

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ
КАФЕДРА УПРАВЛЕНИЯ МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Соснина Мария Борисовна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Модель эпидемической волны

Направление 010400.62

Прикладная математика и информатика

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Александров А.Ю.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Колесин И.Д.

Рецензент,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Колпак Е.П.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение.....	3
Постановка задачи.....	4
Обзор литературы.....	8
Глава 1. Случай двух городов.....	10
1.1. Поиск ограничений.....	10
1.2. Задание начальных данных.....	10
Глава 2. Случай трёх городов.....	11
1.1. Поиск ограничений.....	11
1.2. Задание начальных данных.....	12
Глава 3. Случай четырёх городов.....	14
1.1. Поиск ограничений.....	14
1.2. Задание начальных данных.....	16
Выводы.....	18
Заключение.....	19
Список литературы.....	20
Приложение.....	21

Введение

Эпидемии, охватывающие земной шар, называются пандемиями. Пандемии гриппа А возникают вследствие генетической изменчивости вируса. Как показывают наблюдения, новые пандемические варианты вируса гриппа А чаще рождаются в Юго-Восточной Азии и проникают в Россию через контакты жителей Дальнего Востока и приграничных областей [1]. Дальнейшее распространение нового варианта осуществляется частично через общение восприимчивых жителей с уже инфицированными, частично через транспортные потоки. При определённых условиях возникает эпидемическая волна, продвигающаяся в направлении Урала, а затем к центру России [2]. Это движение моделировалось группой математиков во главе с академиком О.В. Барояном [3]. Цель моделирования состояла в получении возможности заблаговременного предупреждения городских властей и санитарно-эпидемиологических служб о надвигающейся опасности. При этом сугубо практическая цель моделирования не предусматривала изучения условий сопряжения отдельных сторон эпидемического процесса. В частности, не исследовался вопрос об условиях возникновения бегущей волны и необходимой для этого взаимосвязи транспортных потоков. Также не ставилась и задача управления движением волны. Между тем, изучение этих вопросов необходимо для более полного представления о пространственно-временных особенностях развития эпидемических процессов и особенностях управления ими. В связи с этим, было решено выполнить теоретическое исследование, результатом которого стало бы получение нужных условий для возникновения волны. В данной работе делается попытка разрешить поставленные вопросы в рамках классических моделей типа SIR с дополнением их транспортными потоками [4]. В соответствии с этим, требуется построить дискретную модель, воспроизводящую движение волны и найти ограничения на интенсивность транспортных потоков, обеспечивающих её возникновение.

Постановка задачи

Рассмотрим сначала случай одного города. Применяя системный подход к построению простейшей модели эпидемии, ограничимся учетом только трех групп индивидов: восприимчивые, зараженные, иммунные. Пусть S , I , R - численности этих групп. Составим уравнение постоянства общей численности всех групп $S + I + R = H = const$. Выберем механизм заражения "через встречу восприимчивого с зараженным". Тогда развитие эпидемии будет описываться уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} = \beta I, \end{cases}$$

$$\beta = 1/T, \quad S(0) = S^0 > 0, \quad I(0) = I^0 > 0, \quad R(0) = R^0 \geq 0,$$

T – характерная длительность болезни.

Условием возникновения эпидемии в начальный момент времени $t=0$ является положительная производная $\frac{dI}{dt}$, вычисленная в этот момент времени:

$$\frac{dI}{dt}(0) > 0 \text{ или } \alpha S(0)I(0) - \beta I(0) > 0.$$

Теперь рассмотрим случай n городов. В качестве модели территориального расположения городов, через которые проходит эпидемическая волна, берётся последовательность n точек на прямой, где i -ая точка соответствует i -ому городу. Транспортные потоки как переносчики инфекции связывают каждую точку со всеми другими, различаясь интенсивностями переноса. Для упрощения анализа предположим, что города идентичны друг другу по численности населения, транспортному обслуживанию и внутригородскому перемешиванию населения, а прямые контакты жителей одного города с другим, кроме как через транспорт, отсутствуют. Перемещение жителей из города в город будем полагать убывающим по интенсивности по мере удаления гостевого города от

исходного. Учитывая такой характер перемещений, зададим симметричную матрицу интенсивностей перемещений P с убывающими по обе стороны от диагоналей строчными элементами:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_{12} > p_{13} > \cdots > p_{1n} > 0,$$

$$p_{21} > p_{23} > \cdots > p_{2n} > 0, \quad p_{ij} = p_{ji}, i \neq j$$

...

Кроме того, потребуем $p_{ij} = p_{i+1, j}$, $i, j = 1, 2, \dots$, что эквивалентно сдвигу $(i+1)$ -ой строки относительно i -ой на один элемент вправо. Этим задаётся идентичность транспортного обслуживания n городов. Пусть S_i , I_i , R_i - соответственно число восприимчивых, инфицированных и иммунных лиц в i -ом городе, H_i - общее их число. Без учёта транспортных связей развитие эпидемии в i -ом городе носило бы локальный характер, допуская классическое описание через контакты восприимчивых с инфицированными:

$$\frac{dS_i}{dt} = -aI_iS_i, \quad \frac{dI_i}{dt} = aI_iS_i - \beta I_i, \quad \frac{dR_i}{dt} = \beta I_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\beta = 1/T$, T - характерная длительность болезни. Для включения в эту модель транспортных потоков необходимо принять дополнительные предположения относительно доли инфицированных лиц среди перемещающейся части населения. Это особенно важно в случае удалённых друг от друга городов, когда транспортные потоки выполняют основную роль в распространении инфекции. Предположим, что структура контингента лиц, перемещающихся из i -ого города в j -ый (S_{ij}, I_{ij}, R_{ij}) , повторяет в определённой пропорции структуру населения i -ого города:

$$S_{ij} : I_{ij} : R_{ij} = S_i : I_i : R_i.$$

Введём коэффициент пропорциональности δ_{ij} ($0 < \delta_{ij} < 1$), отражающий отношение вместимости транспортных средств, связывающий i -ый город с j -

м, к числу жителей i -ого города. Тогда интенсивность транспортного потока из i -ого города в j -ый с учётом $S_i + I_i + R_i = H_i$ получит выражение:

$$p_{ij} = S_{ij} + I_{ij} + R_{ij} = \delta_{ij}S_{ij} + \delta_{ij}I_{ij} + \delta_{ij}R_{ij} = \delta_{ij}H_{ij}.$$

Аналогично для p_{ji} . В этом случае количественное изменение структуры населения i -ого и j -ого городов за счёт притока и оттока жителей за единицу времени $\Delta t = 1$ составит:

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= -\delta_{ij}S_i + \delta_{ji}S_j, & \Delta I_i &= -\delta_{ij}I_i + \delta_{ji}I_j, & \Delta R_i &= -\delta_{ij}R_i + \delta_{ji}R_j, \\ \Delta S_j &= \delta_{ij}S_i - \delta_{ji}S_j, & \Delta I_j &= \delta_{ij}I_i - \delta_{ji}I_j, & \Delta R_j &= \delta_{ij}R_i - \delta_{ji}R_j, \\ S_i + I_i + R_i &= -\delta_{ij}H_i + \delta_{ji}H_j, & S_j + I_j + R_j &= \delta_{ij}H_i - \delta_{ji}H_j. \end{aligned}$$

Вместе с тем, количественные изменения эпидемиологического характера за тот же отрезок времени $\Delta t = 1$ составят:

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= -a_i \left(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_j \right) S_i, & \Delta I_i &= a_i \left(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_j \right) S_i - \beta I_i, & \Delta R_i &= \beta I_i, \\ \Delta S_j &= -a_j \left(I_j + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} I_j \right) S_j, & \Delta I_j &= a_j \left(I_j + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} I_j \right) S_j - \beta I_j, & \Delta R_j &= \beta I_j. \end{aligned}$$

Объединяя транспортные изменения с эпидемиологическими и переходя к дифференциальным уравнениям, получим следующую модель развития пространственно-временного процесса в системе из n городов:

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = -a_i(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_j)S_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} S_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} S_j, \\ \frac{dI_i}{dt} = a_i(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_j)S_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} I_j - \beta I_i, \\ \frac{dR_i}{dt} = \beta I_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} R_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} R_j. \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что в момент времени $t=0$ в каждом из n городов уже имеется некоторое количество инфицированных и задано начальное распределение инфицированных лиц по n городам:

$$t = 0: I_i(0) > 0, i = \overline{1, n}.$$

Далее предположим, что в первом городе число инфицированных лиц больше, чем в других:

$$I_1(0) > I_i(0), \quad i = \overline{2, n}. \quad (2)$$

Будем полагать, что в первом городе в начальный момент времени выполняется условие начала эпидемии:

$$t = 0: \frac{dI_1}{dt}(0) > 0, \quad \frac{dI_i}{dt}(0) < 0, \quad i = \overline{2, n}. \quad (3)$$

Требуется найти такие условия на интенсивность транспортных потоков δ_{ij} , при которых для системы (1) выполняются условия (2) и (3).

Задача состоит в нахождении ограничений для δ_{ij} , обеспечивающих выполнение условий (2) и (3): $0 < \delta_{ij} < \widehat{\delta}_{ij}$.

Найдём последовательно решение задачи (1)-(3) для случая двух городов, а затем для случаев трёх и четырёх.

Обзор литературы

История количественных наблюдений за развитием эпидемий идёт с конца 19 века. Исторически первая математическая модель эпидемии была создана в 1927 году У. Кермаком и А. Маккендриком и описана в статье «A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics». Учёные предложили модель для одного города с населением, неизменным во времени по численности. Ими было предложено все население рассматриваемого города разделить на три группы: индивиды, которые восприимчивы к данной болезни, но здоровы («восприимчивые», susceptible) — $S(t)$; зараженные индивиды («инфицированные», infected) — $I(t)$; и здоровые индивиды, обладающие иммунитетом к данной болезни («выздоровевшие», recovered) — $R(t)$. Это детерминированная модель, в которой механизм заражения реализуется через встречи восприимчивых с зараженными. Множество моделей подобного типа, но с разным числом взаимодействующих групп исследовалось в 80-е годы.

Движение эпидемической волны по территории СССР с захватом большого числа городов моделировалось группой математиков во главе с академиком О.В. Барояном в работе «Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР». Учёными была разработана новая методология математического моделирования эпидемий. Данная методология основана на методе научной аналогии в отображении эпидемического процесса (процесс «переноса» возбудителя инфекции от больных к здоровым) с процессом «переноса» материи (энергии, импульса и др.) в уравнениях математической физики. Система уравнений, которая описывает развитие эпидемического процесса, представляет собой систему нелинейных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями, весьма «схожими» с уравнениями гидродинамики.

С применением этой методологии в 60-70-е годы были разработаны уникальные модели эпидемий гриппа для территории СССР, которые составлены на основе основных проходящих стадий состояния инфекционного процесса типа SIR, где S -восприимчивые, I - инфицированные больные, R – переболевшие.

Цель моделирования состояла в получении возможности заблаговременного предупреждения городских властей и санитарно-эпидемиологических служб о надвигающейся опасности. При этом сугубо практическая цель моделирования не предусматривала изучения условий сопряжения отдельных сторон эпидемического процесса. В частности, не исследовался вопрос об условиях возникновения бегущей волны и необходимой для этого взаимосвязи транспортных потоков. Также не ставилась и задача управления движением волны.

В настоящее время создано множество различных моделей эпидемий. Многие из них описаны в учебном пособии Колесина И.Д. и Житковой Е.М. «Математические модели эпидемий» [5].

Глава 1. Случай двух городов

1.1. Поиск ограничений

Уравнения, описывающие изменение количества инфицированных лиц за единицу времени $\Delta t = 1$, для случая двух городов имеют вид:

$$\frac{dI_1}{dt} = a(I_1 + \delta_{21}I_2)S_1 - \delta_{12}I_1 + \delta_{21}I_2 - \beta I_1,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = a(I_2 + \delta_{12}I_1)S_2 - \delta_{21}I_2 + \delta_{12}I_1 - \beta I_2.$$

Пусть для каждого из двух городов выполняется условие (2). Для выполнения условия (3) потребуем

$$a(I_1 + \delta_{21}I_2)S_1 - \delta_{12}I_1 + \delta_{21}I_2 - \beta I_1 > 0,$$

$$a(I_2 + \delta_{12}I_1)S_2 - \delta_{21}I_2 + \delta_{12}I_1 - \beta I_1 < 0.$$

Учитывая симметричность матрицы интенсивности перемещений, примем $\delta_{12} = \delta_{21}$. Из первого неравенства следует:

$$\delta_{12} > \frac{I_1(\beta - \alpha S_1)}{\alpha S_1 I_1 - I_1 + I_2}.$$

Из второго неравенства следует:

$$\delta_{12} < \frac{I_2(\beta - \alpha S_2)}{\alpha S_2 I_1 - I_2 + I_1}.$$

Объединяя, получим следующее ограничение на выбор δ_{12} и δ_{21} :

$$\frac{I_1(\beta - \alpha S_1)}{\alpha S_1 I_1 - I_1 + I_2} < \delta_{12} < \frac{I_2(\beta - \alpha S_2)}{\alpha S_2 I_1 - I_2 + I_1}.$$

1.2. Задание начальных данных

Для нахождения конкретных значений для δ_{12} и δ_{21} зададим следующие начальные данные, удовлетворяющие условию (2): $\beta = 0,1$, $\alpha = 0,00025$, $S_1 = 900$, $I_1 = 100$, $R_1 = 0$, $S_2 = 950$, $I_2 = 50$, $R_2 = 0$.

В соответствии с выбранными данными, получим следующий интервал для выбора δ_{12} и δ_{21} :

$$0.016 < \delta_{12} < 0.434.$$

Выберем $\delta_{12} = \delta_{21} = 0,03$, удовлетворяющее полученному ограничению.

Модель эпидемии для случая двух городов с учётом полученных данных была реализована в программе Matlab (см. Приложение). Результат данного практического эксперимента наглядно представлен на Рис.1.

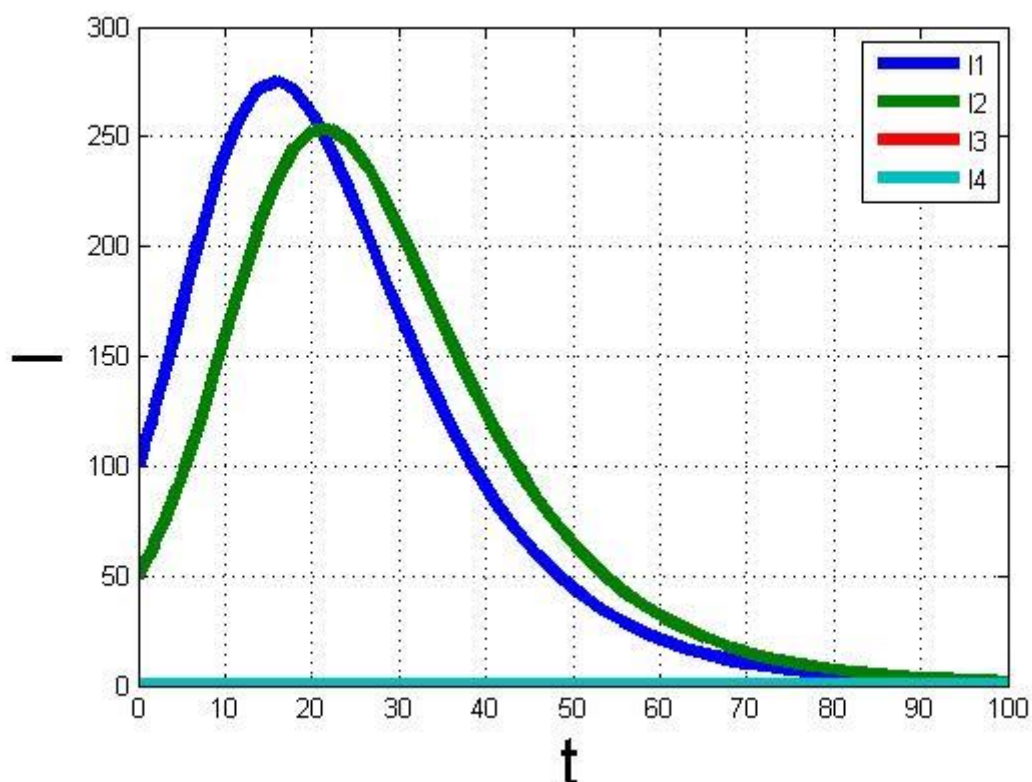


Рисунок 1.

На рисунке показано, что в первом городе возникает эпидемия, достигает своего пика при $t=15$, а затем наступает спад. Эпидемия во втором городе возникает практически одновременно с первым, задержка составляет несколько дней. При этом общее количество инфицированных во втором городе меньше, чем в первом. В первом городе наступает процесс выздоровления, и количество инфицированных лиц уменьшается. Затем процесс выздоровления происходит и во втором городе.

Глава 2. Случай трёх городов

2.1. Поиск ограничений

Уравнения, описывающие изменение количества инфицированных лиц за единицу времени $\Delta t = 1$, для случая трёх городов имеют вид:

$$\frac{dI_1}{dt} = a(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 - \beta I_1,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = a(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 - \beta I_2,$$

$$\frac{dI_3}{dt} = a(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 - \beta I_3.$$

Пусть выполняется условие (2). Для выполнения условия (3) потребуем

$$a(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 - \beta I_1 > 0,$$

$$a(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 - \beta I_2 < 0,$$

$$a(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 - \beta I_3 < 0.$$

Учитывая симметричность матрицы интенсивности перемещений, примем $\delta_{13} = \delta_{31}$, $\delta_{23} = \delta_{32}$. Из первого неравенства следует:

$$\delta_{13} > \frac{-\alpha I_1 S_1 - \alpha I_2 S_1 \delta_{12} + \beta I_1}{\alpha S_1 I_3 - I_1 + I_3}.$$

Из второго неравенства следует:

$$\delta_{23} < \frac{-\alpha I_2 S_2 - \alpha I_2 S_2 \delta_{12} + I_2 \delta_{12} + I_1 \delta_{12} + \beta I_2}{\alpha S_2 I_3 - I_2 + I_3}.$$

Из третьего неравенства следует:

$$\delta_{13} < \frac{-\alpha I_3 S_3 - \alpha I_2 S_3 \delta_{23} + I_3 \delta_{32} - I_2 \delta_{23} + \beta I_3}{\alpha S_3 I_3 - I_3 + I_1}$$

Объединяя, получим следующие ограничения на выбор δ_{13} , δ_{31} , δ_{23} и δ_{32} :

$$\frac{-\alpha I_1 S_1 - \alpha I_2 S_1 \delta_{12} + \beta I_1}{\alpha S_1 I_3 - I_1 + I_3} < \delta_{13} < \frac{-\alpha I_3 S_3 - \alpha I_2 S_3 \delta_{23} + I_3 \delta_{32} - I_2 \delta_{23} + \beta I_3}{\alpha S_3 I_3 - I_3 + I_1},$$

$$0 < \delta_{23} < \frac{-\alpha I_2 S_2 - \alpha I_2 S_2 \delta_{12} + I_2 \delta_{12} + I_1 \delta_{12} + \beta I_2}{\alpha S_2 I_3 - I_2 + I_3}.$$

2.2. Задание начальных данных

Для нахождения конкретных значений для δ_{13} , δ_{31} , δ_{23} и δ_{32} зададим следующие начальные данные для третьего города, удовлетворяющие условию (2): $S_3 = 985$, $I_3 = 15$, $R_3 = 0$. Используем начальные данные для

первых двух городов, введённые ранее, и выбранное значение для $\delta_{12} = \delta_{21} = 0,03$.

В соответствии с введёнными и ранее полученными данными, получим интервал для выбора δ_{23} и δ_{32} :

$$0 < \delta_{23} < 0,891.$$

Принимая во внимание, что матрица перемещений – симметричная матрица с убывающими по обе стороны от диагоналей элементами, выберем $\delta_{23} = \delta_{32} = 0,01$, удовлетворяющие полученному ограничению.

Аналогично получим следующий интервал для выбора δ_{13} и δ_{31} , используя при его расчёте выбранное значение для $\delta_{23} = \delta_{32} = 0,01$:

$$-0.037 < \delta_{13} < 0,628.$$

Учитывая ранее обозначенные ограничения на δ_{ij} ($0 < \delta_{ij} < 1$) получим:

$$0 < \delta_{13} < 0,628.$$

Так как матрица перемещений – симметричная матрица с убывающими по обе стороны от диагоналей элементами, выберем $\delta_{13} = \delta_{31} = 0,1$, удовлетворяющие полученному выше ограничению.

Результат реализации модели для случая трёх городов в программе Matlab представлен на Рис.2. На этом рисунке показано, что вспышка эпидемии в третьем городе возникает не сразу после вспышки во втором, требуется некоторое время для того, чтобы количество инфицированных лиц в третьем городе возросло. Об этой особенности говорит более плавное возрастание графика для третьего города. Уровень вспышки в третьем городе заметно ниже, чем в двух предыдущих. Это можно объяснить меньшим количеством инфицированных в этом городе.

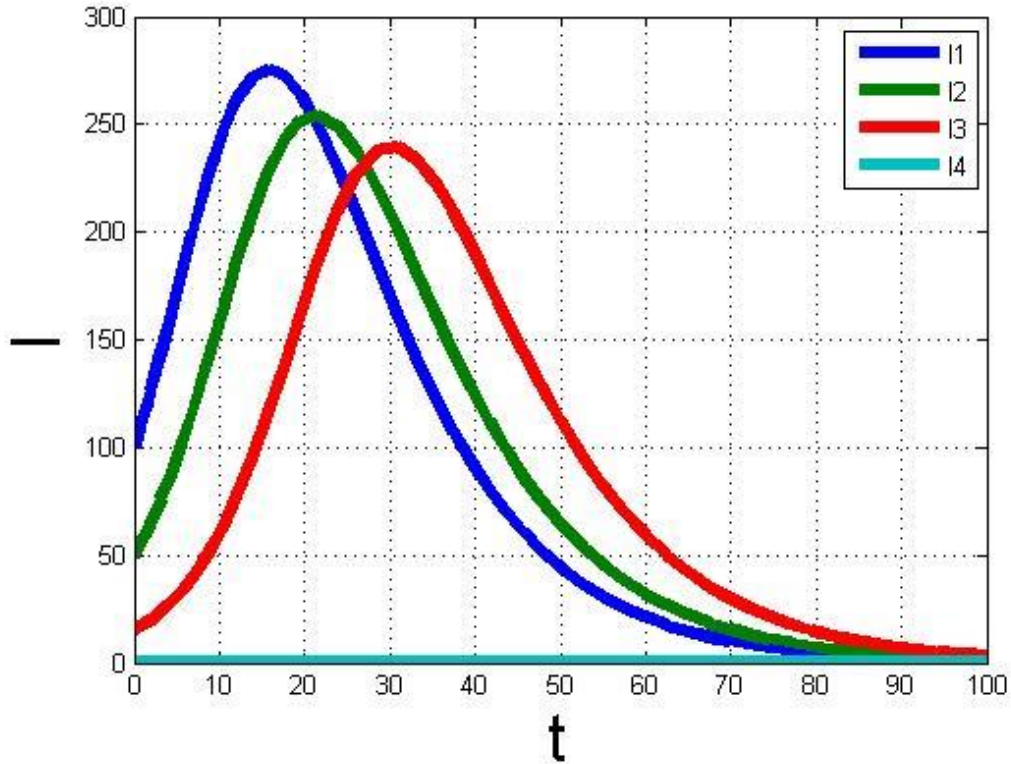


Рисунок 2.

Глава 3. Случай четырёх городов

3.1. Поиск ограничений

Уравнения, описывающие изменение количества инфицированных лиц за единицу времени $\Delta t = 1$, для случая четырёх городов имеют вид:

$$\frac{dI_1}{dt} = a(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 - \delta_{14}I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4 - \beta I_1,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = a(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 - \delta_{24}I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4 - \beta I_2,$$

$$\frac{dI_3}{dt} = a(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 - \delta_{34}I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4 - \beta I_3,$$

$$\frac{dI_4}{dt} = a(I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3)S_4 - \delta_{41}I_4 - \delta_{42}I_4 + \delta_{43}I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3 - \beta I_4.$$

Пусть выполняется условие (2). Для выполнения условия (3) потребуем

$$a(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 - \delta_{14}I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4 - \beta I_1 > 0,$$

$$a(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 - \delta_{24}I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4 - \beta I_2 < 0,$$

$$a(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 - \delta_{34}I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4 - \beta I_3 < 0,$$

$$a(I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3)S_4 - \delta_{41}I_4 - \delta_{42}I_4 + \delta_{43}I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3 - \beta I_4 < 0.$$

Учитывая симметричность матрицы интенсивности перемещений, примем $\delta_{14} = \delta_{41}$, $\delta_{24} = \delta_{42}$, $\delta_{34} = \delta_{43}$. Из первого неравенства следует:

$$\delta_{14} > \frac{-\alpha I_1 S_1 - \alpha I_2 S_1 \delta_{21} - \alpha I_3 S_1 \delta_{31} + I_1 \delta_{12} - I_1 \delta_{13} + I_2 \delta_{21} + I_3 \delta_{31} + \beta I_1}{\alpha S_1 I_4 + I_4 - I_1}.$$

Из второго неравенства следует:

$$\delta_{24} < \frac{-\alpha I_1 S_1 - \alpha I_2 S_1 \delta_{21} - \alpha I_3 S_1 \delta_{31} + I_1 \delta_{12} - I_1 \delta_{13} + I_2 \delta_{21} + I_3 \delta_{31} + \beta I_1}{\alpha S_1 I_4 + I_4 - I_1}.$$

Из третьего неравенства следует:

$$\delta_{34} < \frac{-\alpha I_1 S_1 - \alpha I_2 S_1 \delta_{21} - \alpha I_3 S_1 \delta_{31} + I_1 \delta_{12} - I_1 \delta_{13} + I_2 \delta_{21} + I_3 \delta_{31} + \beta I_1}{\alpha S_1 I_4 + I_4 - I_1}.$$

Из третьего неравенства следует:

$$\delta_{34} < \frac{-\alpha I_1 S_1 - \alpha I_2 S_1 \delta_{21} - \alpha I_3 S_1 \delta_{31} + I_1 \delta_{12} - I_1 \delta_{13} + I_2 \delta_{21} + I_3 \delta_{31} + \beta I_1}{\alpha S_1 I_4 + I_4 - I_1}.$$

Объединяя, получим следующее ограничение на выбор δ_{14} , δ_{41} , δ_{24} , δ_{42} , δ_{34} и δ_{43} :

$$\frac{-\alpha I_1 S_1 - \alpha I_2 S_1 \delta_{12} + \beta I_1}{\alpha S_1 I_3 - I_1 + I_3} < \delta_{14} < \frac{-\alpha I_3 S_3 - \alpha I_2 S_3 \delta_{23} + I_3 \delta_{32} - I_2 \delta_{23} + \beta I_3}{\alpha S_3 I_3 - I_3 + I_1},$$

$$\delta_{24} < \frac{-\alpha I_1 S_1 - \alpha I_2 S_1 \delta_{21} - \alpha I_3 S_1 \delta_{31} + I_1 \delta_{12} - I_1 \delta_{13} + I_2 \delta_{21} + I_3 \delta_{31} + \beta I_1}{\alpha S_1 I_4 + I_4 - I_1}.$$

$$\delta_{34} < \frac{-\alpha I_1 S_1 - \alpha I_2 S_1 \delta_{21} - \alpha I_3 S_1 \delta_{31} + I_1 \delta_{12} - I_1 \delta_{13} + I_2 \delta_{21} + I_3 \delta_{31} + \beta I_1}{\alpha S_1 I_4 + I_4 - I_1}.$$

3.2. Задание начальных данных

Для нахождения конкретных значений для δ_{14} , δ_{41} , δ_{24} , δ_{42} , δ_{43} и δ_{34} зададим следующие начальные данные для четвертого города, удовлетворяющие условию (2): $S_4 = 999$, $I_4 = 1$, $R_4 = 0$. Используем начальные данные для первых трёх городов, введённые ранее, и выбранное значение для $\delta_{12} = \delta_{21} = 0,03$, $\delta_{13} = \delta_{31} = 0,02$ и $\delta_{23} = \delta_{32} = 0,01$.

В соответствии с введёнными и ранее полученными данными, получим интервал для выбора δ_{14} и δ_{41} :

$$0,0014 < \delta_{14} < 0,245.$$

Принимая во внимание, что матрица перемещений – симметричная матрица с убывающими по обе стороны от диагоналей элементами, выберем $\delta_{14} = \delta_{41} = 0,001$, удовлетворяющие полученному ограничению.

Аналогично получим следующий интервал для выбора δ_{42} и δ_{24} , используя при его расчёте выбранное значение для $\delta_{14} = \delta_{41} = 0,01$:

$$-0.019 < \delta_{42} < 0,508.$$

Учитывая ранее обозначенные ограничения на δ_{ij} ($0 < \delta_{ij} < 1$) получим:

$$0 < \delta_{42} < 0,508.$$

Так как матрица перемещений – симметричная матрица с убывающими по обе стороны от диагоналей элементами, выберем $\delta_{42} = \delta_{24} = 0,01$, удовлетворяющие полученному выше ограничению.

Аналогично получим следующий интервал для выбора δ_{43} и δ_{34} :

$$0 < \delta_{43} < 0,812.$$

Так как матрица перемещений – симметричная матрица с убывающими по обе стороны от диагоналей элементами, выберем $\delta_{43} = \delta_{34} = 0,0001$, удовлетворяющие полученному выше ограничению.

Результат реализации модели для случая трёх городов в программе Matlab представлен на Рис.3.

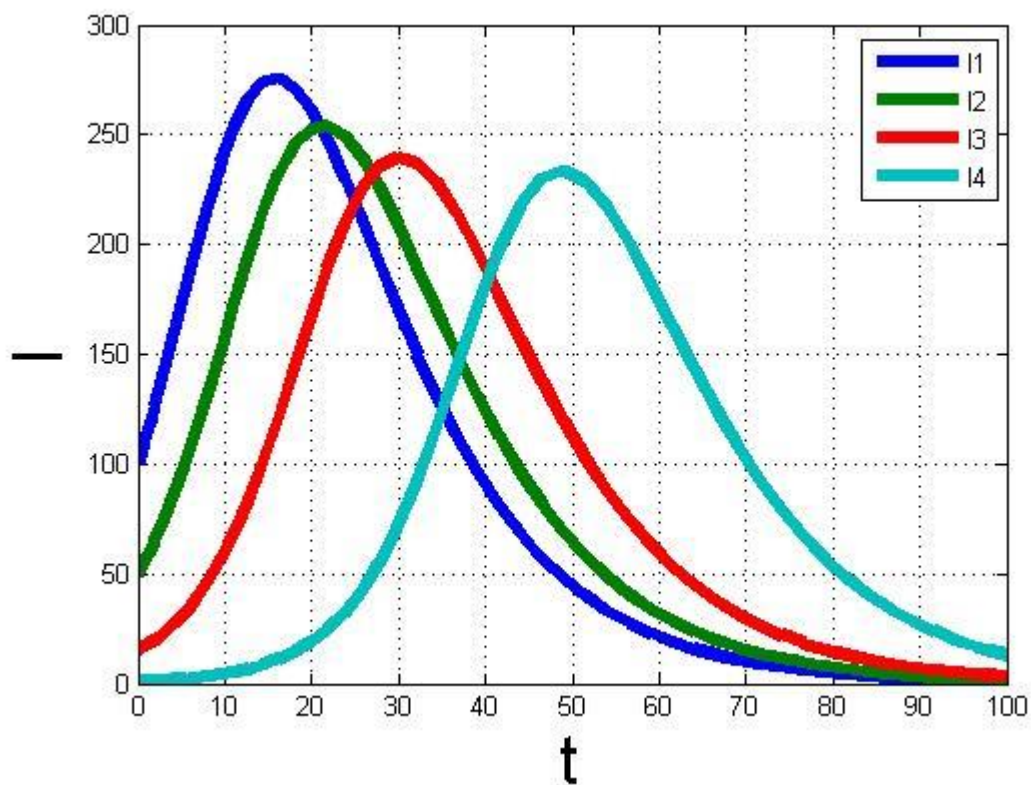


Рисунок 3.

Из рисунка видно, что вспышка эпидемии в четвёртом городе возникает после некоторой временной задержки. Количество инфицированных лиц растёт медленно. Это может быть связано с большой удалённостью рассматриваемого города от предыдущих и низким уровнем транспортных перемещений. При этом уровень инфекции остаётся на одном уровне с предшествующим третьим городом.

Выводы

В результате теоретического исследования были найдены условия на интенсивность транспортных потоков δ_{ij} , при которых для системы уравнений, представляющую собой математическую модель эпидемии в нескольких городах, выполняются условия возникновения эпидемии. Таким образом, поставленная задача о нахождении ограничений для δ_{ij} , обеспечивающих выполнение условий (2) и (3) была решена полностью.

Решение данной задачи было найдено последовательно для случая двух городов, а затем для случаев трёх и четырёх. Были заданы конкретные начальные данные, на основании которых были вычислены ограничения. Найденные значения интервалов, а также выбранные значения представлены в Таблице 1.

Коэффициент пропорциональности	Нижнее значение δ_{ij}	Выбранное значение δ_{ij}	Верхнее значение δ_{ij}
$\delta_{12} = \delta_{21}$	0,016	0,003	0,434
$\delta_{13} = \delta_{31}$	-0,037	0,002	0,628
$\delta_{23} = \delta_{32}$	0	0,001	0,891
$\delta_{14} = \delta_{41}$	0,014	0,001	0,245
$\delta_{24} = \delta_{42}$	0	0,001	0,508
$\delta_{34} = \delta_{43}$	-0,019	0,0001	0,812

Таблица 1.

В математическом пакете Matlab была написана программа, реализующая движение эпидемической волны для четырёх городов. В эксперименте были использованы начальные данные, выбранные в соответствии с требованиями и значения коэффициентов из вычисленных интервалов.

Численно было показано, что выведенные соотношения для границ коэффициентов δ_{ij} соответствуют получаемому в эксперименте.

Заключение

Построенная математическая модель описывает движение эпидемической волны для случая нескольких городов. Характер и поведение волн эпидемии во многом зависит от заданных начальных данных. При этом при изменении начальных условий необходимо производить перерасчёт всех коэффициентов последовательно для каждого города, начиная с первого. Основными трудностями, которые возникли при построении данной модели, являются трудоёмкие вычисления. Было замечено, что объём требуемых вычислений растёт с увеличением числа городов. Это условие осложняет применение модели для большого числа городов.

В результате проведённого эксперимента было замечено, что общий уровень инфицированных лиц в каждом городе уменьшается по мере удаления от первого города. Кроме того, требуется большее количество времени для появления вспышки. Данные факты объясняют выбранные коэффициенты для транспортной матрицы перемещений. То есть, чем дальше друг от друга расположены города, тем меньше они связаны между собой транспортными потоками. В соответствие с чем уровень передаваемой инфекции более низок.

Список литературы

1. Смородинцев А.А. Грипп и его профилактика (Руководство для врачей). Л.: Медицина, 1984. 384 с.
2. Букринская А.Г. Вирусология. М.: Медицина, 1986. 336 с.
3. Бароян О.В., Рвачев Л.А., Иванников Ю.Г. Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР. М.:ИЭМ им. Н.Ф. Гамалеи, 1977. 546 с.
4. Kermack W.O., McKendrick A.G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1927. Vol. 115, No 772. P. 700-721.
5. Колесин И.Д., Житкова Е.М. Математические модели эпидемий. Учебное пособие. СПб: НИИФ СПбГУ, 2004. 92 с.

Приложение

Ниже представлен код программы Matlab, реализующий математическую модель эпидемии для случая четырёх городов.

```
function threepoint
clear all; clc;
[T,Y] = ode45(@odefun,[0 100],
              [900 100 0 950 50 0 985 15 0 999 1 0]);
figure;
plot (T,Y(:,2),T,Y(:,5),T,Y(:,8),T,Y(:,11),'LineWidth',5);
grid on;
xlabel('t','fontsize',25);
ylabel('I','fontsize',25);
legend ('I1','I2','I3','I4');

function dy=odefun(t,y)
a=0.00025; beta=0.1;
dy=zeros(12,1);
p=[0 300000000 200000000 100000000;
   300000000 0 100000000 1000000;
   200000000 100000000 0 1000000;
   100000000 1000000 1000000 0];
d=0.0000000001*p;

dy(1)=-a*[y(2)+d(2,1)*y(5)+d(3,1)*y(8)+d(4,1)*y(11)]*y(1)-
d(1,2)*y(1)-d(1,3)*y(1)-
d(1,4)*y(1)+d(2,1)*y(4)+d(3,1)*y(7)+d(4,1)*y(10);
dy(2)= a*[y(2)+d(2,1)*y(5)+d(3,1)*y(8)+d(4,1)*y(11)]*y(1)-
d(1,2)*y(2)-d(1,3)*y(2)-
d(1,4)*y(2)+d(2,1)*y(5)+d(3,1)*y(8)+d(4,1)*y(11)-beta*y(2);
dy(3)= beta*y(2)-d(1,2)*y(3)-d(1,3)*y(3)-
d(1,4)*y(3)+d(2,1)*y(6)+d(3,1)*y(9)+d(4,1)*y(12);

dy(4)=-a*[y(5)+d(1,2)*y(2)+d(3,2)*y(8)+d(4,2)*y(11)]*y(4)-
d(2,1)*y(4)-d(2,3)*y(4)-
d(2,4)*y(4)+d(1,2)*y(1)+d(3,2)*y(7)+d(4,2)*y(10);
dy(5)= a*[y(5)+d(1,2)*y(2)+d(3,2)*y(8)+d(4,2)*y(11)]*y(4)-
d(2,1)*y(5)-d(2,3)*y(5)-
d(2,4)*y(5)+d(1,2)*y(2)+d(3,2)*y(8)+d(4,2)*y(11)-beta*y(5);
dy(6)= beta*y(5)-d(2,1)*y(6)-d(2,3)*y(6)-
d(2,4)*y(6)+d(1,2)*y(3)+d(3,2)*y(9)+d(4,2)*y(12);

dy(7)=-a*[y(8)+d(1,3)*y(2)+d(2,3)*y(5)+d(4,3)*y(11)]*y(7)-
d(3,1)*y(7)-d(3,2)*y(7)-
d(3,4)*y(7)+d(1,3)*y(1)+d(2,3)*y(4)+d(4,3)*y(10);
dy(8)= a*[y(8)+d(1,3)*y(2)+d(2,3)*y(5)+d(4,3)*y(11)]*y(7)-
d(3,1)*y(8)-d(3,2)*y(8)-
d(3,4)*y(8)+d(1,3)*y(2)+d(2,3)*y(5)+d(4,3)*y(11)-beta*y(8);
dy(9)= beta*y(8)-d(3,1)*y(9)-d(3,2)*y(9)-
d(3,4)*y(9)+d(1,3)*y(3)+d(2,3)*y(6)+d(4,3)*y(12);
```

```

dy(10)=-a*[y(11)+d(1,4)*y(2)+d(2,4)*y(5)+d(3,4)*y(8)]*y(10)-
d(4,1)*y(10)-d(4,2)*y(10)-
d(4,3)*y(10)+d(1,4)*y(1)+d(2,4)*y(4)+d(3,4)*y(7);
dy(11)= a*[y(11)+d(1,4)*y(2)+d(2,4)*y(5)+d(3,4)*y(8)]*y(10)-
d(4,1)*y(11)-d(4,2)*y(11)-
d(4,3)*y(11)+d(1,4)*y(2)+d(2,4)*y(5)+d(3,4)*y(8)-beta*y(11);
dy(12)= beta*y(11)-d(4,1)*y(12)-d(4,2)*y(12)-
d(4,3)*y(12)+d(1,4)*y(3)+d(2,4)*y(6)+d(3,4)*y(9);

```

```

end
end

```