Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра моделирование экономических систем

Анисимова Александра Тимуровна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Разработка эффективной модели управления предприятием с учетом кредитного механизма

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Смирнов Н.В.

Санкт-Петербург

2016

Оглавление

Введение. Обзор литературы

В настоящее время широкое распространение получали так называемые «стартапы». Под «стартапом» подразумевают недавно вышедшую на рынок компанию, в основе которой чаще всего лежат передовые технологии или инновационные идеи. Данные проекты отличаются новым видом продукции, быстрым ростом производства (в случае успеха) и нехваткой финансирования на начальном этапе. Молодым компаниям необходим внешний источник инвестиций. Одним из таких источников является кредит в банке.

Все эти условия необходимо учитывать при разработке стратегии развития фирмы, что непросто с учетом большого числа вариантов принимаемых решений. Например, банковский кредит может привести к существенному росту задолженности и свести к минимуму успехи компании.

В связи с этим, актуальной является задача выбора и построения адекватной математической модели для описания начального этапа развития «стартапа».

Настоящая выпускная квалификационная работа имеет целью осуществить обоснованный выбор математической модели для решения указанной общей задачи и провести ее модификацию по мере необходимости.

Развитие и совершенствование экономической теории невозможно представить без математического аппарата. Математические модели широко применяются в планировании, управлении и оптимизации производства [1]. Они позволяют описывать условия функционирования предприятий, динамику производства, делать прогнозы и готовить управленческие решения [2], [3].

Например, для исследования равновесных состояний экономических систем применяются дифференциальные уравнения, теория операторов, теория устойчивости движения. В работе [4] приведены методы качественного анализа динамических систем и даны примеры приложений в реальных моделях.

В литературе большое внимание уделено рассмотрению вопроса о равновесной цене. Начало было положено Я. Тинбергеном (Tinbergen J.) [5], описавшем динамический процесс, названный паутинообразной моделью. Данный процесс показывает траекторию спроса и предложения при переходе от одного состояния равновесия к другому. От паутинообразной модели в дальнейшем появились модели со включением запасов, которые были исследованы на устойчивость [5].

Особое место среди динамических моделей занимает «теория фирмы». В ней выделяется задача, в которых фирма выпускает один продукт и имеет несколько факторов, от которых зависит производство. Для анализа используется понятие производственной функции, которая имеет следующий вид: $y = f(x_1, x_2 \cdots x_k)$, где y – продукт, а $x_1, x_2 \cdots x_k$ – факторы производства. В этом классе задач, так же как и для паутинообразной модели, ищется состояние равновесия стоимости предельного продукта (цена прироста продукта при увеличении цены одного из факторов на единицу) и цены соответствующего фактора. Задачи «теории фирмы» решаются при помощи предельного анализа или при помощи линейного программирования [5].

Говоря о динамических моделях, нельзя не упомянуть инвестиционно-кредитный фактор, который определяет динамику развития предприятия и темп роста. Например, в работе [6] рассмотрена динамическая модель предприятия, которая использует в качестве инвестиций – государственную поддержку. В данной квалификационной работе рассмотрены принципы функционирования предприятия, использующего кредитный ресурс на начальной стадии развития.

За основу взята модель, предложенная Лебедевым В.В. [7]. Она учитывает все основные условия развития «стартапа», представляет собой систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику производства и долга по кредиту. Преимущество модели состоит в учете издержек производства. Кроме того, модель не привязана к конкретной технологии и потому универсальна. Фактически она позволяет сравнивать инвестиции в разные секторы экономики.

В рамках настоящей работы предложена модификация модели Лебедева, ориентированная на подготовку управленческих решений и анализ сценариев развития фирмы.

Глава 1. Описание модели

1.1. Основные величины и параметры модели

В обсуждаемой модели предприятия используются следующие обозначения [3], [7]:

1. K_t – капитал фирмы (производственные фонды) в период $t \in T_i$ $i = 1,2,3 \dots$;
2. Z_t – долг предприятия в период $t \in T_i$ $i = 1,2,3 \dots$ (фазовая переменная);
3. Q_t – объем выпуска товара фирмой в период $t \in T_i$ $i = 1,2,3 \dots$ (фазовая переменная);
4. C_t – полные производственные затраты (издержки) в период $t \in T_i$ $i = 1,2,3 \dots$, кроме выплат по кредиту и капитальных затрат (активов);
5. R_t – выручка предприятия в период $t \in T_i$ $i = 1,2,3 \dots$;
6. π_t – прибыль предприятия в период $t \in T_i$ $i = 1,2,3 \dots$;
7. T_{Cr} – горизонт выплат по банковскому кредиту;
8. H_F – часть прибыли директора фирмы в период $t \in T_i$ $i = 1,2,3 \dots$ (постоянное число);
9. H_{Cr} – часть прибыли, которая выплачивается за кредит в период $t \in T_i$ $i = 1,2,3 \dots$;, где t $< T_{Cr}$ (сумма погашения кредита, постоянное число);
10. I_t – инвестиции в развитие предприятия (закупка новых материалов, обучение сотрудников);
11. K_0 – средства труда необходимые для открытия производства (кредит);
12. Z_0 – денежные средства необходимые для открытия производства (величина кредита в начальный период);
13. p – цена выпускаемой продукции.

1.2. Вывод основных соотношений

Рассмотрим модель фирмы, которая в начальный период берет в банке кредит z_0 на открытие производства. За счет полученного кредита фирма приобретает основное техническое оснащение и имеет возможность оплатить первоначальные затраты на обслуживание производства. Таким образом, стартовый капитал фирмы равен величине взятого кредита:

$$K_0 = z_0 \; .$$

Процент, возвращаемый банку равен β. За каждый период фирма возвращает банку часть из прибыли равную H_{Cr}. И долг в период $t \in T_i$ $i = 1,2,3 \ldots$ выражается соотношением:

$$z_{t+1} = z_t + \beta z_t - H_{cr} \; .$$

Будем рассматривать модель в условиях того, что фирма является однопродуктовой. В связи с этим, объем выпуска товара равен средствам труда, необходимым для производства:

$$Q_t = \lambda K_t , \tag{1.1}$$

λ – уровень эффективности использования основных производственных фондов отрасли.

Полные производственные затраты (издержки) определим нелинейной функцией:

$$C_t = \mathrm{m}Q_t^2 + \mathrm{n}Q_t + \mathrm{c},$$

где параметры m, n и c имеют положительные значения. В издержки фирмы включаются затраты на обслуживание производства, закупку производственных материалов, выплаты персоналу, занятому на производстве. А затраты на закупку новых производственных активов в издержки не включаем.

Для данной модели будем полагать, что спрос на продукцию фирмы превышает предложение. В связи с этим предположением выручка фирмы будет выражаться следующим соотношением:

$$R_t = pQ_t \, . \tag{1.2}$$

Таким образом, прибыль фирмы будет определяться следующим соотношением:

$$\pi_t = R_t - C_t \ .$$

Инвестиции на закупку нового оборудования составляет та часть прибыли, которая остается после выплаты по кредиту (H_{Cr}) и выплаты директору фирмы (H_F) его личного дохода:

$$I_t = R_t - C_t - H_t \ . \tag{1.3}$$

Динамика средств труда, необходимых для открытия производства, задается следующим уравнением:

$$K_{t+1} = K_t - I_t - \mu K_t \ , \tag{1.4}$$

где μ – коэффициент амортизации основных производственных фондов.

1.3. Построение дискретной системы, описывающей динамику работы фирмы

Для построения дискретной модели предприятия воспользуемся соотношениями, полученными в §1.2.

Подставим в разностное уравнение (1.4) выражение инвестиций (1.3) и выручку фирмы заменим соотношением (1.2):

$$K_{t+1} = K_t - (pQ_t - C_t - H_t) - \mu K_t \ . \tag{1.5}$$

Для того что бы получить разностное уравнение динамики выпускаемой продукции, воспользуемся соотношением (1.1) и подставим его в (1.5):

$$Q_{t+1} = Q_t - \lambda(pQ_t - C_t - H_t) - \mu Q_t \ .$$

В результате, получаем систему, описывающую динамику работы фирмы, которая получила в банке кредит:

$$\begin{cases} Q_{t+1} = Q_t + \lambda(pQ_t - mQ_t^2 - nQ_t - c - H_t) - \mu Q_t, \\ z_{t+1} = z_t + \beta(z_t - z_e), \end{cases} \tag{1.6}$$

где

$$z_e = \frac{H_{CR}}{\beta}.$$

Прибыль H_t делится на доход директора фирмы H_F и выплаты банку H_{CR}. Выплаты по кредиту происходят до момента времени T_{CR} – время, когда будет выплачена вся взятая сумма.

Время выплаты по кредиту определяется из решения второго уравнения системы (1.6):

$$z_t = z_e - (z_e - z_0)(1+\beta)^t.$$

На момент T_{cr} – погашения кредита долг банку будет равен нулю:

$$0 = z_e - (z_e - z_0)(1+\beta)^{T_{CR}},$$

$$(1+\beta)^{T_{CR}} = \frac{z_e}{(z_e - z_0)}.$$

Отсюда находим горизонт выплат:

$$T_{CR} = \log_{1+\beta}\frac{z_e}{z_e - z_0} = \frac{\ln\frac{z_e}{z_e - z_0}}{\ln 1+\beta}.$$

1.4. Построение непрерывной системы уравнений и вывод ее решения

Для дальнейшего анализа удобно рассматривать непрерывный вариант модели предприятия. Для этого в двух уравнениях получим разность переменных Q и z в моменты времени t и t+Δt. После этого перейдем к пределу при Δt→0, получим непрерывный вариант модели, описывающей предприятие:

$$\begin{cases} Q'(t) = \lambda\big(pQ(t) - mQ^2(t) - nQ(t) - c - H(t)\big) - \mu Q(t), \\ z'(t) = \beta(z(t) - z_e), \end{cases} \quad (1.7)$$

$$z(0) = z_0, Q(0) = \lambda z_0.$$

Решение второго уравнения системы (1.7) описывает динамику задолженности по банковскому кредиту:

$$\frac{dz}{dt} = (z(t) - z_e)\beta.$$

Интегрируем:

$$\int_0^t \frac{d(z - z_e)}{z - z_e} = \int_0^t \beta dt,$$

$$ln\left(\frac{z - z_e}{z_e - z_0}\right) = \beta t.$$

Получаем:

$$z(t) = z_e - e^{\beta t}(z_e - z_0).$$

Найдем решение первого уравнения системы (1.7):

$$Q'(t) = (\lambda(p - n) - \mu)Q(t) - m\lambda Q^2(t) - \lambda c - \lambda H(t). \qquad (1.8)$$

Переобозначим за $r = \lambda(p - n) - \mu$, тогда

$$Q'(t) = r\, Q(t) - m\lambda Q^2(t) - \lambda c - \lambda H(t).$$

Будем предполагать:

$$D = r^2 - 4m\lambda^2(c + H) > 0.$$

Разложим квадратный трехчлен на множители, получим:

$$Q'(t) = -m\lambda(Q - Q_1)(Q - Q_2).$$

Q_1 и Q_2 – равновесные решения уравнения (1.8). Будем считать, что $Q_2 \geq Q_1$.

Введем замену:

$$x = Q - Q_1,\ x_e = Q_2 - Q_1,\ a = \lambda m.$$

Тогда уравнение в новых переменных будет выглядеть следующим образом:

$$x' = ax(x_e - x).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{x_e dx}{(x_e - x)x} = a x_e dt.$$

Решением этого уравнения является функция:

$$x(t) = \frac{x_0 x_e}{x_0 + (x_e - x_0)e^{-a x_e t}}.$$

Таким образом решение системы (1.7) имеет вид:

$$Q(t) = Q_1 + \frac{(Q_0 - Q_1)(Q_2 - Q_1)}{Q_0 - Q_1 + (Q_2 - Q_0)e^{-t\sqrt{D}}},$$

$$z(t) = z_e - e^{\beta t}(z_e - z_0).$$

1.5 Анализ устойчивости

Исследуем на устойчивость частные решения Q_1 и Q_2 уравнения:

$$Q'(t) = a(Q - Q_1)(Q - Q_2), \qquad (1.9)$$

где $a = -m\lambda$.

Рассмотрим частное решение $Q = Q_1$

Введем замену переменных: $x = Q - Q_1$, x – это отклонение от Q_1.

Тогда $x' = Q' - Q'_1$. Запишем уравнение (1.9) в новых переменных:

$$x' = ax(x + Q_1 - Q_2). \qquad (1.10)$$

Система 1.10 – это система в отклонениях

2. Выделим в (1.10) линейное приближение $x' = a(Q_1 - Q_2)x$.

3. Собственное число системы: λ= $a(Q_1 - Q_2)$.

Так как $a < 0$, а $Q_1 < Q_2$(по предположению), то λ>0. Таким образом частное решение $Q = Q_1$ является неустойчивым.

Так же рассмотрим второе частное решение $Q = Q_2$.

1. Запишем отклонение $x = Q - Q_2$. Тогда система в отклонениях будет иметь вид:

$$x' = ax(x + Q_2 - Q_1). \qquad (1.11)$$

3. Выделим линейное приближение $x' = a(Q_2 - Q_1)x$.
4. Собственное число системы: λ= $a(Q_1 - Q_2) < 0$.

Таким образом второе частное решение $Q = Q_2$ является асимптотически устойчивым.

Так как траектории системы (1.7), попадая в область устойчивости решения $Q = Q_2$, притягиваются к нему и обеспечивают рост производства (см. рис. 1), то необходимо найти эту область притяжения для дальнейшего исследования модели и поиска оптимального управления предприятием.

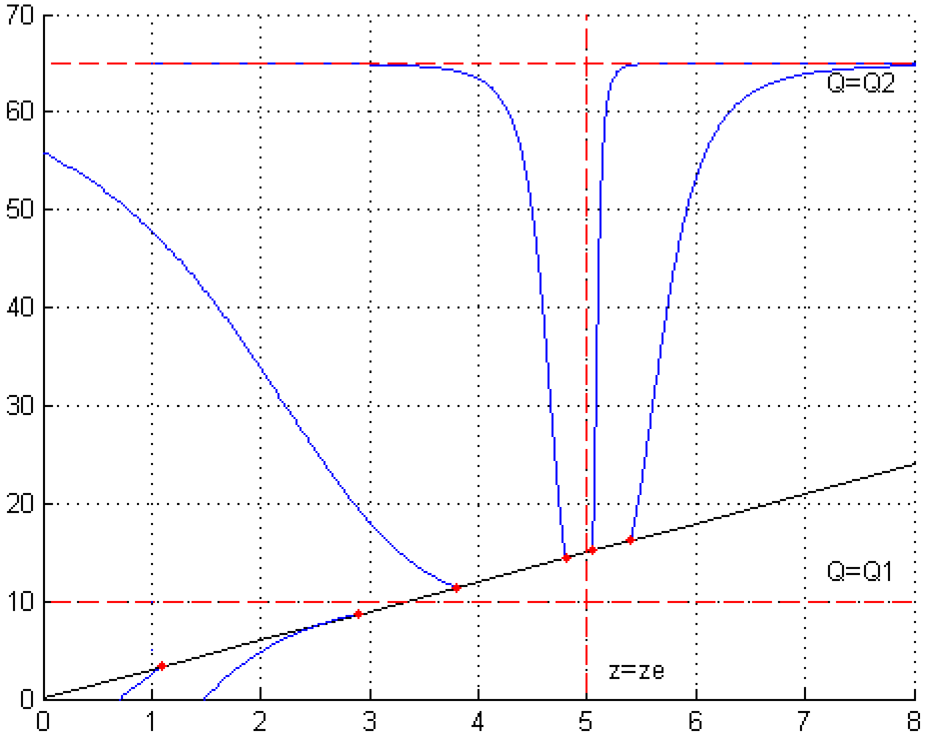

Рис.1. Устойчивость решения $Q = Q_2$

Для поиска области асимптотической устойчивости воспользуемся алгоритмом, основанным на теореме Зубова [8] [9], и построим оценку:

1. В системе (1.11) выделим линейное приближение: $x' = \lambda x$, при этом, как доказали ранее, эта система – асимптотически устойчива.
2. Построим квадратичные формы:

$$V(x) = xPx = Px^2,$$
$$W(x) = xRx = Rx^2,$$

Причем V(x) и W(x) – положительно-определенные и удовлетворяют уравнению Ляпунова:

$$\lambda P + P\lambda = 2\lambda P = -R,$$

$$P = -\frac{R}{2\lambda} \;=>\; V(x) = -\frac{R}{2\lambda}x^2.$$

3. Находим производную V(x) в силу системы

$$\frac{dV}{dt}|_{(1.11)} = -\frac{R}{\lambda}xx' = -\frac{R}{\lambda}x(\lambda x + ax^2) = -Rx^2 - \frac{R}{\lambda}ax^3,$$

$$-Rx^2 = -W(x), \qquad -\frac{R}{\lambda}ax^3 = \widetilde{W}(x),$$

$$-Rx^2 - \frac{R}{\lambda}ax^3 = -Rx^2\left(1 + \frac{a}{\lambda}x\right) = 0.$$

Найдем корень последнего уравнения

$$1 + \frac{a}{\lambda}x = 0 \;\; => \; x = -\frac{\lambda}{a} = \gamma.$$

4. Выбираем область, которая соответствует найденному значению:

$$V(\gamma) = P\gamma^2,$$
$$A = \{x|\, V(x) < P\gamma^2\},$$
$$Px^2 < P\gamma^2,$$
$$|x| < |\gamma|.$$

В результате, для положения равновесия $Q = Q_2$ в исходной системе (1.11) область асимптотической устойчивости описывается неравенством:

$$|x - Q_2| < |\gamma|.$$

Поскольку $\gamma = \frac{a(Q_1 - Q_2)}{a}$, то траектории, которые располагаются между Q_1 и Q_2, будут притягиваться к устойчивому решению $Q = Q_2$ (см. рис. 2).

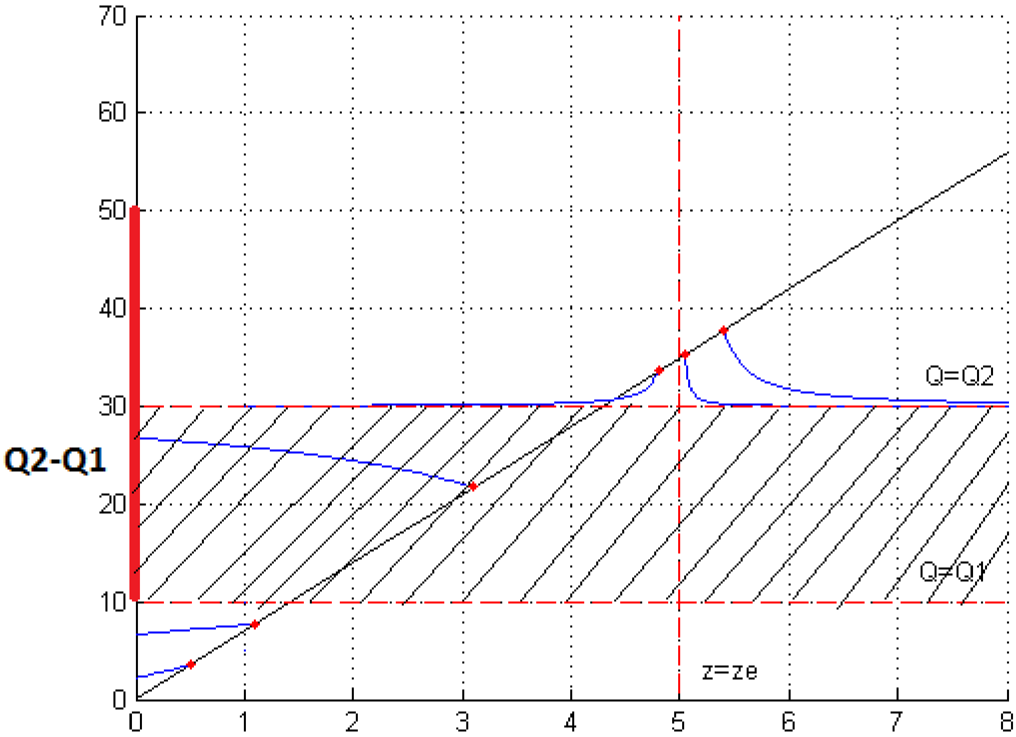

Рис.2. Область устойчивости решения $Q = Q_2$

На рисунке по оси Q жирным отрезком [10;50] выделена область асимптотической устойчивости. Ее первая часть – заштрихованная область между двумя частными решениями Q_1 и Q_2 – область, которая наиболее выгодна предпринимателю в рамках рассматриваемой модели. Все кривые, которые находятся в этой области, описывают ситуацию увеличения выпускаемой продукции и снижения задолженности по кредиту, так как кривые, попавшие в эту область, притягиваются к Q_2. Промежуток [30;50] является второй частью области притяжения. Однако в этом случае мы имеем спад производства, поэтому эта область не выгодна с экономической точки зрения.

Глава 2. Анализ вариантов развития предприятия и их оптимизация

2.1. Анализ благоприятных вариантов эксплуатации закупленного оборудования

Будем называть «*вторым квадратном*» область, которая находится между прямыми $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$ и слева от прямой z_e. А «*первым квадрантом*» область, которая находится между прямыми $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$ и справа от прямой $z = z_e$(см. рис. 4).

В рассматриваемой модели, с теоретической точки зрения, при выборе начальной точки траектории – z_0 , мы не ограничены. В зависимости от наклона и расположения прямой $Q = \lambda z$ можно выбрать начальную точку для «выгодной» траектории, т.е. траектории, у которой растет объем выпускаемых товаров и при этом снижается задолженность банку.

Рассмотрим три модели наклона прямой $Q = \lambda z$, где от коэффициента фондоотдачи λ зависит расположение этой прямой относительно стационарных точек $(z_{e;}Q_1)$ и $(z_{e;}Q_2)$:

1. Прямая $Q = \lambda z$ расположена ниже точки пересечения прямых $Q = Q_1$ и $z = z_e$. Этому случаю соответствует (см. рис. 3), на котором траектория (1) описывает ситуацию, когда кредит выплачивается, но снижается производство продукции. Траектория (2) описывает худший вариант – увеличение долга и снижение производства. А траектория (3), которая лежит выше решения $Q = Q_1$ и которая попадает в область устойчивости решения $Q = Q_2$, описывает ситуацию увеличение производственных мощностей, но в то же время и увеличение выплат по кредиту.

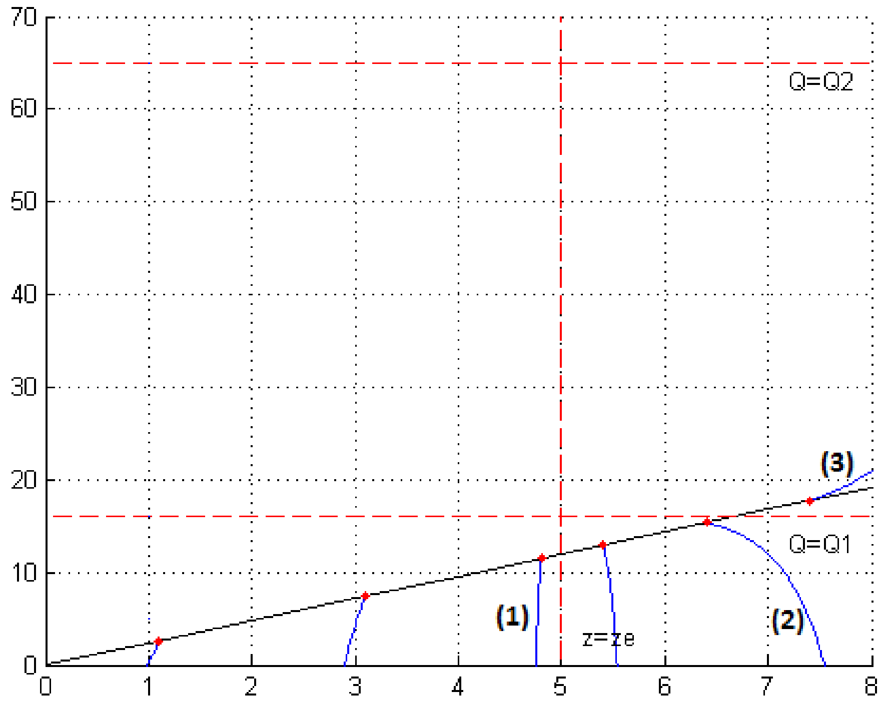

Рис.3. Прямая $Q = \lambda z$ проходит ниже решения $Q = Q_1$

2. Прямая $Q = \lambda z$ расположена между двумя точками пересечения прямых $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1$ и $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_2$ с прямой $z = z_e$ (см. рис. 4).

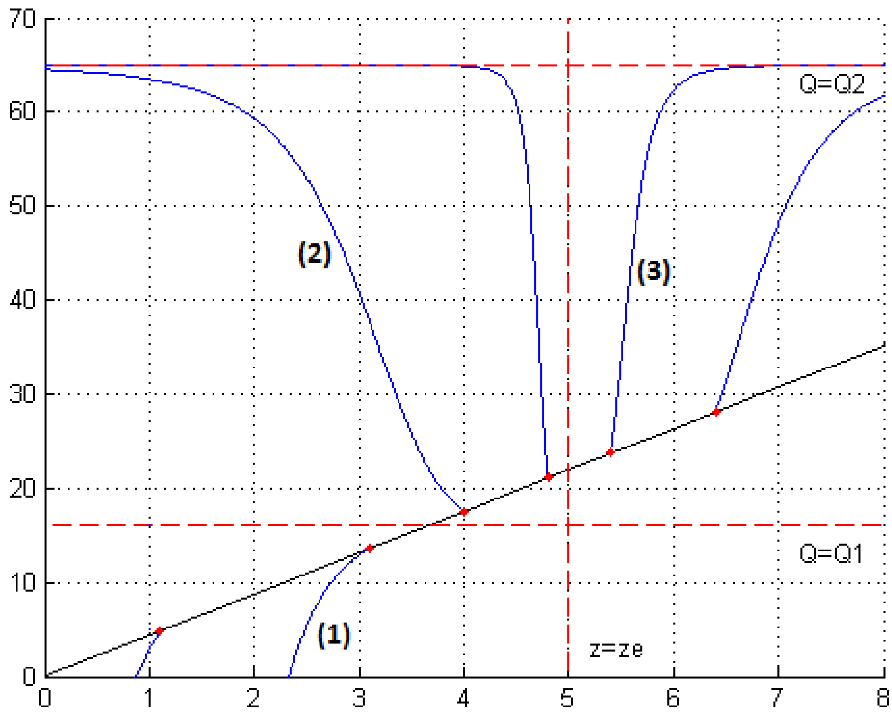

Рис.4. Прямая $Q = \lambda z$ проходит между решениями $Q = Q_1$ и $Q = Q_2$

В этом случае траектория (2) описывает наилучший вариант – вариант погашения кредита и увеличение выпускаемой продукции. Траектории, расположенные в этом квадранте без учета дополнительных предположений, являются оптимальными для построенной модели. У траектории (3) так же происходит увеличение производства, но вместе с ним увеличивается и долг. Траектория (1) рассмотрена в первом случае.

3. Прямая $Q = \lambda z$ проходит выше точки пересечения прямой $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_2$ с прямой $z = z_e$ (см. рис. 5).

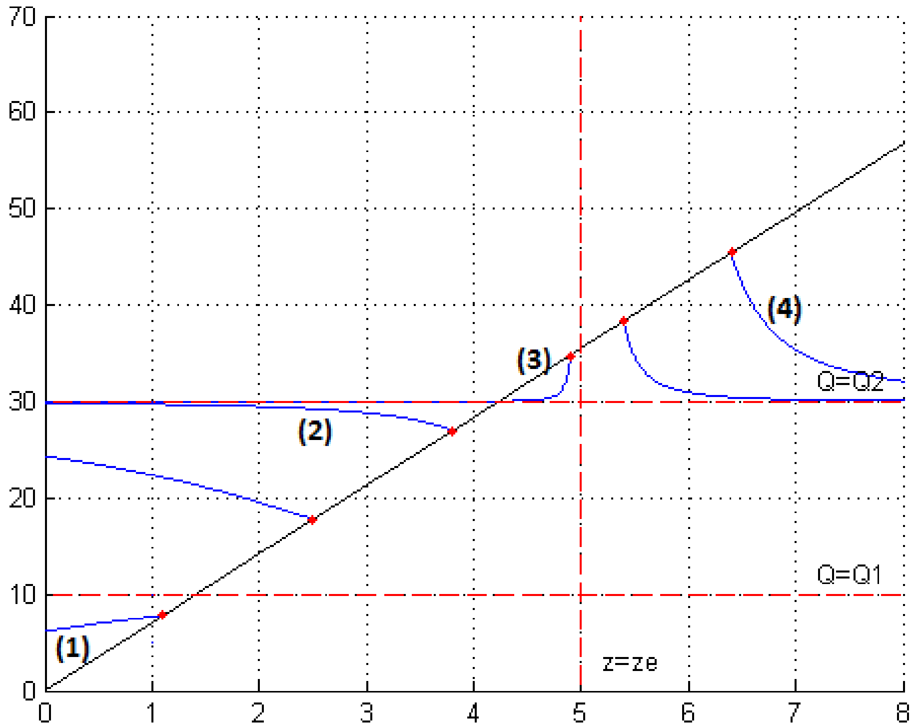

Рис.5. Прямая $Q = \lambda z$ проходит выше решения $Q = Q_2$

(1) и (2) траектории соответствуют двум случаям, рассмотренным выше. Для (3) и (4) траектории можно наблюдать уменьшение объемов производимой продукции и уменьшение (увеличение) задолженности соответственно.

Таким образом, на траекторию системы, как можно видеть, влияет не только наклон прямой $Q = \lambda z$, но и выбор начальной точки. Отметим, что наилучшим выбором такой начальной точки является выбор из первого квадранта.

2.2. Анализ неблагоприятных вариантов эксплуатации закупленного оборудования и алгоритмы их оптимизации

2.2.1. Перераспределение прибыли

В реальных условиях, попадание начальной точки во второй квадрант не всегда представляется возможным. Предприниматель не может закупить только часть оборудования необходимого для открытия производства или, например, закупить все необходимое оборудование, но не оставить средств для оплаты помещения, электричества, зарплаты сотрудникам в начальный период производства. Таким образом, определенным экономическим ситуациям и определенному виду производства соответствуют такие начальные точки, попадание которых в первый квадрант не гарантировано и не зависит от расчетов владельца. Исходя из анализа графиков в п. 2.1 можно заметить, что первый квадрант является оптимальным для выбора начальной точки (рис. 3 траектория (3), рис. 4 траектория (3)), с учетом того, что в дальнейшем будет изменена тактика выплаты задолженности, и долг по кредиту будет не расти, а убывать.

Для того, что бы поменять стратегию необходимо модифицировать модель и ввести управляемый параметр. Таким параметром примем U – денежный объем, на который возможно повысить ежемесячный платеж банку:

$$\widehat{H}_{CR} = H_{CR} + U.$$

Поскольку:

$$H = H_F + H_{CR},$$

то денежный объем U, который идет на выплату кредита в модифицированной модели, можно взять из прибыли владельца H_F. Таким образом, получаем управляемый параметр, который можно варьировать в зависимости от начальной точки и предполагаемого времени погашения кредита.

Предположим, что системой с начальной точкой $(z_0; Q_0)$, лежащей в первом квадранте, является система:

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = F(Q, H_{CR}), \\ \dot{z}(t) = F(z). \end{cases} \tag{2.1}$$

Так как для кривых, лежащих в первом квадранте характерно увеличение задолженности, в момент времени $\hat{t}$ принимается решение о том, что необходимо поменять существующее распределение прибыли и отдавать в банк больший платеж в счет выплат по кредиту.

В результате конечная точка системы (2.1) – $(z(\hat{t}), Q(\hat{t}))$, в момент смены стратегии $t = \hat{t}$, будет являться начальной точкой для новой системы:

$$\begin{cases} \dot{Q}(\hat{t}) = F\left(Q, \widehat{H}_{CR}\right), \\ \dot{z}(\hat{t}) = F(z), \end{cases}$$

при чем $U \leq H_F$ (ограничение сверху).

Можно записать распределение прибыли следующим образом:

$$\mathrm{H}(t) = \begin{cases} H_F + H_{CR}, \text{если } t < \hat{t}, \\ \widehat{H}_F + \widehat{H}_{CR}, \text{если } \hat{t} \leq \widehat{T}_{CR}, \\ H_F, \text{если } \ t > \widehat{T}_{CR}. \end{cases}$$

Так как значение z_e зависит от H_{CR}, то, в связи со сменой стратегии, оно так же изменится: $\hat{z}_e = \frac{\widehat{H}_{CR}}{\beta}$. Таким образом, в условиях новой модели начальная точка будет находиться во втором квадранте, если выполнено неравенство: $\hat{z}_e > z(\hat{t})$. Из этого условия можно вывести нижнее ограничение для U:

$$z_e + (z_0 - z_e)e^{\beta \hat{t}} < \frac{H_{CR} + U}{\beta},$$

$$(\beta z_0 - H_{CR})e^{\beta \hat{t}} < U. \tag{2.2}$$

Из (2.2) найдем время $\hat{t}_f$, до которого можно поменять стратегию (перераспределить прибыль), что бы долг начал убывать:

$$\hat{t}_f = \frac{1}{\beta} \ln \frac{U}{(\beta z_0 - H_{CR})}.$$

На данном этапе исследования модели будем полагать, что нет смысла дожидаться конечного момента времени $\hat{t}_f$, что бы поменять распределение прибыли. Так как оно гарантирует рост производства и погашения задолженности и в случаях, когда $\hat{t} < \hat{t}_f$. Поэтому для владельца выгодно будет принять решение о смене стратегии заранее.

Для этого введем еще один управляемый параметр r. Данный параметр будет показывать на сколько процентов выросла задолженность, и, исходя из процентов, можно варьировать начальную точку переключения $z(\hat{t})$:

$$z(\hat{t}) = z(0)(1 + r). \tag{2.3}$$

Параметр r необходим для того, что бы уставить планку по задолженности, после которой необходимо менять стратегию. Например: 10% (см. рис. 6), 15%, 20%.

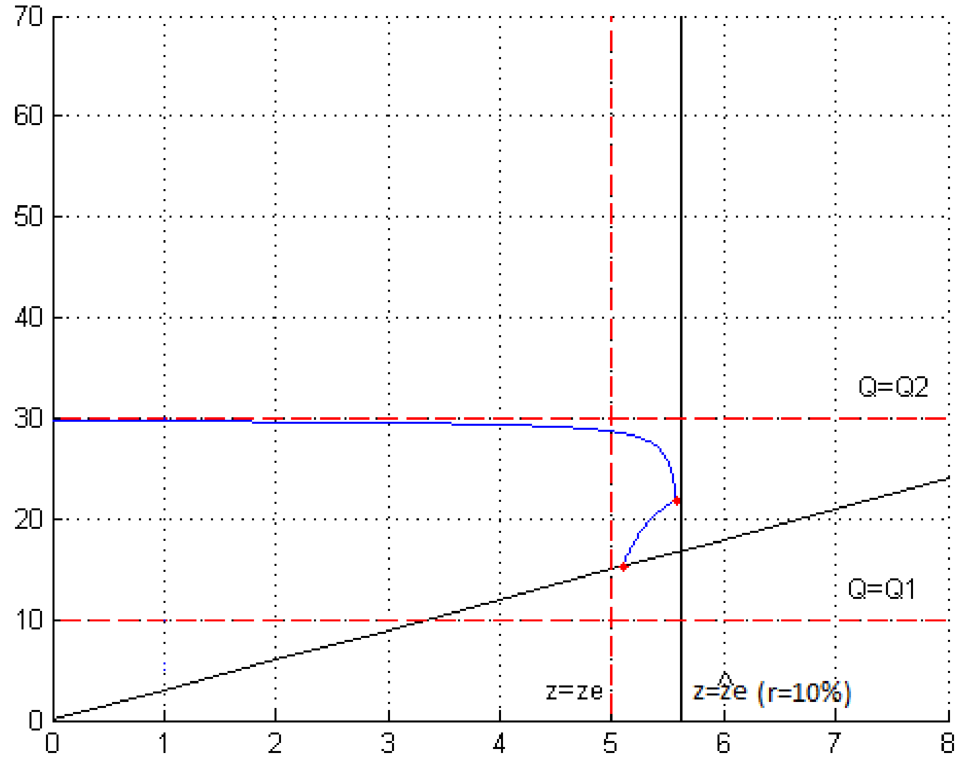

Рис.6. Смена стратегии при $r = 10\%$

После того, как планка задана, необходимо вычислить момент переключения $t = \hat{t}$. Его найдем из уравнения:

$$z(\hat{t}) = z_e - e^{\beta \hat{t}}(z_e - z_0),$$
$$\hat{t} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{z_e - z(\hat{t})}{(z_e - z_0)}.$$

В этот момент перераспределяем H_F и H_{CR}, тем самым контролируя не только прибыль, выплачиваемую банку, но и момент времени, в который это необходимо сделать. На рис. 7 показаны новые стратегии развития фирмы с учетом перераспределения ресурсов для параметра r (6%, 10%). Начальная точка z_0=5,1 и лежит в первом квадранте. Смена стратегии происходит соответственно в точках $z(\hat{t}) = 5{,}406$ и $5{,}61$:

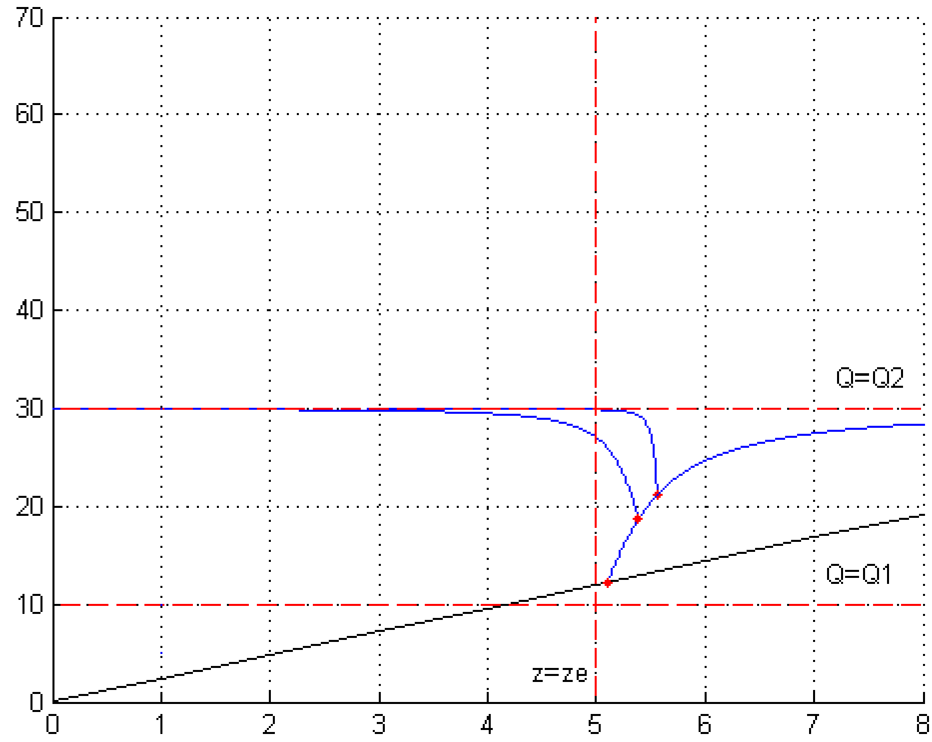

Рис.7. Смена стратегии при управляемом параметре $r = 6\%$ и 10%

Таким образом конечный алгоритм оптимизации перераспределения прибыли можно записать в следующем виде:

1. Владелец фирмы может установить границу возрастания по задолженности банку. В качестве параметра рассматривается множество $\{r_1, \cdots, r_n\} \in R$.

2. В каждый момент времени t существует возможность снизить лич-

ный доход H_F директора фирмы, увеличив тем самым сумму выплат банку H_{CR}. Варьируемым параметром выступает U, где $U \in \mathbb{U}$, т.е. имеется такое множество $\mathbb{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$, что для каждого U_i справедливо: $(\beta z_0 - H_{CR})e^{\beta \hat{t}} < U_i < H_F$.

3. С учетом выбора параметров $(U_i; r_j)$ в пунктах 1, 2 строится сценарий развития для выбранных данных. Каждому сценарию соответствует своя кривая, которая строиться при помощи разработанной программы.

4. Директор фирмы или иное лицо, которое принимает стратегическое решение по развитию фирмы, из нескольких вариантов интуитивно выбирают оптимальный вариант для развития конкретного производства в конкретной экономической ситуации как внутри фирмы, так и на рынке в целом.

2.2.2. Комбинирование перераспределения прибыли и перекредитования

Возможность выбора стратегии с управляемыми параметрами существует не всегда. Например, когда итак вся прибыль идет на выплаты банку, или когда момент $\hat{t}_f$ был упущен и смена стратегии также дает отрицательный результат – увеличение долга (см. рис. 8). Тогда возможен вариант перекредитования (под меньший процент взять новый кредит у другого банка). Так как производство продукции уже запущенно и начало приносить прибыль, перекредитование под меньшей процент становится возможным.

Тогда, как и в случае с перераспределением ресурсов, конечная точка системы с процентной ставкой β по первому кредиту будет начальной точкой для системы с новой процентной ставкой γ по второму кредиту. Где $\gamma < \beta$.

Необходимо переписать систему (1.7) в новых обозначениях. Пусть объем выпускаемой продукции увеличился до $\tilde{Q}$, в то время как долг увеличился (уменьшился) до $\tilde{z}$ в момент времени $\tilde{T}_F$ (время перекредитования). Возьмем второй кредит с процентом γ, возвращаемым банку, и суммой $\tilde{z}$. Тогда второе уравнение (1.7) после перекредитования будет выглядеть следующим образом:

$$z'(t) = \gamma(z(t) - \tilde{z}_e).$$

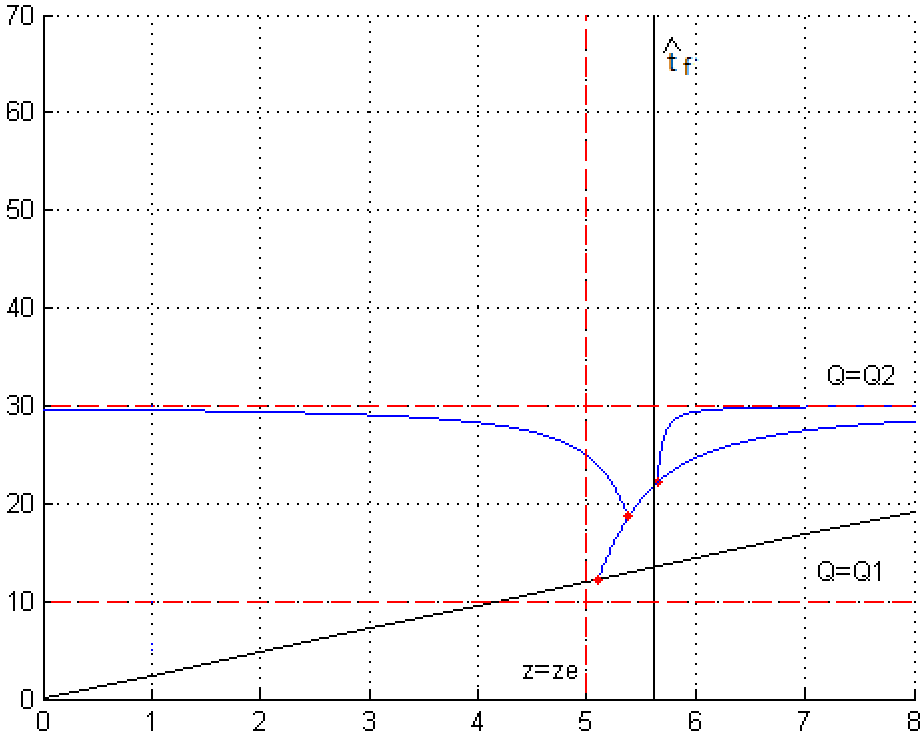

Рис.8. Смена стратегии при моменте времени $\hat{t} > \hat{t}_f$

Помимо изменения процентной ставки поменяются так же и выплаты. Теперь доход директора будет составлять $\widehat{H}_F$, а выплаты составят величину $\widehat{H}_{CR}$.

Как и для случая с перераспределением прибыли, для того, что бы траектория находилась в благоприятной области (второй квадрант) необходимо, что бы $\tilde{z} < \tilde{z}_e$. Помимо этого и для механизма перекредитования возможно применение перераспределения ресурсов. Таким образом, совместное применение этих двух подходов помогут наилучшим образом рассчитать варианты развития предприятия (см. рис. 9).

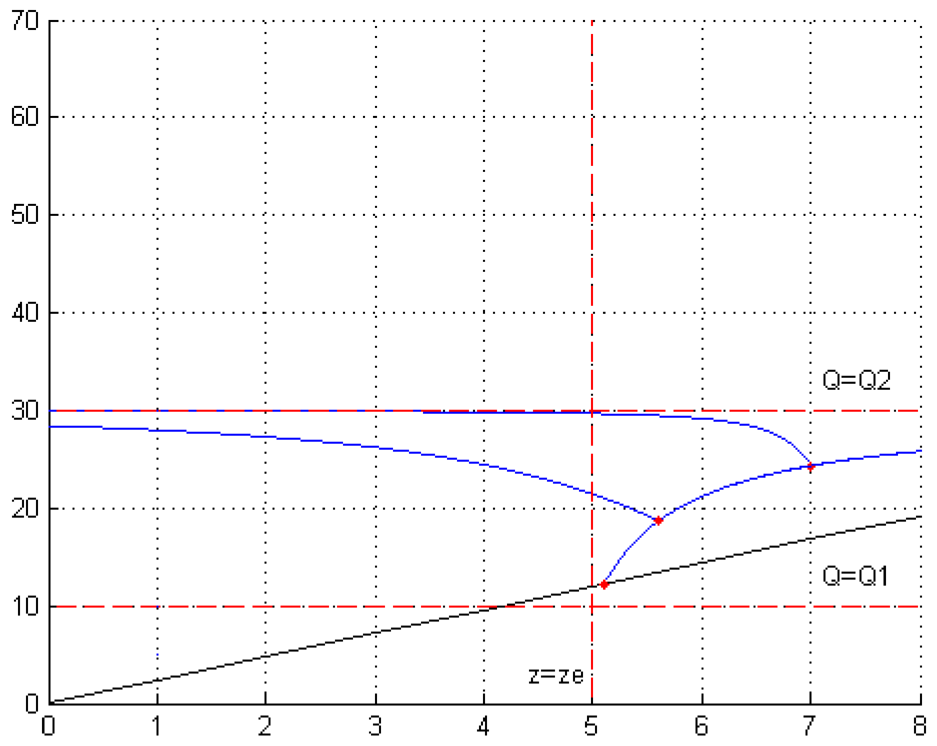

Рис.9. Комбинированный вариант развития

Конечный алгоритм оптимизации перераспределения прибыли и перекредитования можно записать в следующем виде:

1.Принимается решение о перекредитовании. Находятся варианты по кредитам с процентной ставкой $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$, где $\gamma_i \in \Upsilon$.

2. В каждый момент времени t существует возможность снизить личный доход H_F директора фирмы, увеличив тем самым сумму выплат банку H_{CR}. Варьируемым параметром выступает U, где $U \in \mathbb{U}$, т.е. имеется такое множество $\mathbb{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$, что для каждого U_i справедливо: $(\beta z_0 - H_{CR})e^{\beta \hat{t}} < U_i < H_F$.

3. С учетом выбора параметров $(\gamma_i; U_j)$ в пунктах 1, 2 строится сценарий развития для выбранных данных. Параметр перекредитования возможно рассматривать отдельно от параметра перераспределения прибыли. Так как рассматриваются наиболее эффективные подходы, предполагается, что будут применены оба механизма для улучшения ситуации.

4. Директор или иное лицо, которое принимает стратегическое реше-

ние по развитию фирмы, из различных вариантов выбирает оптимальный вариант для дальнейшего развития производства.

Заключение

В рамках выпускной квалификационной работы получены следующие основные результаты:

- Проведен обзор математических моделей, описывающих развитие предприятия;
- Для анализа развития фирмы выбрана динамическая модель Лебедева, наиболее полно описывающая период выхода фирмы на рынок и начало ее развития;
- Предложена модификация модели, учитывающая возможность управления ресурсами компании;
- На основе модификации модели разработан алгоритм, описывающий выбор сценария развития;
- В пакете MATLAB написаны моделирующие программы;
- Работа программ протестирована на примерах.

Литература

1. Интрилигатор М., Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 607 с.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. М.: Юнити, 1999. 391с.
3. Лебедев В. В, Лебедев К. В. Исследование кредитного механизма, используемого для развития рынка новой продукции, на основе математического моделирования // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов VI Международной школы-симпозиума АМУР–2012. Севастополь, 17–23 сентября 2012 / отв. ред. М. Ю. Куссый, А. В. Сигал. Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2012. 227–229 с.
4. Баутин Н. Н., Леонович Е. А., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
5. Аллен Р. Математическая экономия. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 670 с.
6. Хачатрян, С.Р. Методы и модели решения экономических задач : научно-методическое пособие / С.Р. Хачатрян, М.В. Пинегина, В.П. Буянов. – М. : Экзамен, 2002
7. Лебедев В. В, Лебедев К. В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов. М.: еТест, 2011. 336 с.
8. Зубов В.И. Лекции по теории управления. СПб.: Лань, 2009. 496 с.
9. Александров А.Ю., Александрова Е.Б., Екимов А.В., Смирнов Н.В. Сборник задач и упражнений по теории устойчивости: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2016. 160 с.

Приложение

Приложение 1. Программа для построения траекторий системы.

```
clc; close all;
Qe=10; ze=5;
z=0:12; Q=7.1*z;
Q1=10; Q2=30;
axis([0, 8, 0, 70])
hold on
plot(z, Q, 'k-')
grid on

z01=4.9;
Q01=7.1*4.9;
 [t, QQ]=ode23s('DQ', [0:2:2000], Q01);
 [t, zz]=ode45('DZ', [0:2:2000], z01);
plot(zz, QQ)
plot(z01, Q01, 'r.')

z02=5.4;
Q02=7.1*5.4;
 [t, QQ]=ode23s('DQ', [0:2:2000], Q02);
 [t, zz]=ode45('DZ', [0:2:2000], z02);
plot(zz, QQ)
plot(z02, Q02, 'r.')

z04=2.5;
Q04=7.1*2.5;
 [t, QQ]=ode23s('DQ', [0:2:1000], Q04);
 [t, zz]=ode45('DZ', [0:2:1000], z04);
plot(zz, QQ)
plot(z04, Q04, 'r.')

z05=3.8;
Q05=7.1*3.8;
 [t, QQ]=ode23s('DQ', [0:2:2000], Q05);
 [t, zz]=ode45('DZ', [0:2:2000], z05);
plot(zz, QQ)
plot(z05, Q05, 'r.')

z06=1.1;
```

```
Q06=7.1*1.1;
 [t, QQ]=ode23('DQ', [0:2:300], Q06);
 [t, zz]=ode45('DZ', [0:2:300], z06);
plot(zz, QQ)
plot(z06, Q06, 'r.')

z03=6.4;
Q03=7.1*6.4;
 [t, QQ]=ode23s('DQ', [0:2:400], Q03);
 [t, zz]=ode45('DZ', [0:2:400], z03);
plot(zz, QQ)
plot(z03, Q03, 'r.')

Qi=0:70; z0=ze;
plot([z0, z0],[0, 70], 'r--')
plot(z0)
text(5.2,3,'z=ze');

Qi=Q1; z0=0:50;
plot([0, 50], [Q1, Q1], 'r--')
plot(Qi)
text(7.2,12,'Q=Q1');

Qj=Q2; z0=0:50;
plot([0, 50], [Q2, Q2], 'r--')
plot(Qj)
text(7.2,32,'Q=Q2');
```

Приложение 2. Программа для построения модифицированной модели.

```
clc; close all; clear;
Qe=10; ze=5; ze2=7.5;
z=0:12; Q=2.4*z;
Q1=10; Q2=30;
axis([0, 8, 0, 70])
hold on
plot(z, Q, 'k-')
grid on

z01=5.1;
```

```
Q01=2.4*z01;
 [t, QQ]=ode45('DQ', [0:0.5:1200], Q01);
 [t, zz]=ode45('DZ', [0:0.5:1200], z01);
plot(zz, QQ)
plot(z01, Q01, 'r.')

z03=zz(1000);
Q03=QQ(1000);
 [t, QQ]=ode45('DQ2', [0:0.5:2000], Q03);
 [t, zz]=ode45('DZ2', [0:0.5:2000], z03);
plot(zz, QQ)
plot(z03, Q03, 'r.')

z001=5.1;
Q001=2.4*z001;
 [t, QQ]=ode45('DQ', [0:0.5:1200], Q001);
 [t, zz]=ode45('DZ', [0:0.5:1200], z001);
plot(zz, QQ)
plot(z001, Q001, 'r.')

z003=zz(900);
Q003=QQ(900);
 [t, QQ]=ode45('DQ2', [0:0.5:2000], Q003);
 [t, zz]=ode45('DZ2', [0:0.5:2000], z003);
plot(zz, QQ)
plot(z003, Q003, 'r.')

Qi=0:70; z0=ze;
plot([z0, z0],[0, 70], 'r--')
plot(z0)
text(4.4,3,'z=ze');

Qi=Q1; z0=0:50;
plot([0, 50], [Q1, Q1], 'r--')
plot(Qi)
text(7.1,13,'Q=Q1');

Qj=Q2; z0=0:50;
plot([0, 50], [Q2, Q2], 'r--')
plot(Qj)
text(7.1,33,'Q=Q2');
```