САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Дудник Максим Евгеньевич

Суммы независимых неоднородных псевдо-пуассоновских процессов со стохастической интенсивностью

Дипломная работа

Зав. кафедрой:

д. ф.-м. н., профессор Никитин Я.Ю.

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент Русаков О.В.

Рецензент:

д. т. н., профессор Белявский Г.И.

Санкт-Петербург

2016

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics and Mechanics Faculty

Maxim Dudnik

Sums of independent non-homogeneous pseudo-poissonian processes with stochastic intensity

Graduation Thesis

Head of the chair:
professor Ya.Yu. Nikitin

Scientific supervisor:
associate professor O. V. Rusakov

Reviewer:
professor G. I. Belyavsky

Saint Petersburg
2016

Содержание

1 Введение

Данная работа посвящена описанию основных свойств сумм независимых псевдопуассоновских процессов со случайной интенсивностью в случае, если интенсивность представляет собой непрерывно распределенную случайную величину. При этом ключевым понятием, необходимым для анализа, является процесс случайного индекса (ПСИ). При этом подчеркнем, что процессом случайного индекса мы называем псевдопуассоновский процесс, примененный к произвольной последовательности, а не только к марковской. Отметим также, что в данном разделе будут даны лишь краткие вводные понятия. Более строгие определения даны в Главе 1. Под процессом случайного индекса (субординатором) $\psi(t) = \psi_\Pi(t)$ мы будем понимать случайную последовательность, составленную из последовательности случайных величин $\{\xi\} = \{\xi_0, \xi_1, ...\xi_i, ...\}$ путем случайной замены времени, а именно, по определению:

$$\psi_\Pi(t) = \xi_{\Pi_\lambda(t)}. \tag{1}$$

Здесь и далее $\Pi_\lambda(t)$—процесс Пуассона с постоянной вещественной интенсивностью $\lambda > 0$. Здесь и далее в качестве последовательности случайных величин $\{\xi\}$ мы будем рассматривать последовательность центрированных и нормированных независимых одинаково распределенных случайных величин. Пуассоновские процессы, примененные к марковским последовательностям, называются псевдопуассоновскими процессами (Pseudo-Poisson proceses). Как процессы случайного индекса, так и псевдопуассоновские процессы в достаточной мере исследованы в литературе (см. напр. [1]). Однако, суммы таких процессов в указанных работах не рассматривались. Примечательным является тот факт, что сумма уже двух слагаемых вида (1) для ξ, состоящей из независимых случайных величин, уже не будет обладать свойством марковости.

В работах О.В.Русакова (см. напр. [2], [3]) были впервые введены в рассмотрение суммы независимых копий процессов вида (1), и доказана их сходимость в смысле сходимости конечномерных распределений к процессам типа Орнштейна-Уленбека, а также сходимость таким сумм в финкциональном пространстве Скорохода. Иными словами, были рассмотрены свойства процессов вида:

$$\Psi_N(t) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \psi_i(t), t \geq 0. \tag{2}$$

Для случая, когда случайные величины $\{\xi_t\}$ не обладают вторым моментом, но принадлежат области притяжения α—устойчивого закона, $0 < \alpha < 2$. Также были рассмотрены свойства процессов вида:

$$\Psi_N(t) := \frac{1}{N^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{N} \psi_i(t), t \geq 0. \tag{3}$$

Дальнейший анализ ПСИ проходил в более общих допущениях об интенсивности ведущего случайного процесса $\Pi_\lambda(t)$ (см напр. [4]). Был рассмотрен случай, когда интенсивность пуассоновского процесса, λ, представляет собой дискретную случайную величину, определенную следующим образом: пусть λ имеет распределение $\mathcal{P}_\lambda$. Положим, что λ принимает значения $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_i < ...\lambda_n$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n$, где $\sum\limits_{i=1} p_i = 1$. Были исследованы свойства сумм вида (2) в данном случае стохастической интенсивности с дискретным распределением, а также доказан ряд предельных свойств для таких сумм.

Основной целью данной работы является исследовать асимптотические свойства и описать ковариационные свойства предельного процесса для сумм вида (2), когда в качестве интенсивности ведущего пуассоновского процесса выступает случайная величина $\lambda(\omega)$, обладающая естественными стохастическими свойства (например, безграничной делимостью распределения), а также:

1. λ и $\Pi_1(t)$ независимы, где $\Pi_1(t)$ - процесс Пуассона с интенсивностью 1;

2. λ и ξ независимы.

Кроме того, в работе будет рассмотрен частный случай сумм вида (2) при следующих допущениях, соответствующих схеме серий:

1. Пусть существует последовательность дискретных случайных величин $\lambda_j, j = 0..n$ $< N$. При этом для каждого j случайная величина λ_j распределена по закону P_{λ_j}

следующим образом: λ_j принимает положительные значения $\lambda_{j,1} < \lambda_{j,2} < ... < \lambda_{j,i} < ...\infty$ с вероятностями $p_{j,1}, p_{j,2}, ..., p_{j,i}, ...$, где $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_{j,i} = 1$ и $p_{j,i}$—рациональные числа вида $a_{j,i}/N$;

2. Распределение (λ_j, p_j), зависящее от N, слабо сходится при $N \to \infty$ к некоторому распределению ν с преобразованием Лапласа L_ν.

В таком случае рассмотрим суммы вида:

$$\Psi_N(t) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_j} \psi_{\lambda;j}(t), t \geq 0, \tag{4}$$

и поставим целью исследование предельных свойств сумм вида (4) при N стремящимся к бесконечности. Помимо озвученных целей, в рамках дипломной работы планируется рассмотреть ряд свойств сумм процессов случайного индекса при некоторых конкретных видах распределений интенсивностей, а также расширить таблицу интегральных преобразований Лапласа.

В Главе 1 планируется дать основные понятия и определения, необходимые для дальнейшего анализа, а также сформулировать проблему. В Главе 2 планируется описать основные предварительные результаты, имеющиеся в литературе, для случаев дискретно распределенных интенсивностей. В Главе 3 планируется описать основные предварительные результаты, имеющиеся в литературе, для случаев непрерывно распределенных интенсивностей. В Главе 4 планируется проиллюстрировать и вывести ряд свойств рассматриваемых процессов при некоторых конкретных видах распределений интенсивностей.

2 Глава 1. Основные определения и постановка задачи

2.1 Основные определения и теоремы

Рассмотрим вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$. Ключевым для всего изложения в дальнейшем будет понятие *процесса Пуассона*:

Определение 1. Процессом Пуассона с интенсивностью λ (на данном этапе мы не описываем природу параметра λ и считаем его произвольной, но фиксированной положительной константой), где $\lambda > 0$, называется случайный процесс $\Pi_\lambda(t)$, $t \in [0; \infty)$ с независимыми приращениями, начальным значением $\Pi_\lambda(0) = 0$ и с распределенными по закону Пуассона с параметром $\lambda \cdot (t - s)$ приращениями:

$$\mathcal{P}(\Pi_\lambda(t) - \Pi_\lambda(s) = k) = \frac{\lambda \cdot (t-s)^k}{k!} \cdot \exp\{-\lambda \cdot (t-s)\}, k = 0, 1, 2...(5)$$

Определение 2. Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ задана случайная величина $\xi(\omega)$, где ω из Ω. Здесь и далее мы будем опускать аргумент случайной величины. Пусть $\mathcal{F}_\xi(x)$, где $x \in R$ — закон распределения случайной величины ξ. Преобразованием Лапласа случайной величина ξ называется следующая функция:

$$L_\xi(t) = \int_0^\infty \exp\{-tv\}\, dF_\xi(dv). \tag{6}$$

Перед тем, как приступить к определению процессов случайного индекса (ПСИ) заметим следующий факт: пусть $\Pi_1(t)$ — процесс Пуассона с интенсивностью 1. Пусть λ — постоянная вещественная константа, причем $\lambda > 0$. Процесс Пуассона с интенсивностью λ получается из процесса Пуассона $\Pi_1(t)$ следующим образом:

$$\Pi_\lambda(t) := \Pi_1(\lambda \cdot t). \tag{7}$$

В случае неоднородной интенсивности процесса Пуассона, $\Lambda = \Lambda(t)$ — неубывающая непрерывная функция (т.ч. $\Lambda(0) = 0$ или функция распределения положительной меры без атомов, заданной на правой полуоси) конструкция замены времени в процессе Пуассона строится по сути аналогично представленной выше:

$$\Pi_\Lambda(t) = \Pi_1(\Lambda(t)). \tag{8}$$

В случае, когда интенсивность процесса Пуассона, λ, представляет собой случайную величину $\lambda(\omega)$, мы будем указывать аргумент ω.

Перейдем к определению псевдопуассоновских процессов и процессов случайного индекса. Далее пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi\} = \{\xi_0, \xi_1, ...\xi_i, ...\}$ и процесс $\Pi_\lambda(t) = \Pi(t)$, где $t >= 0$. Процесс $\Pi(t)$ — пуассоновский случайный процесс, не зависящий от $\{\xi\}$, $\lambda > 0$ — интенсивность пуассоновского процесса; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 3. Зададим случайную последовательность $\xi(t) := \xi_t$, где $\xi_t \in \{\xi\}$. Далее рассмотрим случайную замену времени в последовательности $\xi(t)$ посредством пуассоновского процесса $\Pi(t)$ следующим образом:

$$\psi(t) = \psi_\Pi(t) = \psi_{\Pi,\zeta}(t) := \zeta_{\Pi(t)} = \zeta_\Pi(t). \tag{9}$$

Процесс $\psi(t)$ называют *процессом случайного индекса (ПСИ)*. Отметим, что процесс $\psi(t)$ имеет кусочно-постоянные, непрерывные справа траекории, задан на $\mathbb{R}_+$.$\Pi(t)$ мы будет называть *ведущим*, последовательность случайных величин $\xi(t)$ *формирующей*. Если не указано иное, мы будем здесь и далее предполагать, что случайные величины $\xi_i, i = 1, ...$ независимы, имеют одинаковое распределение $F_\xi(x)$, конечный второй момент, известное математическое ожидание и дисперсию. В дальнейшем, если не указано иное, математическое ожидание и дисперсия случайных величин $\xi_i, i = 1, ...$ предполагаются равными нулю и единице соответственно.

Как уже отмечалось, в случае, если формирующая последовательность является марковской, то конструкция вида (9) называется *псевдопуассоновским процессом*. Отметим, что так как в рамках данной работы будут рассматриваться по большей части только псевдопуассоновские процессы, для краткости изложения будем оперировать только термином “ПСИ”, если не потребуется уточнения.

Рассмотрим теперь механизм формирования процесса (9). Пусть есть два момента скачков ведущего процесса, $t_k < t_{k+1}$, $k \in Z_+$. Каждому интервалу $[t_k, t_{k+1})$ поставим в соответствие случайную величину ξ_k, зависящую от номера интервала. При переходе к следующему интервалу $(k+1)$ случайная величина ξ_k также заменяется на случайную величину ξ_{k+1} из ведущей последовательности $\{\xi\}$. Напомним, что в рамках данной работы в качестве элементов последовательности $\{\xi\}$ выступают независимые одинаково распределенные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией:

$$\mathbb{E}\xi_0 = 0, \mathbb{D}\xi_0 = 1$$

Отметим также очевидное свойство процесса (9), необходимое для ряда дальнейших доказательств: процесс случайного индекса (9) может быть представлен в виде следующей бесконечной суммы:

$$\psi_\Pi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \mathbb{I}\{\Pi(t) = i\}, \tag{10}$$

где $\mathbb{I}\{\mathrm{A}\}$ - индикатор множества .

Здесь и далее индекс при ξ_0 мы будем опускать, если это несущественно для анализа.

Перейдем далее к определению сумм процессов случайного индекса. Будем рассматривать независимые копии процесса (9) при следующих основных допущениях:

1. Ведущие процессы Пуассона независимы и имеют одинаковую интенсивность λ;
2. $\xi_i, i = 0, 1...$ независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением, равным распределению ξ_0;
3. λ и $\Pi_1(t)$ независимы, где $\Pi_1(t)$ — процесс Пуассона с интенсивностью 1;
4. λ и ξ независимы.

Отметим, что одинаковая интенсивность пуассоновских процессов λ в случае $\lambda(\omega)$ означает, что рассмастривается случайная величина $\lambda(\omega)$ будет своя для каждой независимой копии процесса $\Pi_1(\lambda(\omega)t)$, но все они одинаково распределены и независимы.

То есть, будем рассматривать последовательность вида $(s \geq 0)$:

$$\{\xi_{\Pi(s)}; \xi^{[1]}_{\Pi_1(s)}; ...; \xi^{[k]}_{\Pi_k(s)}; ...\} = \{\xi_{\Pi(s)}; \xi_{\Pi_1(s)}; ...; \xi_{\Pi_i(s)}; ...\}. \tag{11}$$

Определение 4. Пусть математическое ожидание и дисперсия ξ_0 равны нулю и единице соответственно. Пусть $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Нормированные суммы независимых копий ПСИ процессов определим следующим образом:

$$\Psi_N(t) := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{i=0}^{N} \xi_{\Pi_i(t)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{i=0}^{N} \psi_i(t), \tag{12}$$

где $(\psi_i(t))$ суть независимые копии процесса $\psi(t)$.

Учитывая тот факт, что одна из основных задач рассматриваемых в данной работе - рассмотрение сходимости и предельных распределений для сумм независимых процессов случайного индекса, приведем ниже без доказательства основную опорную теорему о сходимости конечномерных распределений.

Определение 5. Случайный процесс $X(t)$ называется стационарным в узком смысле, если для любого натурального n, для любых $t_1, t_2, ..., t_n \in T, T \subset \mathbb{N}$, где T — временной промежуток, для любого сдвига по времени на величину t в рамках заданного временного промежутка выполняется:

$$(X(t_1), X(t_2), ...X(t_n)) = (X(t_1 + t), X(t_2 + t), ..., X(t_n + t)),$$

где равенство понимается с точки зрения равенства n-мерных распределений.

Теорема 1. Центральная предельная теорема для векторов. Пусть $X_1, X_2, ...$ - независимые одинаково распределенные векторы в пространстве $\mathbb{R}^d$ с математическим ожиданием μ и ковариационной матрицей R. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu) \Rightarrow N(0, R), \tag{13}$$

где $N(0, R)$ обозначает нормально распределенный вектор с вектором математических ожиданий 0 и матрицей вариации-ковариации R, сходимость понимается в смысле слабой сходимости.

2.2 Постановка проблемы

Как уже отмечалось, процессы случайного индекса и суммы ПСИ процессов в случае вещественной интенсивности достаточно хорошо описаны и изучены в работах Феллера и Русакова (см. напр. [1], [2], [3]). Однако на данный момент наблюдается недостаток литературы и исследований, затрагивающих естественные обобщения сумм вида (12) в случае неоднородной интенсивности процесса Пуассона и, в частности, в случае ее непрерывного распределения. В данной работе планируется привести основные имеющиеся результаты, описать свойства ПСИ процессов в случаях конкретных распределений интенсивностей и предварительно сформулировать утверждение относительно сходимости более сложных конструкций вида (12) в случае дискретных, но не одинаково распределенных интенсивностей.

Также, учитывая то, что таблицы интегральных преобразований Лапласа по сути являются источником для моделирования конкретных случаев распределений стохастических интенсивностей процесса Пуассона, управляющего заменой времени в суммах ПСИ-процессов, одной из потенциальных целей данной работы можно назвать расширение имеющихся примеров преобразований Лапласа в таблицах интегральных преобразований (см. напр. [12]).

3 Глава 2. Случай дискретного распределения интенсивностей Пуассоновского процесса

В данной главе будут приведены основные результаты исследования Гайсина (см. напр. [4]), в работе которого рассматривались суммы ПСИ процессов вида (12) для случая дискретно распределенных интенсивностей $\lambda(\omega)$. Перед описанием основных результатов предварительно построим следующую конструкцию, в рамках которой будут описаны и доказаны утверждения: пусть $\nu(\omega)$ — дискретная случайная величина, заданная на пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ и имеющая распределение $\mathcal{P}_\nu$. Пусть $\nu(\omega)$ принимает значения $0 < \nu_1 < ... < \nu_k < ... < ... < \nu_j < .. < \infty$ с соответствующими вероятностями $\{p_j\}$, $j = 1...\infty$. В данном случае процесс Пуассона, управляющий временем в (13), строится следующим образом:

$$\Pi_\nu(t) := \Pi(\nu \cdot t). \tag{14}$$

Имея процесс Пуассона описанного вида, мы можем составить суммы, аналогичные по построению выражению (12), но имея в виду уже в качестве ведущего процесса процесс Пуасона вида (14). Обозначим такие суммы:

$$\Psi_N^\nu(t). \tag{15}$$

Учитывая, что ключевую и исчерпывающую роль в Теореме 1 играют парные ковариации, приведем вначале следующий результат:

Утверждение 1. Для любого натурального N и для любых неотрицательных s и t верно

$$\mathrm{cov}(\Psi_N^\nu(t), \Psi_N^\nu(t+s)) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \exp\{-\nu_i \cdot s\}. \tag{16}$$

Доказательство.

Учитывая, что случайные процессы в выражении (15), а именно $\xi_{\Pi_\nu(s)}$, попарно независимы и одинаково распределены, получаем:

$$\mathrm{cov}(\Psi_N^\nu(t), \Psi_N^\nu(t+s)) = \mathbb{E}\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_{(\Pi_\nu(t))_i} \cdot \sum_{j=1}^{N} \xi_{(\Pi_\nu(t+s))_j}\} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{cov}(\xi_{(\Pi_\nu(t))_i}, \xi_{(\Pi_\nu(t+s))_j}). \tag{17}$$

Далее рассмотрим выражение под знаком последней суммы, используя выражение для ПСИ процесса вида (10):

$$A := \mathrm{cov}(\xi_{(\Pi_\nu(t))_i}, \xi_{(\Pi_\nu(t+s))_j}) = \mathbb{E}\{\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \mathbb{I}\{\Pi_\nu(t) = i\} \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \mathbb{I}\{\Pi_\nu(t+s) = j\}\}.$$

Так как $\mathbb{E}\xi = 0$, все ξ_i совокупно независимы и независимы с процессом Пуассона, то окончательно имеем:

$$A = \mathbb{E}\{\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^2 \mathbb{I}\{\Pi_\nu(t) = \Pi_\nu(t+s) = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_i^2) \mathcal{P}\{\Pi_\nu(t) = \Pi(\nu(t+s) = i\}$$

,

где $\mathcal{P}()$ - вероятностная мера на Ω.

Так как $\mathbb{D}\xi = 1$, то для любого i выполняется $\mathbb{E}\xi_i^2 = 1$. Отсюда имеем окончательно:

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}\{\Pi_\nu(t) = \Pi(\nu(t+s) = i\}.$$

Далее по формуле полной вероятности справедливо следующее:

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathcal{P}\{\Pi_{\nu i}(t) = \Pi(\nu_i(t+s)\}.$$

Учитывая однородность приращений процесса Пуассона имеем:

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \mathcal{P}\{\Pi_{\nu i}(t) = \Pi(\nu_i(s)\} = \sum_{i=0}^{\infty} {}_i \exp\{-\nu_i s\}.$$

Окончательно получаем требуемое:

$$\mathrm{cov}(\Psi_N^\nu(t), \Psi_N^\nu(t+s)) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{cov}(\xi_{\Pi_i(t)}, \xi_{\Pi_i(t+s)}) = \tag{18}$$

$$= N \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} p_m \exp\{-\nu_m s\} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \exp\{-\nu_m s\}.$$

Заметим, что по сути, правая часть доказанного нами утверждения представляет собой преобразование Лапласа вероятностной меры, вырожденной в точках $\nu_i, i = 1...\infty$.

Помимо обозначенного результата, в имеющихся работах рассмотрены случаи слабой сходимости распределений субординаторов при слабой сходимости интенсивностей, а также важные свойства характеристической функции вектора сечений для субординатора. Эти результаты планируется более подробно представить в Приложении к данной работе. Отметим, что в настоящий момент в литературе (см. напр [11]) одним из наиболее актуальных направлений исследований являетсяизучение сходимости с точки зрения предела конечномерных распределений для сумм процессов случайного индекса, когда случайная интенсивность пуассонвоского процесса имеет вполне конкретное дискретное распределение и более того, распределение зависит от количества слагаемых в сумме. Иначе говоря, рассматриваются следующую конструкцию:

1. Пусть $(\xi) = \xi_0, \xi_1, ...$ последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих α - устойчивое распределение, где $\alpha \in (0, 2]$;

2. Также пусть $\mathbb{E}\xi_o = \mu, \mathbb{D}\xi_0 = \sigma^2$. $\Pi(t)$ - пуассонвоский процесс с интенсивностью 1, $t \geq 0$;

3. $\lambda(\omega, N)$ - случайная величина, имеющая следующее дискретное распределение: пусть $\lambda(\omega; N)$ принимает значения из множества $\{a_1, a_2, ..., a_{n(N)}\}$ такие, что $\sum\limits_{k=1} a_k = N$;

4. последовательность, определенная выше, сходится к некоторому распределению в смысле сходимости преобразований Лапласа.

4 Глава 3. Случай непрерывного распределения интенсивностей Пуассоновского процесса

Естественным обобщением исследований, проведенных в рамках допущения о дискретном распределении интенсивностей пуассоновского процесса, является распространение сформированной теории на случай непрерывно распределенных интенсивностей.

Утверждение 3. Пусть $(\xi) = \xi_0, \xi_1, ...$ последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом (если не указано иного, это допущение в дальнейшем будет опускаться). Также пусть $\mathbb{E}\xi_o = \mu, \mathbb{D}\xi_0 = \sigma^2$. $\Pi(t)$ - пуассонвоский процесс с интенсивностью 1, $t \geq 0$. $\lambda(\omega)$ - случайная величина, сосредоточенная на луче $[0,\infty)$ и имеющая распределение $\mathcal{P}_\lambda$. Пусть также $L_\lambda(x), x \geq 0$ - преобразование Лапласа для распределения случайной величины λ. Окончательно, пусть все величины: $\xi, \lambda, \Pi(t)$ взаимно независимы. Пусть λ разыгрывается один раз. Тогда: процесс случайного индекса $\xi_{\Pi_\lambda(t)}$ является стационарным в широком смысле и

$$\operatorname{cov}(\xi_{\Pi_\lambda(t)}, \xi_{\Pi_\lambda(s)}) = \sigma^2 \cdot L_\lambda \cdot (|t-s|), \tag{19}$$

где $t, s \geq 0$.

Доказательство. См., напр. [5].

Напомним для удобства формулировку Теоремы 1:

Теорема 1. Центральная предельная теорема для векторов Пусть $X_1, X_2, ...$ - независимые одинаково распределенные векторы в пространстве $\mathbb{R}^d$ с математическим ожиданием μ и ковариационной матрицей R. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu) \Rightarrow N(0, R), \tag{20}$$

где $N(0, R)$ обозначает нормально распределенный вектор с вектором математических ожиданий 0 и матрицей вариации-ковариации R, с сходимость понимается в смысле слабой сходимости.

Далее одним из основных результатов работ, исследовавших, помимо прочего, вопросы стохастической интенсивности Пуассоновского процесса (см. напр. [5],[11]) являлось, по сути, доказательство центральной предельной теоремы для векторов в общем случае непрервного распределения интенсивности пуассоновского процесса в определении сумм процессов случайного индекса. Итого, приведем доказательство следующего утверждения:

Утверждение 4. Пусть $(\xi) = \xi_0, \xi_1, ...$ как и ранее, последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин. Также пусть $\mathbb{E}\xi_o = \mu, \mathbb{D}\xi_0 = \sigma^2$. $\Pi(t)$ - пуассоновский процесс с интенсивностью 1, $t \geq 0$. $\lambda(\omega)$ - случайная величина, сосредоточенная на луче $[0,\infty)$ и имеющая распределение $\mathcal{P}_\lambda$. Пусть также $L_\lambda(x), x \geq 0$ - преобразование Лапласа для распределения случайной величины λ. Окончательно, пусть все величины: $\xi, \lambda, \Pi(t)$ взаимно независимы. Пусть λ разыгрывается один раз. Составим независимые копии процесса случайного индекса $\xi_{\Pi_\lambda(t)}$ вида (12), а именно:

$$\Psi_N(t) := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{i=0}^{N} \xi_{\Pi_i(t)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{i=0}^{N} \psi_i(t). \tag{21}$$

Тогда $\Psi_N(t)$ сходится в смысле слабой сходимости конечномерных распределений к стационарному процессу $G(t)$ с гауссовскими конечномерными распределениями и ковариацией.

$$\operatorname{cov}(_(t),_(t+s)) = \sigma^2 \cdot L_\lambda \cdot (|t-s|), \tag{22}$$

где $t, s \geq 0$.

Доказательство. Зафиксируем данные моменты времени: $(t_1, t_2, ..., t_m)$ так, что $t_1 \geq t_2) < ... < t_m$ и рассмотрим случайные вектора вида:

$$(\psi_k(t_1), \psi_k(t_2), ..., \psi_k(t_m)), k \in [1:N].$$

Так как для различных индексов $i \neq j$копии процесса $\psi_j(t)$ и $\psi_i(t)$ являются независимыми, то

$$\operatorname{cov}(\Psi_N(t), \Psi_N(s)) = \frac{1}{N} \sum_{p,k=1}^{N} \operatorname{cov}(\psi_p(t), \psi_k(s)) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \operatorname{cov}(\psi_p(t), \psi_p(s)) = \operatorname{cov}(\psi_p(t), \psi_p(s)).$$

Теперь применим центральную предельную теорему (Теорема 1) для векторов и получим следующую слабую сходимость к гауссовскому случайному вектору G в терминах конечномерных распределений:

$$(\Psi_N(t_1), \Psi_N(t_2), ..., \Psi_N(t_m)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{p=1}^{N} (\psi_p(t_1), \psi_p(t_2), ..., \psi_p(t_m)) \Longrightarrow G(0, R),$$

при N стремящимся к ∞.

Где матрица ковариаций R определяется через свои компоненты как:

$$R := (r_{ij} := cov(\psi_1(t_i), \psi_1(t_j))_{i,j=1..m}.$$

Согласно доказанному ранее утверждению, имеем:

$$\operatorname{cov}(\xi_{\Pi_{\lambda(\omega)}(t)}, \xi_{\Pi_{\lambda(\omega)}(s)}) = \sigma^2 L_{\lambda(\omega)}(|t-s|), \tag{23}$$

где $t, s \geq 0$.

Итого имеем: матрица R размерности $d \times d$ полученного гауссовского вектора представима в следующем виде через свои элементы:

$$R := (r_{ij} := \sigma^2 L_{\lambda(\omega)}(|t_i - t_j|))_{i,j=1..m}.$$

Так как нами получен результат для любых m из $\mathbb{N}$ и любого набора индексов $(t_1, t_2, ..., t_m)$ таких, что $t_1 \geq t_2) < ... < t_m$, то получается, что случайный процесс $\Psi_N(t)$ сходится в смысле сходимости конечномерных распределений к процессу $G(t)$, $t \geq 0$ с гауссовскими конечномерными распределениями. Учитывая последний факт по определению имеем, что $G(t)$ является гауссвоским случайным процессом. Для доказательства второго утверждения положим $m = 2, t_1 = s, t_2 = t$ и проведем аналогичные рассуждения. Получим следующее выражение для матрица ковариаций через ее элементы:

$$R := (r_{11} = r_{22} = \sigma^2; r_{1,2} = r_{2,1} = \operatorname{cov}(\psi(t), \psi(s))).$$

Из последнего равенства следует равенство ковариаций, указанное в формулировке утверждения. Из этого следует, что процесс $G(t)$ является стационарным в широком смысле. Так как в случае гауссовского процесса стационарность в широком смысле равносильно стационарности в узком смысле, окончательно имеем, что процесс $G(t)$ является стационарным в узком смысле и доказательство утверждения завершено.

5 Глава 4. Некоторые частные случаи распределения интенсивностей Пуассоновского процесса

Для целей дальнейшего анализа введем ряд определений и опишем свойства ПСИ процессе в нескольких конкретных случаях относительно вида распределения интенсивностей $\lambda(\omega)$.

Определение 6. Говорят, что случайный процесс $X(t), t \geq 0$ является процессом Леви,если:

$$\Psi_N(t) := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{i=0}^{\mathbf{N}} \xi_{\Pi_i(t)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{i=0}^{\mathbf{N}} \psi_i(t), \tag{24}$$

где $\psi_i(t)$ суть независимые копии процесса $\psi(t)$.

(a) процесс есть отображение из вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ в $\mathbb{R}^d$;

(b) $X(0) = 0$ почти наверное;

(c) приращения процесса $X(t) - X(t+s)$ независимы для любых $t, s \geq 0$;

(d) приращения процесса стационарны в узком смысле, т.е. для любого набора индексов $t_1, t_2, ..., t_n \geq 0$ конечномерные распределения процессы не зависят от сдвига t;

(e) процесс $X(t)$ стохастически непрерывен;

(f) траектории процесса $X(t)$ для почти всех ω из Ω (за исключением множества меры нуль) принадлежат пространству векторных функций с непрерывными справа компонентами и компонентами, имеющими пределы слева при $t > 0$.

Определение 7. Говорят, что случайный процесс Леви $X(t), t \geq 0$ является Гамма-процессом Леви, если его приращения имеют Гамма-распределение.

Пусть, как и раньше, $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ определяет вероятностное пространство. Далее пусть имеется процесс Пуассона вида: $\Pi_1(t) = \Pi(t) = \Pi$, $t \geq 0$. Пусть, как и раньше, $\lambda(\omega)$, $\omega \in \Omega$, есть суть независимая от Π случайная величина на вероятностном пространстве. Пусть λ является интенсивностью Пуассоновского процесса.

Т.е., как было показано в Главе 1: $\Pi_\lambda(t) = \Pi_\lambda$. Или $\Pi_\lambda(s) = \Pi_1(s\lambda)$, Пусть далее $\mathcal{F}_\lambda(x)$, $x > 0$ представляет собой распределение λ. Таким образом заметим, что в описанном случае мы имеем смесь распределений $\Pi_x(t)$ и $\mathcal{F}_\lambda(x)$, $x > 0$

Из свойств смесей распределений следует, что для любого $t > 0$,

$$\mathbb{E}\Pi_\lambda(t) = t\mathbb{E}\{\lambda(\omega)\}\,,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\Pi_\lambda(t) &= \int_0^\infty \mathbb{D}\Pi_x(t)\,\mathcal{F}_\lambda(x) + \int_0^\infty \{\mathbb{E}\Pi_x(t) - \mathbb{E}\Pi_\lambda(t)\}^2\,\mathcal{F}_\lambda(x)\\ &= t\mathbb{E}\{\lambda(\omega)\} + t\mathbb{D}\{\lambda(\omega)\} = t\left(\mathbb{E}\{\lambda(\omega)\} + \mathbb{D}\{\lambda(\omega)\}\right)\,.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда интенсивность $\lambda(\omega)$ имеет распределение Γ с переменным параметром $\gamma > 0$ и постоянным параметром $\kappa > 0$. (здесь для экспоненциального распределения, т.е. для $\kappa > 0$,плотность есть $(1/\gamma)\exp(-t/\gamma)$, $t \geq 0$). В таком случае $\mathbb{E}\{\lambda(\omega)\} = \kappa\gamma$, и $\mathbb{D}\{\lambda(\omega)\} = \kappa\gamma^2$. Применяя сказанное выше для $\mathbb{E}\Pi_\lambda(t)$ and $\mathbb{D}\Pi_\lambda(t)$, имеем:

$$\mathbb{E}\Pi_\lambda(t) = t\kappa\gamma, \quad \mathbb{D}\Pi_\lambda(t) = t\kappa\gamma + t\kappa\gamma^2\,.$$

Допустим теперь, что λ представляет собой случайный процесс Леви. То есть, пусть теперь, $\lambda = \lambda(t,\,\omega)$ временным параметром $t \geq 0$. Рассмотрим соответствующий процесс Кокса в качестве субординатора: $\Pi_\lambda(t) = \Pi_1(\lambda(t,\,\omega))$, где $\lambda(t,\,\omega)$не зависит $\Pi_1(\omega)$. Пусть $\mathcal{F}_{\lambda(t)}(x)$, $x > 0$, определяет распределение $\lambda(t,\,\omega)$ в любой момент времени $t \geq 0$.

Применяя формулу полной вероятности и свойства пуассоновского процесса мы получаем выражение для процесса Кокса:$\Pi_\lambda(t)$,

$$\mathbb{E}\Pi_\lambda(t) = \mathbb{E}\{\lambda(t,\,\omega)\}\,,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\Pi_\lambda(t) &= \int_0^\infty \mathbb{D}\Pi_1(x)\,\mathrm{d}F_{\lambda(t)}(x) + \int_0^\infty \{\mathbb{E}\Pi_1(x) - \mathbb{E}\Pi_1(\lambda(t))\}^2\,\mathrm{d}F_{\lambda(t)}(x)\\ &= \mathbb{E}\{\lambda(t,\,\omega)\} + \mathbb{D}\{\lambda(t,\,\omega)\}\,.\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda(t,\,\omega)$, $t \geq 0$, представляет собой Γ-процесс Леви с соответствующими параметрами $\gamma > 0$ и $\kappa > 0$, то есть $\lambda(1,\,\omega)$ имеет $\Gamma(\gamma,\kappa)$ распределение. Отметим, что, исходя из свойств процесса Леви, следует, что $\lambda(t,\,\omega)$, $t \geq 0$ имеет $\Gamma(\gamma, s\kappa)$ распределение, $t \geq 0$.

Таким образом, в случае, когда случайная интенсивность управляется процессом Гамма мы имеем то же выражение для математического ожидания и дисперсии, что и в случае Гамма-распределенной интенсивности:

$$\mathbb{E}\Pi_\lambda(t) = t\kappa\gamma, \quad \mathbb{D}\Pi_\lambda(t) = t\kappa\gamma + t\kappa\gamma^2\Gamma$$

Далее по процессу Пуассона со стохастической интенсивностью, следующей процессу Леви, построим независимые одинаково распределенные процессы случайного индекса и их суммы вида Ψ. Они при соответствующих моментных предположениях на распределение членов подчиняющихся последовательностей по центральной предельной теореме для векторов сходятся к стационарному гауссовскому процессу с ковариацией вида (26).

Рассмотрим теперь процессы Орнштейна - Уленбека. Основным инструментом при изучении процессов типа Орнштейна - Уленбека в случае случайной интенсивности является выражение:

$$\mathbb{E}\{X_t \,|\, X_0 = z\} = z\Lambda_\lambda(t), \qquad t \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}\,,$$

X_t определяет значение процесса Орнштейна - Уленбека в момент $t \geq 0$, $\Lambda_\lambda(t)$ есть преобразование Лапласа для функции распределения $\mathrm{d}F_\lambda(x)$, $x \geq 0$, случайной интенсивности λ. Для случая $\lambda(\omega) \in \Gamma(\gamma, \kappa)$ соответствующее преобразование Лапласа хорошо известно:

$$\Lambda_{\Gamma(\gamma,\kappa)}(t) = \frac{\gamma^\kappa}{(t+\gamma)^\kappa}\,.$$

Для случая, когда интенсивность имеет Г-распределение с неотрицательным параметром сдвига a, то есть $\lambda(\omega) = a + \lambda_0(\omega)$, $\lambda_0(\omega) \in \Gamma(\gamma, \kappa)$, соответствующее преобразование Лапласа имеет вид:

$$\Lambda_{\Gamma(\gamma,\kappa;\,a)}(t) = \frac{\gamma^\kappa}{(t+\gamma)^\kappa}\exp(-at)\,.$$

В случае, когда процесс Кокса управляет процессом Леви для $\lambda(t,\omega)$, $t \geq 0$, выражение для предсказания будущего состояния в форме условного математического ожидания имеет вид:

$$\mathbb{E}\{X_t \,|\, X_0 = z\} = z\mathbb{E}\{e^{-\lambda(t)}\} = z\mathbb{E}\{e^{-\lambda(t,\,\omega)\cdot 1}\}\,.$$

Математическое ожидание

$$\mathbb{E}\{e^{-\lambda(t,\,\omega)\cdot 1}\}$$

может быть интерпретировано, как преобразование Лапласа в точке 1 для распределения соответствующего сечения процесса Леви в момент времени t. Итого, для случая, когда $\lambda(t,\,\omega)$, $t \geq 0$, представляет собой $\Gamma(\gamma,\kappa)$-процесс Леви получаем следующее выражение для предсказания будующего состоянию процесса:

$$\mathbb{E}\{X_t \mid X_0 = z\} = z\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\kappa t}.$$

Приведем также некоторые результаты, аналогичные представленным в предыдущей главе, но для случая интенсивности пуассоновского процесса, представляющей собой не случайную величину, а случайный процесс.

Утверждение 5. Пусть $(\xi) = \xi_0, \xi_1, ...$ как и ранее, последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин. Также пусть $\mathbb{E}\xi_o = \mu, \mathbb{D}\xi_0 = \sigma^2$. $\Pi(t)$ - пуассонвоский процесс с интенсивностью 1, $t \geq 0$. $\Lambda(t,\omega)$ - процесс Леви, $t \in [,\infty.\mathrm{L}_\{Lambda(t)(x), x \geq 0$ - преобразование Лапласа для распределения $\Lambda(t,\omega)$ в любой фиксированный момент времени t. Окончательно, пусть все величины, $(\xi), \Lambda(t), \Pi(t)$ взаимно независимы. Напомним обозначение: $\Pi_{\Lambda(t,\omega)}(t) := \Pi(\Lambda(t,\omega)$. Тогда:

$$\operatorname{cov}(\xi_{\Pi_\Lambda(t)}, \xi_{\Pi_\Lambda(s)}) = \sigma^2 \cdot L_\Lambda(|t-s|), \tag{25}$$

где $t, s \geq 0$.

Дальнейшие примеры рассмотрены в Приложении. Также ожидается, что в Приложение к данной работе войдут результаты проведенной деятельности, направленной но расширение имеющейся таблицы интегральных преобразований Лапласа. Таблицы интегральных преобразований Лапласа по сути являются источником для моделирования конкретных случаев распределений стохастических интенсивностей процесса Пуассона, управляющего заменой времени в суммах ПСИ-процессов. Одной из целей данной работы подразумевается расширение имеющихся примеров преобразований Лапласа в таблицах интегральных преобразований.

6 Заключение

В рамках представленной работы были рассмотрены основные результаты относительно вопросов свойств псевдопуассоновских процессов и сумм псевдопуассоновских процессов. Были изложены важные ассимптотические свойства сумм процессов случайного индекса, а также исследован ряд практических примеров в разрезе различных допущений относительно природы интенсивности Пуассоновского процесса, управляющего заменой времени в процессах случайного индекса. В рамках возможных направлений дальнейших исследований кажется уместным рассмотреть вопрос дальнейшего расширения таблиц интегральных преобразований Лапласа по причинам, озвученным в предыдущей Главе, а также рассмотреть ассимптотическое поведение сумм вида

7 Список литературы

[1] В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2.* М., Мир, 1964.

[2] О.В. Русаков. *Пуассоновские субординаторы, поле Винера-Орнштейна-Уленбека и связь броуновских мостов с переходными характеристиками процессов Орнштейна-Уленбека.* Зап. научн. сем. ПОМИ, том 384:225-237, 2010.

[3] О.В. Русаков. *Суммы независимых пуассоновских субординаторов и их связь со строго α-устойчивыми процессами типа Орнштейна-Уленбека.* Вероятность и статистика. 13, Зап. научн. сем. ПОМИ, том 361:123-137, 2008.

[4] А.Т.Гайсин.*Асимптотическое поведение сумм независимых пуассоновских субординаторов для случая случайной интенсивности.*Димломная работа, СПбГУ, 2014.

[5] Д.А.Никифоров.*Исследование псевдопуассоновских процессов со случайной интенсивностью с помощью ее преобразования Лапласа.* Дипломная работа, СПбГУ, 2015.

[6] И.И. Гихман, А.В. Скороход. *Введение в теорию случайных процессов.* М., Наука, 1977.

[7] А.Н. Ширяев. *Вероятность, 2-ое изд.*М., Наука, 1989.

[8] Ya. G. Sinai. *Self-similar probability distributions.Theory of proabbility and its applications.* XXI, 1976.

[9] П.Биллингсли. *Сходимость вероятностных мер.* М.,Наука, 1977.

[10] D. Applebaum. *Lectures on Levy Processes and Stochastic Calculus.* Braunschweig, 2010.

[11] O. Rusakov. *Temporal Dependence in Financial Models.* Set of lectures at Saint-Petersburg University, 2015.

[12] Г. Бейтмен, А.Эрдейи *Таблицы интегральных преобразований, в 2-х т.* М., Наука, 1969.

8 Приложения