САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Дмитриев Дмитрий Игоревич

Моделирование и оценка параметров процесса Орнштейна-Уленбека со случайным коэффициентом вязкости

Дипломная работа

Зав. кафедрой:

д. ф.-м. н., профессор Никитин Я.Ю.

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент Русаков О.В.

Рецензент:

д. ф.-м. н., в. н. с. МИАН Гущин А.А.

Санкт-Петербург

2016

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY
Mathematics and Mechanics Faculty
Chair of Probability Theory and Mathematical Statistics

Dmitrii Dmitriev

Modelling and parameter estimation for Ornstein–Uhlenbeck process with a random coefficient of viscosity

Graduation Thesis

Head of the chair:
Professor Ya.Yu. Nikitin

Scientific supervisor:
Associate Professor O. V. Rusakov

Reviewer:
Steklov Mathematical Institute Leading Scientific Researcher A. A. Gushchin

Saint Petersburg
2016

Содержание

1 Введение.

Процесс Орнштейна-Уленбека (ОУ) впервые был представлен в статье Л.С. Орнштейна и Е.Г. Уленбека 1930 года [1] в качестве модели скоростей частиц в процессе соударения с окружающими их частицами. Процесс Орнштейна-Уленбека интересен тем, что является единственным (и нетривиальным) стационарным гауссовским марковским процессом, что было доказано в работе [2]. Также процесс ОУ обладает свойством возвращения к среднему. Все эти свойства способствовали распространению его использования в финансах и финаносовой инженерии. В классической работе Васичека 1977 года [3] представлена модель для оценки мгновенной процентной ставки. После 2000 года были описаны способы использования процесса ОУ в задачах ценообразования опционов, оптимизации портфеля и теории рисков.

В настоящее время процесс ОУ изучен достаточно глубоко и для ученых представляют интерес различные модификации и обобщения этого процесса. В частности в работе [8] доказан следующий факт следующий из ЦПТ для векторов: если рассмотреть независимые копии $\psi_1, \psi_2, \ldots$ псевдопуассоновского процесса (для последовательностей из независимо одинаково распределенных случайных величин) $\psi(s), s \geq 0$, построенного по последовательности (ξ) независимо одинаково распределенных случайных величин, $\mathbb{E}\xi_0 = 0, \mathbb{D}\xi_0 = 1$, то нормированные суммы вида

$$\Psi_N(s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \psi_i(s) \tag{1.1}$$

сходятся к стандартному процессу Орнштейна-Уленбека:

$$\Psi_N(s) \Rightarrow U(s), \quad N \to \infty, \tag{1.2}$$

где 1.2 понимается как функциональный предел в пространстве Скорохода $\mathfrak{D}_{[0,\Theta]}, s \in [0, \Theta], \Theta \leq \infty$, причем $cov(U(0), U(s)) = e^{-\lambda s}$.

В статье [11] использовалась модель взвешенной суммы независимых процессов ОУ для обобщения модели Васичека процентной ставки. Для оценки по реальным данным параметров взвешенной суммы процессов ОУ использовалось численное обратное преобразование Лапласа.

В данной дипломной работе рассматриваются некоторое другое обощение процесса

ОУ — процесс Орнштейна-Уленбека со случайным коэффицентом вязкости λ, описаны его свойства. Такой процесс в работе обозначен $Y(s)$.

Целью данной работы является описание алгоритмов моделирования процесса $Y(s)$ в среде R. Приводятся некоторые методы оценки параметров.

2 Определения и подготовительные результаты.

Определение 1. Стандартный процесс Орнштейна-Уленбека $U_\lambda(t), t \geq 0$ **с параметром вязкости** $\lambda > 0$ — стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариацией

$$cov(U_\lambda(t), U_\lambda(t+\tau)) = e^{-\lambda\tau}, \quad \tau \geq 0. \tag{2.1}$$

Ковариацию вида $e^{-\lambda\tau}$ можно естественным образом интерпретировать как преобразование Лапласа меры, вырожденной в точке $\lambda > 0$ (нормированной на единицу).

Далее мы исследуем обобщение процесса Орнштейна-Уленбека на случай стационарного гауссовского процесса с ковариацией, которая является преобразованием Лапласа нетривиального распределения (бинарного, в частности).

Нам понадобятся следующие определения и результаты

2.1 Преобразование Лапласа, теоремы Бернштейна, ЦПТ для векторов, тауберовы теоремы.

Следующие хорошо известные результаты, связанные с преобразованием Лапласа, заимствованы из [4] и преводятся без доказательств. Они составлют теоретическую основу для преобразований, которые приведены в главе 3 и далее.

Определение 2. Пусть F — вероятностное распределение, сосредоточенное на $(0, \infty)$. **Преобразованием Лапласа** φ распределения F называют функцию, определенную для $\beta \geq 0$ равенством

$$\varphi_F(\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-\beta x} F(dx). \tag{2.2}$$

Определение 3. Заданная на $[0, \infty)$ функция φ называется *вполне монотонной*, если она имеет производные $\varphi^{(n)}$ всех порядков и

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(\beta) \geq 0, \quad \beta > 0. \tag{2.3}$$

Следующая теорема и ее обратная принадлежат Бернштейну.

Теорема 2.1. *Функция φ_F на $[0, \infty)$ является преобразованием Лапласа распределения вероятностей F тогда и только тогда, когда она вполне монотонна и $varphi_F(0) = 1$.*

Теорема 2.2. *Функция φ_F на $[0, \infty)$ является вполне монотонной тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\varphi_F(\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-\beta x} F(dx), \quad \beta > 0, \tag{2.4}$$

где F — не обязательно конечная мера на $[0, \infty)$.

Сформулируем простую лемму, которая пригодится в дальнейшем.

Лемма 2.1.

$$f(t) = \alpha_1 e^{-\beta_1 t} + \ldots + \alpha_n e^{-\beta_n t} + \ldots \tag{2.5}$$

является вполне монотонной функцией для любых неотрицательных $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots > 0$, таких что $\alpha_j \geq 0,\ i \geq 1$ и $\beta_j > 0,\ j \geq 1$.

Доказательство.

$$(-1)^n f^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_j \beta_j^n e^{-\beta_j t} \geq 0, \quad t > 0. \tag{2.6}$$

□

Теорема 2.3. ***Центральная Предельная Теорема (ЦПТ) для векторов***

Пусть $(\xi) = \xi_1,\ \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbb{R}^k,\ k > 1$, каждый из которых имеет среднее $\mathbb{E}\xi_1 = a \in \mathbb{R}^k$ и невырожденную матрицу ковариаций Σ. Обозначим через $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ вектор частичных сумм.

Тогда при $n \to \infty$ имеет место слабая сходимость распределений векторов:

$$\eta_n = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}} \to \eta, \quad \eta \sim \mathcal{N}(0, \Sigma), \tag{2.7}$$

где η_n и η — вектора в $\mathbb{R}^k$; $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ — закон k-мерного нормального распределния с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ.

Следующие результаты, связывающие ассимптотическое поведение преобразования Лапласа меры в 0 и ∞, исторически называются **тауберовыми теоремами**.

Пусть $t\tau = 1$. Тогда $\tau \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 2.4. *Пусть V — мера на $[0, \infty)$, преобразование Лапласа γ которой определено на $\lambda > 0$. Тогда каждое из соотношений при $p \geq 0$*

$$\frac{\gamma(\tau\lambda)}{\gamma(\tau)} \to \frac{1}{\lambda^p},\ \tau \to 0, \tag{2.8}$$

и

$$\frac{V(tx)}{V(t)} \to x^p,\ t \to \infty, \tag{2.9}$$

влечет за собой другое, а также соотношение $\gamma(\tau) \sim U(t)\Gamma(p+1)$

Следствие 2.1. *Если при некотром $a > 1$ и $t \to \infty$ выполняется одно из*

$$\frac{\gamma(\tau a)}{\gamma(\tau)} \to 0, \qquad \frac{V(ta)}{V(t)} \to \infty, \tag{2.10}$$

то

$$\frac{V(t)}{\gamma(\tau)} \to 0. \tag{2.11}$$

Теорема и следствие остаются верны, если нуль и бесконечность меняются ролями, т.е. $t \to 0$ и $\tau \to \infty$.

2.2 Ковариации псевдопуассоновских процессов со случайной интенсивностью как преобразование Лапласа.

2.2.1 Взвешенная сумма процессов Орнштейна-Уленбека.

Рассмотрим для начала взвешенную сумму двух независимых процессов Орнштейна-Уленбека $U_{\lambda_1}(t),\ U_{\lambda_2}(t),\ t \geq 0$, при $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$:

$$Z(t) = Z_{\alpha_1,\lambda_1;\alpha_2,\lambda_2}(t) := \alpha_1 U_{\lambda_1}(t) + \alpha_2 U_{\lambda_2}(t). \tag{2.12}$$

Далее, если не оговорено противное, рассматриваем невырожденный случай $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Свойства $Z_{\alpha_1,\lambda_1;\alpha_2,\lambda_2}(t)$:

1. Процесс $Z_{\alpha_1,\lambda_1;\alpha_2,\lambda_2}(t)$ — стационарный.

2. $Z(t)$ — не марковский.

3. Процесс $Z(t)$ имеет единичную дисперсию.

4. Автоковариация $Z_{\alpha_1,\lambda_1;\alpha_2,\lambda_2}(t)$ есть

$$cov(Z(t)) = \alpha_1^2 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2^2 e^{-\lambda_2 t}. \tag{2.13}$$

5. Процесс $Z_{\alpha_1,\lambda_1;\alpha_2,\lambda_2}(t)$ является гауссовским.

Замечание. Очевидно, полученная автоковариация 2.13 есть преобразование Лапласа для вероятностной меры, сосредоточенной в точках λ_1 и λ_2 с весами α_1^2 и α_2^2, соответственно.

Данный пример нетрудно распространить, взяв n независимых процессов Орнштейна-Уленбека $U_{\lambda_j}(t),\ t \geq 0$, где $\lambda_j > 0,\ j \in [1, n]$. Сумма таких процессов с весами $\alpha_j,\ j \in [1, n]$, такими что $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$, даст стационарный процесс с единичной дисперсией и автоковариацией, являющейся преобразованием Лапласа φ_F дискретной меры F, сосредоточенной в точках $\lambda_j,\ j \in [1, n]$ с весами $\alpha_j^2,\ j \in [1, n]$, соответственно.

В случае, когда множество весов несчетно способом как 2.12 не удается построить аналогичный процесс с автоковариацией, которая является преобразованием Лапласа φ_G уже не дискретной меры G. Эту задачу удается решить способом, описанным ниже.

Подход изложенный в следующих подразделах дает центрированный, гауссовский процесс с автоковариацией являющейся преобразованием Лапласа $\varphi_{\lambda(\omega)}$, где ω - множество элементарных событий, которое быть более, чем счетно.

2.2.2 Сумма независимых пуассоновских субординаторов для последовательностей.

Возьмем последовательность (ξ) независимых одинаково распределенных случайных величин

$$(\xi) := (\xi_0, \xi_1, \ldots),\ \mathbb{E}\xi_0 = 0, \mathbb{D}\xi_0 = 1 \tag{2.14}$$

и независимый от (ξ) пуассоновский процесс $\Pi_\lambda(t),\ t \geq 0,\ \lambda > 0$ — некоторая фиксированная интенсивность.

Определение 4. Процессом пуассоновского случайного индекса (пуассоновским субординатором, псевдопуассоновским процессом для последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин, как в [4]) называется процесс

$$\psi_\lambda(t) := \xi_{\Pi_\lambda(t)}. \tag{2.15}$$

В статье [6] приводится полезное представление этого процесса в виде

$$\psi_\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \mathbb{I}(\Pi_\lambda(t) = k). \tag{2.16}$$

Основные свойства $\psi_\lambda(t)$:

1. В силу независимости и одинаковой распределенности элементов последовательности (ξ), процесс пуассоновского случайного индекса (ПСИ) $\psi_\lambda(t)$ — стационарен.
2. Процесс $\psi_\lambda(t)$ — марковский в силу отсутствия элементов последовательности пуассоновского процесса и независимости, одинаковой распределенности (ξ).
3. Процесс $\psi_\lambda(t)$ имеет автоковариационную функцию: $cov\{\psi_\lambda(t), \psi_\lambda(0)\} = e^{-\lambda t}$.

   Доказательство. Отметим сначала, что $\mathbb{E}\psi_\lambda(t) = 0$ — очевидно.

   Далее, пусть $t_2 > t_1$, тогда

$$\begin{aligned} cov\{\psi_\lambda(t_1), \psi_\lambda(t_2)\} &= \mathbb{E}\{\psi_\lambda(t_1)\psi_\lambda(t_2)\} = \\ &= \mathbb{E}\{\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \mathbb{I}(\Pi_\lambda(t_1) = k) \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \mathbb{I}(\Pi_\lambda(t_2) = j)\}. \end{aligned}$$

   В силу независимости (ξ) почти все произведения дадут ноль — кроме тех, где $k = j$. Тогда получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\{\xi_k^2 \mathbb{I}(\Pi_\lambda(t_1) = k)\mathbb{I}(\Pi_\lambda(t_2) = k)\}. \tag{2.17}$$

   Ясно, что в силу определения (ξ) выполнено $\mathbb{E}\xi_k^2 = 1$. Далее, воспользовавшись однородностью приращений пуассоновского процесса, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\Pi_\lambda(t_1) = k, \Pi_\lambda(t_2) - \Pi_\lambda(t_1) = 0) &= \mathbb{P}\{\Pi_\lambda(t_2) - \Pi_\lambda(t_1) = 0\} \\ &= \mathbb{P}(\Pi_\lambda(t_2 - t_1) = 0) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \end{aligned}$$

Итого кроме свойства (3) доказали и стационарность процесса в широком смысле.

□

4. Даже если (ξ) из 2.14 являются стандартными нормальными независимо одинаково распределенными случайными величинами, то $\psi_\lambda(t)$ все равно не является гауссовским.

   Доказательство. Пусть $\lambda = 1$. Рассмотрим $\psi(0)$, $\psi(t_0)$ для некоторого фиксированного t_0. Тогда

$$\psi(0) + \psi(t_0) \overset{d}{=} \begin{cases} 2\psi(0); & e^{-t_0} \\ \psi(0) + \widetilde{\psi}(0); & 1 - e^{-t_0}, \end{cases} \tag{2.18}$$

   где $\widetilde{\psi}(0) \overset{d}{=} \psi(0)$. Обозначим через $\kappa_\sigma(x)$ плотность $\mathcal{N}(0, \sigma)$. Тогда плотность $\psi_\lambda(t)$ будет выражаться $e^{-t_0}\kappa_2(x) + (1 - e^{-t_0})\kappa_{\sqrt{2}}(x)$. Очевидно, что выражения такого вида $\forall x$, $\forall \sigma > 0$, $\forall t_0$ никогда не примет вид $\kappa_\sigma(x)$. Отсюда $\psi_\lambda(t)$ — не гауссовский.

   □

Как и в случае с процессом Орнштейна-Уленбека, ковариация процесса ПСИ есть преобразование Лапласа меры, вырожденной в точке $\lambda > 0$.

Далее рассмотрим процессы пуассоновского случайного индекса $\psi_{\lambda_1}(t)$, $\psi_{\lambda_2}(t)$, соответствующие субординированным последовательностям

$$(\xi^1) = (\xi^1_0, \xi^1_1, \ldots), (\xi^2) = (\xi^2_0, \xi^2_1, \ldots), \tag{2.19}$$

которые взаимно независимы и состоят из независимо одинаково распределенных случайных величин (при этом распределения, скажем, ξ^1_0 и ξ^2_0 могут не совпадать).

Рассмотрим взвешенную сумму

$$\widetilde{Z}_{\alpha_1,\lambda_1;\alpha_2,\lambda_2}(t) = \alpha_1\psi_{\lambda_1}(t) + \alpha_2\psi_{\lambda_2}(t), \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1. \tag{2.20}$$

Свойста:

1. Процесс $\widetilde{Z}(t)$ — стационарный.

2. Процесс $\widetilde{Z}(t)$ имеет единичную дисперсию.

3. Автоковариация $\widetilde{Z}(t)$ имеет вид

$$cov(\widetilde{Z}(t)) = \alpha_1^2 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2^2 e^{-\lambda_2 t}. \tag{2.21}$$

4. Даже если (ξ) из 2.14 являются стандартными нормальными независимо одинаково распределенными случайными величинами, то $\psi_\lambda(t)$ все равно не является гауссовским.

   Доказательство. Аналогично предыдущему доказательству негауссовости. □

Замечание. Очевидно, что полученный процесс $\widetilde{Z}$ легко распространяется на сумму n независимых процессов ПСИ.

2.2.3 Построение процесса Орнштейна-Уленбека со случайным параметром вязкости.

Теперь рассмотрим ω — некоторое множество элементарных событий и $\lambda = \lambda(\omega)$ — случайную величину сосредоточенную на нем. Построим для этой $\lambda(\omega)$ ПСИ со случайным коээфицентом вязкости.

Определение 5. Пусть $\lambda = \lambda(\omega),\ \omega \in \Omega$ — случайная величина сосредоточенная на множестве $[0, \infty)$. $\Pi_1(t),\ t \geq 0$ — пуассоновский процесс с интенсивностью 1. λ и $\Pi_1(t)$ — независимы.

Тогда $\Pi_{\lambda(\omega)}(t) = \Pi_1(\lambda(\omega)t),\ t \geq 0$ — **процесс Кокса**.

В качестве ведущего пуассоновского процесса выступит процесс Кокса $\Pi_{\lambda(\omega)}(t),\ t \geq 0$ такой, что $\Pi_{\lambda(\omega)}(t) = \Pi_1(\lambda(\omega)t)$, а случайная интенсивность(вязкость) $\lambda(\omega)$ и $\Pi(1)$ — независимы.

Далее аналогично ПСИ можем построить ПСИ со случайным коээфицентом вязкости:

$$\psi_{\lambda(\omega)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \mathbb{I}(\Pi_{\lambda(\omega)}(t) = k). \tag{2.22}$$

Основные свойства получившегося процесса:

1. Процесс $\psi_{\lambda(\omega)}(t)$ — стационарен.

2. Процесс $\psi_{\lambda(\omega)}(t)$ — не марковский, (если $\lambda(\omega)$ нетривиальна).

3. Автоковариационная процесса $\psi_{\lambda(\omega)}(t)$:

$$cov\{\psi_{\lambda(\omega)}(t), \psi_{\lambda(\omega)}(0)\} = \mathbb{E}e^{-\lambda(\omega)t}. \tag{2.23}$$

Замечание. $\mathbb{E}e^{-\lambda(\omega)t}$ в точности есть преобразование Лапласа распределения $\lambda(\omega)$.

4. Даже если (ξ) из 2.14 являются стандартными нормальными независимо одинаково распределенными случайными величинами, то $\psi_\lambda(t)$ все равно не является гауссовским.

Доказательство. Аналогично предыдущему доказательству негауссовости. □

Возьмем последовательность $(\psi^j_{\lambda(\omega)}(s))$ независимых одинаково распределенных случайных процессов:

$$(\psi^j_{\lambda(\omega)}(s)) := (\psi^1_{\lambda(\omega)}(s),\ \psi^2_{\lambda(\omega)}(s),\ \ldots,\ \psi^N_{\lambda(\omega)}(s)). \tag{2.24}$$

Рассмотрим нормированную сумму

$$\Psi_N(s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \psi^j_{\lambda(\omega)}(s). \tag{2.25}$$

По ЦПТ для векторов имеет место сходимость в смысле конечномерных распределений к гауссовскому стационарному случайному процессу $Y(s),\ s \geq 0$:

$$\Psi_N(s) \Rightarrow Y(s),\ s \geq 0, \quad N \to \infty. \tag{2.26}$$

Определение 6. Случайный процесс $Y(s)$ будем называть ***процессом Орнштейна-Уленбека со случайным параметром вязкости*** $\lambda = \lambda(\omega)$.

Процесс $Y(s)$ имеет следующие свойства по построению:

1. Процесс $Y(s)$ — стационарен.

2. Процесс $Y(s)$ — не марковский.

3. Автоковариация $Y(s)$

$$cov(Y(s)) = \mathbb{E}e^{-\lambda(\omega)s}. \tag{2.27}$$

4. Процесс $Y(s)$ является гауссовским процессом.

Замечание. $cov(Y(s))$ является преобразованием Лапласа функции распределения связанной со случайной величиной $\lambda = \lambda(\omega)$

В данной дипломной работе мы рассмотрим частный случай процесса $Y(s)$, который обозначим $Y_2(s)$, когда $\omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Связано это с тем, что моделирование и оценка параметров очень сложна, а задача даже в такой постановке интересна и имеет практические примения. В [11] перечисляются возможные применения таких процессов.

В таком случае $\lambda(\omega)$ примет вид:

$$\lambda(\omega) = \begin{cases} \lambda_1; \text{ с вероятностью } p & \text{(соответствует } \omega_1) \\ \lambda_2; \text{ с вероятностью } q = 1 - p & \text{(соответствует } \omega_2). \end{cases} \tag{2.28}$$

Автоковариация $Y_2(s)$:

$$cov(Y_2(s)) = pe^{-\lambda_1 s} + qe^{-\lambda_2 s}. \tag{2.29}$$

Замечание. Пусть $Z_2(t)$ — взвешенная сумма процессов Орнштейна-Уленбека 2.12, при $n = 2$. Тогда при $k = 2,\ p = \alpha_1^2,\ q = \alpha_2^2,\ p+q = 1$ мы получим $Z_2(t) = \sqrt{p}U_{\lambda_1}(t) + \sqrt{q}U_{\lambda_2}(t)$ с

$$cov(Z_2(t)) = pe^{\lambda_1 t} + qe^{\lambda_2 t} \tag{2.30}$$

3 Алгоритмы моделирования.

3.1 Алгоритм моделирования процесса Орнштейна-Уленбека с фиксированным параметром вязкости.

Возьмем последовательность (ϵ) независимых одинаково распределенных нормальных случайных величин

$$(\epsilon) := (\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots),\ \epsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{3.1}$$

Пусть $A_\lambda = \sqrt{1-e^{-2\lambda}}$. Тогда $U_\lambda(1) = \epsilon_0 e^{-\lambda} + A_\lambda \epsilon_1$, а $U_\lambda(n),\ n > 1$ определяются следующими рекуррентными формулами:

$$U_\lambda(n+1) = U_\lambda(n)e^{-\lambda} + A_\lambda \epsilon_{n+1}. \tag{3.2}$$

Утверждение 3.1. *Полученный таким образом процесс $U_\lambda(n)$ — стандартный процесс Орнштейна-Уленбека $U_\lambda(t)$ смоделированный для дискретного t.*

Замечание. Если в формулу 3.2 подставить случайную λ, то последовательность $(U_\lambda(n))$ перестает быть гауссовским.

3.2 Алгоритм моделирования взвешенной суммы процессов Орнштейн Уленбека с фиксированным параметром вязкости.

Рассмотрим алгоритм моделирования для $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots,\ \lambda_k),\ k \geq 2$:

1. Задаем вектор коэффицентов $\vec{\lambda}$.
2. Задаем вектор коэффицентов $\vec{\alpha}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.
3. Моделируем $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_k}$ используя алгоритм из предыдущей подглавы
4. Процесс $Z := \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i U_{\lambda_i}$.

Полученный процесс Z — взвешенная сумма процессов Орнштейна-Уленбека 2.12.

Утверждение 3.2. *$Z_2(s)$ и $Y_2(s)$ — являются гауссовскими и имеют одинаковые математическе ожидание и автоковариацию, значит мы можем воспользоваться данным способом для моделирования $Y_2(s)$.*

В формуле 3.2 использует дискретное "математическое" время. Процесс Орнштейна-Уленбека с непрерывным "физическим" временем моделируется на основе разбиения отрезка $[0, T]$[1] с шагом h. При этом в формуле 3.2 λ следует заменить на λh. В последнем выражении λ — интенсивность(вязкость) на единицу "физического" времени

3.3 Алгоритм моделирования процесса Орнштейна-Уленбека со случайным параметром вязкости, имеющим недискретное распределение

Основная формула, реализующая данный алгоритм — 2.24.

Для $\psi^1(t),\ 0 \geq t \geq T < \infty$ снасала разыгрываем значение λ_1 в соответствии с её законом распределения, задаваемым, например, её преобразованием Лапласа $\mathbb{E}e^{-\lambda(\omega)t}, t \geq 0$. (В частности, например, можно взять равномерное распределние на $[\delta, \Theta]$; $\quad 0 < \delta < \Theta < \infty$).

Затем реализуем ведущий пуассоновский процесс $\Pi_1(\lambda_1 t)$. Рассмотрим интервал вида $\Delta_j := [\Theta_j, \Theta_{j+1}],\ j \geq 0,\ \Theta_0 = 0$; Θ_j — момент j-того скачка $\Pi_1(\lambda_1 t)$.

Каждой точке интервала Δ_j приписываем значение ξ_j, которое разыгрывается предварительно. Наилучшим распределением для задачи моделирования гауссовского процесса Орнштейна-Уленбека со случайным параметром вязкости будет нормальное распределение для ξ_j, которое моделируется, например, методом полярных координат.

Таким образом мы получили 1-ый пуассоновский субординатор. 2-ой и последующие до N-ого получаются независимым образом, с тем же распределением. Отметим, что $\lambda(\omega)$ разыгрывается независимо и дает значения $\lambda_2, \ldots,\ \lambda_N$ соответственно.

Заключает алгоритм подстановка полученых значений ψ^j в формулу 2.24. При этом мы можем рассматривать любые конечномерные распределения $\Psi_N(t)$.

[1] Терминальный момент времени $0 < T < \infty$ (часто T можно положить равным 1) используется в подразделе 4.1

4 Оценка параметров.

4.1 Процесс Орнштейна-Уленбека.

В самом простом случае стандартного процесса Орнштейна-Уленбека, λ — неслучайная. Процесс Орнштейна-Уленбека можно определить, как решение уравнения Ланжевена (Langevin). Например, смотри [12].

Оценку параметра для процесса Орнштейна-Уленбека $U_\lambda(t)$ можно провести воспользовавшись методом оценки максимального правдоподобия приведенной в [12].

Пусть задан процесс Орнштейна-Уленбека на $\xi(t)$, $0 \le t \le T$ с параметром вязкости $\theta \in (-\infty, \infty)$ Тогда

$$\widehat{\theta}_T(\xi) := \frac{\xi^2(T) - T}{2\int\limits_0^T \xi^2(t)dt}. \tag{4.1}$$

В нашем случае $\lambda = -\theta,\ \lambda > 0$, а $\xi(t)$ есть $U_\lambda(t)$.

4.2 Процесс Орнштейна-Уленбека со случайным параметром вязкости. Бинарное распределение интенсивности.

Рассмотрим процесс $Y_2(t)$ с бинарной интенсивностью.

Пусть

$$Y_2(t) = \sqrt{p}U_{\lambda_1}(t) + \sqrt{q}U_{\lambda_2}(t),\ p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1 \tag{4.2}$$

— процесс Орнштейна-Уленбека со случайным параметром вязкости $\lambda(\omega)$. Его ковариация имеет вид

$$cov(Y_2(t)) := pe^{-\lambda_1 t} + qe^{-\lambda_2 t}. \tag{4.3}$$

Так как статистическая оценка автоковариации в нуле определена заметно лучше, чем в окрестности ∞ (смотри результаты моделирования в приложении), поэтому мы используем численное дифференцирование в нуле для ковариационной функции, оцениванием параметр, а затем “исправляем” поведение ковариации в ∞, воспользовавшись тауберовыми теоремами.

Для процесса Орнштейна-Уленбека со случайным бинарным параметров вязкости естессственная задача заключается в исследовании оценки $\lambda_T(U)$ определенной в формуле 4.1 в случае, когда либо параметр $q \to \infty$ либо параметр λ_2 близок к бесконечности. Интерес представляет рост качества этой оценки при данных предельных предположениях.

Для данной оценки известно смещение $b_T(\theta) := \mathbb{M}_\theta((\widehat{\theta}_T(\xi) - \theta)$ и среднеквадратичная ошибка $B_T(\theta) := \mathbb{M}_\theta((\widehat{\theta}_T(\xi) - \theta)^2$.

Теорема 4.1. *Смещение $b_T(\theta)$ и среднеквадратичная ошибка $B_T(\theta)$ задаются формулами:*

$$b_T(\theta) = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\theta}[e^{-\frac{\theta T}{2}}\rho_T(\theta, a)]da, \tag{4.4}$$

$$B_T(\theta) = e^{-\frac{\theta T}{2}}\int\limits_0^\infty \rho_T(\theta, a)da + \int\limits_0^\infty a\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}[e^{-\frac{\theta T}{2}}\rho_T(\theta, a)]da, \tag{4.5}$$

где $\rho_T(\theta, a)$:

$$\rho_T(\theta, a) := \sqrt{\frac{2\sqrt{\theta^2 + 2a}}{(\sqrt{\theta^2 + 2a} + \theta)e^{-\sqrt{\theta^2+2a}T} + (\sqrt{\theta^2 + 2a} - \theta)e^{\sqrt{\theta^2+2a}T}}}. \tag{4.6}$$

Повторяем, что в нашем случае $\lambda = -\theta,\ \lambda > 0$, а $\xi(t)$ есть $U_\lambda(t)$.

В работе [11] рассматривалась модель ставки, которая описывалась процессом Орнштейна-Уленбека со случайной бинарной вязкостью. Там использовался алгоритм оценки и значений (λ_1, λ_2) и соответствующих весов. Метод, применяемый в данной статье, основывается на обращении преобразовании Лапласа для меры. Эта задача, в принципе, относится к классу некорректных задач. Поэтому требуется весьма и не всегда однозначный алгоритм, в частности, метод регуляризации по Тихонову.

Далее в настоящей дипломной работе решаются более частные задачи (оценка одно из параметров $p,\ \lambda_1,\ \lambda_2$), когда остальные два предполагаются неизвестными. Такая задача корректна и просто решается.

$$cov_t' Y_2(t) = -\lambda_1 p e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 q e^{-\lambda_2 t}, \tag{4.7}$$

$$cov_t' Y_2(t)|_{t=0} = -\lambda_1 p - \lambda_2 q. \tag{4.8}$$

Для работы с реальными данными вместо $cov'_t Y_2(t)|_{t=0}$ подставим соответствующие численные производные.

4.2.1 Бинарное распределение случайной вязкости: оценка весов.

Пусть известны λ_1 и λ_2, оценим p и q, тогда

$$p = \frac{cov'_t Y_2(t)|_{t=0} + \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad q = -\frac{cov'_t Y_2(t)|_{t=0} + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{4.9}$$

4.2.2 Бинарное распределение случайной вязкости: оценка интенсивностей.

Пусть известны p и q, а также только один из λ_1 и λ_2, например, λ_1. Тогда

$$\lambda_2 = \frac{cov'_t Y_2(t)|_{t=0} + \lambda_1 p}{p - 1}. \tag{4.10}$$

5 Заключение

В работе была проделано моделирование простого случая процесса Орнштейна-Уленбека со случайным параметром вязкости λ, обозначаемого $Y(s)$, и приведены некоторые простейшие оценки параметров. В дальнейшем очевидным продолжением исследования является моделирование и оценки параметров для более сложных множеств значений ω. Также для изучения представляет интерес связь $Y(s)$ и преобразования Фенхеля, которое в данном случае будет представлять из себя меру отличия процесса $Y(s)$ от стандартного процесса Орнштейна-Уленбека.

Список литературы

[1] Uhlenbeck G.E. and Ornstein L.S. On the Theory of Brownian Motion. Phys. Rev., том 36:823-841, 1930

[2] Breiman L. Probability. SIAM, Philadelphia, USA, 1992

[3] Vasicek. O. A. An equilibrium characterisation of the term structure. J. Fin. Econ., том 5:177-188, 1977

[4] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее риложения. Том 2. М., Мир, 1984.

[5] А.Н. Ширяев, Вероятность. 2-е издание. Наука, 1989

[6] О.В. Русаков. Суммы независимых пуассонвоских субординаторов и их связь со строго α-устойчивыми процессами типа Орнштейна-Уленбека. Вероятность и статистика. 13, Зап. научн. сем. ПОМИ, том 361:123-137, 2008.

[7] О.В. Русаков. Пуассоновские субординаторы, поле Винера-Орнштейна-Уленбека и связь броуновских мостов с переходными характеристиками процессов Орнштейн-Уленбека. Вероятность и статистика. 16, Зап. научн. сем. ПОМИ, том 384:225-237, 2010.

[8] О.В. Русаков. Относительная компактность сумм независимых одинаково распределенных псевдопуассоновских процессов в пространстве Скорохода. Зап. научн. сем. ПОМИ, том 442:122-132, 2015.

[9] И.В. Кондратюк. Ковариационные свойства пуассоновских субординаторов для некоторого класса стационарных последовательностей, 2013

[10] Д.А. Никифоров. Исследование псевдопуассоновских процессов со случайной интенсивностью с помощью ее проебразования Лапласа, 2015

[11] О.В. Русаков, Д.Б Аплеев. Обобщение модели Васичека на случай многих факторов: пример спот-ставки с двумя факторами. Прикладная информатика, том 6(24):90-101, 2014

[12] Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев. Статистика случайных процессов, нелинейная фильтрация и смежные вопросы Наука, 1974

[13] Argimiro Arratia, Alejandra Cabana, Enrique M. Cabana. Modeling Stationary Data by a Class of Generalized Ornstein-Uhlenbeck Processes: The Gaussian Case. 13th International Symposium, IDA 2014, Leuven, Belgium. Proceedings pp 13-24.

[14] Core Development Team. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. 2011

Приложение

Результаты моделирования

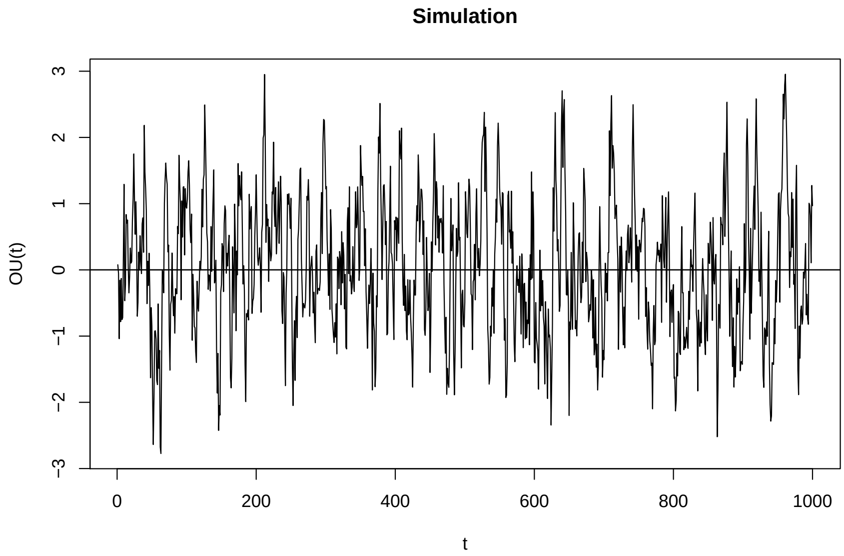

Рис. 1: $\lambda = 0.3$

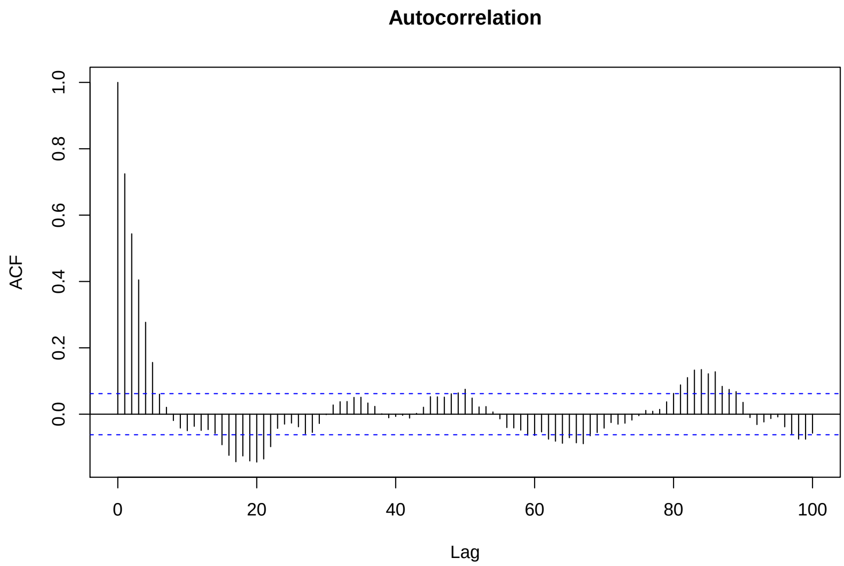

Рис. 2: $\lambda = 0.3$

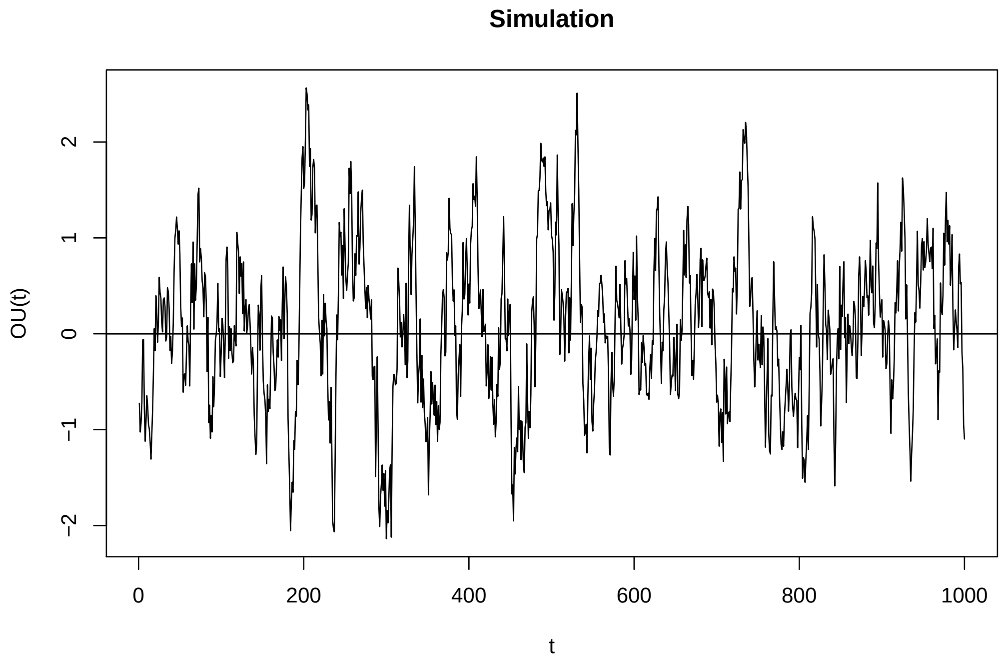

Рис. 3: $\lambda_1 = 0.0933, \lambda_2 = 0.0713, \alpha_1 = 0.963, \alpha_2 = 0.269$

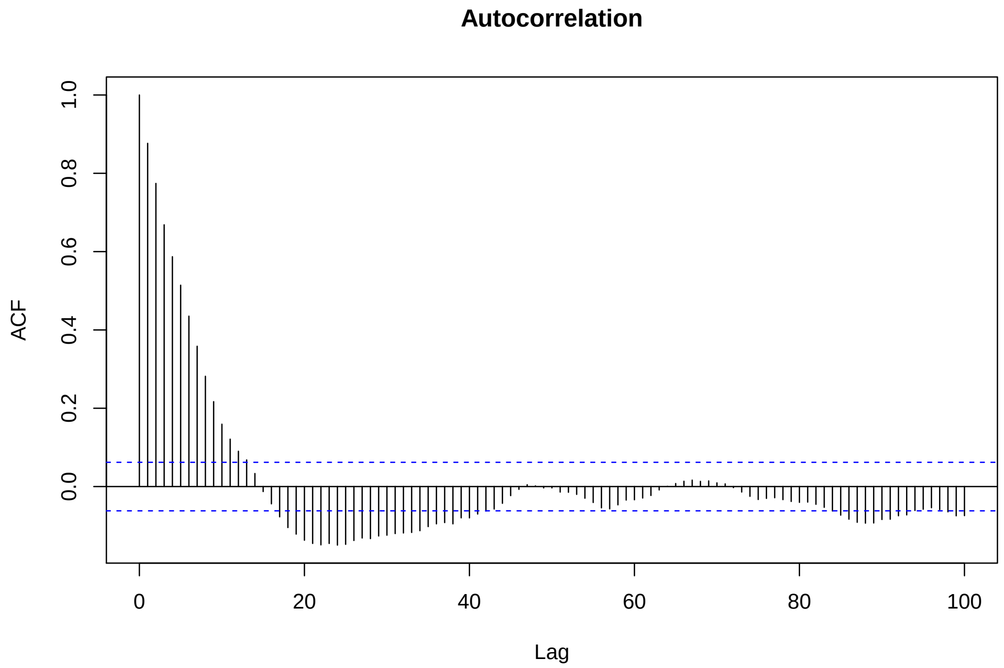

Рис. 4: $\lambda_1 = 0.0933, \lambda_2 = 0.0713, \alpha_1 = 0.963, \alpha_2 = 0.269$

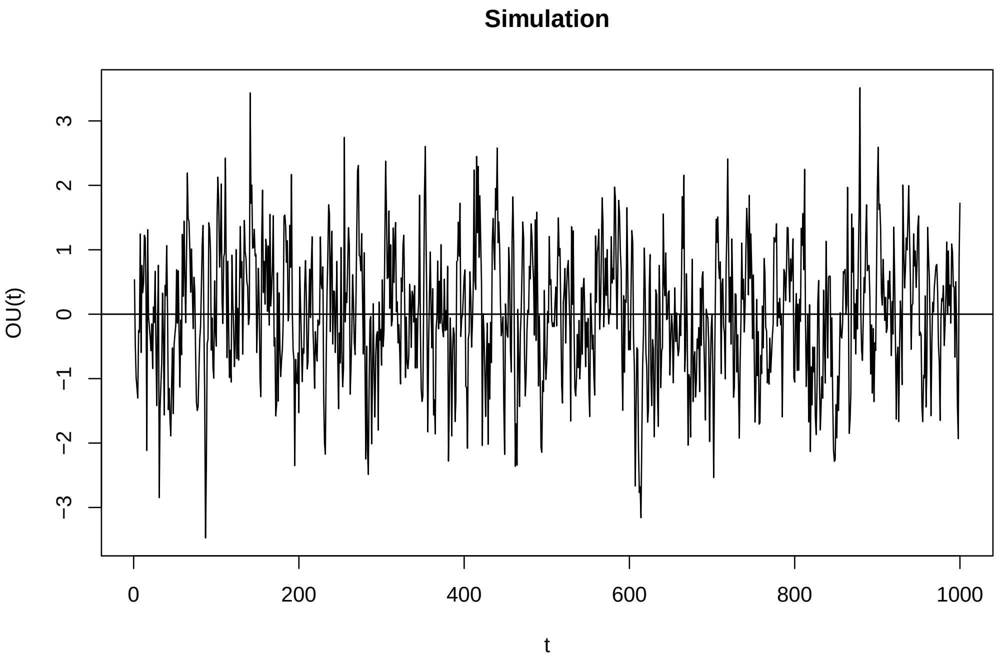

Рис. 5: $\lambda_1 = 0.147, \lambda_2 = 0.989, \alpha_1 = 0.147, \alpha_2 = 0.989$

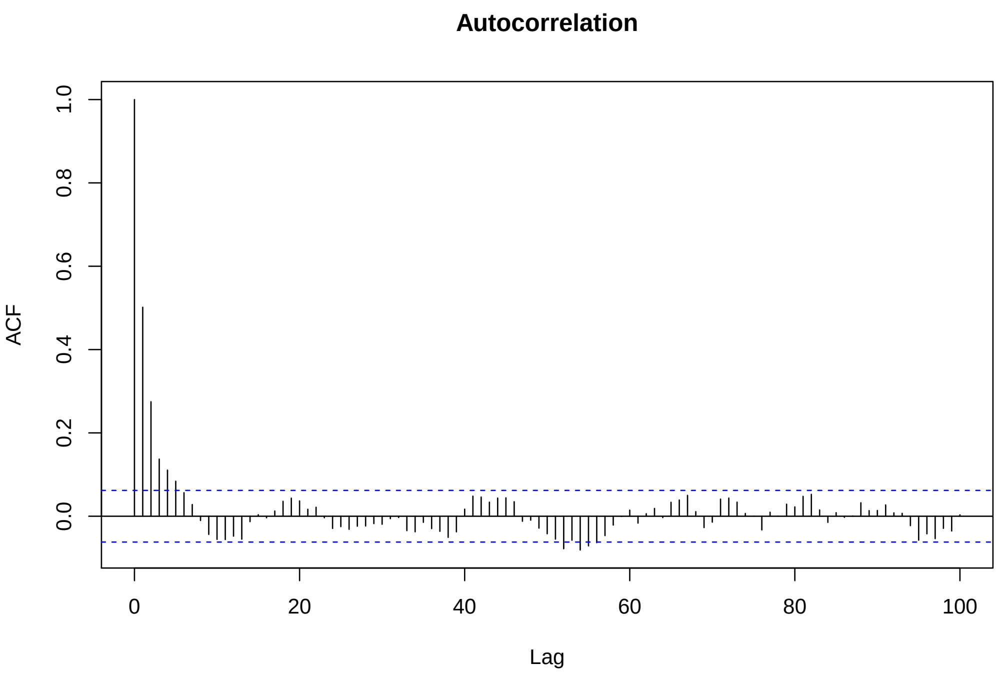

Рис. 6: $\lambda_1 = 0.147, \lambda_2 = 0.989, \alpha_1 = 0.147, \alpha_2 = 0.989$

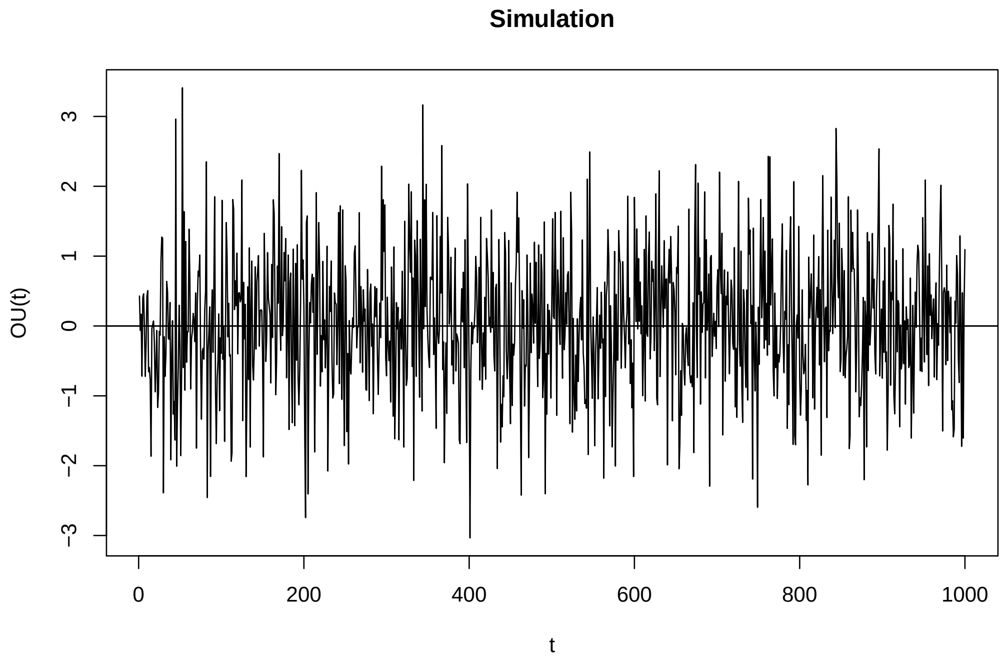

Рис. 7: $\lambda_1 = 16.4, \lambda_2 = 10.7, \alpha_1 = 0.142, \alpha_2 = 0.99$

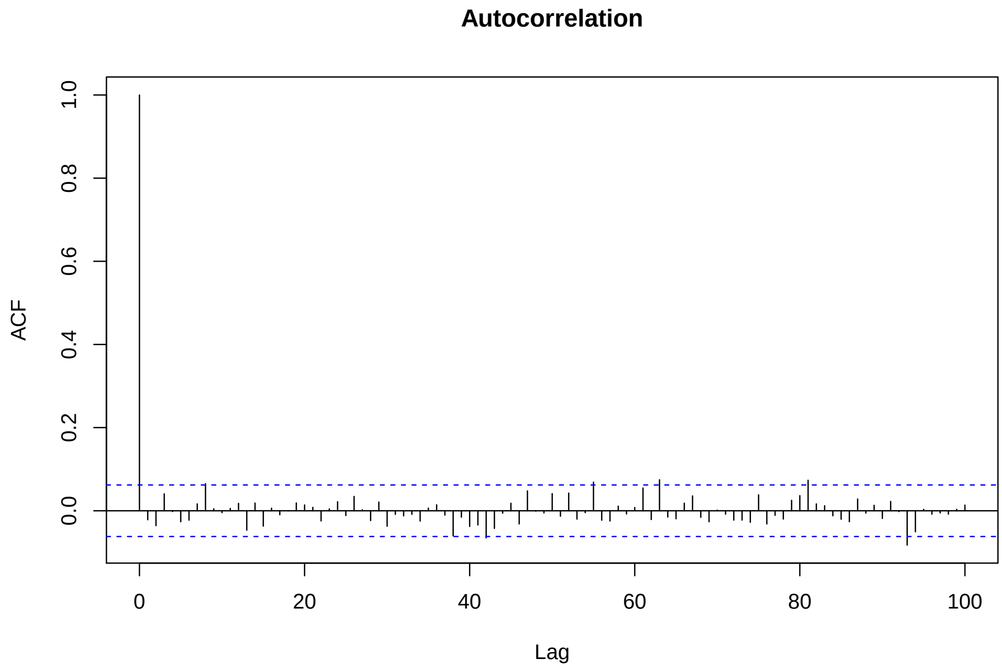

Рис. 8: $\lambda_1 = 16.4, \lambda_2 = 10.7, \alpha_1 = 0.142, \alpha_2 = 0.99$

Код моделирования в среде R

Listing 1: OU Modelling

```
# Simulates OU process (according to OVIR's paper)
generate_ou <- function(a, sigma, m, n = 1000, graph = TRUE) {
  # Exact numerical OrnsteinвЪ“Uhlenbeck process simulation

  # Empty array:
  u <- numeric(n)
  lag.max = 10 * log10(n)

  rnd <- rnorm(n)
  # Initial value:
  u[1] <- a + sigma * rnd[1]
  # Other elements:
  for (i in 2:length(u)) {
    u[i] <- u[i - 1] * exp(-m) +
      a*(1 - exp(-m)) +
      sqrt(1 - exp(-2*m))*sigma*rnd[i]
  }

  # Creating output:
  result <- list(
    series = u,
    viscosity = m,
    mean = a,
    sigma = sigma
  )

  if(graph) {
    par(mfrow = c(2,1))
    plot(u, type = 'l', xlab = 't', ylab = 'X(t)',
         main = "OrnsteinвЪ“Uhlenbeck simulation")
    abline(h = a)
    abline(h = 0)
    acf(u, type = "correlation", lag.max = lag.max,
```

```
        main = "Autocorrelation")
    par(mfrow = c(1,1))
  }

  return(result)
}

generate_alpha_coeff_vector <- function(n = 2, min = 0, max = 1)
{
  x <- runif(n, min=min, max=max)
  f_norm <- norm(as.matrix(x),"f")
  result <- x/f_norm
}

generate_lambda_coeff_vector <- function(n = 2, min = 0.01, max = 0.1)
{
  result <- runif(n, min=min, max=max)
}

generate_ou_n <- function(ou_n=2, ou_sim_n = 1000, a = 0, sigma = 1, m
    = 0.1, need_graphs = FALSE, lambda_min = 0.01, lambda_max = 0.1)
{
  #ou <- seq_len(n)
  alpha <- generate_alpha_coeff_vector(n = ou_n)
  lambda <- generate_lambda_coeff_vector(n = ou_n, min = lambda_min,
      max = lambda_max)
  ou1 <- generate_ou(0, 1, lambda[1], n = ou_sim_n, graph = need_graphs
      )$series
  ou2 <- generate_ou(0, 1, lambda[2], n = ou_sim_n, graph = need_graphs
      )$series
  ou_res <- rbind(ou1, ou2)
  if (ou_n>2) {
    for(i in (3:ou_n))
    {
      new_ou <- generate_ou(0, 1, lambda[i], n = ou_sim_n, graph = need
          _graphs)$series
      ou_res <- rbind(ou_res, new_ou)
```

```
    }
  }

  #Making result of the same type as generate_ou to reuse code:
      viscosity, mean,
  #sigma arguments are not of resulting process, but its components
  result <- list(
    series = as.vector(alpha %*% ou_res),
    viscosity = m,
    mean = a,
    sigma = sigma,
    alpha = alpha,
    lambda = lambda
  )
}

plot_ou_sim <- function(ou, lag.max = 100) {
  if(is.null(names(ou))) {
    series <- ou
    m <- mean(series)
  } else {
    series <- ou$series
    m <- ou$mean
  }

  plot(series, type = 'l', xlab = 't', ylab = 'OU(t)',
       main = "OU simulation")
}


plot_ou_info <- function(ou, lag.max = 100, label = "OU") {
  if(is.null(names(ou))) {
    series <- ou
    m <- mean(series)
  } else {
    series <- ou$series
    m <- ou$mean
```

```r
  }

  plot(series, type = 'l', xlab = 't', ylab = 'OU(t)',
       main = "Simulation")
  abline(h = m)
  abline(h = -m)
  dev.print(pdf, paste0(label, "_sim.pdf"))
  acf(series, type = "correlation", lag.max = lag.max,
      main = "Autocorrelation")
  dev.print(pdf, paste0(label, "_acf.pdf"))
}


ou_1 <- generate_ou(0, 1, 0.3, n = 1000, graph = FALSE)
plot_ou_info(ou_1, label = "OU_1_lam_03")

ou_2_1 <- generate_ou_n(ou_n=2, ou_sim_n = 1000, a = 0, sigma = 1, m =
   0.1, need_graphs = FALSE, lambda_min = 0.01, lambda_max = 0.1)
plot_ou_info(ou_2_1, label = "OU_2_lam_001_01")

ou_2_2 <- generate_ou_n(ou_n=2, ou_sim_n = 1000, a = 0, sigma = 1, m =
   0.1, need_graphs = FALSE, lambda_min = 0.1, lambda_max = 1)
plot_ou_info(ou_2_2, label = "OU_2_lam_01_1")

ou_2_3 <- generate_ou_n(ou_n=2, ou_sim_n = 1000, a = 0, sigma = 1, m =
   0.1, need_graphs = FALSE, lambda_min = 5, lambda_max = 20)
plot_ou_info(ou_2_3, label = "OU_3_lam_5_20")
```