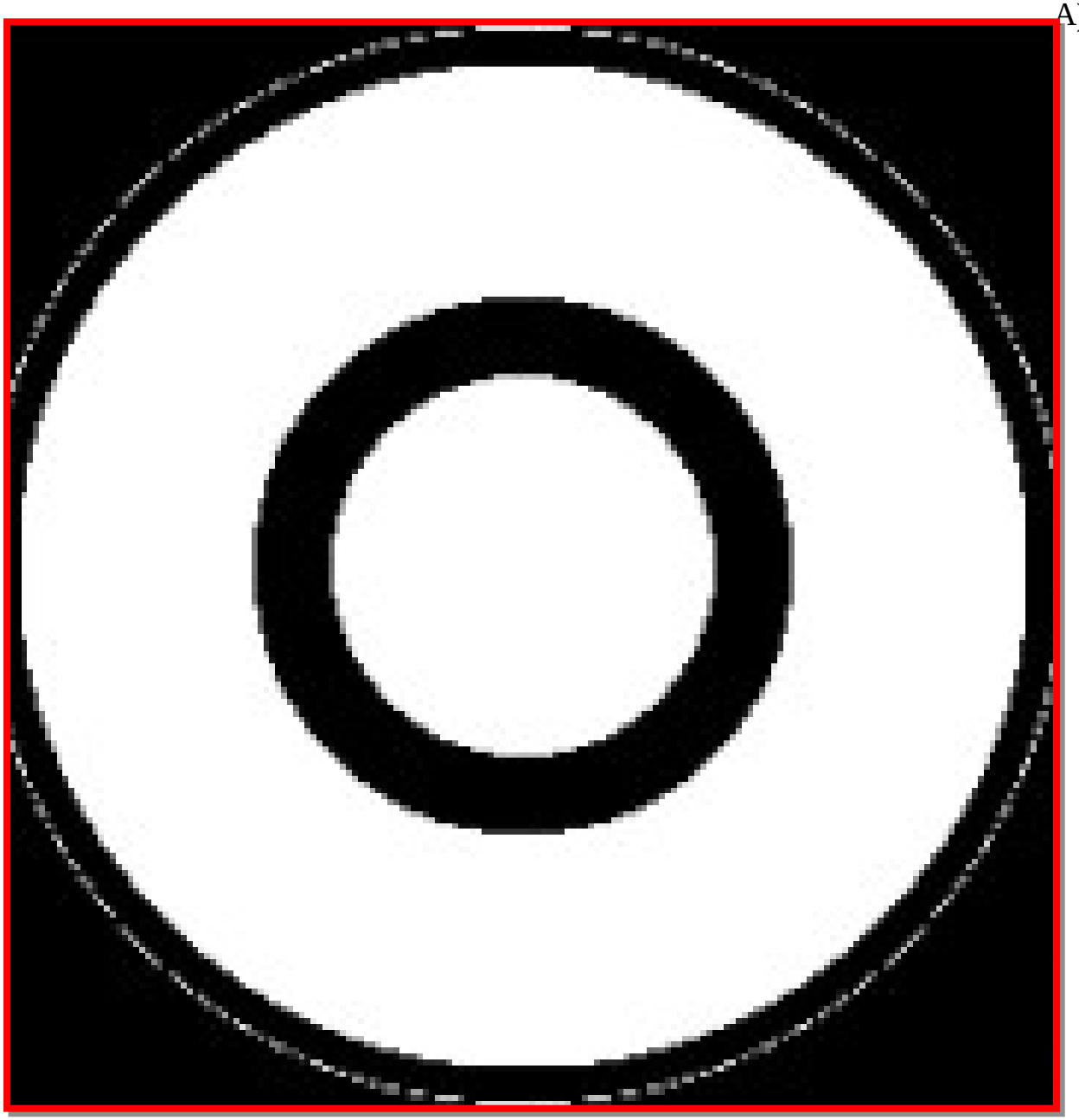
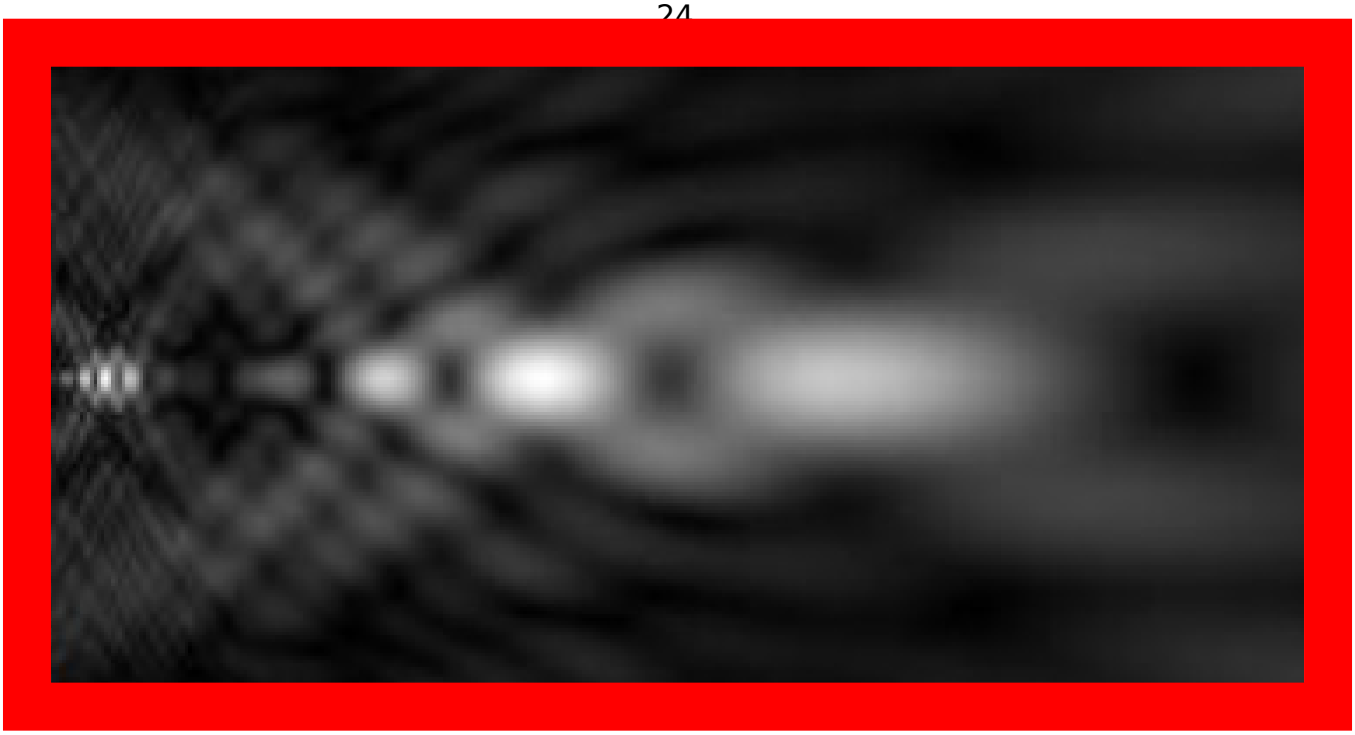


Рисунок 2.3 . Дифракция на обычной зонной пластинке: А) фаза оптического элемента, Б) распределение амплитуды в области $x \in [-1\ мм, 1\ мм]$, $z \in [500\ мм, 4500\ мм]$

А)





Б)

Рисунок 2.4 Дифракция на фрактальной зонной пластинке: А) фаза оптического элемента, Б) распределение амплитуды в области:

$$x \in [-1\ мм, 1\ мм]\ ,\ \ z \in [500\ мм, 4500\ мм]$$

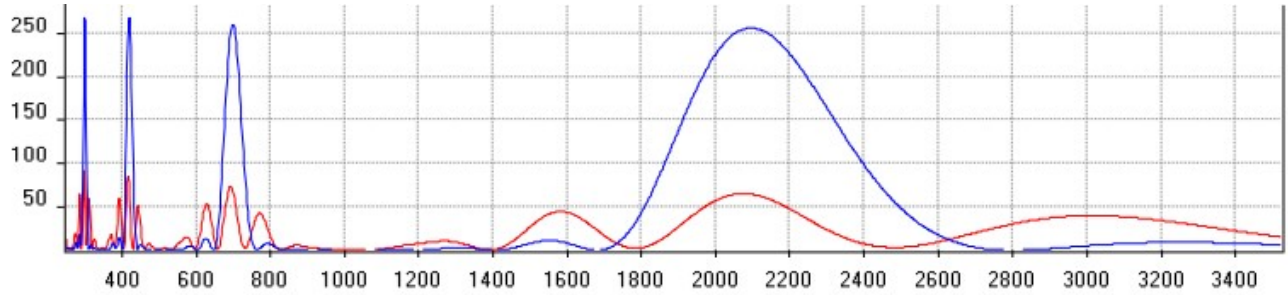
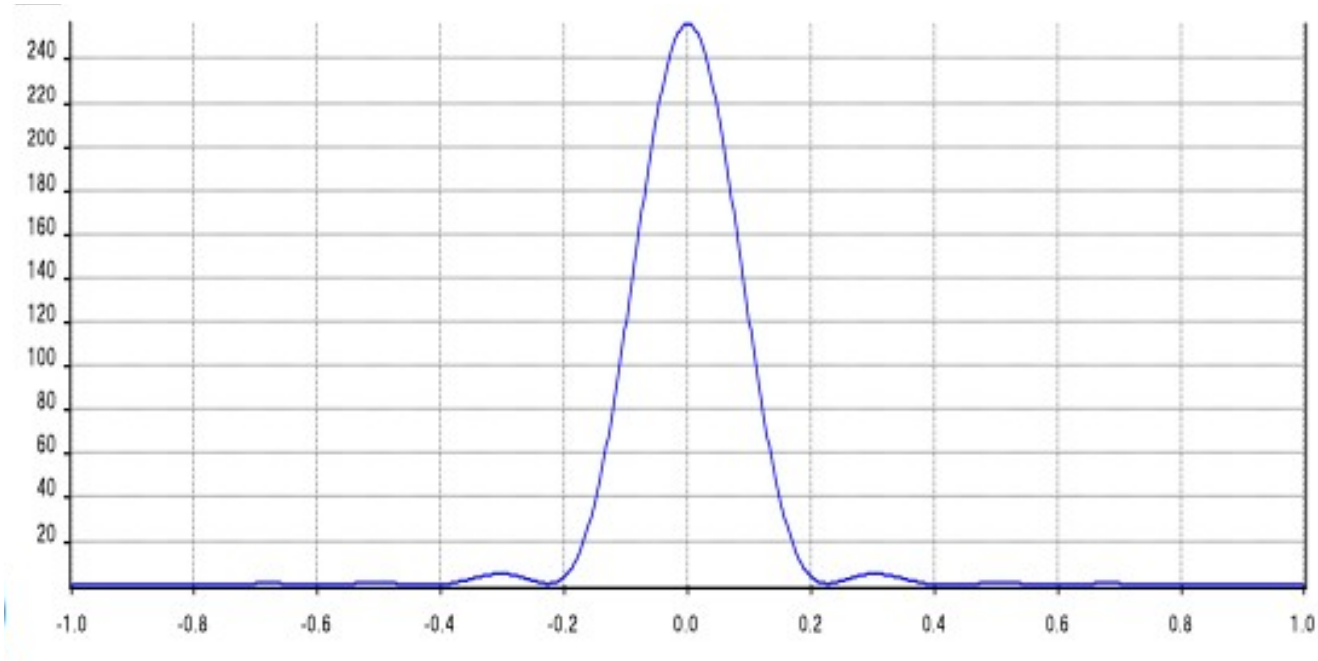


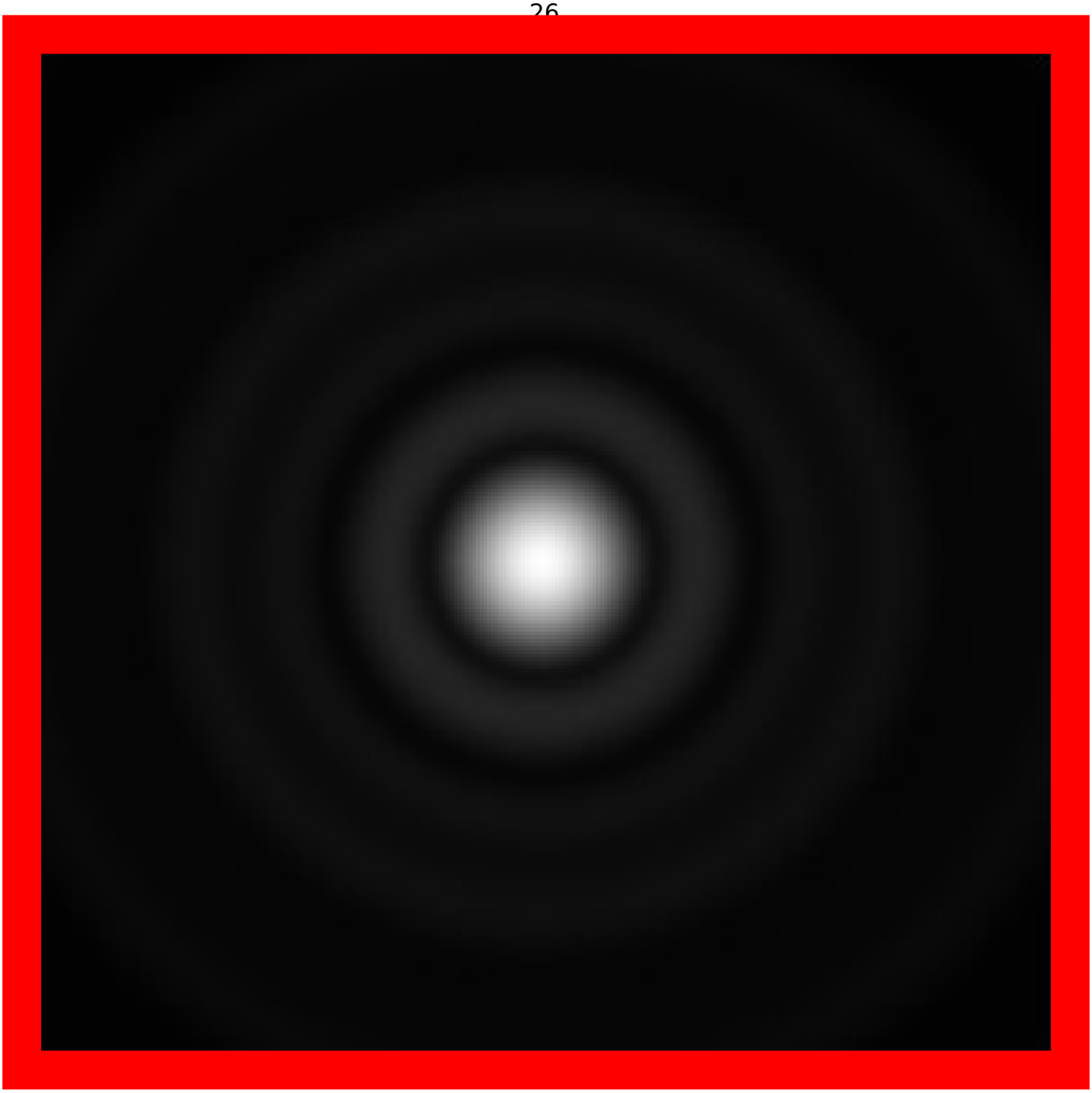
Рисунок 2.5 Распределение интенсивности на оптической оси для обычной зонной пластинки (синий цвет) и фрактальной (красный цвет).

Известно [12], что бинарные зонные пластинки формируют кроме основного фокуса еще набор локальных фокусов. График на рисунке 2.5 наглядно показывает, что при использовании ФЗП формируются тот же набор фокусов, что и обычной зонной пластинкой, но происходит расщепление каждого локального фокуса на несколько (в соответствии с по- рядком фрактала). Это, с одной стороны, приводит к уменьшению интенсивности в каждом из расщепленных фокусов, но с другой стороны, обеспечивает те свойства, что делает полезным ФЗП в различных приложениях. В частности, в обработке изображений белым светом. Известно, что ФЗП увеличивает производительность формирования изображения с увеличенной глубиной резкости и уменьшает хроматическую аберрацию при освещении белым

светом[7]. На рисунках 2. 6-2.8 представлены графики распределение интенсивности вдоль оси z и изображения интенсивности для зонной пластинки и фрактальной зонной пластинки 3 порядка, для значений z = 1581 мм, z = 2073 мм, z = 3000 мм.



А)



Б)

Рисунок 2.6 А) Распределение интенсивности на оптической оси для зонной пластинки для значения z = 2095 мм, Б) интенсивность зонной пластинки

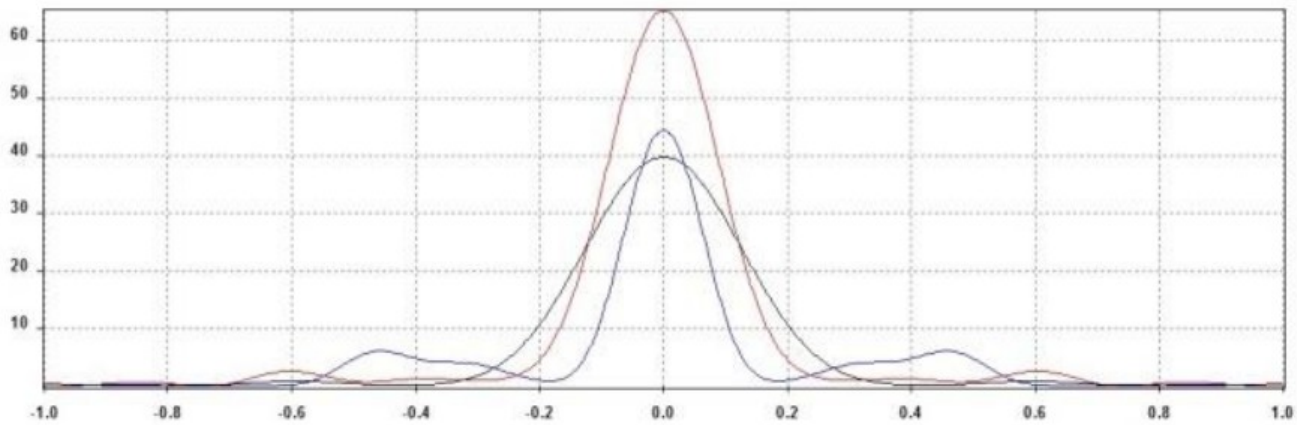
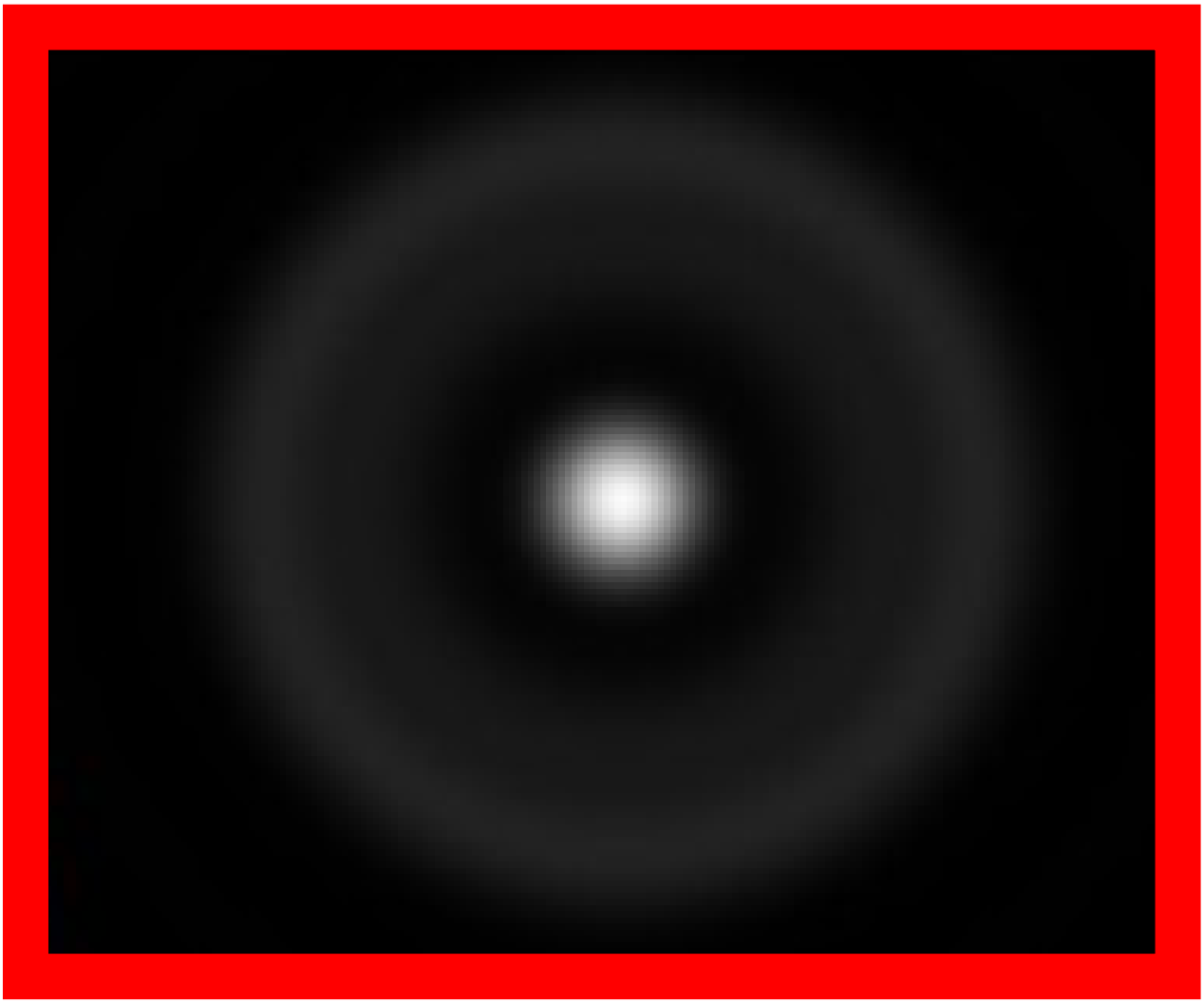
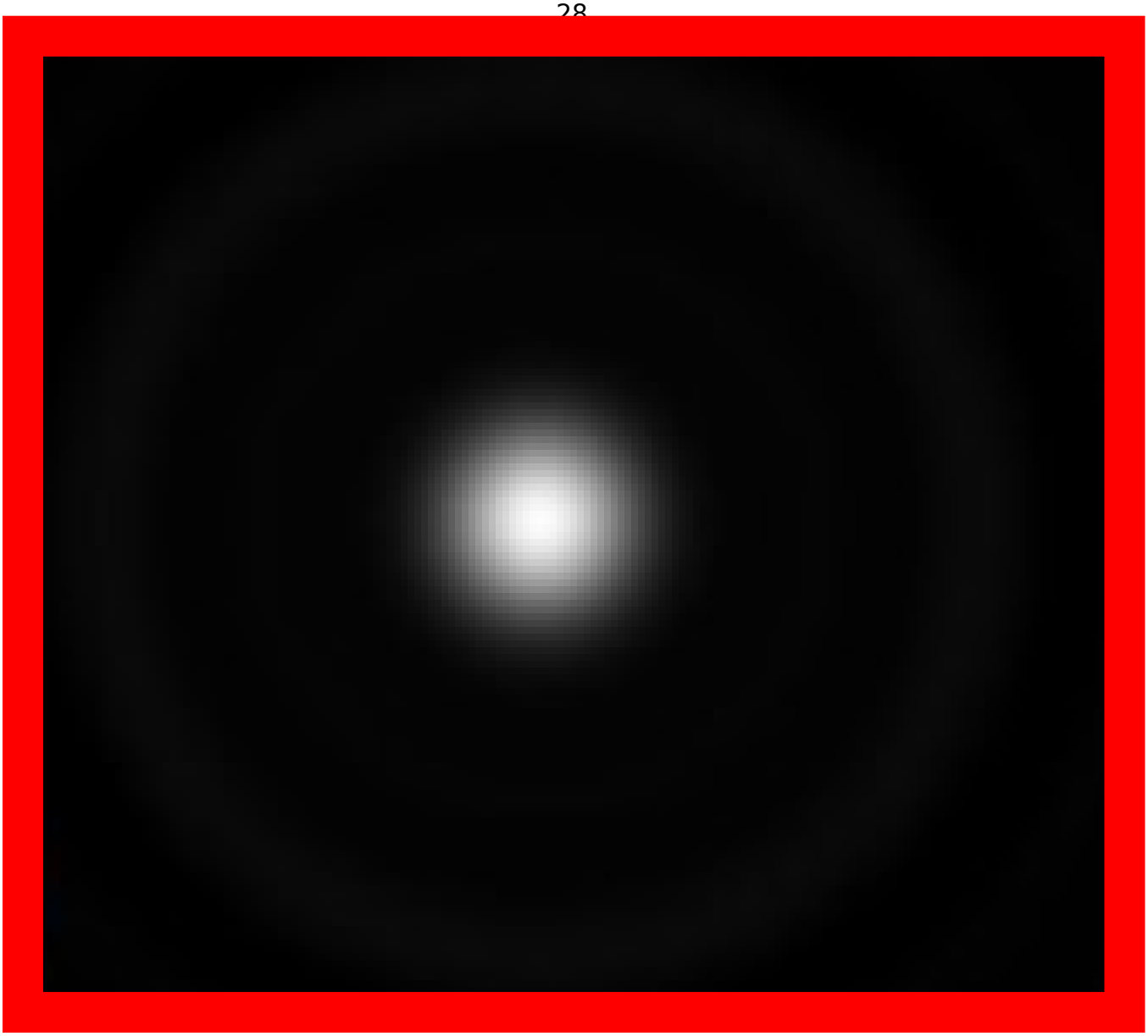


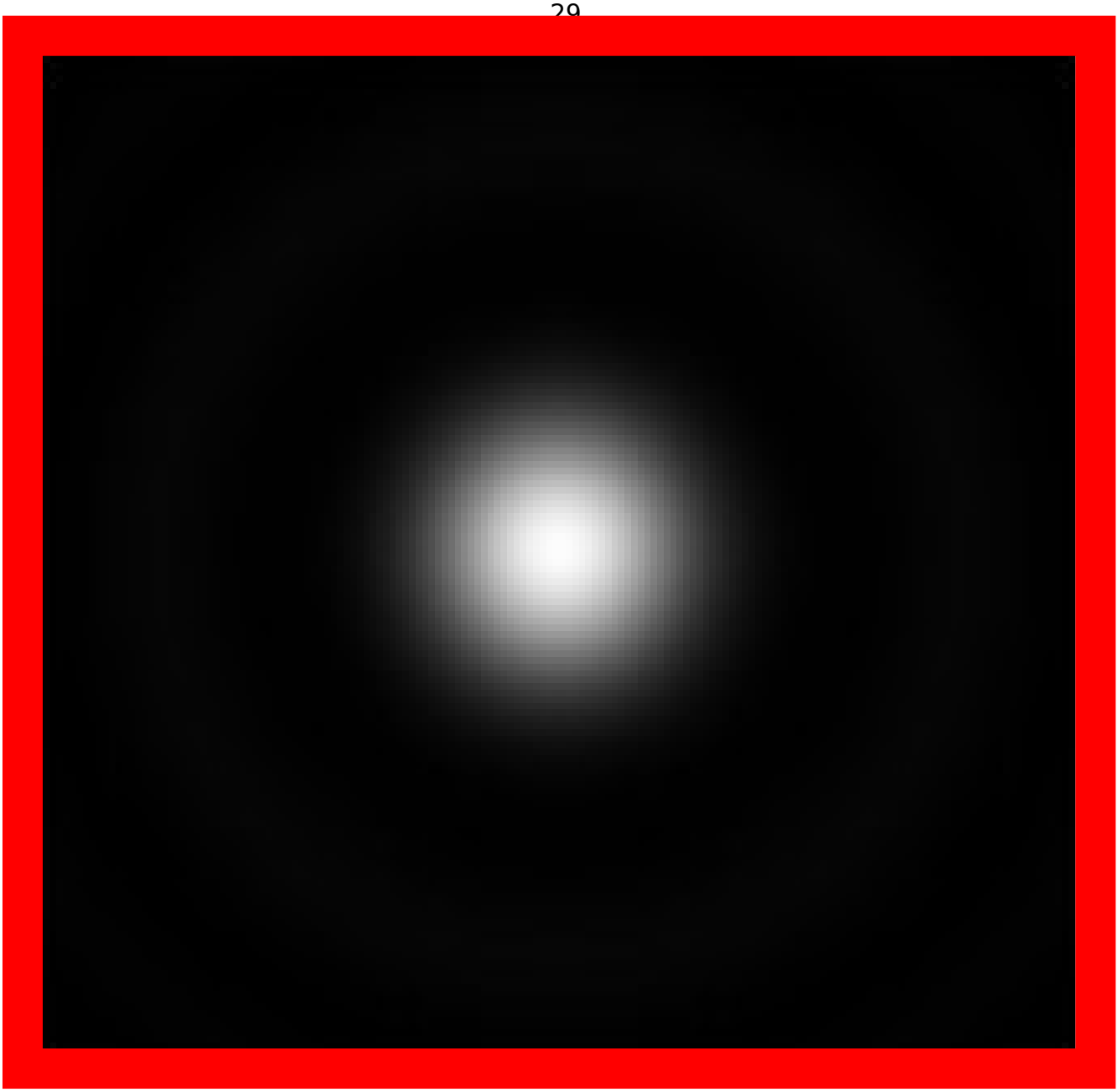
Рисунок 2.7 Распределение интенсивности на оптической оси для ФЗП 3 порядка для значения z = 1581 мм (синяя линия), z = 2073 мм(красная линия), z = 3000 мм (черная линия).



А)



Б)



В)

Рисунок 2.8 интенсивность зонной пластинки для ФЗП 3 порядка для значения А) z = 1581 мм, Б) z = 2073 мм, В) z = 3000 мм

В таблице 1 приведены размеры световых пятен в фокальных плоскостях для зонной пластинки и ФЗП третьего порядка.

1 фокус		**FWHM (z = 391 мм) = 0,0332**
		FWHM (z = 416 мм) = 0,0382
	FWHM (z = 418 мм) = 0,0377	FWHM (z = 443 мм) = 0,0409
2 фокус		FWHM (z = 629 мм) = 0,0559
	FWHM (z = 697 мм) = 0,0634	FWHM (z = 693 мм) = 0,06637
		FWHM (z = 770 мм) = 0,0747
3 фокус		FWHM (z = 1581 мм) = 0,1472
	FWHM (z = 2095 мм) = 0,1918	FWHM (z = 2073 мм) = 0,2065
		FWHM (z = 3000 мм) = 0,2938

Таблица 2.1 Значение характеристики FWHM для зонной пластинки и ФЗП 3 порядка

Из таблицы 2.1 видно, что у зонной пластинки вместо одного фокуса с радиусом фокального пятна равным 0,1918 мм при z = 2095 мм, у ФЗП 3 порядка формируется 3 фокуса, из которых один фокус равен при z = 1581 мм, другой больше при z = 2073 мм, третий меньше при z = 3000 мм. На рисунке 2.8 представлены графики распределение интенсивности вдоль оси z и изображения фазы фрактальной зонной пластинки 3 порядка, для значений z = 1581 мм, z = 2073 мм, z = 3000 мм.

Заключение

Выполнен расчет дифракции лазерного излучения на фазовой бинарной зонной пластинке и фрактальной линзе в параксиальной области с помощью преобразования Френеля. Получено, что бинарные зонные пластинки формируют кроме основного фокуса еще набор локальных фокусов. В ФЗП формируются тот же набор фокусов, что и обычной зонной пластинкой, но происходит расщепление каждого локального фокуса на несколько. Эти расщепления приводят к потере энергии, но полученные свойства полезны при обработке изображений белым светом с помощью ФЗП. В частности, ФЗП успешно используются в получении изображения при террагерцевая томография, микроскопия мягкого рентгеновского излучения.

Список использованных источников

Книги

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: «Институт компьютерных исследований», 2005. С. 100-130
2. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Ижевск: «РХД», 2013 С. 45-60
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — Ижевск : ИКИ, 2014. С. 656
4. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. — Ижевск: «РХД», 2013. С. 128
5. Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. — М. : URSS, 2016. С. 190-230
6. Boeing, G. (2016). "Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction". Systems. 4 (4): 37. doi:10.3390/systems4040037. Retrieved 2016-12-02. C. 27-33
7. J.R. Mureika, C.C. Dyer, G.C. Cupchik, “Multifractal Structure in Nonrepresentational Art”, Physical Review E, vol. 72, 046101-1-15 (2015). C. 56-70
8. Miroslav M. Novak, ур. (2014). Thinking in Patterns: Fractals and Related Phenomena in Nature. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd C. 178-185
9. Gaston Julia (1918) "Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles," Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 8, C. 47—245.
10. М.В. Кулинич, С.А.Хоменко, П.Г. Тухарь. Фракталы в оптике. Наука,2016 , Т.7 С.178
11. Лоскутов А. Ю. Очарование хаоса (рус.) // УФН. — 2010. — Т. 180. С. 1305—1309
12. Гулд Х. Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Том 1. 1990г. С. 230-290
13. Гулд Х. Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Том 2. 1990г. С. 72
14. M.V. Berry, “Diffractals,” J. Phys. A: Math. Gen., vol. 12, 1979. C 100-113
15. G.P. Karman, G.S. McDonald, G.H.C. New, and J.P. Woerdman, “Fractal modes in unstable resonators,” Nature, vol. 402. 2015. C. 231-234
16. Мандельброт Б. Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. - М., НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. С. 392
17. Geoff Boeing. Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems:Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction, University of California, Berkeley. 2017.C. 231

Статьи

1. J. Alvarez-Ramirez, J. C. Echeverria, E. Rodriguez “Performance of a High-Dimensional R/S Analyis Method for Hurst Exponent Estimation” Physica A, vol. 387, 6452-6462 (2017). С. 15-22
2. Hu, Shougeng; Cheng, Qiuming; Wang, Le; Xie, Shuyun (2017). "Multifractal characterization of urban residential land price in space and time". Applied Geography. С. 9-14
3. Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — Wiley, 2003. С. 98-120
4. D. Queiros-Conde, J. Chaline et J. Dubois, La Nature Trans-échelles, 2015, Ellipses. С. 67-130
5. André Dauphiné, Géographie fractale, Hermès-Lavoisier, 2011 С. 231
6. Фракталы в физике. Труды 6-го международного симпозиума по фракталам в физике, 1985. — М.: «Мир», 1988. С. 13-15
7. Kenneth Falconer □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□2017□ С. 3-7
8. Stewart, Ian. De aquí al infinito. Crítica, Grijalbo Mondadori, S.A., 2016 С. 8
9. Edgar, Gerald (2008). Measure, Topology, and Fractal Geometry. New York: Springer Science+Business Media. С. 9-12
10. А.А. Зинчик, Я.Б. Музыченко, А.В. Смирнов, С.К. Стафеев. Расчет фрактальных размерностей регулярных фракталов. Санкт-Петербург. 2016г. С. 5-6
11. A. Shin, D. Zolotukhin. Dynamic chaos and the fractal essence of the world. Opt. Lett. 2016g. С. 3-7
12. Tsujimi Y, Courtens E, Pelous J, Vacher R Phys. Rev. Lett. 60 2757. 2011. С. 12-13
13. Abdullaev S S Chaos: An interdisciplinary journal of nonlinearscience
14. 4 (1) 63. 1994. С. 1-2
15. Каск Н.Е., Мичурин С.В., Федоров Г.М. Фрактальные структуры в лазерном факеле. Квантовая электроника, 33 (1), 2017. С. 11-13
16. P. M. Hui, D. Stroud. Phys. Rev. B, 33, 2163.1986. С. 3-5
17. J. Yang, and Yu Tan, “Fractal structure in the collision of vector solitons,” Phys. Rev. Lett., vol. 85, pp. 3624-3627, 2014. С. 13-14
18. M.A. Yates and G.H.C. New, “Fractal dimension of unstable resonator modes,” Opt. Commun., vol. 208 . 2008. С. 22-25
19. Hong, Z.; Dong, J. Chaos Theory and Its Application in Modern Cryptography. In Proceedings of the

Диссертации

1. S. T. Huntington. A fractal-based fibre for ultra-high throughput optical probes. NewYork, Optical Society of America. 2011. С. 34-37

2. Я.Н. Музыченко. Имитационное моделирование дифракции света на мультифрактальных объектах. Санкт-Петербург, ИТМО.2010. С. 57-59
3. Мичурин С.В. Исследование фракталов и перколяции в лазерной плазме при действии лазерного излучения умеренной интенсивности на вещество. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова.2007. С. 64-67
4. M. A. Costa. Roughness Perception of Haptically Displayed Fractal Surfaces. Cambridge, MIT.2016. С. 23-27
5. □ Kluan□□□□□□□□ difraktsiya.Pekin□□□ universitet.2013. С. 45-49

Приложения