

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и
компьютерного моделирования
наименование кафедры

Математическое моделирование изгиба балки

наименование темы курсовой работы полужирным шрифтом

КУРСОВАЯ РАБОТА

студента (ки) 3 курса 313 группы

направления (специальности) 01.03.02 Прикладная математика
и информатика

код и наименование направления (специальности)

Механико-математический факультет

наименование факультета, института, колледжа

Пронин Андрей Александрович

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доц., к.т.н.

должность, уч. степень, уч. звание

И. А. Панкратов

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

зав.каф., д.ф.-м.н.

должность, уч. степень, уч. звание

Ю. А. Блинков

инициалы, фамилия

Саратов 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Постановка задачи	4
2 Методы взвешенных невязок	5
2.1 Метод поточечной коллокации	5
2.2 Метод коллокации по подобластям	7
2.3 Метод Галеркина	8
2.4 Метод Релея-Ритца	9
3 Моделирование изгиба балки	11
3.1 Аналитическое решение	11
3.2 Метод поточечной коллокации	12
3.3 Метод коллокации по подобластям	13
3.4 Метод Галеркина	15
4 Выводы	19
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	20
А Исходный код реализации метода взвешенных невязок	21
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	23

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование — это исследование какого либо объекта или системы объектов путем построения и изучения их моделей. Существует множество методов для решения задач математического моделирования.

В данной работе изучается задача отклонения балки единичной длины с единичной жесткостью на изгиб [1]. Имеется дифференциальное уравнение 4-го порядка с краевыми условиями. Задача будет решаться методами взвешенных невязок. После получения решения сравним результаты и найдем наилучший метод.

1 Постановка задачи

Балка единичной длины и единичной жесткости закреплена на концах (см. рис. 1.1). При воздействии внешней силы она начинает изгибаться. Необходимо рассчитать изгиб этой балки.

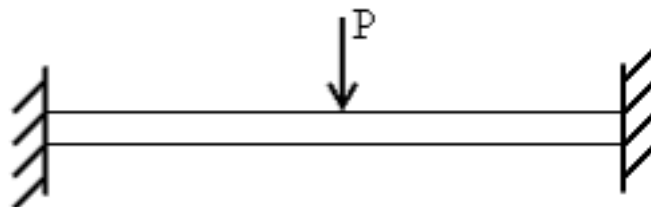


Рисунок 1.1 — Закрепленная балка под нагрузкой

Известно, что смещение балки единичной длины и единичной жесткости закрепленной на концах описывается уравнением:

$$\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} = \sin(\pi x) \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0, \quad x = 0, 1. \quad (1.2)$$

Мы получили краевую задачу для системы дифференциального уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2).

Для решения подобных краевых задач традиционно применяется метод конечных разностей [2, 3]. В настоящей работе будут использованы различные методы взвешенных невязок [4].

2 Методы взвешенных невязок

2.1 Метод поточечной коллокации

Изложим суть метода поточечной коллокации [5]. Пусть необходимо определить функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую линейному дифференциальному уравнению

$$L(y(x)) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

и линейными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_a(y) &\equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \Gamma_b(y) &\equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \right\}$$

Выберем некоторую совокупность линейно независимых функций

$$U_0(x), U_1(x), \dots, U_n(x) \quad (3.3)$$

которую назовем системой базисных функций. Пусть функция $U_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям

$$\Gamma_a(U_0) = A, \Gamma_b(U_0) = B \quad (3.4)$$

а остальные функции удовлетворяют соответствующим однородным краевым условиям:

$$\Gamma_a(U_i) = 0, \Gamma_b(U_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

Если краевые условия однородны ($A=B=0$), то можно положить $U_0(x) = 0$ и рассматривать лишь систему функций $U_i(x), i = 1, 2, \dots, n$. Будем искать приближенное решение краевой задачи (3.1) в виде линейной комбинации базисных функций

$$\tilde{y}(x) = U_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i U_i(x) \quad (3.6)$$

Тогда функция y удовлетворяет краевым условиям. В самом деле, в силу линейности краевых условий имеем

$$\Gamma_a(y) = \Gamma_a(U_0) \sum_{i=1}^n c_i \Gamma_a(U_i) = A \sum_{i=1}^n c_i 0 = A,$$

и аналогично $\Gamma_b(y) = B$.

Составим функцию $R = L(y) - f(x)$. Подставляя сюда вместо y выражение (3.6), будем иметь

$$R(x, c_1, \dots, c_n) \equiv L(y) - f(x) = L(U_0) - f(x) + \sum_{i=1}^n c_i L(U_i) \quad (3.7)$$

Если при некотором выборе коэффициентов c_i выполнено равенство

$$R(x, c_1, \dots, c_n) = 0, a \leq x \leq b$$

то функция y является точным решением краевой задачи (3.1). Однако подобрать так удачно функции U_i и коэффициенты c_i в общем случае не удастся. Поэтому ограничиваются тем, что требуют, чтобы функция $R(x, c_1, \dots, c_n)$ обращалась в нуль в заданной системе точек x_1, x_2, \dots, x_n из интервала $[a, b]$, которые называются точками коллокации.

Точки коллокаций могут быть расположены произвольным образом в области, например, равномерно. Существенным условием корректной формулировки численного алгоритма является только необходимость совпадения числа точек с количеством неопределенных коэффициентов в выражении приближенного решения.

Сама функция R называется невязкой уравнения (3.1). Очевидно, что в точках коллокации дифференциальное уравнение (3.1) будет удовлетворено точно, и невязка в этих точках равна нулю.

Итак, метод коллокации приводит к системе линейных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} R(x_1, c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ R(x_n, c_1, \dots, c_n) = 0 \end{array} \right\} (3.8)$$

Эту систему можно записать в матричной форме , где

$$K_{mn} = U_n |_{x=x_n}, M_m = f |_{x=x_n}$$

Из системы (3.8) в случае ее совместности можно определить коэффициенты c_1, \dots, c_n , после чего приближенное решение краевой задачи дается формулой (3.6).

2.2 Метод коллокации по подобластям

Пусть необходимо определить функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую линейному дифференциальному уравнению (3.1) с граничными условиями (3.2) В этом методе принимается условие, согласно которому интеграл от невязки обращается в ноль для ряда подобластей $x_{n-1} < x < x_n$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} R dx = 0$$

В матричной форме это записывается так:

$$K_{mn} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} L(U_n) dx, M_m = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f dx$$

2.3 Метод Галеркина

Согласно методу Галеркина для минимизации ошибки численного решения используется условие обращения в нуль интеграла от функции невязки с весами, равными базисным функциям приближенного решения.

Пусть дано дифференциальное уравнение с линейными краевыми условиями

$$L(y(x)) = f(x) \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_a(y) &\equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \Gamma_b(y) &\equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Будем искать приближенное решение этой краевой задачи в виде суммы

$$y(x) \approx \tilde{y}(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \quad (3.13)$$

где $\varphi_0(x)$ – некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям (3.11), а $\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots (1 \leq k < \infty)$ – какая-то система линейно независимых функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям

$$\Gamma_a(y)(\varphi_k) = 0, \Gamma_b(y)(\varphi_k) = 0 \quad (3.12)$$

и, кроме того функции $\varphi_k(x)$ при $(1 \leq k < \infty)$ образуют в классе функций $C^2[a, b]$, удовлетворяющих условиям (3.11), полную систему. Заметим, что свойство полноты понимается следующим образом. Обозначим через G класс функций $y(x)$, принадлежащих $C^2[a, b]$ (т. е. дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$) и удовлетворяющих граничным условиям (3.11). Говорят, что система функций $\varphi_k(x)$ полна в классе G , если для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $y(x) \in G$ можно указать такое n и такие параметры a_1, a_2, \dots, a_n , что имеет место неравенство

$$\left| y^{(i)}(x) - g_n^{(i)}(x) \right| < \varepsilon, i = 0, 1, 2, a \leq x \leq b,$$

где $g_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$

Это означает, что для любой допустимой функции $y(x) \in G$ найдется такая функция $g_n(x)$, которая на $[a, b]$ будет сколь угодно точно приближать функцию $y(x)$ вместе с ее производными $y'(x)$ и $y''(x)$.

Метод Галеркина состоит в том, что решение задачи (3.9), (3.10) ищется в виде (3.11), причем требуют ортогональности $L(y(x)) - f(x)$ к функциям полной системы $\varphi_k(x)$ для $k = 1, 2, \dots, n$, т. е.

$$\int_a^b [L(\tilde{y}(x)) - f(x)] \varphi_k(x) dx = 0, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.12)$$

где

$$\tilde{y}(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

Это дает алгебраическую систему уравнений для определения коэффициентов a_k . Найдя из нее коэффициенты, получим приближенное решение.

В матричной форме это записывается так:

$$K_{mk} = \int_V \varphi_m L(\varphi_k) dV, \quad M_m = \int_V \varphi_m f dV$$

Если оператор $L(U)$ нелинейный, то система (3.12) тоже будет нелинейной и решение ее весьма затруднительно. Если же оператор $L(U)$ линейный, то система (3.12) также будет линейной и можно решать задачу с большим числом коэффициентов.

2.4 Метод Релея-Ритца

Пусть дано дифференциальное уравнение с линейными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} L(y(x)) &= f(x) \\ \Gamma_a(y) &\equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \Gamma_b(y) &\equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \right\}$$

Будем искать приближенное решение этой краевой задачи в виде суммы

$$y(x) \approx \tilde{y}(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \quad (3.13)$$

Краевые условия выполняются для всех значений постоянных a_1, \dots, a_n . Суть метода Релея-Ритца состоит в получении для

$$\Pi(\tilde{y}(x)) = \int_V [(\tilde{y}(x))\{1/2L(\tilde{y}(x)) + f(x)\}]dV = 0 \quad (3.14)$$

Стационарного значения относительно a_1, \dots, a_n . Используя представления (3.13) функционал можно записать в виде

$$\Pi(y) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n (a_m a_k / 2) \int_V \varphi_m L(\varphi_k) dV + \sum_{m=1}^n a_m \int_V \varphi_m f dV \quad (3.15)$$

это выражение принимает стационарное значение, если

$$\delta\Pi/\delta a_1 = \delta\Pi/\delta a_2 = \dots = \delta\Pi/\delta a_n = 0$$

Вычислив производные от функционала (3.15), приходим к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_k \int_V \varphi_m L(\varphi_k) dV = \int_V \varphi_m f dV$$

В матричной форме это записывается так:

$$K_{mk} = \int_V \varphi_m L(\varphi_k) dV, M_m = \int_V \varphi_m f dV \quad (3.16)$$

Стоит заметить, что полученные уравнения тождественно равны уравнениям уравнениям, полученным в методе Галеркина. Аппроксимации, получаемые методами Релея-Ритца и методом Галеркина будут тождественны, если оператор L симметричен.

3 Моделирование изгиба балки

3.1 Аналитическое решение

Найдем аналитическое решение уравнения

$$\frac{d^4\varphi(x)}{dx^4} = \sin(\pi x) \quad (4.1)$$

с граничными условиями $\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0, x = 0, 1$.

Проинтегрируем правую и левую часть 4 раза [6, 7], получим общее решение

$$\varphi(x) = \int \int \int \int \sin(\pi x) dx = C_4 x^3 + C_3 x^2 + C_2 x + C_1 + \frac{\sin(\pi x)}{\pi^4}$$

Подставим полученное общее решение в граничные условия. Получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_2 &= -\frac{1}{\pi^3} \\ 3C_4 + 2C_3 + C_2 &= \frac{1}{\pi^3} \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему получим

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_4 &= 0 \\ C_2 &= -\frac{1}{\pi^3} \\ C_3 &= \frac{1}{\pi^3} \end{aligned} \right\}$$

В итоге получаем точное решение уравнения (4.1)

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{\pi^3} - \frac{x}{\pi^3} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi^4} \quad (4.2)$$

3.2 Метод поточечной коллокации

Имеем уравнение с граничными условиями (4.1). Подберем базисные функции так, что бы они удовлетворяли однородным краевым условиям. Пусть это будут функции вида $N_k = x^{m+1} * (1 - x)^2$ (4.3) Эти функции действительно удовлетворяют граничным условиям.

$$N_k(1) = N_k(0) = \frac{dN_k(1)}{dx} = \frac{dN_k(0)}{dx} = 0$$

Так как наши граничные условия однородны, получим следующее приближение

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^n a_k N_k$$

Для более точно приближения возьмем $n = 3$ Тогда получим приближение $\tilde{y}(x) = a_1 x^2(1 - x)^2 + a_2 x^3(1 - x)^2 + a_3 x^4(1 - x)^2$

$$\text{Невязка } R \text{ будет равна } R = L(\tilde{y}(x)) - f(x) = \frac{d^4 \tilde{y}(x)}{dx^4} - \sin(\pi x) =$$

$$\frac{d^4(a_1 x^2(1 - x)^2 + a_2 x^3(1 - x)^2 + a_3 x^4(1 - x)^2)}{dx^4} - \sin(\pi x)$$

Посчитаем невязку

$$L(\tilde{y}(x)) = 24a_1 + (120x - 48)a_2 + (360x^2 - 240x + 24)a_3$$

$$R = L(\tilde{y}(x)) - f(x) = 24a_1 + (120x - 48)a_2 + (360x^2 - 240x + 24)a_3 - \sin(\pi x) \quad (4.4)$$

В качестве точек коллокации возьмем точки $x = \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}$.

По матричному представлению системы (3.8) имеем $K_{mk} = N_k |_{x=x_m}$ и $M_m = f |_{x=x_m}$ где $m = 1, 2, 3$

$$K = \begin{vmatrix} 24 & -18 & -13.5 \\ 24 & 12 & -6 \\ 24 & 42 & 46.5 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} 0.7071068 \\ 1 \\ 0.7071068 \end{vmatrix}$$

Получим систему

$$\left. \begin{aligned} 24a_1 - 18a_2 - 13.5a_3 &= 0.7071068 \\ 24a_1 + 12a_2 - 6a_3 &= 1 \\ 24a_1 + 42a_2 + 46.5a_3 &= 0.7071068 \end{aligned} \right\}$$

Решим ее с помощью метода Гаусса [8]. Значение коэффициентов

$$a_1 = 0.0319036, a_2 = 0.0130175, a_3 = -0.0130175$$

Приближенное решение

$$\tilde{y}(x) = (0.0319036(x^2(1-x)^2) + 0.0130175(x^3(1-x)^2) - 0.0130175(x^4(1-x)^2))$$

Сравним полученное решение с точным и получим графики.

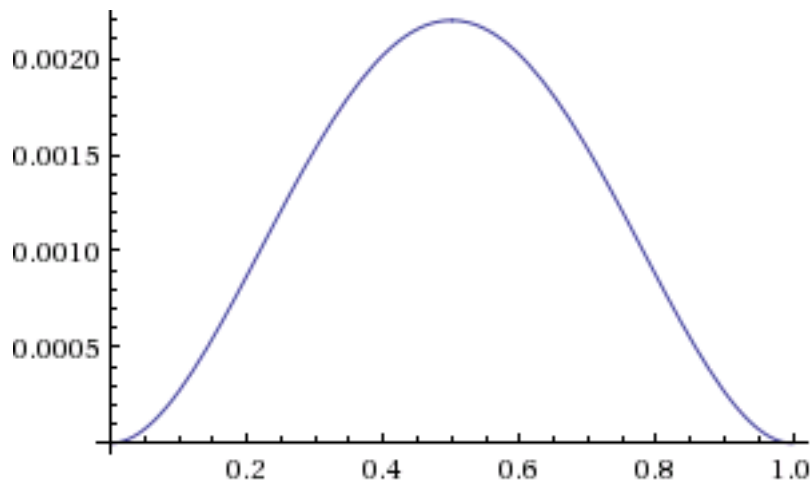


Рисунок 3.1 — Форма балки, метод поточечной коллокации

3.3 Метод коллокации по подобластям

Решим наше уравнение (4.1) с граничными условиями методом коллокации по подобластям. В качестве базисных возьмем те же функции $N_k = x^{m+1} * (1-x)^2$.

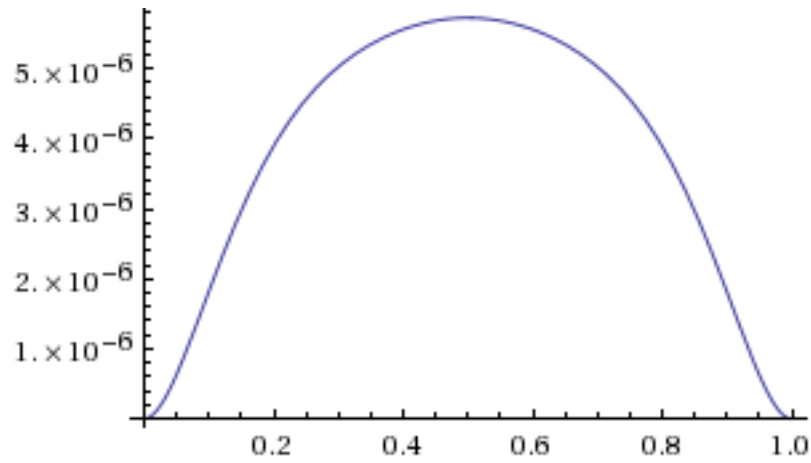


Рисунок 3.2 — Погрешность, метод поточечной коллокации

Получим приближение $\tilde{y}(x) = a_1x^2(1-x)^2 + a_2x^3(1-x)^2 + a_3x^4(1-x)^2$
 Невязка метода коллокации по подобластям ничем не отличается от невязки предыдущего метода (4.4)

В качестве подобластей возьмем $x \in \{0; \frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}, \{\frac{2}{3}; 1\}$

Тогда интеграл от невязки в этих областях обращается в 0

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}} R dx &= 0 \\ \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} R dx &= 0 \\ \int_{\frac{2}{3}}^1 R dx &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$K = \begin{vmatrix} 8 & -\frac{82}{9} & \frac{8}{9} \\ 8 & 4 & -\frac{8}{9} \\ 8 & -\frac{52}{3} & -\frac{232}{9} \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} 0.012139 \\ 0.0323817 \\ 0.012139 \end{vmatrix}$$

Так как $Ka = M$ получим систему

$$\left. \begin{aligned} 8a_1 - \frac{82}{9}a_2 - \frac{8}{9}a_3 &= 0.012139 \\ 8a_1 + 4a_2 - \frac{8}{9}a_3 &= 0.0323817 \\ 8a_1 - \frac{52}{3}a_2 - \frac{232}{9}a_3 &= 0.012139 \end{aligned} \right\}$$

Значение коэффициентов

$$a_1 = 0.03238173, a_2 = 0.01213893, a_3 = -0.01203777$$

Приближенное решение

$$\tilde{y}(x) = (0.03238173(x^2(1-x)^2) + 0.01213893(x^3(1-x)^2) - 0.01203777(x^4(1-x)^2))$$

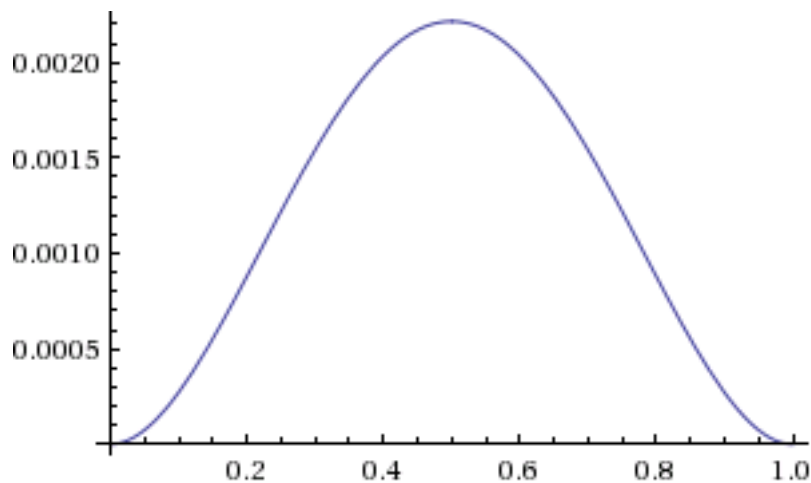


Рисунок 3.3 — Форма балки, метод коллокации по подобластям

3.4 Метод Галеркина

Решим наше уравнение (4.1) с граничными условиями методом коллокации Галеркина. В качестве базисных возьмем функции $N_k = x^{m+1} * (1-x)^2$.

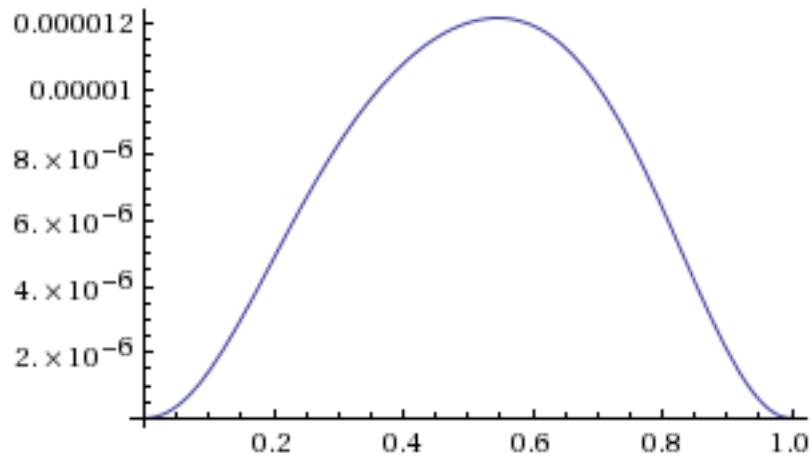


Рисунок 3.4 — Погрешность, метод коллокации по подобластям

Получим приближение $\tilde{y}(x) = a_1x^2(1-x)^2 + a_2x^3(1-x)^2 + a_3x^4(1-x)^2$

Невязка метода Галеркина ничем не отличается от невязки предыдущего метода (4.4)

Задача сводится к нахождению коэффициентов из системы (3.12)

$$\int_a^b [L(\tilde{y}(x)) - f(x)] N_m(x) dx = 0, \quad 1 \leq m \leq n$$

Где Для $n = 3$ получим систему

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 [L(\tilde{y}(x)) - f(x)] N_1(x) dx &= 0 \\ \int_0^1 [L(\tilde{y}(x)) - f(x)] N_2(x) dx &= 0 \\ \int_0^1 [L(\tilde{y}(x)) - f(x)] N_3(x) dx &= 0 \end{aligned} \right\} (4.6)$$

Подставим(4.3) и (4.4) в (4.6)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 (24a_1 + (120x - 48)a_2 + (360x^2 - 240x + 24)a_3 - \sin(\pi x))x^2(1-x)^2 dx &= 0 \\ \int_0^1 (24a_1 + (120x - 48)a_2 + (360x^2 - 240x + 24)a_3 - \sin(\pi x))x^3(1-x)^2 dx &= 0 \\ \int_0^1 (24a_1 + (120x - 48)a_2 + (360x^2 - 240x + 24)a_3 - \sin(\pi x))x^4(1-x)^2 dx &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему получим

$$K = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{8}{35} \\ \frac{2}{5} & \frac{12}{35} & \frac{9}{35} \\ \frac{8}{35} & \frac{9}{35} & \frac{8}{35} \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} 0.027847 \\ 0.013923 \\ 0.0077063 \end{vmatrix}$$

Имеем $Ka = M$, составим систему линейных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{8}{35}a_3 = 0.027847 \\ \frac{2}{5}a_1 + \frac{12}{35}a_2 + \frac{9}{35}a_3 = 0.013923 \\ \frac{8}{35}a_1 + \frac{9}{35}a_2 + \frac{8}{35}a_3 = 0.0077063 \end{array} \right\}$$

Значение коэффициентов

$$a_1 = 0.0321594, a_2 = 0.0123053, a_3 = -0.01203777$$

Приближенное решение

$$\tilde{y}(x) = (0.0321594(x^2(1-x)^2) + 0.0123053(x^3(1-x)^2) - 0.01203777(x^4(1-x)^2))$$

Можно заметить, что для данного уравнения с указанными выше граничными условиями результаты вычисления методом Релея-Ритца тождественны методу Галеркина. Получается точно такая же СЛАУ, как и в методе Галеркина.

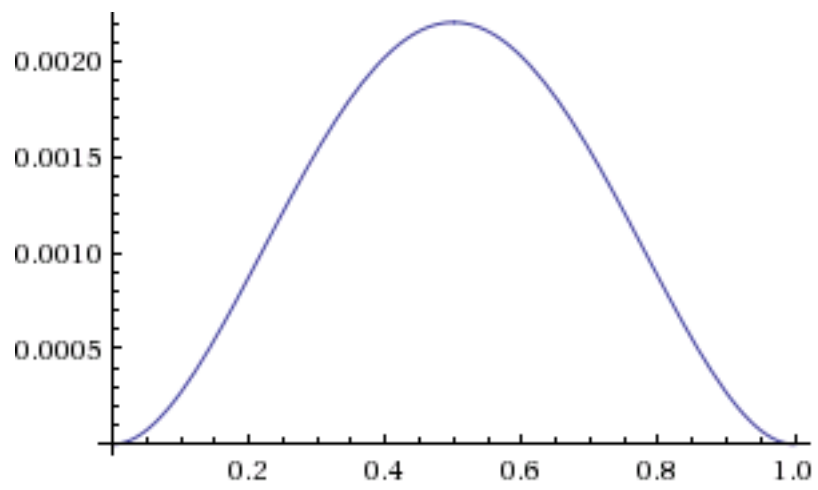


Рисунок 3.5 — Форма балки, метод Галеркина

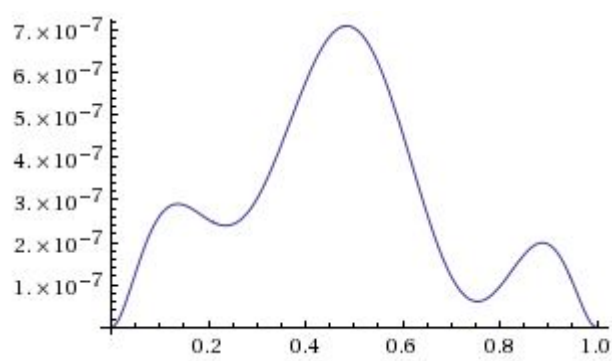


Рисунок 3.6 — Погрешность, метод Галеркина

4 Выводы

Рассмотрев результаты методов можно заметить, что для данной задачи выгоднее использовать метод Галеркина, но и другие методы дают сравнительно небольшую погрешность. Наибольшая погрешность у метода коллокации по подобластям. Погрешность методов прежде всего зависит от выбора базисных функций. Для сравнения были использованы другие базисные функции удовлетворяющие граничным условия ($\sin^2(m\pi x)$), и погрешность у них значительно выше.

Кроме того, само число базисных функций тоже играет роль само число базисных функций. Погрешность уменьшается при увеличении числа базисных функций.

Наиболее простым является метод поточечной коллокации, по причине отсутствия необходимости считать интегралы, что может быть довольно трудоемко.

В дальнейшем предполагается применить для решения краевых задач метод конечных элементов [9, 10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о смещении балки жестко закрепленной с концов. С помощью методов минимизации невязки были получены результаты, которые сравнивались с точным решением. Найден наилучший метод для данной задачи (метод Галеркина).

В целом, методы минимизации невязки сводят решение краевой задачи к решению СЛАУ, что заметно проще. При правильном выборе типа базисных функций и их количества, методы минимизации невязки дают результат с минимальной погрешностью.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Исходный код реализации метода взвешенных невязок

```
1
2 #include <iostream>
3 #include <cmath>
4
5 using namespace std;
6
7 bool converge(double *xk, double *xkp,int K,double eps)
8 {
9     double norm = 0;
10    for (int i = 0; i < K; i++)
11    {
12        norm += (xk[i] - xkp[i])*(xk[i] - xkp[i]);
13    }
14    if(sqrt(norm) >= eps)
15        return false;
16    return true;
17 }
18
19 int main()
20 {
21     setlocale(LC_ALL, "");
22     int N, i, j;
23     int method;
24     cout << "Введите размер квадратной матрицы: ";
25     cin >> N;
26     double eps, A[N][N], B[N],p[N],x[N];
27     cout << "Введите точность вычислений: ";
28     cin >> eps;
29     cout << "Заполните матрицу A: " << endl << endl;
30     for (i = 0; i < N; i++) { x[i]=0;
31         for (j = 0; j < N; j++) {
32             cout << "A[" << i << "][" << j << "] = ";
33             cin >> A[i][j];
34         }
35     }
36     cout << "Ваша матрица A:" << endl;
37     for (i = 0; i < N; i++) {
38         for (j = 0; j < N; j++) {
39             cout << A[i][j] << " ";
40         }
41     }
42     cout << "Заполните столбец свободных членов: " << endl;
43     for (i = 0; i < N; i++) {
44         cout << "B[" << i+1 << "] = ";
45         cin >> B [i];
46     }
47 do
```

```

48 {   for (int i = 0; i < N; i++)
49     p[i] = x[i];
50
51   for (int i = 0; i < N; i++)
52   {
53     double var = 0;
54     for (int j = 0; j < i; j++)
55       var += (A[i][j] * x[j]);
56     for (int j = i + 1; j < N; j++)
57       var += (A[i][j] * p[j]);
58     x[i] = (B[i] - var) / A[i][i];
59   }
60 }
61 while (!converge(x, p, N, eps));
62
63 cout << "Решение СЛАУ: " << endl;
64 for (i = 0; i < N; i++) {
65     cout << "X[" << i+1 << "] = " << x[i]<<endl;
66 }
67 return 0;
68 }

```

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Зенкевич О. Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
2. Андерсон Д. Таннехилл Дж. Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. — М.: Мир, 1990. — Т. 1. — 384 с.
3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. — М.: Мир, 1991. — Т. 1. — 504 с.
4. И.А. Панкратов. Введение в методы взвешенных невязок. — URL: http://www.sgu.ru/sites/default/files/textdocsfiles/2013/12/10/fem_introduction.pdf (дата обращения: 25.03.2015).
5. Рейзлин В.И., Быков С.Ф. Математические методы проектирования. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. — 144 с.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
7. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
8. Бахвалов Н.С. Жидков Н.П. Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1975. — 632 с.
9. Коннор Дж. Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. — Л.: Судостроение, 1979. — 264 с.
10. Деклу Ж. Метод конечных элементов. — М. : Мир, 1985. — 354 с.