

Санкт–Петербургский Государственный Университет
Физический факультет
Кафедра Радиопизики

Выпускная квалификационная работа на тему:

**ФЛУКТУАЦИИ В ТОМСОНОВСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ
НА ПОЛЕВОМ ТРАНЗИСТОРЕ**

По уровню образования
Бакалавриат

Выполнил _____Донецкий А.

Научный руководитель
ст.преп., к.ф.-м.н., доц. _____Лутченко Л.Н.

Рецензент
к.т.н., доц _____Ветрова Ю.Н.

Санкт-Петербург
2016

Оглавление

Используемые условные обозначения:	3
Введение	4
1 Математическая постановка задачи	5
1.1 Математический аппарат случайных процессов	5
1.1.1 Моменты случайных функций	6
1.1.2 Стационарность случайных функций	7
1.1.3 Случайная функция с независимыми приращениями	7
1.2 Марковские процессы	9
1.2.1 Уравнение Смолуховского	9
1.2.2 Уравнение Эйнштейна-Фоккера-Планка	9
2 Физическое описание модели	11
3 Шумы.	13
3.1 Спектральные методы описания шумов	13
3.2 Шумы в полевом транзисторе	13
3.2.1 Тепловые шумы	13
3.2.2 Дробовые шумы	14
3.3 Шумы в цепи обратной связи	15
4 Флуктуации тока в томсоновском генераторе	16
4.1 Вывод уравнения ЭФП, исходя из динамического уравнения колебательной системы	16
4.2 Вывод коэффициента В, исходя из шумовых параметров схемы.	18
4.2.1 Процессы Винера-Леви	19
4.2.2 Получение коэффициента диффузии	19
Заключение	21

Используемые условные обозначения

k – постоянная Больцмана

θ – абсолютная температура

I_g – ток затвора

I_d – ток стока

V_d – напряжение стока

V_b – напряжение, обусловленное наличием перехода

V_g – обратное напряжение на клемме затвора

V_{g0} – напряжение отсечки

g_{msat} – крутизна характеристики полевого транзистора в области насыщения

g_m – крутизна характеристики ПТ

Введение

В настоящее время выдвигаются серьезные требования к снижению габаритов и веса электронной аппаратуры при увеличении её чувствительности. Чувствительность бывает ограничена внешними помехами и внутренними шумами прибора. Одним из путей увеличения чувствительности приёмника является снижение влияния внутренних шумов. Для реализации этого, необходимо уметь описывать шумы. В данной работе будут рассмотрены шумы в генераторе, основанном на полевом транзисторе. Полевой транзистор был выбран, исходя из следующих его преимуществ над ламповыми усилителями: большая долговечность службы, большая механическая надежность, мгновенная готовность в работе. Также он обладает меньшей массой и размерами, что позволяет широко использовать его в современной технике.

В работе описываются шумы в полевом транзисторе с управляющим $p-n$ переходом, рассматривается предложенный Рытовым С.М. [1] способ, для получения уравнения Эйнштейна-Фоккера-Планка(далее – ЭФП) и показывается метод получения диффузионного коэффициента уравнения ЭФП, исходя из шумовых характеристик схемы.

Глава 1

Математическая постановка задачи

Шум является флуктуацией напряжения или тока в цепи. Адекватным математическим аппаратом для описания флуктуаций является теория случайных функций. Для задания случайной функции требуется задать функцию распределения любой конечной мерности. Такая функция распределения может быть построена для марковского процесса. Марковский процесс – процесс без вероятностного последствия. Это значит, что для нахождения следующего состояния x_{n+1}, t_{n+1} необходимо знать только текущее состояние x_n, t_n и плотность вероятности перехода $V(x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n)$ в состояние x_{n+1}, t_{n+1} .

1.1 Математический аппарат случайных процессов

По Колмогорову А.Н. [2] [3] случайная функция – однозначная, действительная, измеримая функция, определенная на множестве элементарных событий и зависящая от параметра t .

$$\xi(t) = f(\omega, t)$$

Для того, чтобы задать случайную функцию, необходимо для любой конечной последовательности её параметров из области определения t_n задать многомерную функцию распределения

$$P \left(\bigcap_{k=1}^n (\xi(t_k) < x_k) \right) = F(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n),$$

монотонно неубывающую по всем её аргументам (x_1, x_2, \dots, x_n) . Комплексной случайной функцией будет функция $\eta(t) = \xi(t) + i\zeta$. При этом её функция

распределения

$$P \left(\bigcap_{k=1}^n [(\xi(t_k) < x_k) \cap (\zeta(t_k) < y_k)] \right) = F(x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2, \dots, x_n, y_n, t_n)$$

Производная от функции распределения по аргументам даёт неотрицательную плотность распределения вероятности. Для получения n -мерной плотности распределения вероятности, нужно $n - 1$ -мерную плотность распределения вероятности умножить на плотность вероятности перехода

$$V(x_n, t_n | x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_{n-1}, t_{n-1})$$

в состоянии x_n, t_n . То есть плотность распределения вероятности

$$\omega_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$$

зависит от всей истории процесса, что доставляет определённые трудности при попытке математического описания таких процессов.

В случае марковского процесса, для получения n -мерной плотности вероятности, достаточно знать лишь $n - 1$ -мерную плотность распределения и плотность вероятности перехода $V(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$ в состояние x_n, t_n . То есть предшествующие состояния не оказывают какого-либо влияния на этот переход. Поэтому возникает необходимость сформулировать уравнение ЭФП и получить его решение.

1.1.1 Моменты случайных функций

Моменты случайных функций – средние значения вида $\overline{\eta(t_1) \cdot \dots \cdot \eta(t_n)}$, где

$$\overline{\eta(t)} = \int x \omega(x, t) . dx$$

Функцией когерентности называется второй момент

$$B_\eta(t_1, t_2) = \overline{\eta(t_1) \eta^*(t_2)},$$

где $\eta^*(t)$ – комплексно сопряжённая величина.

Функцией корреляции называется второй момент, имеющий следующий вид:

$$\psi(t_1 t_2) = B_\eta(t_1, t_2) - \overline{\eta(t_1)} \cdot \overline{\eta^*(t_2)}.$$

Вторые моменты обладают следующими свойствами:

1. Эрмитова сопряжённость. $B_\eta(t_1, t_2) = B_\eta^*(t_2, t_1)$
2. Ограниченность по модулю $|B_\eta(t_1, t_2)| < \frac{1}{2}[B_\eta(t_1, t_1) + B_\eta(t_2, t_2)]$
3. Если функция когерентности непрерывна при $t_1 = t_2$, то она непрерывна на

всей плоскости $(t_1 t_2)$, и случайная функция является непрерывной в среднем квадратичном.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{|\eta(t+h) - \eta(t)|^2} = 0$$

Производная от случайной функции, непрерывной в среднем квадратичном определена как

$$\frac{d\eta}{dt} = l.i.m_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h},$$

где l.i.m. – предел в среднем квадратичном. Она существует, если существует вторая производная от функции когерентности по двум аргументам

$$\left. \frac{\partial^2 B(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2}$$

1.1.2 Стационарность случайных функций

Случайная функция стационарна в узком смысле, если плотность распределения вероятности любой конечной мерности инвариантна относительно выбора начала отсчета параметра t .

$$\omega_n(x_1, y_1, t_1 + \tau, \dots, x_n, y_n, t_n + \tau) = \omega_n(x_1, y_1, t_1, \dots, x_n, y_n, t_n)$$

Случайная функция стационарна в широком смысле, если функция корреляции существует и зависит от разности параметров.

1.1.3 Случайная функция с независимыми приращениями

Случайная функция, определенная на множестве T действительной оси, называется функцией с независимыми приращениями, если $\forall t_k \in T, t_1 \leq t_2 \leq t_3$ выполняется

$$\xi(t_n) = \xi(0) + \sum_k^n \Delta_k \xi, \text{ где } \Delta_k \xi = \xi(t_k) - \xi(t_{k-1}).$$

Случайная функция с независимыми приращениями (далее – СФНП) – один из частных случаев марковских процессов. Примером СФНП является дробовой шум. Дробовой шум обусловлен дискретностью заряда и его случайным появлением.

Дисперсия СФНП имеет выражение

$$\sigma_{\xi(t_n)}^2 = \sigma_{\xi(0)}^2 + \sum_k^n \sigma_{\Delta_k \xi}^2$$

и она будет расти с ростом времени, так как число неотрицательных членов увеличивается. Если случайная функция $\xi(t)$ такова, что позволяет делать сколь угодно малые интервалы $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ при сохранении независимости $\Delta_k \xi$, то для любого конечного промежутка времени $[0, t]$ будет много независимых приращений и $\xi(t)$ по центральной предельной теореме будет иметь нормальное распределение.

Если процесс однороден во времени, то приращения $\Delta_k \xi$ имеют распределение, не зависящее от времени. Тогда

$$\sigma_{\xi(t_n)}^2 = \sigma_{\xi(0)}^2 + n\sigma_{\Delta\xi}^2,$$

то есть имеем линейный рост дисперсии случайной функции с независимыми приращениями.

Такая функция не имеет производной во времени. Чтобы показать это, рассмотрим дисперсию

$$\sigma_{\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta T}\right)}^2 = \frac{1}{(\Delta t)^2} \sigma_{\Delta\xi}^2 = \frac{B\Delta t}{(\Delta t)^2} \longrightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Если не существует производной такой функции, то не существует силы тока в дробовом шуме, что является абсурдом для физиков. При этом надо иметь ввиду, что приращения будут независимыми, если будет много случаев появления заряда (толчков) за время Δt .

Таким образом, рассматриваемый промежуток времени должен быть мал для определения производной, но велик, чтобы была СФНП за время между толчками θ .

$$\Delta t \gg \theta. \quad (1.2)$$

Для того, чтобы мы могли определить производную и выполнялось (1.2), θ должно стремиться к нулю (толчки должны быть бесконечно частые). В действительности $\theta \neq 0$. Тогда в промежутках между толчками существует дробовой ток и имеет время корреляции порядка θ . Пусть функция корреляции дробового тока $I(t)$

$$\psi_I(t', t'') = \frac{B}{2\theta} \cdot \exp\left(-\frac{|t' - t''|}{\theta}\right) \quad (1.3)$$

Пусть $\overline{\xi(t)} = 0$, тогда

$$\sigma_{\xi(t)}^2 = \overline{\xi^2(t)} = \int_0^t \int_0^t \overline{I(t')I(t'')} dt' dt'' = \int_0^t \int_0^t \psi_I(t', t'') dt' dt'' = \quad (1.4)$$

$$= B \left[t - \theta(1 - \exp(-\frac{t}{\theta})) \right] \quad (1.5)$$

Если $t \ll \theta$, то дисперсия $\sigma_{\xi}^2 \approx \frac{Bt^2}{2\theta}$. Уменьшение θ влечет к тому, что дисперсия стремится к бесконечности. В случае, когда $t \gg \theta$ ведет себя как СФНП и вступает в силу диффузионный закон $\sigma_{\xi}^2 = Bt$.

Таким образом, СФНП – математическая идеализация процесса при $\theta = 0$. Эта идеализация приводит к δ -коррелированности СФНП.

1.2 Марковские процессы

1.2.1 Уравнение Смолуховского

Рассмотрим марковский процесс и непрерывные возможные значения случайной функции $\eta(t)$. Пусть в момент t_0 система находится в состоянии x_0 , а переход в состояние (x, t) реализуется через некоторое промежуточное состояние (y, t') . Тогда этот переход может быть представлен в виде двух последовательных переходов $(x_0, t_0) \rightarrow (y, t') \rightarrow (x, t)$. Плотность вероятности осуществления этого перехода равна $V(x, t|y, t') * V(y, t'|x_0, t_0)$. Такой двойной переход – один из способов перехода из состояния (x_0, t_0) в состояние (x, t) , причем невозможно одновременное существование двух переходов (события несовместимы)

$$(x_0, t_0) \rightarrow (y, t') \rightarrow (x, t) \text{ и } (x_0, t_0) \rightarrow (y_1, t'_1) \rightarrow (x, t).$$

Это свойство позволяет нам найти плотность вероятности перехода $(x_0, t_0) \rightarrow (x, t)$ как сумму плотностей вероятностей таких переходов

$$V(x, t|x_0, t_0) = \int V(x, t|y, t') * V(y, t'|x_0, t_0) dy.$$

Для осуществления этого необходимо наложить следующие ограничения:

1. Интегрирование произведения плотностей вероятностей должно давать ту же функцию плотности вероятности
2. Результат не должен зависеть от выбора промежуточной точки

1.2.2 Уравнение Эйнштейна-Фоккера-Планка

Уравнение ЭФП было выведено Боголюбовым Н.Н. и Крыловым Н.М в 1939 году из уравнения Смолуховского. Ими было рассмотрено состояние $(y, t - \tau)$, близкое к (x, t) .

Было допущено существование следующих пределов:

1.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{x - y}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - y) V(x, t|y, t - \tau) dx = A(y, t)$$

Этот предел имеет смысл средней скорости изменения состояния системы в точке y в момент t .

2.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x - y)^2}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - y)^2 \cdot V(x, t|y, t - \tau) dx = B(y, t) \quad (1.6)$$

$\overline{(x - y)^2}$ – дисперсия конечных точек x относительно фиксированных начальных точек y . Этот предел можно трактовать как тот факт, что эта дисперсия при удалении от момента времени t на τ , будет расти пропорционально τ (по диффузионному закону). $\frac{B}{2}(y, t)$ называется коэффициентом диффузии.

3.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{|x - y|^3}}{\tau} = 0.$$

Равенство этого предела нулю говорит о том, что резкие изменения $|x - y|$ маловероятны и позволяет рассматривать x как непрерывную случайную функцию, то есть как среднее за время, гораздо большее промежутка между случайными толчками.

Таким образом рассматриваются марковские процессы, у которых непрерывен спектр состояний и которые протекают непрерывно во времени. Такие марковские процессы называются диффузионными. Для них было получено уравнение

$$\frac{\partial V(x, t|x_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial A(x, t)V(x, t|x_0, t_0)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(x, t)V(x, t|x_0, t_0)}{\partial x^2}.$$

Его решение должно быть неотрицательным, нормировано к единице и удовлетворять равенству $V(x, t_0|x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$.

Глава 2

Физическое описание модели

Полевой транзистор (далее – ПТ) был описан Шокли в 1952 году. В данной работе он был использован, поскольку в нем происходит перенос только основных носителей заряда, что облегчает описание. Чаще всего ПТ используется по схеме с общим истоком. В этом случае происходит большое усиление тока. ПТ бывают двух типов: с управляющим $p-n$ переходом и с изолированным затвором. Будем рассматривать схему с транзистором с управляющим $p-n$ переходом. Общая схема такого ПТ представлена на рисунке 2.1.

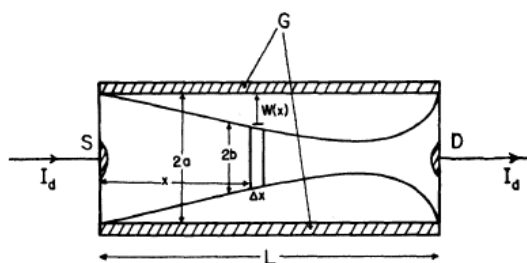


Рис. 2.1: Общее устройство полевого транзистора

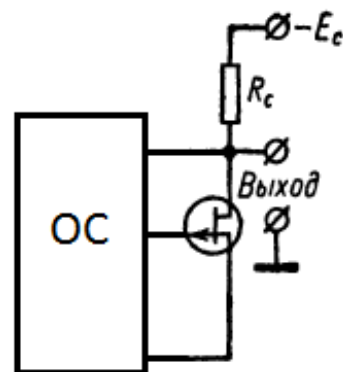


Рис. 2.2: Общий вид генераторов на ПТ

Буквами S и D обозначены контакты истока и стока соответственно. Буквой G обозначены контакты затвора. Ток стока равен

$$I_d = \frac{1}{R_{k0}} \left[V_d + \frac{2V_g^{3/2} - (V_g + V_d)^{3/2}}{V_{g0}^{3/2}} \right], R_{k0} = \frac{\rho L}{aZ}, \quad (2.1)$$

где ρ - удельное сопротивление материала, из которого сделан транзистор, Z - ширина транзистора.

Общая схема генераторов на ПТ представлена на рисунке 2.2. Здесь под блоком ОС подразумевается некоторая обратная связь. Опишем шумы такого генератора.

Глава 3

Шумы.

3.1 Спектральные методы описания шумов

В настоящее время в литературе основным методом описания шумов является спектральный метод. Электронная схема с собственным шумом может быть представлена как бесшумовая схема с внешними генераторами шумового тока, подключенными параллельно. Шумы описываются спектральными плотностями, определенными через преобразование Фурье от функции корреляции, т.к. случайные функции, которые используются для рассмотрения шумов, не удовлетворяют условиям Дирихле для преобразования Фурье.

$$S_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\xi(t + \tau)\xi(t)} e^{i\omega t} dt \quad (3.1)$$

Интеграл по всем частотам от спектральной плотности имеет физический смысл мощности.

3.2 Шумы в полевом транзисторе

При комнатной температуре и нормальных условиях, наиболее важны тепловой шум стока, тепловой шум на затворе и дробовой шум утечки на затворе.

3.2.1 Тепловые шумы

Явление теплового шума аналогично броуновскому движению, статистические свойства которого были описаны Эйнштейном [4]. Анализ Эйнштейна основан на модели случайного блуждания и показывает, что средний квадрат перемещения броуновской частицы пропорционален времени наблюдения. [5]

Спектральная плотность теплового шума стока была описан Альбертом

Ван-Дер-Зилом [6] в 1962 году, и она имеет выражение

$$\overline{S_{td}} = 4k\theta g_0 \cdot \frac{\left[(z_d - z_s) - \frac{4}{3}(z_d^{3/2} - z_s^{3/2}) + \frac{1}{2}(z_d^2 - z_s^2) \right]}{\left[(z_d - z_s) - \frac{2}{3}(z_d^{3/2} - z_s^{3/2}) \right]},$$

где $z_d = \frac{V_b + V_g - V_d}{V_{g0}}$, $z_s = \frac{V_b + V_g}{V_{g0}}$, $g_0 = 2\sigma a\omega/L$ – проводимость однородного полевого транзистора шириной $2a$ в отсутствие объемного заряда. Робинсон [7] показал, что хорошим приближением служит формула

$$\overline{S_{td}(\omega)} \simeq 4k\theta \left(\frac{2g_{msat}}{3} \right).$$

Спектральная плотность теплового шума на затворе ПТ, равна

$$\overline{S_{tg}} = \frac{\omega^2 C^2}{g_{msat}} 4k\theta \left[\frac{(1 + 7z_s^{1/2})}{10(1 + 2z_s^{1/2})} \right].$$

Достаточно хорошим приближением [7] этой формулы будет

$$\overline{S_{td}} \simeq \frac{\omega^2 C^2}{4g_{msat}} 4k\theta.$$

3.2.2 Дробовые шумы

Шум тока утечки затвора имеет дробовой характер и его спектральная плотность имеет следующее выражение:

$$\overline{S_{dg}(\omega)} = 2q \cdot I_g.$$

Так как данный шум не зависит от частоты, а тепловой шум затвора зависит от частоты как ω^2 , существует некоторая частота, ниже которой данный шум будет преобладать. Она равна [5]

$$f_{crit} = f_{cut} \left[\frac{2q \cdot I_g}{k\theta g_{msat}} \right]^{1/2}.$$

Здесь $f_{cut} = \frac{g_m}{2\pi C}$ – предельная частота среза, где C – значение входной ёмкости транзистора.

Таким образом шумы в полевом транзисторе можно представить двумя источниками и часть генератора с полевым транзистором будет преобразована к следующей схеме:

Будем рассматривать схему рис. (3.2). Здесь v_n – генератор шумового напряжения, расположенный на затворе. Он меняет ширину канала, что приводит к изменению крутизны и, как следствие, выходной характеристики.

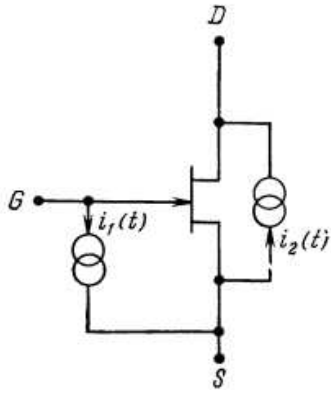


Рис. 3.1: Эквивалентное представление шумов в ПТ как источников тока

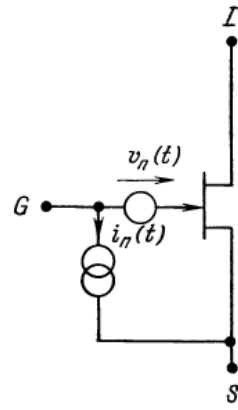


Рис. 3.2: Эквивалентная схема, в которой генератор тока представляется как генератор напряжения

Спектральные плотности данных источников будут иметь вид

$$\overline{S_{i_n}(\omega)} \simeq \frac{\omega^2 C^2}{g_{msat}} k\theta + 2q \cdot I_g$$

$$\overline{S_{v_n}(\omega)} \simeq \frac{2}{3} \left(\frac{4k\theta}{g_{msat}} \right).$$

Тогда ток стока будет иметь следующий вид:

$$I_d = \frac{1}{R_{k0}} \left[V_d + \frac{2}{3} \frac{(V_g + V_n)^{3/2} - (V_g + V_n + V_d)^{3/2}}{V_{g0}^{3/2}} \right]. \quad (3.2)$$

3.3 Шумы в цепи обратной связи

Обратная связь в общем виде представляет из себя четырёхполюсник и она является источником теплового шума. Данный шум не оказывает столь большого влияния на параметры генератора, как оказывают шумов в полевом транзисторе, поэтому ими можно пренебречь.

Глава 4

Флуктуации тока в ТОМСОНОВСКОМ генераторе

4.1 Вывод уравнения ЭФП, исходя из динамического уравнения колебательной системы

Данный способ описан Рытовым С.М. в книге [1]. Был рассмотрен генератор с одной степенью свободы. Говоря, что генератор Томсоновский, подразумевается малость нелинейных и диссипативных параметров.

Динамическое уравнение получается для конкретной реализации генератора, исходя из общих физических соображений, и имеет общий вид

$$\ddot{I}_d + I_d = \mu f(I_d, \dot{I}_d) + \mu F(t). \quad (4.1)$$

Здесь $F(t)$ – флуктуационная сила, которая определяется, исходя из конкретной схемы генератора. Дальнейшее развитие данной теории не оперирует данной силой. Также, исходя из параметров генератора, определяется $f(I_d, \dot{I}_d)$.

Решением такого уравнения при $\mu = 0$ будет иметь вид

$$I_d = r \cdot \cos(t' + \phi), \quad (4.2)$$

где r – амплитуда тока стока, ϕ – фаза, $t' = \omega_0 t$. К томсоновским системам применим метод малых возмущений Ван-Дер-Поля. Он подразумевает, что амплитуда и фаза будут функциями медленного времени $\theta = \mu t'$, и уравнение (4.2) преобразуется в

$$I_d = r(\theta) \cdot \cos(t' + \phi(\theta)), \quad (4.3)$$

Это позволяет говорить, что скорости изменения амплитуды $r(\theta)$ и фазы $\phi(\theta)$ являются величинами первого порядка малости относительно μ .

$$\dot{r} = \mu r', \quad \dot{\phi} = \mu \phi', \quad (4.4)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по медленному времени θ . Дифференцируя (4.2) по времени и учитывая только члены первого порядка малости по μ , получаем:

$$\ddot{I}_d + I_d = -2\mu[r'\sin(t + \phi) + r\phi'\cos(t + \phi)]. \quad (4.5)$$

Приравняв правые части уравнений (4.1) и (4.5), получаем

$$f[r\cos(t + \phi), -r\sin(t + \phi)] + F(t) = -2[r'\sin(t + \phi) + r\phi'\cos(t + \phi)]. \quad (4.6)$$

Можно заметить, что функция f 2π -периодична и её можно разложить в ряд Фурье по аргументу $u = t + \phi$.

$$f(r\cos u, -r\sin u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nu) + b_n \sin(nu)). \quad (4.7)$$

Из-за высокой селективности системы из всего ряда Фурье существенны только члены с $n = 1$. Что приводит уравнение (4.6) к виду

$$-2[r'\sin u + r\phi'\cos u] = a_1 \cos u + b_1 \sin u. \quad (4.8)$$

Рассмотрим теперь флуктуационную силу $F(t)$. По той же причине, что мы оставили только первые члены f разложения в ряд Фурье, можно рассматривать $\widetilde{F}(t)$, определенную в окрестности той же безразмерной частоты 1. Такая сила может быть представлена в виде

$$\widetilde{F}(t) = F_{\parallel}(\theta)\cos u + F_{\perp}(\theta)\sin u. \quad (4.9)$$

На основании (4.6), (4.8) и (4.9) получаем

$$r' = -\frac{b_1}{2} - \frac{F_{\perp}(\theta)}{2}, \quad r\phi' = -\frac{a_1}{2} - \frac{F_{\parallel}(\theta)}{2}. \quad (4.10)$$

Когда система автономна ($F(t) = 0$), из (4.10) получается

$$r' = -\frac{b_1}{2} = R(r), \quad r\phi' = -\frac{a_1}{2} = \Phi(r) \quad (4.11)$$

Интегрируя эти выражения, при наличии начальных условий, получаются конкретные значения для модуля I_d и его фазы. В установившемся режиме амплитуда $I_d = r = \text{const} \Rightarrow r' = 0$. Постоянные значения тока стока определяются из уравнения $R(r) = 0$. Пусть r_0 – решение этого уравнения. Тогда из уравнения (4.11) можно определить уравнение для фазы

$$\phi(\theta) = \phi(0) + \frac{\Phi(r_0)}{r_0}\theta = \phi(0) + \frac{\Phi(r_0)}{r_0}\mu t. \quad (4.12)$$

Таким образом при условии $\frac{\Phi(r_0)}{r_0} \neq 0$, автоколебания происходят с частотой

$$1 + \mu \frac{\Phi(r_0)}{r_0}, \quad (4.13)$$

которая отличается от собственной частоты линейного осциллятора, равной 1.

Как уже было сказано в (1.2.2), для того, чтобы считать случайную функцию непрерывной, нам нужно, чтобы за рассматриваемый промежуток времени происходило много независимых случайных толчков. Случайные воздействия, с которыми связаны уходы частоты гораздо более медленны, и следовательно не могут быть рассмотрены как процессы без вероятностного последствия. Поэтому в данной модели учитываются только дробовые и тепловые флуктуации. Для получения уравнения ЭФП необходимо конкретизировать коэффициенты $B(x, t)$ и $A(x, t)$. Введём

$$B_{rr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(\Delta r)^2}}{\Delta t}, \quad B_{r\phi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(\Delta r \Delta \phi)}}{\Delta t}, \quad B_{\phi\phi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{(\Delta \phi)^2}}{\Delta t} \quad (4.14)$$

Было допущено, что случайные толчки изотропны, то есть

$$B_{rr} = r^2 B_{\phi\phi} = B, \quad B_{r\phi} = 0.$$

Кроме того было принято, что толчки однородны, то есть B – величина, не зависящая от состояния генератора (r, ϕ) .

Также Рытовым С.М. [1] было показано, что коэффициент $A(x, t)$ совпадает с правой частью динамического уравнения с точностью до аддитивной случайной функции, среднее значение которой равно нулю.

$$\frac{dx}{dt} = A(x, t) + F(x, t), \quad \text{причем } \overline{F(x, t)} = 0. \quad (4.15)$$

Изначально при рассмотрении динамического уравнения (4.1) пренебрегли флуктуационной силой, у которой среднее значение равно нулю. Учитывая (4.2), полагаем $A(r, \phi) = R(r)$, $\Phi = 0$ и уравнение ЭФП для вероятности перехода $V(r, \phi, \theta | r_0, \phi_0, \theta_0)$ имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial Rv}{\partial r} + \frac{B}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \right] \quad (4.16)$$

Получим коэффициент B .

4.2 Вывод коэффициента B , исходя из шумовых параметров схемы.

Как было сказано в пункте (3.3), тепловой шум обратной связи сравнительно мал, потому при получении коэффициента $B(x, t)$, мы будем учитывать шумовой вклад только от полевого транзистора.

4.2.1 Процессы Винера-Леви

В пределе (1.6) под состоянием системы $x(t)$ будем понимать количество перенесённого заряда q на затвор в момент t , а y – в момент $t - \tau$.

Флуктуации заряда $q(t)$ можно выразить в виде интеграла по конечному интервалу $[0, \tau]$ тока тепловых шумов.

$$q(t) = \int_0^\tau i(t') dt'. \quad (4.17)$$

Эта формула даёт определение процесса Винера-Леви: это интеграл стационарного процесса $i(t)$, имеющего спектральную плотность $S_i(\omega)$. $q(t)$ является нестационарным процессом.

Значение среднего квадрата флуктуаций заряда получают на основе простой операции. Начальная стадия, состоящая из перемещения электрона по пути свободного пролета l_f между столкновениями, вызывает во внешнем контуре перенос заряда, равного $q(l_f/L)$. Если в момент времени τ имеется m независимых событий, то значение среднего квадрата флуктуаций заряда имеет вид

$$\overline{q^2(t)} = \overline{mq^2 l_f^2} / L^2 = vtq^2 \overline{l_f^2} / L^2, \quad (4.18)$$

где v – средняя скорость событий и считается, что $\overline{m} = vt$ (математическое ожидание числа событий переноса заряда) и поэтому дробовой шум можно считать диффузионным процессом.

4.2.2 Получение коэффициента диффузии

Как видно из схемы на рисунке (3.1), у нас имеется два источника шумового тока $i_1(t)$ и $i_2(t)$ со спектральными плотностями

$$\overline{S_{i_1}(\omega)} \simeq \frac{\omega^2 C^2}{g_{msat}} k\theta + 2q \cdot I_g \text{ и } \overline{S_{i_2}(\omega)} \simeq 4k\theta \left(\frac{2g_{msat}}{3} \right). \quad (4.19)$$

Ток i_1 подаётся на исток полевого транзистора. Дальше происходит его усиление полевым транзистором, после которого он складывается с током $i_2(t)$. В итоге на выходе генератора образуется шумовой ток $I_{noise}(t)$ со спектральной плотностью

$$\overline{S_{I_{noise}}(\omega)} = \overline{S_{i_2}(\omega)} + P^2 \cdot \overline{S_{i_1}(\omega)}, \quad (4.20)$$

где P – коэффициент усиления транзистора. Полный ток на выходе тогда будет равен

$$I_{out}(t) = I_{theor}(t) + I_{noise}(t),$$

где $I_{theor}(t)$ – ток который бы наблюдался на выходе генератора при отсутствии шумов. Для получения коэффициента $B(x, t)$, надо в предел (1.6) вместо $\overline{(x - y)^2}$ подставить $\overline{(I_{noise}(t))^2}$, равный по теореме Винера-Хинчина

$$\overline{(I_{noise}(t))^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \overline{S_{I_{noise}}(\omega)} \cos(\omega t) d\omega. \quad (4.21)$$

Данный предел будет существовать, поскольку в спектральную плотность $\overline{S_{i_1}}$ входит спектральная плотность дробового тока

$$\overline{S_{dg}(\omega)} = 2q \cdot I_g,$$

а в пункте (4.2.1) было показано, что данная спектральная плотность пропорциональна времени. Оставшиеся компоненты $\overline{S_{I_{noise}}(\omega)}$ являются спектральными плотностями теплового шума и, как сказано в п.(3.2.1), спектральные плотности тепловых шумов будут пропорциональны времени τ .

Таким образом получаем, что

$$B(I, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \overline{S_{I_{noise}}(\omega)} \cos(\omega t) d\omega}{t} \quad (4.22)$$

и этот предел существует.

Заключение

В работе изучены флуктуации выходного тока генератора томсоновского типа, обусловленные тепловым и дробовым шумами. Фактически разработана методика построения плотности распределения вероятности для случайной функции тока стока любой конечной мерности в приближении марковского процесса. Данная методика предполагает, что известно динамическое уравнение для тока стока генератора. Чтобы построить плотность распределения вероятности перехода тока стока, используется уравнение ЭФП, причём детально рассматривается вопрос получения коэффициента диффузии. Чтобы показать, что существует предел, определяющий коэффициент диффузии, использовано описанное Эйнштейном сравнение теплового шума с броуновским движением частицы, а для дробового шума было использовано понятие процесса Винера-Леви, который представляет собой интеграл от стационарного процесса. Удалось показать, что дисперсия, входящая в определение коэффициента $B(x, t)$ растёт пропорционально времени.

Изучена литература, посвященная количественному описанию шумов. К сожалению, в данной литературе часто некорректно используется терминология по теории случайных функций, что приводило к определённым трудностям в написании работы.

Литература

1. С.М. Рытов. *Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы.* Наука, 1976.
2. А.Н. Колмогоров. *Основные понятия теории вероятностей.* ОНТИ, 1936.
3. Лутченко Л.Н. *Элементы теории вероятностей случайных функций и математической статистики для радиофизиков.* Издательство СОЛО., 2015.
4. А. Einstein. Theory of brownian motion. *Ann. d. Phys*, pages 371–379, 1906.
5. М. Букингем. *Шумы в электронных приборах и системах.* Мир, 1986. Перевод с английского А.Б. Мещерякова, В.П. Митрофанова, Г.А Сидорова.
6. A. Van Der Ziel. Thermal noise in field-effect transistors. *Proceedings of the IRE (Volume:50 , Issue: 8)*, pages 1808 – 1812, Aug. 1962.
7. F.N.H. Robinson. Noise in field effect transistors at moderately high frequencies. *Elect. Eng.*, pages 353–355, 1969.