Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра теории управления

Алисейко Алексей Николаевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Матрицы Ляпунова для систем с распределённым запаздыванием

Направление 010400

Прикладная математика, фундаментальная информатика и основы программирования

Научный руководитель,
доктор физ.–мат. наук,
профессор
Харитонов В. Л.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение

Одним из способов анализа дифференциальных систем с запаздыванием на устойчивость является метод функционалов Ляпунова–Красовского [1], представляющий собой обобщение второго метода Ляпунова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, согласно теореме Красовского, для равномерной асимптотической устойчивости достаточно существование положительно-определённого функционала, допускающего соответствующую оценку сверху, производная которого вдоль решений системы отрицательно определена.

Для линейных стационарных систем обычно рассматривают два подхода к применению данной теоремы. Первый из них заключается в выборе некоторого функционала, заведомо обладающего требуемыми оценками, и дальнейшая проверка его производной вдоль решений системы на отрицательную определённость. Другим способом является построение функционала по заданной производной и затем проверка выполнения его положительной определённости.

Применение второго подхода продемонстрировано в работах [2, 3, 4], в частности в работе [4] введены функционалы полного типа, позволяющие обратить теорему Красовского. Построение полученных в данных работах функционалов зависит от значений одной матричной функции на конечном промежутке. Данная функция, в дальнейшем получившая название матрицы Ляпунова, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с запаздыванием, а также симметрическому и граничному условию.

Построение матриц Ляпунова осложняется отсутствием заданной для них начальной функции, что лишь отчасти компенсируется накладываемым на них симметрическим условием. Поэтому для их нахождения требуются специальные методы. Данная работа посвящена способу нахождению матриц Ляпунова для класса уравнений с распределённым запаздыванием и кусочно-постоянным интегральным ядром.

Постановка задачи

Рассмотрим скалярное уравнение с распределённым запаздыванием и кусочно-постоянным интегральным ядром вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j x(t - jr) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{1}$$

где $a_j, c_j \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $t \geqslant 0$.

Определение. Спектром [5] уравнения (1) называется множество его собственных чисел, то есть

$$\Lambda = \left\{ s \in \mathbb{C} : s - \sum_{j=0}^{m} a_j e^{-sjr} - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0 \right\}.$$

Определение. Будем говорить, что уравнение (1) удовлетворяет условию Ляпунова [6], если не существует такого собственного числа $s_0 \in \Lambda$, что и $-s_0 \in \Lambda$.

Определение. Функция $u(t)$ является матрицей Ляпунова уравнения (1), ассоциированной с w, если выполняется

1. динамическое свойство: при $t \geqslant 0$

$$u'(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j u(t - jr) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} u(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{2}$$

2. симметрическое свойство: при $t \geqslant 0$

$$u(-t) = u(t), \tag{3}$$

3. алгебраическое свойство:

$$u'(+0) - u'(-0) = -w. \tag{4}$$

Замечание 1. В рассматриваемом скалярном случае матрицы Ляпунова являются скалярными величинами. Тем не менее, здесь и далее используется термин «матрицы» Ляпунова, чтобы избежать возможных ассоциаций с функциями Ляпунова.

Замечание 2. Из (2) и (3), при $t \leqslant 0$ выполнено

$$u'(t) = -u'(-t) = -\sum_{j=0}^{m} a_j u(t + jr) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{jr}^{(j+1)r} u(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta. \qquad (5)$$

Ставится задача нахождения матрицы Ляпунова уравнения (1). Отметим, что в рассматриваемом скалярном случае достаточно рассматривать только $w = 1$. В самом деле, пусть $u_1(t)$ — матрица Ляпунова, ассоциированная с единицей, тогда функция

$$u_w(t) = w u_1(t)$$

является матрицей Ляпунова, ассоциированной с w.

Обзор литературы

В работе [2] матрицы Ляпунова возникают при построении функционалов для систем с одним запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h).$$

В данной работе рассматривается решение $Q(t)$ системы вида

$$Q'(t) = A_0^T Q(t) + A_1^T Q^T(h-t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant h,$$
$$Q(0) = Q^T(0) = Q_0.$$

Для нахождения $Q(t)$ предлагается ввести вспомогательную матричную функцию $R(t) = Q^T(h-t)$ и свести проблему к решению системы линейных дифференциальных уравнений без запаздывания с граничным условием $Q(h/2) = R^T(h/2) = F$, где за счёт выбора F можно добиться удовлетворения условия $Q(0) = Q_0$. В этой же работе для экспоненциально устойчивых систем приводится явное выражение решения $\tilde{Q}(t)$ в виде несобственного интеграла, а алгебраическое и симметрическое условия отмечены как свойства матрицы $\tilde{Q}(t)$.

В работе [3] рассматривается общий случай линейных систем с запаздыванием. В этой работе указывается, что выполнение динамического, симметрического и алгебраического свойств достаточно для построения функционалов. Также доказывается, что условие Ляпунова является достаточным условием существования матриц Ляпунова для любой заданной симметрической матрицы W. Позже, в [7] для систем с несколькими запаздываниями и [6] для систем с распределённым запаздыванием показано, что выполнение условия Ляпунова влечёт и единственность матриц Ляпунова, также отмечено, что если оно не выполнено, то для некоторой симметрической матрицы W_0 не существует ассоциированной с ней матрицы Ляпунова.

Вопросу нахождения матриц Ляпунова для систем с одним запаздыванием посвящена публикация [8]. Для этого вводится матрица $V(t) = U(t-h)$ и рассматривается система дифференциальных уравнений

$$U'(t) = U(t)A_0 + V(t)A_1,$$
$$V'(t) = -A_1^T U(t) - A_0^T V(t),$$

с граничными условиями

$$
\begin{gathered}
U(0) = V(h), \\
A_0^T V(h) + U(0)A_0 + A_1^T U(h) + V(0)A_1 = -W.
\end{gathered}
$$

Далее показывается, как решение этой вспомогательной системы позволяет получить матрицу Ляпунова, ассоциированную с W. Также отмечается, что в случае единственности решения вспомогательной системы единственной матрицей Ляпунова оказывается просто $U(t)$. Также в данной статье показано и обратное: из единственности матрицы Ляпунова следует единственность решения вспомогательной системы. В качестве общего условия единственности вновь называется условие Ляпунова.

В [9] приводится построение аналогичной системы с граничными условиями на случай систем с несколькими запаздываниями, кратными одному базовому. В статье [10] рассматривается случай систем с распределённым запаздыванием:

$$
\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^{0} G(\theta) x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta,
$$

для классов уравнений с полиномиальным интегральным ядром и с ядром более общего вида:

$$
\begin{gathered}
G(\theta) = \sum_{j=0}^{m} \eta_j(\theta) B_j, \\
\dot{\eta}_j(\theta) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{jk} \eta_k(\theta),
\end{gathered}
$$

где $B_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$. Дополнительно к рассмотренным выше матрицам $U(t)$, $V(t)$ вводятся матрицы

$$
\begin{aligned}
X_j(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) U(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta, \\
Y_j(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) V(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

и вопрос нахождения матриц Ляпунова снова сводится к решению системы дифференциальных уравнений с граничными условиями. К сожалению, в данной работе не приводится результатов, позволяющих совершить обратный переход от решения вспомогательной системы к матрицам Ляпунова.

В данной работе подход аналогичный [8, 10] распространяется на скалярные уравнения с распределённым запаздыванием и кусочно-постоянным интегральным ядром. Отметим, что вспомогательная система обобщается естественным образом, в то время как в выборе граничных условий возникает некоторый произвол. В отличие от [10], в данной работе предлагается граничное условие, связывающие между собой вспомогательные функции, отвечающие точечным и интегральным слагаемым в (2), благодаря чему удаётся получить результаты полностью аналогичные [8].

Глава 1. Вспомогательная система

В данной главе вопрос построения матриц Ляпунова будет сведён к решению системы линейных дифференциальных уравнений без запаздывания с граничными условиями.

Пусть $u(t)$ — матрица Ляпунова уравнения (1), ассоциированная с w. Введём $4m-1$ вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} y_i(t) &= u(t+ir), && -m \leqslant i \leqslant m-1, \\ z_i(t) &= \int_{(i-1)r}^{ir} u(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta, && -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \end{aligned} \tag{6}$$

где $t \in [0, r]$. Следовательно, из (2) для $i \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} y_i'(t) = u'(t+ir) &= \sum_{j=0}^{m} a_j u\bigl(t+(i-j)r\bigr) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} u(t+ir+\theta)\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j u\bigl(t+(i-j)r\bigr) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{(i-j-1)r}^{(i-j)r} u(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j y_{i-j} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{i-j}(t). \end{aligned}$$

В свою очередь, если $i < 0$, то $t + ir \leqslant 0$, а значит из (5) получим, что

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= -\sum_{j=0}^{m} a_j u\bigl(t+(i+j)r\bigr) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{jr}^{(j+1)r} u(t+ir+\theta)\,\mathrm{d}\theta = \\ &= -\sum_{j=0}^{m} a_j u\bigl(t+(i+j)r\bigr) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{(i+j)r}^{(i+j+1)r} u(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\ &= -\sum_{j=0}^{m} a_j y_{i+j}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{i+j+1}(t). \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
z_i'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{(i-1)r}^{ir} u(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t+(i-1)r}^{t+ir} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\
&= u(t+ir) - u\bigl(t+(i-1)r\bigr) = \\
&= y_i(t) - y_{i-1}(t).
\end{aligned}$$

Ясно, что введённые функции удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&y_i(0) = y_{i-1}(r), && -m+1 \leqslant i \leqslant m-1,\\
&z_i(0) = z_{i-1}(r), && -m+2 \leqslant i \leqslant m-1,\\
&z_0(0) = \int_{-r}^{0} u(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \\
&\qquad = \int_0^r u(\xi - r)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^r y_{-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Условие (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
-w &= u'(+0) - u'(-0) = \\
&= y_0'(0) - y_{-1}'(r) = \\
&= \sum_{j=0}^{m} a_j\left[y_{-j}(0) + y_{j-1}(r)\right] + \sum_{j=0}^{m-1} c_j\left[z_{-j}(0) + z_j(r)\right].
\end{aligned}$$

Таким образом доказано следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть $u(t)$ — матрица Ляпунова уравнения* (1). *Тогда вспомогательные функции, определяемые* (6), *удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases}
y_i'(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j y_{i-j}(t) + \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j z_{i-j}(t), & 0 \leqslant i \leqslant m-1,\\
y_i'(t) = -\sum\limits_{j=0}^{m} a_j y_{i+j}(t) - \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j z_{i+j+1}(t), & -m \leqslant i \leqslant -1,\\
z_i'(t) = y_i(t) - y_{i-1}(t), & -m+1 \leqslant i \leqslant m-1,
\end{cases} \tag{7}$$

и набору граничных условий

$$\begin{cases} y_i(0) = y_{i-1}(r), & -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \\ z_i(0) = z_{i-1}(r), & -m+2 \leqslant i \leqslant m-1, \\ z_0(0) = \displaystyle\int_0^r y_{-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{m} a_j\left[y_{-j}(0) + y_{j-1}(r)\right] + \sum_{j=0}^{m-1} c_j\left[z_{-j}(0) + z_j(r)\right] = -w. \end{cases} \tag{8}$$

Введём обозначения

$$y(t) = \bigl(y_{m-1}(t), \ldots, y_{-m}(t)\bigr)^T,$$
$$z(t) = \bigl(z_{m-1}(t), \ldots, z_{-m+1}(t)\bigr)^T.$$

Лемма 2. *Любое решение* $(y(t), z(t))$ *системы* (7)–(8) *удовлетворяет*

$$z_i(0) = \int_0^r y_{i-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad z_i(r) = \int_0^r y_i(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

где $-m+1 \leqslant i \leqslant m-1$.

Доказательство. Из граничных условий (8) данные равенства выполнены для $z_0(0)$ и $z_{-1}(r)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} z_1(0) = z_0(r) = z_0(0) + \int_0^r \left[y_0(\xi) - y_{-1}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi = \\ = \int_0^r y_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \\ z_{-2}(r) = z_{-1}(0) = z_{-1}(r) - \int_0^r \left[y_{-1}(\xi) - y_{-2}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi = \\ = \int_0^r y_{-2}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Оставшие равенства проверяются аналогично. □

Замечание 3. Утверждение Леммы 2 остаётся верным и для любого решения системы (7), удовлетворяющего всем граничным условиям (8) кроме последнего.

Покажем обратный результат, позволяющий по решению вспомогательной системы получить матрицу Ляпунова.

Лемма 3. *Пусть известно решение* $(y(t), z(t))$ *системы* (7)–(8). *Тогда функция* $u(t)$, *определяемая как*

$$u(t) = \frac{1}{2}\Big[y_i(t-ir) + y_{-i-1}\big((i+1)r-t\big)\Big], \quad t \in [ir,(i+1)r], \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1,$$

и $u(t) = u(-t)$ *при* $t < 0$, *является матрицей Ляпунова уравнения* (1), *ассоциированной с* w.

Доказательство. Сначала отметим, что для $t = ir$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$:

$$u(ir+0) = \frac{1}{2}\big[y_i(0) + y_{-i-1}(r)\big] = \frac{1}{2}\big[y_{i-1}(r) + y_{-i}(0)\big] = u(ir-0),$$

то есть задание функции $u(t)$ непротиворечиво и введённая таким образом функция непрерывна. По построению $u(t)$ удовлетворяет свойству симметрии.

Проверим алгебраическое свойство. Заметим, что

$$\begin{aligned} u'(+0) &= \frac{1}{2}\big[y_0'(0) - y_{-1}'(r)\big] = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m} a_j\big[y_{-j}(0) + y_{j-1}(r)\big] + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1} c_j\left[z_{-j}(0) + z_j(r)\right] = \\ &= -\frac{w}{2}, \end{aligned}$$

в то же время из задания функции $u(t)$ следует, что $u'(-0) = -u'(+0)$, значит

$$u'(+0) - u'(-0) = -w.$$

Остаётся убедиться, что и динамическое свойство также выполнено. Заметим, что для любых $0 \leqslant i, j \leqslant m-1$ и $t \in [ir,(i+1)r]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big[y_{i-j}(t-ir) + y_{j-i-1}\big((i+1)r-t\big)\Big] &= \begin{cases} u(t-jr), & \text{если } i \geqslant j, \\ u(jr-t), & \text{если } i < j, \end{cases} \\ &= u(t-jr), \\ \frac{1}{2}\Big[y_{i-j-1}(t-ir) + y_{j-i}\big((i+1)r-t\big)\Big] &= \begin{cases} u\big(t-(j+1)r\big), & \text{если } i > j, \\ u\big((j+1)r-t\big), & \text{если } i \leqslant j, \end{cases} \\ &= u\big(t-(j+1)r\big). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что тогда

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[z_{i-j}(t-ir)+z_{j-i}\big((i+1)r-t\big)\Big]=u(t-jr)-u\big(t-(j+1)r\big)=$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-(j+1)r}^{-jr}u(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Рассмотрим значения дифференцируемых функций при $t=ir$ и применим Лемму 2:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big[z_{i-j}(0)+z_{j-i}(r)\big]&=\frac{1}{2}\int_0^r\big[y_{i-j-1}(\theta)+y_{j-i}(\theta)\big]\,\mathrm{d}\theta=\\&=\frac{1}{2}\int_0^r\big[y_{i-j-1}(\theta)+y_{j-i}(r-\theta)\big]\,\mathrm{d}\theta=\\&=\int_0^r u\big(\theta+(i-j-1)r\big)\,\mathrm{d}\theta=\\&=\int_{-(j+1)r}^{-jr}u(ir+\xi)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Таким образом доказано, что для $t\in[ir,(i+1)r]$:

$$\frac{1}{2}\Big[z_{i-j}(t-ir)+z_{j-i}\big((i+1)r-t\big)\Big]=\int_{-(j+1)r}^{-jr}u(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Пусть $t\in[ir,(i+1)r]$, найдём производную $u(t)$:

$$\begin{aligned}u'(t)&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[y_i(t-ir)+y_{-i-1}\big((i+1)r-t\big)\Big]=\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m}a_j\Big[y_{i-j}(t-ir)+y_{j-i-1}\big((i+1)r-t\big)\Big]+\\&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}c_j\Big[z_{i-j}(t-ir)+z_{j-i}\big((i+1)r-t\big)\Big]=\\&=\sum_{j=0}^{m}a_ju(t-jr)+\sum_{j=0}^{n-1}c_j\int_{-(j+1)r}^{-jr}u(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Значит динамическое свойство выполнено для всех $t\in[0,mr]$. □

Теорема 4. *Пусть* $(y(t),z(t))$ *— единственное решение системы* (7)–(8), *тогда существует единственная матрица Ляпунова* $u(t)$, *ассоциированная с* w, *определяемая как*

$$u(t)=y_i(t-ir),\quad t\in[ir,(i+1)r],\quad 0\leqslant i\leqslant m-1,$$

и $u(t)=u(-t)$ *при* $t<0$.

Доказательство. Единственность очевидна, ведь различные $u(t)$ по Лемме 1 порождали бы различные решения (7)–(8). Докажем, что в этом случае $u(t)$ можно находить указанным образом. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i(t) &= y_{-i-1}(r-t) && -m \leqslant i \leqslant m-1, \\ \tilde{z}_i(t) &= z_{-i}(r-t), && -m+1 \leqslant i \leqslant m-1. \end{aligned}$$

Тогда, для любого $i \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i'(t) &= -y_{-i-1}'(r-t) = \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j y_{j-i-1}(r-t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{j-i}(r-t) = \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j \tilde{y}_{i-j}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \tilde{z}_{i-j}(t), \end{aligned}$$

а для всех $i < 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i'(t) &= -y_{-i-1}'(r-t) = \\ &= -\sum_{j=0}^{m} a_j y_{-i-j-1}(r-t) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{-i-j-1}(r-t) = \\ &= -\sum_{j=0}^{m} a_j \tilde{y}_{i+j}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \tilde{z}_{i+j+1}(t), \end{aligned}$$

наконец,

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i'(t) &= -z_{-i}'(r-t) = \\ &= -y_{-i}(r-t) + y_{-i-1}(r-t) = \\ &= \tilde{y}_i(t) - \tilde{y}_{i-1}(t). \end{aligned}$$

Далее, для всех рассматриваемых в (8) индексов i выполнено

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i(0) &= y_{-i-1}(r) = y_{-i}(0) = \tilde{y}_{i-1}(r), \\ \tilde{z}_i(0) &= z_{-i}(r) = z_{-i+1}(0) = \tilde{z}_{i-1}(r). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что и интегральное условие выполнено:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_0(0) = z_0(r) = \int_0^r y_0(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \\ = \int_0^r \tilde{y}_{-1}(r-\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \\ = \int_0^r \tilde{y}_{-1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Остаётся лишь заметить, что

$$\sum_{j=0}^{m} a_j\left[\tilde{y}_{-j}(0) + \tilde{y}_{j-1}(r)\right] + \sum_{j=0}^{m-1} c_j\left[\tilde{z}_{-j}(0) + \tilde{z}_j(r)\right] =$$
$$= \sum_{j=0}^{m} a_j\left[y_{j-1}(r) + y_{-j}(0)\right] + \sum_{j=0}^{m-1} c_j\left[z_j(r) + z_{-j}(0)\right] = -w.$$

Таким образом и $(\tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ являются решением (7)–(8). В силу единственности получаем, что

$$\begin{aligned}y_i(t) &= y_{-i-1}(r-t),\\ z_i(t) &= z_{-i}(r-t),\end{aligned}$$

откуда из Леммы 3 и следует требуемое. □

Глава 2. Матричная форма вспомогательной системы

В данной главе предлагается метод решения системы (7)–(8). Будет показано, как решение вспомогательной системы сводится к решению системы линейных алгебраический уравнений.

Сначала представим систему (7)–(8) в матричной форме. Введём матрицы $A \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$, $C \in \mathbb{R}^{2m\times(2m-1)}$, $I \in \mathbb{R}^{(2m-1)\times 2m}$ как

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & \dots & a_{m-1} & a_m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ -a_m & \dots & -a_1 & -a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & \dots & c_{m-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_0 & \dots & c_{m-1} \\ -c_{m-1} & \dots & -c_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -c_{m-1} & \dots & -c_0 \end{bmatrix},$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (7) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} A & C \\ I & \mathbf{0}_{2m-1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\mathbf{0}_{2m-1}$ — квадратная нулевая матрица порядка $2m-1$.

Граничные условия (8) можно представить в виде

$$M \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \tilde{N} \int_0^r \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t + N \begin{pmatrix} y(r) \\ z(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -w \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор-столбец размерности $4m-2$,

$$M = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
y_{m-1} & \dots & y_0 & \dots & y_{-m+1} & y_{-m} & z_{m-1} & \dots & z_0 & \dots & z_{-m+2} & z_{-m+1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \dots & a_0 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & \dots & c_0 & \dots & c_{m-2} & c_{m-1}
\end{bmatrix}
\end{array},$$

$$N = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
y_{m-1} & y_{m-2} & \dots & y_{-1} & \dots & y_{-m} & z_{m-1} & z_{m-2} & \dots & z_0 & \dots & z_{-m+1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 & \dots & 0 & c_{m-1} & c_{m-2} & \dots & c_0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
\end{array},$$

а $\tilde{N}$ — это квадратная матрица размерности $4m-1$ со всеми нулевыми элементами, кроме элемента предпоследней строки $m+1$ столбца, который равен -1. Заметим, что $\tilde{N} = -e_{4m-2}e_{m+1}^T$, где e_i обозначает вектор из $\mathbb{R}^{4m-1}$, у которого i-тая компонента равняется единице, а все остальные — нули.

Лемма 5. *Для любой квадратной матрицы L порядка l и любой матрицы B размерности $k \times l$ выполнено*

$$\exp \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k & B \\ \mathbf{0}_{l\times k} & L \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} E_k & B \displaystyle\int_0^t e^{L\tau}\, \mathrm{d}\tau \\ \mathbf{0}_{l\times k} & e^{Lt} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Так как степенной ряд для матричной экспоненты можно интегрировать почленно, то

$$\begin{pmatrix} E_k & B \displaystyle\int_0^t e^{L\tau}\, \mathrm{d}\tau \\ \mathbf{0}_{l\times k} & e^{Lt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & B \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} L^i \\ \mathbf{0}_{l\times k} & \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} L^i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_k & \mathbf{0}_{k\times l} \\ \mathbf{0}_{l\times k} & E_l \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k & BL^{i-1} \\ \mathbf{0}_{l\times k} & L^i \end{pmatrix} =$$

$$= \exp \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k & B \\ \mathbf{0}_{l\times k} & L \end{pmatrix} t. \qquad \square$$

Из (9),

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{Lt} \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix},$$

подставим это выражение в (10) и учтём Лемму 5. Придём к выражению вида

$$\underbrace{\left[M + \begin{pmatrix} e_{4m-2} & N \end{pmatrix} \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e_{m+1}^T \\ \mathbf{0} & L \end{pmatrix} r \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} \right]}_{X} \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -w \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Нетрудно видеть, что вспомогательная система (7)–(8) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det X \neq 0$.

Глава 3. Условие существования и единственности

Для доказательства основного результата данной главы потребуется вспомогательная лемма.

Лемма 6. *Пусть* $(y(t), z(t))$ *является решением* (7)–(8) *при* $w = 0$. *Тогда*

$$\begin{aligned} y_i(t) &= y_{i-1}(t+r), && -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \\ z_i(t) &= z_{i-1}(t+r), && -m+2 \leqslant i \leqslant m-1. \end{aligned}$$

Доказательство. Отметим сначала, что любое решение (7) является аналитической на $\mathbb{R}$ функцией, в частности это означает существование производных любого порядка. Покажем, что если $(y(t), z(t))$ — решение (7)–(8), то и $(y'(t), z'(t))$ — решение (7)–(8).

Продифференцировав каждое из тождеств в (7), получим, что функции $(y'(t), z'(t))$ являются решением системы (7). Остаётся проверить граничные условия. Для $1 \leqslant i \leqslant m-1$:

$$\begin{aligned} y_i'(0) &= \sum_{j=0}^{m} a_j y_{i-j}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{i-j}(0) = \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j y_{i-j-1}(r) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{i-j-1}(r) = y_{i-1}'(r), \end{aligned}$$

аналогично для $-m+1 \leqslant i \leqslant -1$:

$$\begin{aligned} y_i'(0) &= -\sum_{j=0}^{m} a_j y_{i+j}(0) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{i+j+1}(0) = \\ &= -\sum_{j=0}^{m} a_j y_{i+j-1}(r) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{i+j}(r) = y_{i-1}'(r), \end{aligned}$$

наконец для $y_0'(0)$ и $y_{-1}'(r)$:

$$y_0'(0) - y_{-1}'(r) = \sum_{j=0}^{m} a_j \left[y_{-j}(0) + y_{j-1}(r)\right] + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left[z_{-j}(0) + z_j(r)\right] = 0.$$

Аналогично и для z_i' при $-m+2 \leqslant i \leqslant m-1$:

$$\begin{aligned} z_i'(0) &= y_i(0) - y_{i-1}(0) = \\ &= y_{i-1}(r) - y_{i-2}(r) = z_{i-1}'(r). \end{aligned}$$

Несложно проверить и интегральное условие:

$$z_0'(0) = y_0(0) - y_{-1}(0) = y_{-1}(r) - y_{-1}(0) = \int_0^r y_{-1}'(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Для того, чтобы показать, что последнее граничное условие также выполнено, рассмотрим

$$\sum_{i=1}^{m} a_i y_{-i}'(0) = -\sum_{i=1}^{m} a_i \left[a_0 y_{-i}(0) + \sum_{j=1}^{m} a_j y_{j-i}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{j-i+1}(0) \right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} a_0 a_i y_{-i}(0) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j y_{j-i}(0) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} a_i c_j z_{j-i+1}(0),$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i y_{i-1}'(r) = \sum_{i=1}^{m} a_i \left[a_0 y_{i-1}(r) + \sum_{j=1}^{m} a_j y_{i-j-1}(r) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{i-j-1}(r) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_0 a_i y_{i-1}(r) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j y_{i-j-1}(r) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} a_i c_j z_{i-j-1}(r).$$

Так как $y_{i-j-1}(r) = y_{i-j}(0)$, то, с точностью до переобозначения индексов,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j y_{j-i}(0) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j y_{i-j-1}(r).$$

Остаётся рассмотреть ещё следующие слагаемые:

$$a_0 y_0'(0) = a_0^2 y_0(0) + \sum_{i=1}^{m} a_0 a_i y_{-i}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} a_0 c_j z_{-j}(0),$$

$$a_0 y_{-1}'(r) = -a_0^2 y_{-1}(r) - \sum_{i=1}^{m} a_0 a_i y_{i-1}(r) - \sum_{j=0}^{m-1} a_0 c_j z_j(r).$$

Просуммируем все вышеприведённые выражения; учитывая, что $y_0(0) = y_{-1}(r)$, сократим одинаковые слагаемые и сгруппируем оставшиеся члены следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \left[y_{-j}'(0) + y_{j-1}'(r) \right] + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left[z_{-j}'(0) + z_j'(r) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left[z_{-j}'(0) + a_0 z_{-j}(0) + \sum_{i=1}^{m} a_i z_{i-j-1}(r) \right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left[z_j'(r) - a_0 z_j(r) - \sum_{i=1}^{m} a_i z_{j-i+1}(0) \right].$$

С учётом Леммы 2 и Замечания 3 выражения в квадратных скобках можно преобразовать к виду:

$$
\begin{aligned}
z'_{-j}(0) + a_0 z_{-j}(0) + \sum_{i=1}^{m} a_i z_{i-j-1}(r) &= \int_0^r \left[y'_{-j-1}(\xi) + \sum_{i=0}^{m} a_i y_{i-j-1}(\xi) \right] \mathrm{d}\xi = \\
&= -\sum_{i=0}^{m-1} c_i \int_0^r z_{i-j}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \\
z'_j(r) - a_0 z_j(r) - \sum_{i=1}^{m} a_i z_{j-i+1}(0) &= \int_0^r \left[y'_j(\xi) - \sum_{i=0}^{m} a_i y_{j-i}(\xi) \right] \mathrm{d}\xi = \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} c_i \int_0^r z_{j-i}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m} a_j \left[y'_{-j}(0) + y'_{j-1}(r) \right] + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \left[z'_{-j}(0) + z'_j(r) \right] = \\
&\qquad = -\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-1} c_i c_j \int_0^r z_{i-j}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-1} c_j c_i \int_0^r z_{j-i}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0,
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

По индукции, для всех $k \geqslant 0$:

$$
\begin{aligned}
y_i^{(k)}(0) &= y_{i-1}^{(k)}(r), \qquad && -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \\
z_i^{(k)}(0) &= z_{i-1}^{(k)}(r), \qquad && -m+2 \leqslant i \leqslant m-1,
\end{aligned}
$$

но отсюда и следует требуемое, так как рассматриваемые функции являются аналитическими. □

Следствие 6.1. *Пусть $(y(t), z(t))$ является решением (7)–(8) при $w = 0$. Тогда*

$$
z_0(t) = \int_{-r}^{0} y_0(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi.
$$

Доказательство. Из Лемм 2 и 6 получим, что

$$
\begin{aligned}
z'_0(t) &= y_0(t) - y_0(t-r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{t-r}^{t} y_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \\
z_0(r) &= \int_0^r y_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}
$$

откуда и следует требуемое. □

Теорема 7. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Вспомогательная система* (7)–(8) *имеет единственное решение.*
2. *Существует единственная матрица Ляпунова уравнения* (1), *ассоциированная с* w.
3. *Уравнение* (1) *удовлетворяет условию Ляпунова.*

Доказательство. В Теореме 4 было показано, что из утверждения 1 следует утверждение 2.

Покажем, что из утверждения 2 следует утверждение 3. Пусть существует единственная матрица Ляпунова $u(t)$, ассоциированная с w, но условие Ляпунова не выполнено. Это значит, что существует $s_0 \in \mathbb{C}$, для которого

$$\begin{aligned} s_0 &= \sum_{j=0}^{m} a_j e^{-s_0 jr} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s_0\theta}\,\mathrm{d}\theta, \\ -s_0 &= \sum_{j=0}^{m} a_j e^{s_0 jr} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{-s_0\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$u_0(t) = e^{s_0 t} + e^{-s_0 t} \not\equiv 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_0'(t) &= s_0 e^{s_0 t} - s_0 e^{-s_0 t} \\ &= \left[\sum_{j=0}^{m} a_j e^{-s_0 jr} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s_0\theta}\,\mathrm{d}\theta\right] e^{s_0 t} + \\ &\qquad + \left[\sum_{j=0}^{m} a_j e^{s_0 jr} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{-s_0\theta}\,\mathrm{d}\theta\right] e^{-s_0 t} \\ &= \sum_{j=0}^{m} a_j u(t-jr) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} u_0(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

то есть выполнено динамическое свойство. Ясно, что $u_0(t) = u_0(-t)$. Производная $u_0(t)$ непрерывна в нуле, значит

$$u'(+0) - u'(-0) = 0.$$

Таким образом $u_0(t)$ является матрицей Ляпунова, ассоциированной с $w_0 = 0$. Нетрудно видеть, что $u(t) + u_0(t)$ будет отличной от $u(t)$ матрицей Ляпунова, ассоциированной с w, что противоречит условию. Значит исходное предположение было неверным и условие Ляпунова выполнено.

Покажем, что из утверждения 3 следует утверждение 1. Пусть условие Ляпунова выполнено. Как было показано ранее в Главе 2, существование единственного решения системы (7)–(8) эквивалентно существованию единственного решения системы линейных алгебраических уравнений (11). В свою очередь система (11) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда единственным решением однородной системы является тривиальное. Напротив, предположим, что существует $(y(0), z(0)) \neq \mathbf{0}$, являющееся решением (11) при нулевой правой части. Данному начальному условию соответствует нетривиальное решение (7)–(8) при $w = 0$.

Покажем сначала, что в полученном решении хотя бы одна функция $y_i(t) \not\equiv 0$. В самом деле, если все $y_i(t) \equiv 0$, то из Следствия 6.1 $z_0(t) \equiv 0$, а значит, по Лемме 6 и все $z_i(t) \equiv 0$, что противоречит исходному предположению о $(y(0), z(0)) \neq \mathbf{0}$. Следовательно найдётся отличная от нуля функция $y_{i_0}(t)$, тогда из Леммы 6 следует, что и все остальные $y_i(t) \not\equiv 0$.

Известно, что решение системы (7) линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \mathcal{P}_{i,k}(t), \qquad -m \leqslant i \leqslant m-1,$$
$$z_i(t) = \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \mathcal{Q}_{i,k}(t), \qquad -m+1 \leqslant i \leqslant m-1,$$

где $s_1, \ldots, s_\mu$ — различные собственные числа системы (7); $\mathcal{P}_{i,k}(t)$, $\mathcal{Q}_{i,k}(t)$ — полиномы. Так как $y_0(t) \not\equiv 0$, то найдётся d, для которого $\mathcal{P}_{0,d}(t) \not\equiv 0$. Пусть $\deg \mathcal{P}_{0,d} = l$:

$$\mathcal{P}_{0,d}(t) = p_0 t^l + p_1 t^{l-1} + \ldots + p_l,$$

где $p_0 \neq 0$. Воспользуемся Леммой 6:

$$\sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} \mathcal{P}_{i,k}(t) = y_i(t) = y_0(t + ir) = \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t} e^{s_k ir} \mathcal{P}_{0,k}(t + ir).$$

Значит $\mathcal{P}_{i,d}(t) = e^{s_d ir}\mathcal{P}_{0,d}(t+ir) \not\equiv 0$, то есть $\deg \mathcal{P}_{i,d}(t) = l$ со старшим коэффициентом $p_0 e^{s_d ir}$.

Из Следствия 6.1,

$$\sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t}\mathcal{Q}_{0,k}(t) = z_0(t) = \int_{-r}^{0} y_0(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\ = \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t}\int_{-r}^{0} e^{s_k\xi}\mathcal{P}_{0,k}(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Нетрудно видеть, что каждое из интегральных слагаемых снова является полиномом по t степени не выше $\deg \mathcal{P}_{0,k}(t)$, откуда $\deg \mathcal{Q}_{0,d}(t) \leqslant l$ с коэффициентом при t^l вида

$$p_0\int_{-r}^{0} e^{s_d\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Аналогично полученному для $y_i(t)$, снова применим Лемму 6, следовательно $\deg \mathcal{Q}_{i,d}(t) \leqslant l$ с коэффициентом при t^l вида

$$p_0 e^{s_d ir}\int_{-r}^{0} e^{s_d\xi}\,\mathrm{d}\xi = p_0\int_{(i-1)r}^{ir} e^{s_d\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Из системы (7):

$$y_0'(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j y_{-j}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_{-j}(t),$$

$$\sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t}\left[s_k\mathcal{P}_{0,k}(t) + \mathcal{P}_{0,k}'(t)\right] = \sum_{k=1}^{\mu} e^{s_k t}\left[\sum_{j=0}^{m} a_j\mathcal{P}_{-j,k}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j\mathcal{Q}_{-j,k}(t)\right].$$

Так как $s_1,\ldots,s_\mu$ — различны, то квазиполиномы с обеих частей равенства могут быть равны только при равенстве полиномиальных множителей; при $e^{s_d t}$ получим:

$$s_d\mathcal{P}_{0,d}(t) + \mathcal{P}_{0,d}'(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j\mathcal{P}_{-j,d}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j\mathcal{Q}_{-j,d}(t).$$

Учитывая, что $\deg \mathcal{P}_{0,d}'(t) = l-1$, рассмотрим коэффициенты при t^l:

$$p_0 s_d = p_0\left[\sum_{j=0}^{m} a_j e^{-s_d jr} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j\int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s_d\xi}\,\mathrm{d}\xi\right].$$

Сокращая на $p_0 \neq 0$, получим, что $s_d \in \Lambda$. Рассматривая аналогично уравнение для $y_{-1}(t)$:

$$y'_{-1}(t) = -\sum_{j=0}^{m} a_j y_{j-1}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j z_j(t),$$

получим

$$s_d \mathcal{P}_{-1,d}(t) + \mathcal{P}'_{-1,d}(t) = -\sum_{j=0}^{m} a_j \mathcal{P}_{j-1,d}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \mathcal{Q}_{j,d}(t),$$

откуда, из равенства коэффициентов при t^l,

$$p_0 e^{-s_d r} s_d = p_0 \left[-\sum_{j=0}^{m} a_j e^{s_d (j-1) r} - \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{(j-1)r}^{jr} e^{s_d \xi} \, \mathrm{d}\xi \right].$$

Сокращая на $-p_0 e^{-s_d r} \neq 0$, получим:

$$-s_d = \sum_{j=0}^{m} a_j e^{s_d j r} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{(j-1)r}^{jr} e^{s_d (\xi + r)} \, \mathrm{d}\xi,$$

$$-s_d = \sum_{j=0}^{m} a_j e^{s_d j r} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{-s_d \eta} \, \mathrm{d}\eta,$$

то есть $-s_d \in \Lambda$, а значит условие Ляпунова не выполнено. Данное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Глава 4. Пример

Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x(t-1) + c \int_{-1}^{0} x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{-2}^{-1} x(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{12}$$

где c — вещественный параметр. Для данного уравнения $r = 1$, $m = 2$.

Выберем $w = 1$, и произведём численные расчёты с использованием MATLAB. При $c = -2$ определитель $\det X$ матрицы системы (11) отличен от нуля, следовательно по Теореме 7 условие Ляпунова выполнено, и существует единственная матрица Ляпунова, найти которую можно по формуле, доказанной в Теореме 4. График функции $u(t)$ приведён на Рисунке 1. Можно проверить, что на самом деле при $c = -2$ уравнение (12) экспоненциально устойчиво.

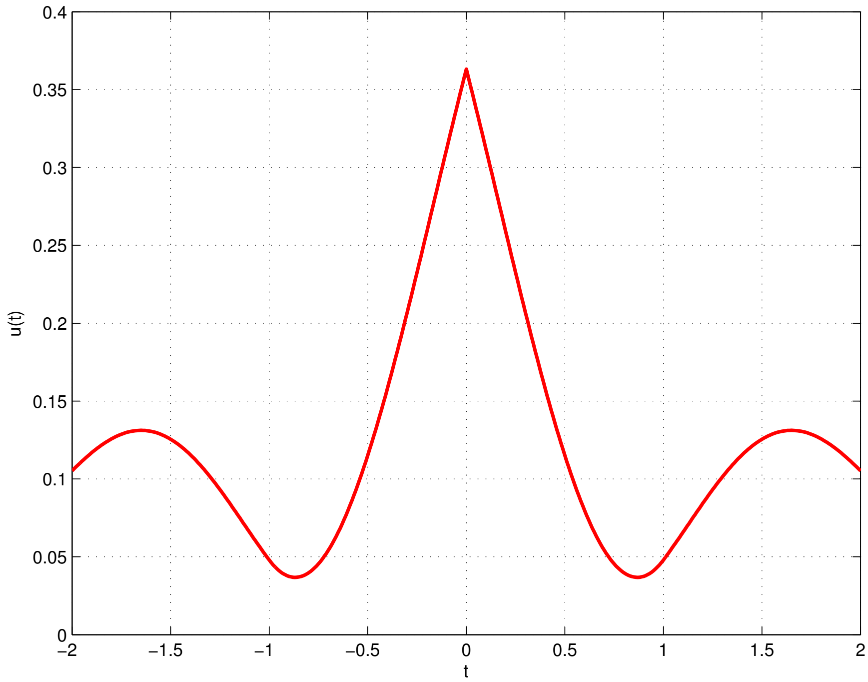


Рис. 1: Матрица Ляпунова $u(t)$ уравнения (12), $c = -2$

На Рисунке 2 приведена зависимость $\det X$ от c в окрестности $c = -2$. В точках $c_1 \approx -7.0279$ и $c_2 = -1$ определитель матрицы X обращается в нуль, а система (11) оказывается несовместной, то есть матрица Ляпунова не существует, а условие Ляпунова не выполнено. Вместе с тем, собственные числа непрерывно зависят от параметра и расположены симметрично

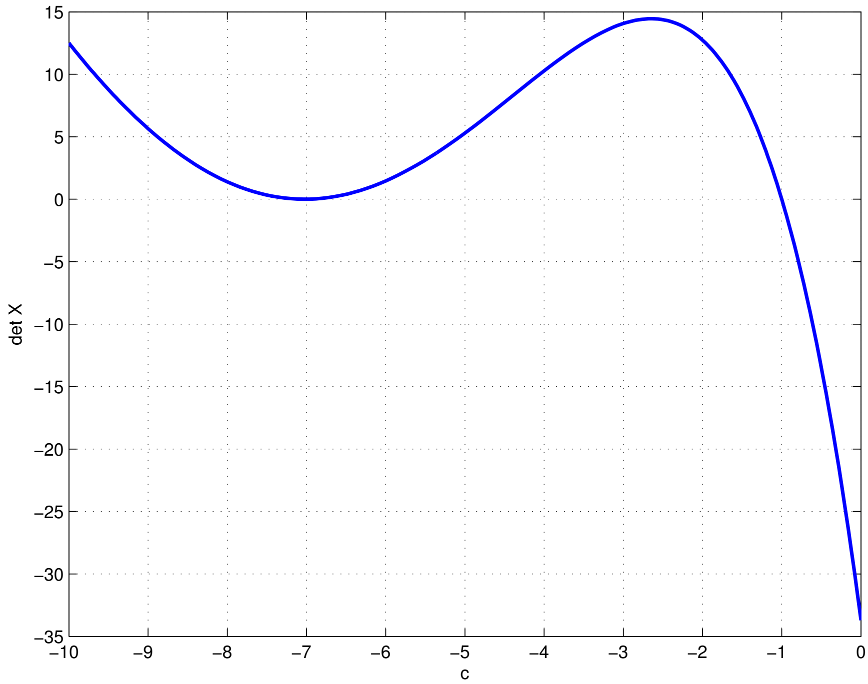
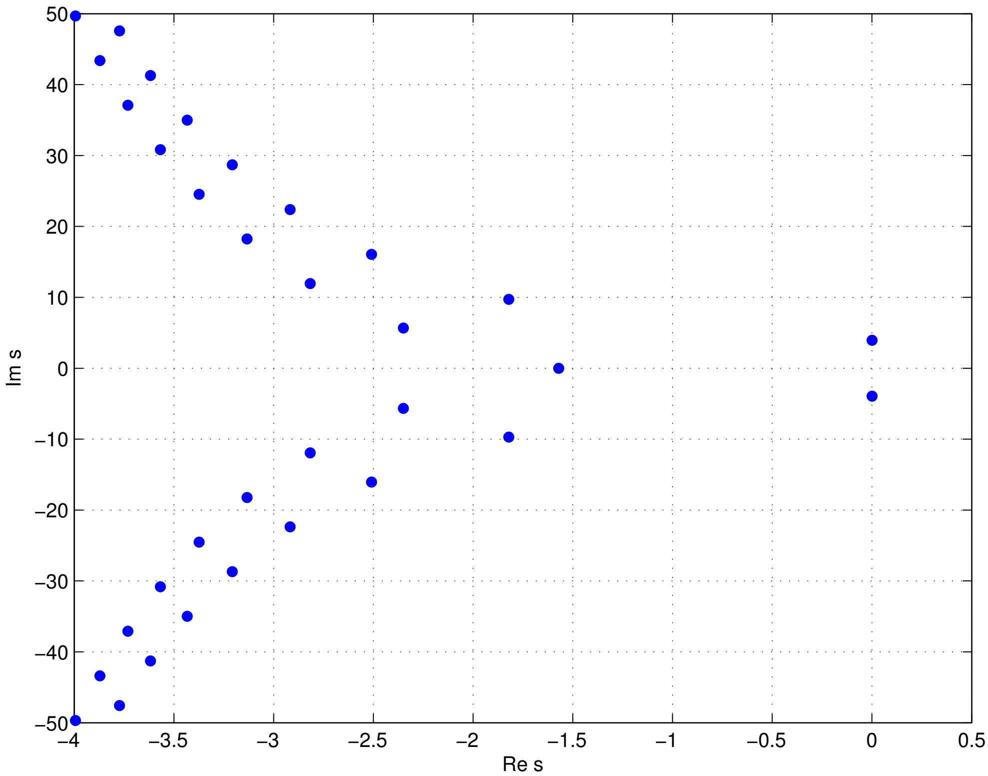
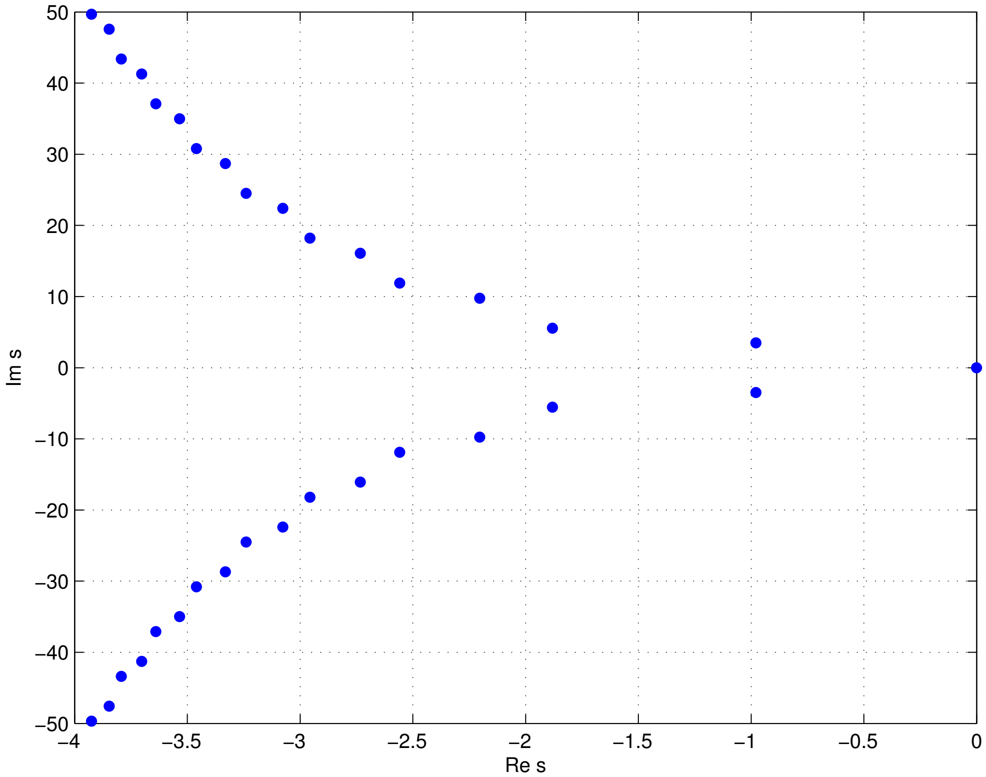


Рис. 2: Зависимость $\det X(c)$

относительно вещественной оси. Значит нарушение условия Ляпунова могло произойти только при появлении собственных чисел на мнимой оси и нарушении устойчивости. Таким образом можно сделать вывод об экспоненциальной устойчивости уравнения (12) для всех $c \in (c_1, c_2)$. В заключение приведём Рисунок 3, на котором отражены собственные числа при граничных значениях параметра. Видно, что при $c = c_1$ имеются два комплексно сопряженных собственных числа на мнимой оси, а при $c = c_2$ одним из собственных чисел является нуль.



(a) $c = c_1$



(b) $c = c_2$

Рис. 3: Собственные числа уравнения (12)

Выводы

В данной работе приведён и полностью обоснован метод построения матриц Ляпунова для класса уравнений с распределённым запаздыванием и кусочно-постоянным интегральным ядром.

Задача нахождения матриц Ляпунова сведена к решению системы линейных дифференциальных уравнений без запаздывания с граничными условиями. Приводится обратный результат, позволяющий по произвольному решению вспомогательной системы находить матрицу Ляпунова. Показано, что в случае единственности выражение для нахождения матриц Ляпунова приобретает более простой вид. Предложен метод решения данной вспомогательной системы, согласно которому для решения задачи достаточно построить матрицу X и решить систему линейных алгебраических уравнений.

Доказан критерий существования и единственности матриц Ляпунова. Показано, что он эквивалентен уже известному критерию, которым является условие Ляпунова. Однако проверка нового критерия сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений и может быть произведена в процессе применения описанного метода нахождения матриц Ляпунова, в то время как для проверки условия Ляпунова требуется более сложное с вычислительной точки зрения нахождение всех собственных чисел в некоторой области комплексной плоскости. Поэтому новый критерий является более эффективным для применения на практике.

Заключение

Подход к нахождению матриц Ляпунова, предложенный в [8, 10], был распространен на класс уравнений с распределённым запаздыванием, который ранее не рассматривался в литературе, а именно на класс уравнений с кусочно-постоянным интегральным ядром. Предложен способ построения матриц Ляпунова для данного класса, доказано условие существования и единственности, оказывающееся более простым для проверки, нежели условие Ляпунова.

Одним из направлений дальнейших исследований может являться обобщение предложенного подхода на системы уравнений. Заслуживает внимания и изучение возможности применения указанного метода к приближению матриц Ляпунова для уравнений и систем с распределённым запаздыванием и произвольным непрерывным (или кусочно-непрерывным) интегральным ядром.

Список литературы

[1] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

[2] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation // Journal of Differential Equations, 1978. Vol. 29, No 3. P. 439–451.

[3] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989. Vol. 142, No 1. P. 83–94.

[4] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica, 2003. Vol. 39, No 1. P. 15–20.

[5] Bellman R., Cooke K. L. Differential-Difference Equations. N. Y.: Academic Press, 1963. 482 p.

[6] Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Boston: Birkhäuser, 2013. 311 p.

[7] Kharitonov V. L. On the uniqueness of Lyapunov matrices for a time-delay system // Systems & Control Letters, 2012. Vol. 61, No 3. P. 397–402.

[8] Kharitonov V. L., Plischke E. Lyapunov matrices for time-delay systems // Systems & Control Letters, 2006. Vol. 55, No 9. P. 697–706.

[9] Garcia-Lozano H., Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for time delay systems with commensurate delays // 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control, Oaxaca, Mexico / Ed. S. Mondié, 2004. Vol. 1. P. 102–106.

[10] Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for a class of time delay systems // Systems & Control Letters, 2006. Vol. 55, No 7. P. 610–617.