

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет Прикладной математики – процессов управления
**Кафедра моделирования электромеханических и
компьютерных систем**

Маслова Татьяна Андреевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Расчёт диодной системы с полевым
эмиттером эллипсоидальной формы**

Направление 010900

«Прикладные математика и физика»

Руководитель научной программы,

доктор физ.-мат. наук,

профессор

Егоров Н. В.

Научный руководитель,

доктор физ.-мат. наук,

профессор

Виноградова Е. М.

Рецензент,

кандидат физ.-мат. наук,

доцент

Рубцова И. Д.

Санкт-Петербург

2016

Оглавление

Введение	3
1 Моделирование диодной системы на основе полевого острия эллиптической формы	4
1.1 Физическая постановка задачи расчёта диодной системы	4
1.2 Математическая модель полевого острия эллиптической формы	5
1.3 Решение граничной задачи	6
1.4 Результаты численных расчётов	10
Заключение к главе 1	12
2 Моделирование эмиссионной системы с различными диэлектриками	13
2.1 Моделирование эмиссионной системы с прослойкой из двух сред с разными диэлектрическими проницаемостями	13
2.1.1 Физическая постановка задачи расчёта эмиссионной системы с двойной прослойкой	13
2.1.2 Математическая модель системы с двойной прослойкой	14
2.1.3 Решение граничной задачи	14
2.2 Моделирование эмиссионной системы с различными диэлектрическими прослойками	19

2.2.1	Физическая постановка задачи расчёта эмиссионной системы	19
2.2.2	Математическая модель системы с различными ди-электриками	20
2.2.3	Решение граничной задачи	20
2.3	Результаты численных расчётов	25
	Заключение к главе 2	25
	Заключение	27
	Литература	28

Введение

Автоэлектронная эмиссия (полевая эмиссия, электростатическая эмиссия, туннельная эмиссия) — испускание электронов проводящими твёрдыми и жидкими телами под действием внешнего электрического поля высокой напряжённости. Автоэлектронная эмиссия объясняется туннельным эффектом, при котором электроны преодолевают потенциальный барьер, не проходя над ним за счёт кинетической энергии теплового движения (как при термоэлектронной эмиссии), а путём туннельного просачивания сквозь барьер, сниженный и суженный электрическим полем [1].

Для протекания полевой эмиссии, как уже было сказано, необходимо на катод подавать огромные напряжения, что, безусловно, является большим минусом. В том случае, если придать катоду форму тонкого острия с малым радиусом кривизны на вершине, автоэлектронную эмиссию можно возбудить при небольших напряжениях на электродах [2, 3]. В силу того, что эмиссионные характеристики подобных приборов сильно зависят как от формы острия, так и от геометрических параметров остальных электродов, расчёт таких моделей является весьма трудной задачей и требует учёта всех характеристик системы [1]. Поэтому аналитические методы расчёта эмиссионных систем на основе полевой эмиссии в литературе, посвящённой данной тематике, представлены в очень ограниченном числе исследований [4–8].

Цель данной работы — разработать математическую модель полевого катода эллипсоидальной формы и найти распределение электростатического потенциала во всей области рассматриваемой системы в аналитическом виде.

Глава 1

Решение граничной задачи в эллипсоидальных координатах методом разделения переменных

1.1 Физическая постановка задачи расчёта диодной системы

В качестве физической модели рассматривается система: острый металлический катод формы полуэллипсоида вращения на плоской подложке и металлический анод такой же формы (рис. 1.1). Напряжение на катоде и подложке $U = 0$, на анод подаётся постоянное напряжение $U = u_0$. У границы твёрдого тела создаётся внешнее электростатическое поле, которое ускоряет электроны от поверхности катода. В результате возникает ток полевой электронной эмиссии, который регистрируется на аноде.

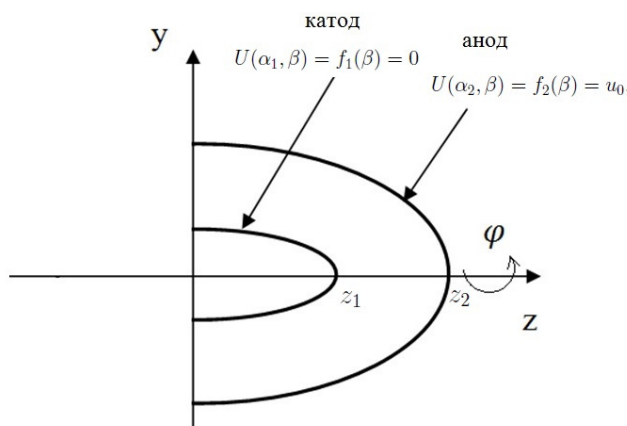


Рис. 1.1. Схематическое изображение эллиптической диодной системы..

1.2 Математическая модель полевого острия эллиптической формы

Решается задача для распределения электростатического потенциала, поэтому в качестве математической модели, описывающей данную систему, рассматривается уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах:

$$\Delta U(\alpha, \beta, \varphi) = 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} U(\alpha_1, \beta) = f_1(\beta) = 0, \\ U(\alpha_2, \beta) = f_2(\beta) = u_0, \\ U(\alpha, \frac{\pi}{2}) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, \pi]$.

Последнее граничное условие поставлено из тех соображений, что рассматриваемая диодная система расположена на плоской подложке, на которой, для удобства, задаётся нулевое значение.

Связь между декартовыми координатами и координатами вытянутого эллипсоида вращения определяется формулами [9]

$$\begin{cases} x = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \\ y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, c — фокальный радиус.

Общий вид уравнения Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения

$$\Delta U(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \times \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (1.4)$$

где коэффициенты Ламе

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = c\sqrt{\sin^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha}, \\ h_3 = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta. \end{cases} \quad (1.5)$$

Предполагается, что U не зависит от угла φ (осесимметричная задача). Уравнение Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\frac{1}{c^2(\sin^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha)} \left[c \operatorname{th} \alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + c \operatorname{tg} \beta \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right] = 0. \quad (1.6)$$

1.3 Решение граничной задачи

Поставленная задача решалась с помощью метода разделения переменных [10, 11].

Пусть $U(\alpha, \beta) = A(\alpha)B(\beta)$, тогда уравнение (1.3) примет вид:

$$c \operatorname{th} \alpha B A' + B A'' + c \operatorname{tg} \beta A B' + A B'' = 0. \quad (1.7)$$

Производя деление последнего равенства на AB и разбивая уравнение на два, получаем:

$$c \operatorname{th} \alpha A' + A'' - \lambda^2 A = 0, \quad (1.8)$$

$$c \operatorname{tg} \beta B' + B'' + \lambda^2 B = 0, \quad (1.9)$$

где (1.8) зависит только от α , (1.9) зависит только от β , $\lambda = \text{const}$.

После некоторых преобразований уравнение (1.8) принимает вид:

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\operatorname{sh} \alpha \frac{dA}{d\alpha} \right) - \lambda^2 A = 0. \quad (1.10)$$

С помощью замены $\nu = \operatorname{ch} \alpha$ уравнение (1.10) представляет собой выражение

$$\frac{d}{d\nu} \left[(1 - \nu^2) \frac{dA}{d\nu} \right] - \lambda^2 A = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение вида (1.11) называют уравнением Лежандра. Его решения ищутся в виде ряда

$$P(\nu) = \nu^\mu \sum_{j=0}^{\infty} a_j \nu^j,$$

где μ — параметр. Полученные решения представляют собой ряды, которые называют полиномами Лежандра [12].

Таким образом, решениями уравнения (1.8) являются полиномы Лежандра первого и второго рода соответственно $P_n(\operatorname{ch} \alpha)$ и $Q_n(\operatorname{ch} \alpha)$, $n = 0, 1, 2 \dots$

Аналогично ищутся решения уравнения (1.9), с помощью замены $\nu = \cos \beta$, $\nu \in [-1, 1]$:

$$\frac{d}{d\nu} \left[(1 - \nu^2) \frac{dB}{d\nu} \right] + \lambda^2 B = 0. \quad (1.12)$$

Решениями уравнения (1.12) будут являться так же полиномы Лежандра $P_n(\cos \beta)$ и $Q_n(\cos \beta)$, $n = 0, 1, 2 \dots$. Следует учесть, что действительным является лишь решение $P_n(\cos \beta)$.

Таким образом искомое решение принимает вид:

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n P_n(\operatorname{ch} \alpha) + B_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha)] P_n(\cos \beta), \quad (1.13)$$

где A_n и B_n неизвестные коэффициенты, которые находятся из граничных условий (1.2).

При подстановке граничных условий в общее решение, получаем систему:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) + B_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)] P_n(\cos \beta) = f_1(\beta), \\ \sum_{n=0}^{\infty} [A_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) + B_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2)] P_n(\cos \beta) = f_2(\beta). \end{cases} \quad (1.14)$$

Производилось умножение первого уравнения из системы (1.14) на $\sin(\beta) P_k(\cos \beta)$ и интегрирование по аргументу β в пределах $\beta \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) + B_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)] \int_0^{\pi} \sin(\beta) P_n(\cos \beta) P_k(\cos \beta) d\beta = \\ = \int_0^{\pi} f_1(\beta) \sin(\beta) P_k(\cos \beta) d\beta. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Использовалось свойство ортогональности полиномов Лежандра на $[-1, 1]$ [13]:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0, & m \neq n, \\ \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}, & m = n, \end{cases} \quad (1.16)$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(\beta)P_n(\cos \beta)P_k(\cos \beta)d\beta &= \\ &= \int_{-1}^1 P_n(\cos \beta)P_k(\cos \beta)d(\cos \beta) = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Таким образом, система (1.14) принимает вид:

$$\begin{cases} [A_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) + B_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)] \frac{2}{2n+1} = \int_0^\pi f_1(\beta) \sin(\beta) P_n(\cos \beta) d\beta, \\ [A_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) + B_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2)] \frac{2}{2n+1} = \int_0^\pi f_2(\beta) \sin(\beta) P_n(\cos \beta) d\beta. \end{cases} \quad (1.18)$$

Пусть

$$\begin{cases} f_1(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \beta), \\ f_2(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(\cos \beta), \end{cases} \quad (1.19)$$

где a_n и b_n — коэффициенты разложения функций f_1 и f_2 по полиномам Лежандра $P_n(\cos \beta)$ и имеют место соотношения:

$$\begin{cases} a_n = A_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) + B_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1), \\ b_n = A_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) + B_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2). \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты A_n и B_n можно записать в виде:

$$A_n = \frac{a_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - b_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)},$$

$$B_n = \frac{-a_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) + b_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)}.$$

Общее решение задачи принимает вид:

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \times \left[a_n \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)} + b_n \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha) - P_n(\operatorname{ch} \alpha) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)} \right], \quad (1.20)$$

где a_n и b_n находятся из граничных условий

$$\begin{cases} f_1(\beta) = 0, \\ f_2(\beta) = u_0, & \beta \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ f_2(\beta) = -u_0, & \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases} \quad (1.21)$$

Производилось умножение второго уравнения системы (1.19) на $\sin(\beta) P_k(\cos \beta)$ и интегрирование по аргументу β в пределах $\beta \in [0, \pi]$:

$$\int_0^{\pi} f_2 \sin \beta P_k(\cos \beta) d\beta = b_n \int_0^{\pi} \sin \beta P_n(\cos \beta) P_k(\cos \beta) d\beta. \quad (1.22)$$

По свойству ортогональности полиномов Лежандра и граничным условиям (1.21) выражение (1.22) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_0 P_k(\cos \beta) d(\cos \beta) - \int_{-1}^0 u_0 P_k(\cos \beta) d(\cos \beta) &= b_k \frac{2}{2k+1}, \\ u_0 \left[\int_0^1 P_k(\cos \beta) d(\cos \beta) - \int_{-1}^0 P_k(\cos \beta) d(\cos \beta) \right] &= b_k \frac{2}{2k+1}, \\ u_0 \left[\int_0^1 (P_k(\cos \beta) - P_k(-\cos \beta)) d(\cos \beta) \right] &= b_k \frac{2}{2k+1}. \end{aligned}$$

При использовании свойства полиномов Лежандра $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ [13], получаем

$$u_0 \int_0^1 P_k(\cos \beta) (1 - (-1)^k) d(\cos \beta) = b_k \frac{2}{2k+1}.$$

При $k = 2n$ $b_k = 0$, а при $k = 2n + 1$ используются формулы [13]:

$$\int_0^1 P_k(x)x^t dx = \frac{\sqrt{\pi}2^{-t-1}\Gamma(1+t)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}k)\Gamma(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}k+\frac{3}{2})}, \quad (\mathbf{Re} t > -1),$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_0 \int_0^1 P_k(x) dx &= \frac{u_0 \sqrt{\pi}}{2\Gamma(1-\frac{1}{2}k)\Gamma(\frac{1}{2}k+\frac{3}{2})} = \frac{u_0 \sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{1}{2}-n)\Gamma(n+2)} = \\ &= \frac{u_0 \sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{1}{2}-n)(n-1)!} = \frac{u_0 \sqrt{\pi}(2n-1)!2}{2(-4)^n \sqrt{\pi}(n+1)!n!} = \frac{u_0(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n+1)!n!}, \\ &\frac{u_0(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n+1)!n!} = b_{2n+1} \frac{2}{4n+3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$b_{2n+1} = \frac{u_0(-1)^n(4n+3)(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!}, \quad n \in [0, \infty]. \quad (1.23)$$

Таким образом, решение граничной задачи принимает вид:

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) \times \\ &\times b_{2n+1} \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2)Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где b_{2n+1} имеют вид (1.23).

1.4 Результаты численных расчётов

Для решения задачи была написана программа на языке C Sharp в среде программирования Microsoft Visual Studio.

Область значений α и β , в которой производился расчёт: $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. В ДПСК $z \in [z_1, z_2]$.

Из связи декартовых координат с координатами вытянутого эллипсоида вращения (1.3):

$$\alpha = \ln \left(\frac{z}{c} + \sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 + 1} \right). \quad (1.25)$$

Параметры системы имеют значения:

$u_0 = 100$ — постоянное напряжение на аноде;

$z_1 = 1, z_2 = 7, c = 0,9$, тогда по формуле (1.25) $\alpha_1 = 0,96, \alpha_2 = 2,74$.

Также в программе задаются:

m — количество разбиений отрезков $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$;

max — наивысшая степень полиномов P_{max} и Q_{max} .

По результатам работы программы построен график распределения электростатического потенциала (рис. 1.2).

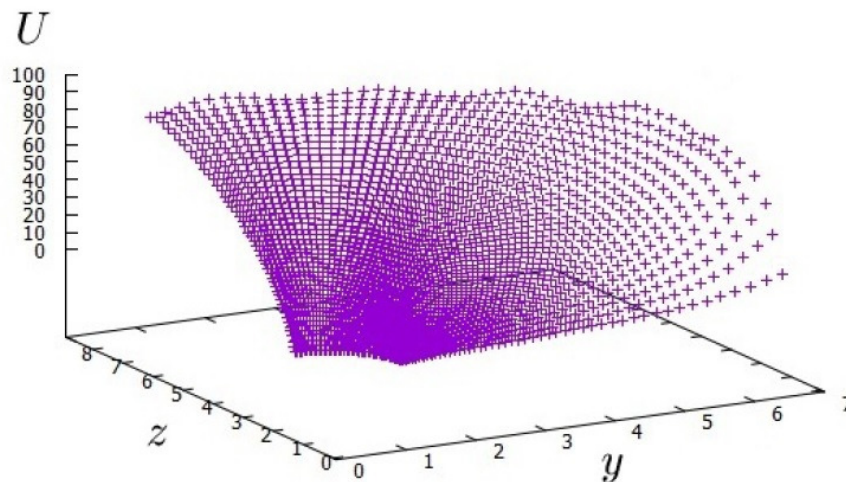


Рис. 1.2. Распределение электростатического потенциала $U(y, z)$
($m = 50, max = 10$)..

Заключение к главе 1

В ходе проделанной работы:

1. найдено распределение электрического потенциала в виде разложения по полиномам Лежандра для модели острейного катода (1.24) с граничными условиями (1.2);
2. написана программа на языке C Sharp для нахождения численного решения задачи;
3. построен график распределения электрического потенциала (рис. 1.2).

Глава 2

Моделирование эмиссионной системы с различными диэлектриками

2.1 Моделирование эмиссионной системы с прослойкой из двух сред с разными диэлектрическими проницаемостями

2.1.1 Физическая постановка задачи расчёта эмиссионной системы с двойной прослойкой

Прежде чем решать общую задачу, рассмотрим систему с двойной прослойкой между катодом и анодом (рис. 2.1). Диэлектрические проницаемости первой и второй прослоек равны ε_1 и ε_2 соответственно. Напряжение на катоде и подложке $U = 0$, на анод подаётся постоянное напряжение $U = u_0$.

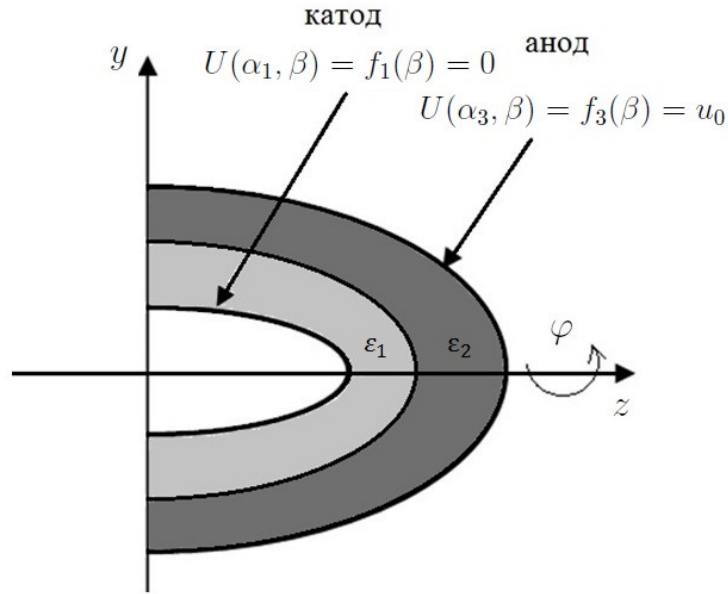


Рис. 2.1. Схематическое изображение эллиптической диодной системы с двойной прослойкой..

2.1.2 Математическая модель системы с двойной прослойкой

Для случая с двойной диэлектрической прослойкой граничные условия имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\alpha_1, \beta) = f_1(\beta) = 0, \\ U(\alpha_3, \beta) = f_3(\beta) = u_0, \\ U_1(\alpha_2, \beta) = U_2(\alpha_2, \beta), \\ \mathbf{D}_{n(1)}|_{\alpha=\alpha_2} = \mathbf{D}_{n(2)}|_{\alpha=\alpha_2}, \\ U(\alpha_1, \frac{\pi}{2}) = U(\alpha_2, \frac{\pi}{2}) = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Предполагается, что U не зависит от угла φ (осесимметричная задача). Уравнение Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения для рассматриваемой задачи имеет вид (1.6).

2.1.3 Решение граничной задачи

Поставленная задача решалась с помощью метода разделения переменных (см главу 1). Общее решение граничной задачи в одной области

имеет вид:

$$\begin{aligned}
U(\alpha, \beta) = & \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \beta) \times \\
& \times \left[a_n \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)} + \right. \\
& \left. + b_n \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha) - P_n(\operatorname{ch} \alpha) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_n(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_n(\operatorname{ch} \alpha_1)} \right], \quad (2.2)
\end{aligned}$$

где a_n и b_n находятся из граничных условий задачи.

Рассматривается граница между слоями с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . На этой границе должно выполняться условие равенства нормальных составляющих векторов электрического смещения в каждой из двух областей [1], а именно:

$$\mathbf{D}_{n(1)}|_{\alpha=\alpha_2} = \mathbf{D}_{n(2)}|_{\alpha=\alpha_2}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ — вектор электрического смещения. $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$ — напряжённость электрического поля. Оператор градиента имеет вид [9]:

$$\operatorname{grad} U(\alpha, \beta) = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{i}_\alpha + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial U}{\partial \beta} \mathbf{i}_\beta + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi. \quad (2.4)$$

Рассматривается вектор нормали к границе $\alpha = \alpha_2$, поэтому имелась зависимость градиента только от α . Метрический коэффициент h_α в эллипсоидальных координатах имеет вид [9]:

$$h_\alpha = c \sqrt{\sin^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha}, \quad (2.5)$$

тогда

$$\operatorname{grad}_\alpha U(\alpha, \beta) = \frac{1}{c \sqrt{\sin^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha}} \frac{\partial U}{\partial \alpha}. \quad (2.6)$$

Изучается область 1 (с диэлектрической проницаемостью ε_1). Граничные условия:

$$\begin{cases} f_{\alpha_1} = 0, \\ f_{\alpha_2} \text{ — неизвестная функция.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Тогда решение в области 1 будет иметь вид:

$$U_1(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) b_{2n+1} \times \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)}. \quad (2.8)$$

Рассматривается область 2 (с диэлектрической проницаемостью ε_2).

Граничные условия:

$$\begin{cases} f_{\alpha_2} - \text{неизвестная функция,} \\ f_{\alpha_3} = u_0, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ f_{\alpha_3} = -u_0, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Тогда решение в области 2 будет иметь вид:

$$U(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) \times \left[b_{2n+1} \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)} + c_{2n+1} \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)} \right], \quad (2.10)$$

где b_{2n+1} — неизвестные коэффициенты, а c_{2n+1} ищутся в виде (1.23):

$$c_{2n+1} = \frac{u_0 (-1)^n (4n+3)(2n)!}{2^{2n+1} (n+1)! n!}, \quad n \in [0, \infty]. \quad (2.11)$$

Для нахождения $\operatorname{grad}_{\alpha} U_1(\alpha, \beta)$ и $\operatorname{grad}_{\alpha} U_2(\alpha, \beta)$ использовалась формула производной для полинома Лежандра 1 и 2 рода [12]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\nu}(z)}{dz} &= \frac{\nu+1}{z^2-1} \left[P_{\nu+1}(z) - zP_{\nu}(z) \right], \\ \frac{dQ_{\nu}(z)}{dz} &= \frac{\nu+1}{z^2-1} \left[Q_{\nu+1}(z) - zQ_{\nu}(z) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С помощью (2.6) и (2.12), градиент находится по формуле:

$$\operatorname{grad}_{\alpha} U_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{c \sqrt{\sin^2 \beta + \operatorname{sh}^2 \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) b_{2n+1} \frac{2n+2}{\operatorname{sh} \alpha} \times \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) [Q_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)] - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) [P_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)]}{-P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)}, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
grad_{\alpha} U_2(\alpha, \beta) &= \frac{1}{c\sqrt{\sin^2 \beta + \text{sh}^2 \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) \frac{2n+2}{\text{sh} \alpha} \times \\
&\times \left[b_{2n+1} \frac{Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)[P_{2n+2}(\text{ch} \alpha) - \text{ch} \alpha P_{2n+1}(\text{ch} \alpha)] -}{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3) -} \right. \\
&\quad \left. \frac{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)[Q_{2n+2}(\text{ch} \alpha) - \text{ch} \alpha Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha)]}{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)} \right] + \\
&+ c_{2n+1} \frac{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)[Q_{2n+2}(\text{ch} \alpha) - \text{ch} \alpha Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha)] -}{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3) -} \\
&\quad \left. \frac{-Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)[P_{2n+2}(\text{ch} \alpha) - \text{ch} \alpha P_{2n+1}(\text{ch} \alpha)]}{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)} \right]. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Полагается:

$$x_1 = \frac{Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)[P_{2n+2}(\text{ch} \alpha_2) - \text{ch} \alpha_2 P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)] -}{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3) -} \tag{2.15}$$

$$\frac{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)[Q_{2n+2}(\text{ch} \alpha_2) - \text{ch} \alpha_2 Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)]}{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)},$$

$$x_2 = \frac{Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)[P_{2n+2}(\text{ch} \alpha_2) - \text{ch} \alpha_2 P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)] -}{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3) -} \tag{2.16}$$

$$\frac{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)[Q_{2n+2}(\text{ch} \alpha_2) - \text{ch} \alpha_2 Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)]}{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)},$$

$$x_3 = \frac{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)[Q_{2n+2}(\text{ch} \alpha_2) - \text{ch} \alpha_2 Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)] -}{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3) -} \tag{2.17}$$

$$\frac{-Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)[P_{2n+2}(\text{ch} \alpha_2) - \text{ch} \alpha_2 P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)]}{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_3)Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_2)}.$$

Условие (2.3) можно переписать в виде:

$$-\varepsilon_1 grad_{\alpha} U_1|_{\alpha=\alpha_2} = -\varepsilon_2 grad_{\alpha} U_2|_{\alpha=\alpha_2}. \tag{2.18}$$

Подставляя значения градиентов (2.13), (2.14) в (2.18) и воспользовавшись (2.15), (2.16), (2.17), получаем:

$$\varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) x_1 b_{2n+1} = \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) [x_2 b_{2n+1} + x_3 c_{2n+1}] \tag{2.19}$$

В результате операций умножения (2.23) на $\sin(\beta)P_{2k+1}(\cos \beta)$ и интегрирования по аргументу β в пределах $\beta \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin(\beta) P_{2n+1}(\cos \beta) P_{2k+1}(\cos \beta) x_1 b_{2n+1} d\beta &= \\ &= \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin(\beta) P_{2n+1}(\cos \beta) P_{2k+1}(\cos \beta) [x_2 b_{2n+1} + x_3 c_{2n+1}] d\beta, \\ \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 P_{2n+1}(\cos \beta) P_{2k+1}(\cos \beta) x_1 b_{2n+1} d \cos \beta &= \\ &= \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 P_{2n+1}(\cos \beta) P_{2k+1}(\cos \beta) [x_2 b_{2n+1} + x_3 c_{2n+1}] d \cos \beta. \end{aligned}$$

Пользуясь свойством ортогональности полиномов Лежандра на $[-1, 1]$ (1.16), приходим к выражению

$$\varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x_1 b_{2n+1} = \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} [x_2 b_{2n+1} + x_3 c_{2n+1}].$$

Тогда неизвестные коэффициенты b_{2n+1} можно искать в виде:

$$b_{2n+1} = \frac{\varepsilon_2 c_{2n+1} x_3}{\varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2}, \quad (2.20)$$

где

$$c_{2n+1} = \frac{u_0 (-1)^n (4n+3)(2n)!}{2^{2n+1} (n+1)! n!}, \quad n \in [0, \infty].$$

2.2 Моделирование эмиссионной системы с различными диэлектрическими прослойками

2.2.1 Физическая постановка задачи расчёта эмиссионной системы

В качестве физической модели рассматривается такая же диодная система, что и в предыдущей главе, но между катодом и анодом есть прослойка из n диэлектриков. Диэлектрическая проницаемость i -ой прослойки равна ε_i . Напряжение на катоде и подложке $U = 0$, на анод подаётся постоянное напряжение $U = u_0$ (рис. 2.2).

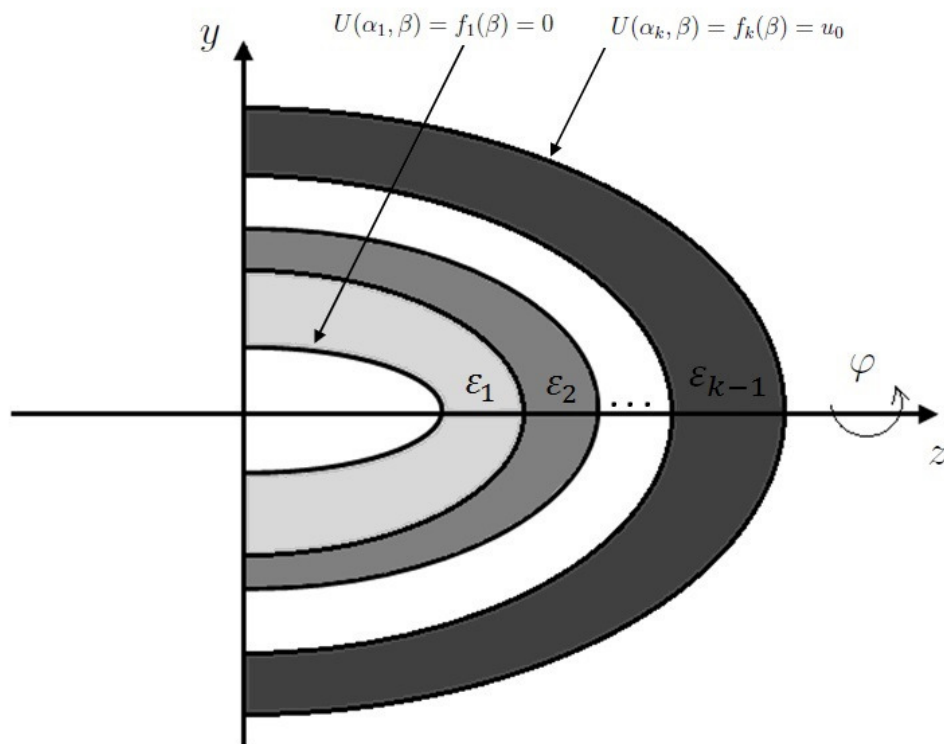


Рис. 2.2. Схематическое изображение эллиптической диодной системы с прослойкой из $k - 1$ диэлектриков..

2.2.2 Математическая модель системы с различными диэлектриками

Так же как и в предыдущей главе решается уравнение Лапласа (1.1) с граничными условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\alpha_1, \beta) = f_1(\beta) = 0, \\ U(\alpha_k, \beta) = f_k(\beta) = u_0, \\ U_i(\alpha_{i+1}, \beta) = U_{i+1}(\alpha_{i+1}, \beta), \quad i = \overline{1, k-2}, \\ \mathbf{D}_{\mathbf{n}(i)}|_{\alpha=\alpha_{i+1}} = \mathbf{D}_{\mathbf{n}(i+1)}|_{\alpha=\alpha_{i+1}}, \quad i = \overline{1, k-2}, \\ U(\alpha_i, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad i = \overline{1, k-1}. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Предполагается, что U не зависит от угла φ (осесимметричная задача). Уравнение Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения для рассматриваемой задачи имеет вид (1.6).

2.2.3 Решение граничной задачи

Рассмотрим общий случай с прослойкой из n слоёв (граничные условия (2.21)).

$$\begin{aligned} grad_{\alpha} U_i(\alpha, \beta) &= \frac{1}{c\sqrt{\sin^2 \beta + \text{sh}^2 \alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) \frac{2n+2}{\text{sh} \alpha} \times \\ &\times \left[a_{2n+1} \frac{Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_{i+1}) [P_{2n+2}(\text{ch} \alpha) - \text{ch} \alpha P_{2n+1}(\text{ch} \alpha)] -}{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_i) Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_{i+1}) -} \right. \\ &\quad \left. - P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_{i+1}) [Q_{2n+2}(\text{ch} \alpha) - \text{ch} \alpha Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha)] \right] + \\ &\quad \frac{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_{i+1}) Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_i)}{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_i) Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_{i+1}) -} \\ &+ b_{2n+1} \frac{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_i) [Q_{2n+2}(\text{ch} \alpha) - \text{ch} \alpha Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha)] -}{P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_i) Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_{i+1}) -} \\ &\quad \left. \frac{-Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_i) [P_{2n+2}(\text{ch} \alpha) - \text{ch} \alpha P_{2n+1}(\text{ch} \alpha)]}{-P_{2n+1}(\text{ch} \alpha_{i+1}) Q_{2n+1}(\text{ch} \alpha_i)} \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Граничное условие $\mathbf{D}_{\mathbf{n}(i)}|_{\alpha=\alpha_{i+1}} = \mathbf{D}_{\mathbf{n}(i+1)}|_{\alpha=\alpha_{i+1}}$ можно переписать в виде

$$\varepsilon_i grad U_i|_{\alpha=\alpha_{i+1}} = \varepsilon_{i+1} grad U_{i+1}|_{\alpha=\alpha_{i+1}}. \quad (2.23)$$

Подставив значения градиента (2.22) в (2.23), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) \frac{2n+2}{\operatorname{sh} \alpha} [a_{2n+1}^i x_1^i + b_{2n+1}^i x_2^i] = \\ = \varepsilon_{i+1} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) \frac{2n+2}{\operatorname{sh} \alpha} [a_{2n+1}^{i+1} x_1^{i+1} + b_{2n+1}^{i+1} x_2^{i+1}], \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $i = \overline{1, k-2}$.

$$\begin{aligned} x_1^i &= \frac{Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) [P_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)] -}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) -} \\ &\quad \frac{-P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) [Q_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)]}{-P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i)}, \\ x_2^i &= \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i) [Q_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)] -}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) -} \\ &\quad \frac{-Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i) [P_{2n+2}(\operatorname{ch} \alpha) - \operatorname{ch} \alpha P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)]}{-P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i)}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Произведя умножение (2.24) на $\sin(\beta) P_k(\cos \beta)$ и проинтегрировав по аргументу β в пределах $\beta \in [0, \pi]$, приходим к выражению

$$\varepsilon_i [a_{2n+1}^i x_1^i + b_{2n+1}^i x_2^i] = \varepsilon_{i+1} [a_{2n+1}^{i+1} x_1^{i+1} + b_{2n+1}^{i+1} x_2^{i+1}]. \quad (2.26)$$

Из граничных условий (1.21): $U_i(\alpha_{i+1}, \beta) = U_{i+1}(\alpha_{i+1}, \beta)$ следует, что

$$b_{2n+1}^i = a_{2n+1}^{i+1}, \quad i = \overline{1, k-2}.$$

В итоге получается система для нахождения неизвестных коэффициентов:

$$\varepsilon_i [a_{2n+1}^i x_1^i + b_{2n+1}^i x_2^i] = \varepsilon_{i+1} [a_{2n+1}^{i+1} x_1^{i+1} + b_{2n+1}^{i+1} x_2^{i+1}]. \quad (2.27)$$

Систему (2.27) можно переписать в матричном виде

$$Ay = B, \quad (2.28)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_2^1 - \varepsilon_2 x_1^2 & -\varepsilon_2 x_2^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 x_1^2 & \varepsilon_2 x_2^2 - \varepsilon_3 x_1^3 & -\varepsilon_3 x_2^3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 x_1^3 & \varepsilon_3 x_2^3 - \varepsilon_4 x_1^4 & -\varepsilon_4 x_2^4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{k-2} x_1^{k-2} & \varepsilon_{k-2} x_2^{k-2} - \varepsilon_{k-1} x_1^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 a_{2n+1}^1 x_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_{k-1} b_{2n+1}^{k-1} x_2^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\dim(A) = (k-2) \times (k-2), \dim(B) = k-2,$$

y — вектор неизвестных коэффициентов

$$y = \begin{pmatrix} b_{2n+1}^1 \\ b_{2n+1}^2 \\ \vdots \\ b_{2n+1}^{k-2} \end{pmatrix},$$

a_{2n+1}^1 и b_{2n+1}^{k-1} — известные коэффициенты, которые находятся из первых двух выражений граничных условий (2.21). Откуда следует, что

$$\begin{aligned} a_{2n+1}^1 &= 0, \\ b_{2n+1}^{k-1} &= \frac{u_0(-1)^n(4n+3)(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!}, \quad n \in [0, \infty] \quad (\text{см. (1.23)}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Решением системы (2.27) для случая с двойной прослойкой ($k=3$) является значение неизвестного коэффициента b^1 :

$$b_{2n+1}^1 = \frac{\varepsilon_2 b_{2n+1}^2 x_2^2 - \varepsilon_1 a_{2n+1}^1 x_1^1}{\varepsilon_1 x_2^1 - \varepsilon_2 x_1^2}. \quad (2.30)$$

Решением системы (2.27) для случая с прослойкой из трёх диэлектриков ($k=4$), являются значения неизвестных коэффициентов b_{2n+1}^1 и b_{2n+1}^2 :

$$\begin{aligned} b_{2n+1}^1 &= \frac{x_1^1 a_{2n+1}^1 \varepsilon_1 (\varepsilon_3 - \varepsilon_2 x_2^2) + \varepsilon_3 b_{2n+1}^3 x_2^3 x_2^2}{\varepsilon_2 \varepsilon_3 x_1^2 + x_2^1 (\varepsilon_1 \varepsilon_2 x_2^2 - \varepsilon_3)}, \\ b_{2n+1}^2 &= \frac{b_{2n+1}^1 (\varepsilon_1 x_2^1 - \varepsilon_2 x_1^2) + \varepsilon_1 a_{2n+1}^1 x_1^1}{x_2^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

При дальнейшем увеличении количества прослоек между катодом и анодом выражения для нахождения неизвестных коэффициентов выглядят ещё более громоздко, поэтому можно использовать метод трёх-диагональной прогонки для решения системы (2.28) [14]. Пусть элементы

главной диагонали матрицы A — η_i , верхней — σ_i , нижней — ρ_i , и пусть $\rho_1 = \sigma_{k-2} = 0$; $i = \overline{1, k-2}$.

$$\eta = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 x_2^1 - \varepsilon_2 x_1^2 \\ \varepsilon_2 x_2^2 - \varepsilon_3 x_1^3 \\ \vdots \\ \varepsilon_i x_2^i - \varepsilon_{i+1} x_1^{i+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{k-2} x_2^{k-2} - \varepsilon_{k-1} x_1^{k-1} \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} -\varepsilon_2 x_2^2 \\ -\varepsilon_3 x_1^3 \\ \vdots \\ -\varepsilon_i x_2^i \\ \vdots \\ -\varepsilon_{k-2} x_2^{k-2} \\ 0 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 x_1^2 \\ \varepsilon_3 x_1^3 \\ \vdots \\ \varepsilon_i x_1^i \\ \vdots \\ \varepsilon_{k-2} x_1^{k-2} \end{pmatrix}.$$

Прогоночные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\varepsilon_2 x_2^2}{\varepsilon_1 x_2^1 - \varepsilon_2 x_1^2}, \quad \delta_{k-2} = 0, \\ \delta_i &= \frac{\varepsilon_i x_2^i}{\varepsilon_i x_1^i + (\varepsilon_i x_2^i - \varepsilon_{i+1} x_1^{i+1})}, \\ \lambda_1 &= \frac{\varepsilon_1 a^1 x_1^1}{\varepsilon_1 x_2^1 - \varepsilon_2 x_1^2}, \quad \lambda_{k-2} = \frac{b^{k-1} \varepsilon_{k-1} x_2^{k-1} - \varepsilon_{k-2} x_1^{k-2} \lambda_{k-3}}{\varepsilon_{k-2} x_1^{k-2} \delta_{k-3} + \varepsilon_{k-2} x_2^{k-2} - \varepsilon_{k-1} x_1^{k-1}}, \\ \lambda_i &= \frac{-\varepsilon_i x_1^i \lambda_{i-1}}{\varepsilon_i x_1^i \delta_{i-1} + \varepsilon_i x_2^i - \varepsilon_{i+1} x_1^{i+1}}, \quad i = \overline{2, k-3}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Решение системы (2.28) находится следующим образом

$$\begin{aligned} y_{k-2} &= \lambda_{k-2}, \\ y_i &= \delta_i y_{i+1} + \lambda_i, \quad i = \overline{k-3, 1}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Достаточное условие корректности и устойчивости метода [14]

Пусть:

- 1) $\rho_i, \sigma_i \neq 0$ для любого $i = \overline{2, k-3}$,
- 2) для любого i : $|\eta_i| > |\rho_i| + |\sigma_i|$,

тогда прогонка является корректной и устойчивой.

Таким образом значение потенциала в рассматриваемой области имеет значение

$$\begin{aligned}
U_1(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) \times \\
&\times \left[a_{2n+1}^1 \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)} + \right. \\
&\left. + b_{2n+1}^1 \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_1)} \right], \quad (2.34)
\end{aligned}$$

где $a_{2n+1}^1 = 0$;

$$\begin{aligned}
U_i(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos \beta) \times \\
&\times \left[b_{2n+1}^{i-1} \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_2) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i)} + \right. \\
&\left. + b_{2n+1}^i \frac{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i)}{P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) - P_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_{i+1}) Q_{2n+1}(\operatorname{ch} \alpha_i)} \right], \quad (2.35)
\end{aligned}$$

где $i = \overline{2, k-1}$, а коэффициенты b_{2n+1}^i находятся по формуле (2.33).

2.3 Результаты численных расчётов

Для решения задачи была написана программа на языке C Sharp в среде программирования Microsoft Visual Studio.

Область значений α и β , в которой производился расчёт: $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3]$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. В ДПСК $z \in [z_1, z_2]$, $z \in [z_2, z_3]$.

Параметры системы имеют значения:

$u = 100$ — постоянное напряжение на аноде;

ε_i ($i = \overline{1, k-1}$), $\varepsilon_1 = 1$ — диэлектрические проницаемости прослоек;

$z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$, $c = 0,9$, тогда $\alpha_1 = 0,96$, $\alpha_2 = 1,54$, $\alpha_3 = 1,92$ (формула (1.25)).

Также в программе задаются:

m — количество разбиений отрезков $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_3]$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$;

max — наивысшая степень полиномов P_{max} и Q_{max} ($m = 25$, $max = 5$).

По результатам работы программы построены графики распределения электростатического потенциала (рис. 2.3, 2.4, 2.5).

Заключение к главе 2

В ходе проделанной работы:

1. найдено распределение электрического потенциала в виде разложения по полиномам Лежандра для модели острейного катода с прослойкой из n диэлектриков (2.35) с граничными условиями (2.21);
2. написана программа на языке C Sharp для нахождения численного решения задачи;
3. построены графики распределения электрического потенциала для систем с прослойкой из двух диэлектриков с разными диэлектрическими проницаемостями (рис. 2.3, 2.4, 2.5).

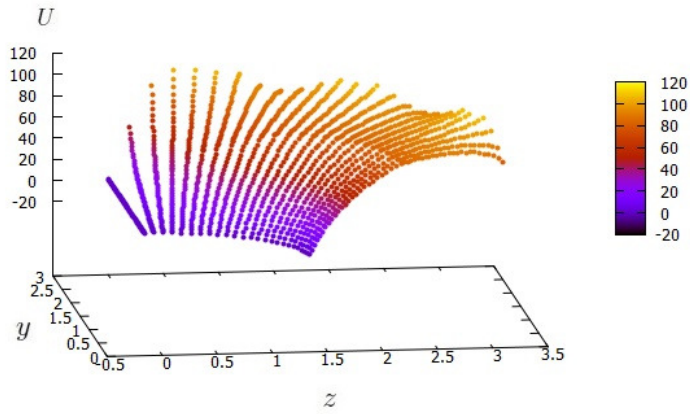


Рис. 2.3. Распределение электростатического потенциала $U(y, z)$ для системы с двойной прослойкой ($\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 2$)..

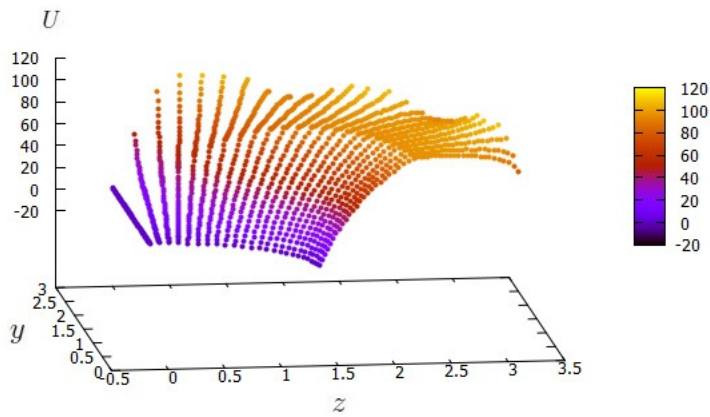


Рис. 2.4. Распределение электростатического потенциала $U(y, z)$ для системы с двойной прослойкой ($\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 10$)..

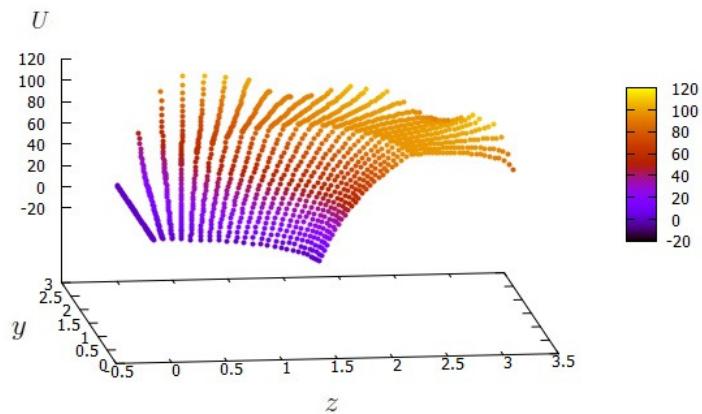


Рис. 2.5. Распределение электростатического потенциала $U(y, z)$ для системы с двойной прослойкой ($\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = 20$)..

Заключение

1. В данной работе представлены физическая и математическая модели полевого острья, а именно: диодная система, состоящая из катода и анода в форме полуэллипсоидов. Катод расположен на плоской подложке (п.1.1).
2. Рассмотрены физическая и математическая модели полевого катода с двойной прослойкой из сред с разными диэлектрическими проницаемостями (п.2.1., п.2.2).
3. Найдено распределение электрического потенциала в виде разложения по полиномам Лежандра для модели острийного катода (1.24) с граничными условиями (1.2).
4. Найдены распределения электрического потенциала U_1 (2.8) и U_2 (2.10) в областях с разными диэлектрическими проницаемостями с граничными условиями (2.1) для системы с двойной прослойкой.
5. Найдены распределения электрического потенциала U_1 (2.34) и U_i (2.35) в областях с разными диэлектрическими проницаемостями с граничными условиями (2.21) для системы с прослойкой из $k - 1$ диэлектриков.

При решении задач был использован метод разделения переменных для уравнения Лапласа в координатах вытянутого эллипсоида вращения (п.1.3, п.2.1.3, п.2.2.3). В соответствии с аналитическими решениями написана программа для расчёта систем с конкретными параметрами. Полученные численные значения (п.1.4, п.2.3) соответствуют граничным условиям (1.2), (2.1) и совпадают с качественно ожидаемым распределением потенциала.

Литература

- [1] Елинсон М. И., Васильев Г. Ф. Автоэлектронная эмиссия. М.: Физматлит, 1958. 272 с.
- [2] Гусинский Г. М., Баранова Л. А., Найденов В. О. Субмикронный источник свободных электронов // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 3. С. 129–132.
- [3] Yunhan Li, Yonghai Sun, J T W Yeow. Nanotube field electron emission: principles, development, and applications // IOPscience. 2015. Vol. 26, No 242001. P. 1–23.
- [4] Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Мутул М. Г., Чэ-Чоу Шень. Расчёт электростатического потенциала диодной системы на основе полевого катода с острой кромкой // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. Вып. 5. С. 1–4.
- [5] Виноградова Е. М., Егоров Н. В. Математическое моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 9. С. 1–5.
- [6] Климаков А. А., Виноградова Е. М. Оптимизация фокусирующей системы полевой пушки с острым катодом // Процессы управления и устойчивость. 2015. № 1. С. 184–189.
- [7] Телевный Д. С., Виноградова Е. М. Расчёт диодной системы на основе полевого эмиттера с диэлектрической подложкой // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1 (17). С. 224–229.

- [8] Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Климаков А. А. Математическое моделирование диодной системы с полевым остриём цилиндрической формы // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 2. С. 20–23.
- [9] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
- [10] Листрукова А. В., Виноградова Е. М. Математическое моделирование эмиссионной системы // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1 (17). С. 185–190.
- [11] Устинов Р. Н., Виноградова Е. М. Математическое моделирование электронно-оптической системы с диэлектрической диафрагмой конечной толщины // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1 (17). С. 236–241.
- [12] Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
- [13] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [14] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 439 с.