

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"  
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ИБРАГИМОВА ОЛЬГА РУСТЕМОВНА

**ДЕФОРМАЦИЯ ОРТОТРОПНОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ**

**ДИПЛОМНАЯ РАБОТА**

Допустить к защите:  
Зав. кафедрой,  
д.ф.-м.н. профессор Товстик П. Е.

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н. профессор Бауэр С. М.

Санкт-Петербург  
2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY  
DEPARTMENT OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

IBRAGIMOVA OLGA

**DEFORMATION OF AN ORTHOTROPIC SPHERICAL LAYER  
UNDER INTERNAL PRESSURE**

**GRADUATION THESIS**

Admitted for defence:

Head of the department,  
Sci.Dr., Professor Petr E. Tovstik

Scientific supervisor:

Sci.Dr., Professor Svetlana M. Bauer

Saint-Petersburg  
2016

## Оглавление

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Введение  | 4  |
| 2 | Постановка задачи   | 6  |
| 3 | Граничные условия   | 9  |
| 4 | Ограничения на упругие постоянные                         | 10 |
| 5 | Ортотропный материал близкий к трансверсально-изотропному | 11 |
| 6 | Заключение  | 14 |
| 7 | Приложение  | 15 |

# 1 Введение

Одним из современных способов лечения некоторых глазных заболеваний является интрасклеральная инъекция небольшой дозы лечебного препарата. Как отмечается в работе [2], этот метод лечения используется все чаще и чаще. На рис. 1 показано, что в 2012 интрасклеральные инъекции стали использовать чаще, чем иную медицинскую помощь, оказываемую при лечении катаракты.

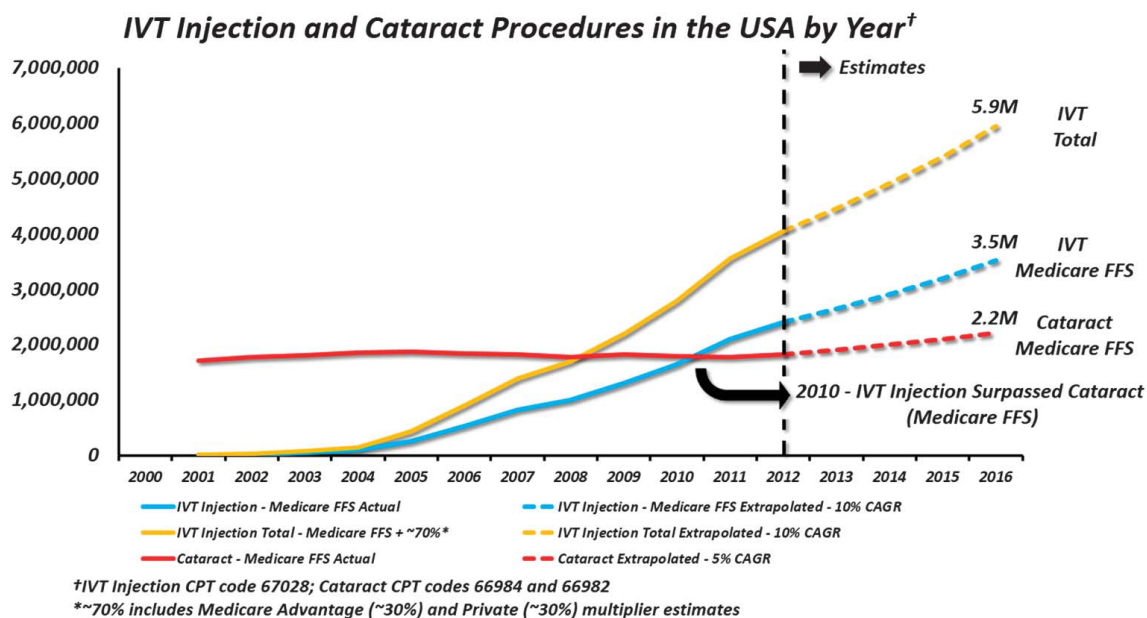


Рис. 1: Интрасклеральные инъекции и лечение катаракты (исследования, проведённые в США)

При лечении применяются инъекции небольшой (до 0,2 мл) дозы лечебного препарата. За счет кратковременного увеличения внутреннего объема глазного яблока при введении таких инъекций в первый момент происходит резкое увеличение внутриглазного давления (ВГД). Даже кратковременное увеличение ВГД выше определенного индивидуального уровня может привести к нарушению кровообращения на сетчатке и в диске зрительного нерва (см. [9]), поэтому важно в каждом конкретном случае оценить возможный уровень изменения внутриглазного давления (ВГД) в результате инъекции. С точки зрения механики, это задача определения изменения внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема несжимаемой жидкости.

В работах [4], [6] для оценки изменения ВГД после инъекций рассмотрена задача трехмерной теории упругости о деформации трансверсально-изотропного сферического слоя, находящегося под действием внутреннего давления. Получена зависимость, характеризующая изменение внутреннего давления в оболочке глаза в зависимости от введенного объема несжимаемой жидкости, а также получено изменение толщины слоя склеры под действием давления. Однако известно, что только при нормальном зрении глаз имеет сферическую форму. Глаза с миопией (близорукость) имеют, как правило,

форму вытянутого эллипсоида, а глаза с гиперметропией (дальнозоркость) часто имеют форму сплюснутого эллипсоида.

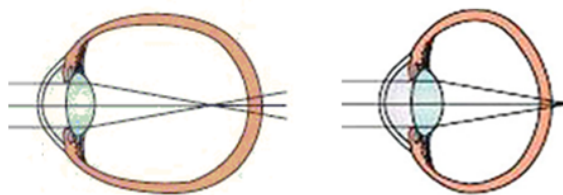


Рис. 2: Миопия и гиперметропия

Известно также [9], что изменение формы корнеосклеральной оболочки связано с изменением механических свойств оболочки. Миопия чаще всего развивается в связи с тем, что модуль упругости в меридиональном направлении становится меньше, чем модуль упругости в экваториальном направлении, т.е. корнеосклеральная оболочка становится ортотропной. В работе [7] сделана попытка оценки изменения внутриглазного давления при введении внутрикамерных инъекций для ортотропной оболочки, но при этом полагается, что оболочка остается сферической и рассматривается одно уравнение равновесия, и, в результате, получена функция нормального прогиба:

$$u_\rho(\rho, P) = C_1(P) \left( \rho^{m + \frac{k-t}{k}} \right)^{-1} + C_2(P) \rho^m \quad (1)$$

Очевидно, что ортотропный сферический слой при деформации под действием нормального давления перестает быть сферическим, и изменение его напряженно-деформированного состояния не может быть описано одним уравнением. В связи с этим, ниже рассматривается задача о расширении ортотропного сферического слоя под действием внутреннего давления. Её математическая модель описывается в следующей главе.

## 2 Постановка задачи

Рассматривается ортотропный сферический слой с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним —  $R_2$ , толщиной  $h = R_2 - R_1$  (см. рис. 3).

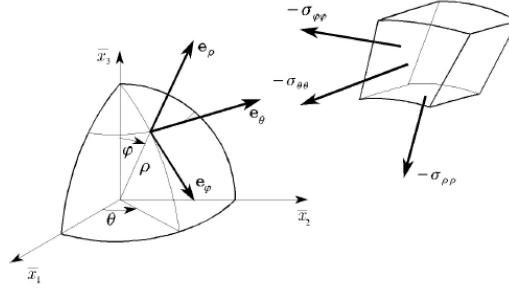


Рис. 3: Ортотропный сферический слой

Положение точки сферического слоя описывается сферическими координатами:  $\rho$  — радиальная координата,  $\varphi$  — координата в меридиональном направлении,  $\theta$  — координата в экваториальном направлении. Уравнения равновесия сферического слоя имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} \sigma_{\rho\varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) + f_\rho &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{\rho} \sigma_{\varphi\rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) + f_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{\rho} \sigma_{\theta\rho} + \frac{2 \cos \varphi}{\rho \sin \varphi} \sigma_{\theta\varphi} + f_\theta &= 0, \end{aligned}$$

здесь  $\sigma_{\rho\rho}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  — нормальные напряжения,  $\sigma_{\rho\varphi}$ ,  $\sigma_{\rho\theta}$ ,  $\sigma_{\varphi\theta}$  — касательные напряжения  $f_\rho$ ,  $f_\varphi$ ,  $f_\theta$  — проекции внешних сил на соответствующие направления.

Будем рассматривать осесимметричную задачу в отсутствии внешних сил. При этом перемещения не зависят от угла  $\theta$ , а касательные напряжения  $\sigma_{\rho\theta}$ ,  $\sigma_{\varphi\theta}$  и деформации  $\varepsilon_{\rho\theta}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\theta}$  равны 0. Таким образом, система уравнений равновесия примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} \sigma_{\rho\varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3}{\rho} \sigma_{\rho\varphi} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) = 0.$$

Перемещения точки сферического слоя задаются проекциями вектора перемещений  $(w, u, v)$  в направлениях  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  соответственно. Для осесимметричной задачи  $v = 0$ . Деформации и перемещения сферического слоя связаны соотношениями [5]:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial w}{\partial \rho}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{w}{\rho}, \varepsilon_{\theta\theta} = \cot \varphi \frac{u}{\rho} + \frac{w}{\rho}, \varepsilon_{\rho\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{u}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \right). \quad (3)$$

Уравнения состояния, связывающие напряжения и деформации, для ортотропного тела содержат 9 независимых упругих постоянных  $E_\rho$ ,  $E_\varphi$ ,  $E_\theta$  — модули Юнга,  $\nu_{\rho\varphi}$ ,  $\nu_{\theta\rho}$ ,  $\nu_{\theta\varphi}$  — коэффициенты Пуассона,  $G_{\rho\varphi}$ ,  $G_{\varphi\theta}$ ,  $G_{\rho\theta}$  — модули сдвига (мы следуем обозначениям книги [5])

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho\rho} &= \frac{1}{E_\rho}\sigma_{\rho\rho} - \frac{\nu_{\rho\varphi}}{E_\varphi}\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\nu_{\rho\theta}}{E_\theta}\sigma_{\theta\theta}, & \varepsilon_{\rho\theta} &= \sigma_{\rho\theta}/G_{\rho\theta}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= -\frac{\nu_{\varphi\rho}}{E_\rho}\sigma_{\rho\rho} + \frac{1}{E_\varphi}\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\nu_{\varphi\theta}}{E_\theta}\sigma_{\theta\theta}, & \varepsilon_{\varphi\theta} &= \sigma_{\varphi\theta}/G_{\varphi\theta}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= -\frac{\nu_{\theta\rho}}{E_\rho}\sigma_{\rho\rho} - \frac{\nu_{\theta\varphi}}{E_\varphi}\sigma_{\varphi\varphi} + \frac{1}{E_\theta}\sigma_{\theta\theta}, & \varepsilon_{\rho\varphi} &= \sigma_{\rho\varphi}/G_{\rho\varphi}.\end{aligned}\quad (4)$$

В силу симметрии соотношений (4) имеют место равенства

$$E_\varphi\nu_{\varphi\rho} = E_\rho\nu_{\rho\varphi}, \quad E_\varphi\nu_{\varphi\theta} = E_\theta\nu_{\theta\varphi}, \quad E_\theta\nu_{\theta\rho} = E_\rho\nu_{\rho\theta}. \quad (5)$$

Также верны следующие равенства (см. [5])

$$\begin{aligned}\nu_{\varphi\theta}^* &= \frac{\nu_{\varphi\theta} + \nu_{\varphi\rho}\nu_{\rho\theta}}{1 - \nu_{\theta\rho}\nu_{\rho\theta}}, & \nu_{\varphi\rho}^* &= \frac{\nu_{\varphi\rho} + \nu_{\varphi\theta}\nu_{\theta\rho}}{1 - \nu_{\theta\rho}\nu_{\rho\theta}}, & \nu_{\theta\varphi}^* &= \frac{\nu_{\theta\varphi} + \nu_{\theta\rho}\nu_{\rho\varphi}}{1 - \nu_{\varphi\rho}\nu_{\rho\varphi}}, \\ \nu_{\theta\rho}^* &= \frac{\nu_{\theta\rho} + \nu_{\theta\varphi}\nu_{\varphi\rho}}{1 - \nu_{\varphi\rho}\nu_{\rho\varphi}}, & \nu_{\rho\varphi}^* &= \frac{\nu_{\rho\varphi} + \nu_{\theta\varphi}\nu_{\rho\theta}}{1 - \nu_{\varphi\theta}\nu_{\theta\varphi}}, & \nu_{\rho\theta}^* &= \frac{\nu_{\rho\theta} + \nu_{\varphi\theta}\nu_{\rho\varphi}}{1 - \nu_{\varphi\theta}\nu_{\theta\varphi}},\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}E_\rho^* &= E_\rho / (1 - \nu_{\rho\theta}^*\nu_{\theta\rho} - \nu_{\rho\varphi}^*\nu_{\varphi\rho}), & E_\varphi^* &= E_\varphi / (1 - \nu_{\varphi\theta}^*\nu_{\theta\varphi} - \nu_{\varphi\rho}^*\nu_{\rho\varphi}), \\ E_\theta^* &= E_\theta / (1 - \nu_{\theta\varphi}^*\nu_{\varphi\theta} - \nu_{\theta\rho}^*\nu_{\rho\theta}),\end{aligned}\quad (7)$$

причем

$$E_\rho\nu_{\rho\varphi}^* = E_\varphi\nu_{\varphi\rho}^*, \quad E_\varphi\nu_{\varphi\theta}^* = E_\theta\nu_{\theta\varphi}^*, \quad E_\theta\nu_{\theta\rho}^* = E_\rho\nu_{\rho\theta}^*. \quad (8)$$

Подставляя (4) и (3) в (2), с учетом обозначений (6)–(8), получим уравнения равновесия в перемещениях в виде

$$c_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + c_1 \frac{\partial w}{\partial \rho} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + c_3 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + c_4 w + c_5 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} + c_6 \frac{\partial u}{\partial \rho} + c_7 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + c_8 u = 0, \quad (9)$$

$$d_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + d_1 \frac{\partial u}{\partial \rho} + d_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + d_3 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + d_4 u + d_5 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} + d_6 \frac{\partial w}{\partial \rho} + d_7 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + d_8 w = 0,$$

где

$$\begin{aligned}c_0 &= 1, \quad c_1 = \frac{2}{\rho}, \quad c_2 = \frac{1}{2\rho^2} \frac{G_{\rho\varphi}}{E_\rho^*}, \quad c_3 = c_2 \cot(\varphi), \\ c_4 &= \frac{1}{\rho^2} \left( \nu_{\rho\varphi}^* + \nu_{\rho\theta}^* - \frac{E_\varphi^* + 2\nu_{\varphi\theta}^* E_\varphi^* + E_\theta^*}{E_\rho^*} \right), \\ c_5 &= \frac{1}{\rho} \left( \nu_{\rho\varphi}^* + \frac{G_{\rho\varphi}}{2E_\rho^*} \right), \quad c_6 = \frac{\cot(\varphi)}{\rho} \left( \nu_{\rho\theta}^* + \frac{G_{\rho\varphi}}{2E_\rho^*} \right), \\ c_7 &= \frac{1}{\rho^2} \left( \nu_{\rho\varphi}^* - \frac{E_\varphi^*}{E_\rho^*} (1 + \nu_{\varphi\theta}^*) - \frac{G_{\rho\varphi}}{2E_\rho^*} \right), \\ c_8 &= \frac{\cot(\varphi)}{\rho^2} \left( \nu_{\rho\theta}^* - \frac{E_\varphi^* \nu_{\varphi\theta}^* + E_\theta^*}{E_\rho^*} - \frac{G_{\rho\varphi}}{2E_\rho^*} \right);\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}
d_0 &= 1, \quad d_1 = \frac{2}{\rho}, \quad d_2 = \frac{2}{\rho^2} \frac{E_\varphi^*}{G_{\rho\varphi}}, \quad d_3 = d_2 \cot(\varphi), \\
d_4 &= -\frac{2}{\rho^2} \left( 1 + \frac{E_\varphi^* \nu_{\varphi\theta}^*}{G_{\rho\varphi}} + \frac{E_\theta^*}{G_{\rho\varphi}} \cot^2(\varphi) \right), \\
d_5 &= \frac{1}{\rho} \left( 1 + 2 \frac{E_\rho^* \nu_{\rho\varphi}^*}{G_{\rho\varphi}} \right), \quad d_6 = \frac{2 \cot(\varphi)}{\rho} \frac{E_\rho^*}{G_{\rho\varphi}} (\nu_{\rho\varphi}^* - \nu_{\rho\theta}^*), \\
d_7 &= \frac{2}{\rho^2} \left( 1 + \frac{E_\varphi^*}{G_{\rho\varphi}} (1 + \nu_{\varphi\theta}^*) \right), \quad d_8 = \frac{2 \cot(\varphi)}{\rho^2} \frac{E_\varphi^* - E_\theta^*}{G_{\rho\varphi}}.
\end{aligned} \tag{11}$$



### 3 Граничные условия

Будем рассматривать половину сферического слоя, т.е. область  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  и  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ .

На части границы  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  полагаем

$$u(\rho, 0) = u\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi}(\rho, 0) = \frac{\partial w}{\partial \varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (12)$$

На части границы  $\rho = R_1$  и  $\rho = R_2$  считаем заданными значения внутреннего  $P_1$  и внешнего  $P_2$  давлений в силц симметрит.

$$\sigma_{\rho\rho}(R_1, \varphi) = -P_1, \quad \sigma_{\rho\rho}(R_2, \varphi) = -P_2, \quad \sigma_{\rho\varphi}(R_1, \varphi) = \sigma_{\rho\varphi}(R_2, \varphi) = 0, \quad (13)$$

причем напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= E_\rho^* \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\nu_{\rho\varphi}^* + \nu_{\rho\theta}^*}{\rho} w + \frac{\nu_{\rho\varphi}^*}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\nu_{\rho\theta}^* \cot(\varphi)}{\rho} u \right), \\ \sigma_{\rho\varphi} &= G_{\rho\varphi} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{u}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \right). \end{aligned}$$

Уравнения (9) и граничные условия (12)–(13) образуют краевую задачу.

## 4 Ограничения на упругие постоянные

Как было отмечено в главе 2 описание ортотропного материала включает 9 независимых упругих постоянных. В силу положительной определенности упругого потенциала его коэффициенты должны удовлетворять критерию Сильвестра, из которого вытекают следующие неравенства (см. [5]):

$$\begin{aligned} \nu_{\rho\varphi} < \sqrt{E_\varphi/E_\rho}, \quad \nu_{\rho\theta} < \sqrt{E_\theta/E_\rho}, \quad \nu_{\varphi\theta} < \sqrt{E_\theta/E_\varphi}, \\ \nu_{\rho\varphi}\nu_{\varphi\theta}\nu_{\theta\rho} < 1/2 \left( 1 - \nu_{\rho\varphi}^2 E_\rho/E_\varphi - \nu_{\varphi\theta}^2 E_\varphi/E_\theta - \nu_{\theta\rho}^2 E_\theta/E_\rho \right). \end{aligned} \tag{14}$$

## 5 Ортоотропный материал близкий к трансверсально-изотропному.

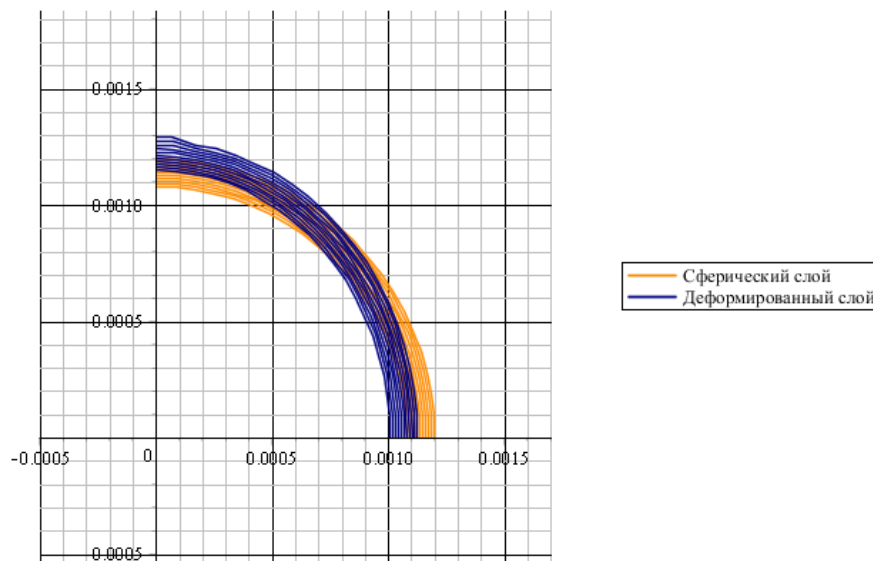


Рис. 4: Распределения перемещений в ортоотропном слое после деформации при  $\mu = 0.3$  при нормальном внутреннем давлении  $P_1 = 60$  мм. рт. ст. ( $P_1 = 60 \times 133.3$  Па), полученное с помощью метода сетки, рассчитанное в программном пакете Maple 17.

Рассмотрим сферический слой из ортоотропного материала, для упругих постоянных которого выполнены равенства

$$E_\rho = E_1, \quad E_\varphi = E(1 - \mu), \quad E_\theta = E(1 + \mu), \quad \nu_{\theta\varphi} = \nu, \quad \nu_{\varphi\rho} = \nu_{\theta\rho} = \nu_1.$$

$$G_{\varphi\theta} = G + \mu G' = \frac{E}{2(1 + \nu)} + \mu G', \quad G_{\rho\varphi} = G_1, \quad G_{\rho\theta} = G_1 + \mu G'',$$

где  $\mu \ll 1$ . При  $\mu = 0$  материал становится трансверсально-изотропным.

Ограничения на упругие постоянные (14) становятся такими

$$\nu < \frac{1}{1 + \mu}, \quad \nu_1 < \sqrt{\frac{E_1}{E}} \cdot \min \left( 1, \sqrt{\frac{1}{1 + \mu}}, \sqrt{\frac{1 + \mu - \nu^2}{(1 + \mu)(2 + \mu + 2\nu)}} \right). \quad (15)$$

Решение уравнений (9) будем искать в виде

$$w(\rho, \varphi) = w_0(\rho) + \mu w_1(\rho, \varphi) + O(\mu^2), \quad u(\rho, \varphi) = \mu u_1(\rho, \varphi) + O(\mu^2).$$

Уравнение нулевого приближения для функции  $w_0(\rho)$  совпадает с рассмотренным в [3] уравнением для трансверсально-изотропного слоя. Уравнения первого приближения

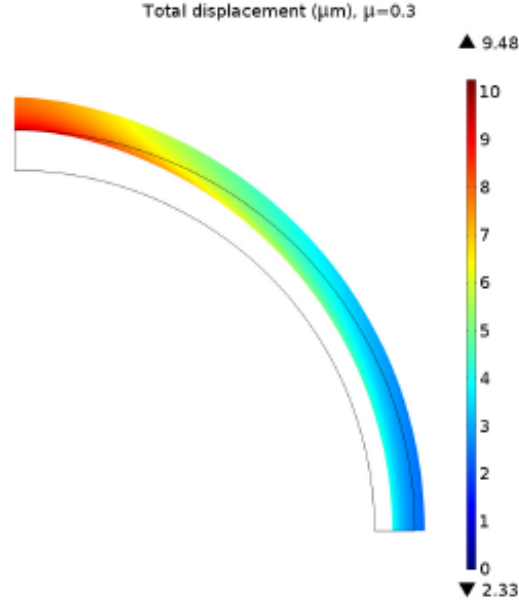


Рис. 5: Распределения перемещений в ортотропном слое после деформации при  $\mu = 0.3$  при нормальном внутреннем давлении  $P_1 = 60$  мм. рт. ст. или  $P_1 = 60 \times 133.3$  Па, рассчитанные в программном пакете Comsol.

таковы:

$$\begin{aligned}
 m_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} + m_1 \frac{\partial w_1}{\partial \rho} + m_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} + m_3 \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + m_4 w_1 + m_5 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho \partial \varphi} + m_6 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + \\
 + m_7 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + m_8 u_1 + m_9 w_0 = 0,
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 n_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} + n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + n_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + n_3 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + n_4 u_1 + n_5 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho \partial \varphi} + n_6 \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \\
 + n_7 \frac{\partial w_0}{\partial \rho} + n_8 w_0 = 0,
 \end{aligned}$$

Значения коэффициентов указаны в приложении (см. (19)–(20)). Граничные условия для функций первого приближения принимают вид

$$u_1(\rho, 0) = u_1\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \varphi}(\rho, 0) = \frac{\partial w_1}{\partial \varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{17}$$

$$\sigma_{\rho\rho}^1(R_1, \varphi) = \sigma_{\rho\rho}^1(R_2, \varphi) = \sigma_{\rho\varphi}^1(R_1, \varphi) = \sigma_{\rho\varphi}^1(R_2, \varphi) = 0, \tag{18}$$

причем

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho\rho}^1 &= l_0 \frac{\partial w_1}{\partial \rho} + l_1 w_1 + l_2 \frac{\partial w_0}{\partial \rho} + l_3 w_0 + l_4 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + l_5 u_1, \\
 \sigma_{\rho\varphi}^1 &= k_1 \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + k_2 u_1 + k_3 \frac{\partial u_1}{\partial \rho}.
 \end{aligned}$$

Значения коэффициентов также указаны в приложении (см. (21)).

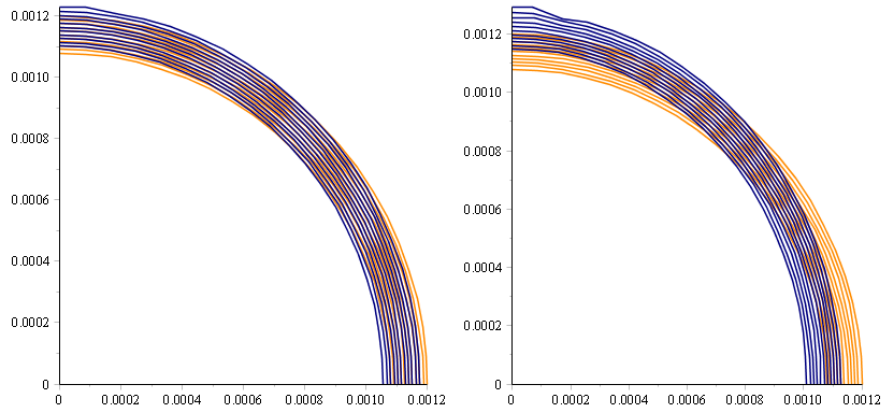


Рис. 6: Сравнение распределений перемещений в ортотропном слое после деформации при  $\mu = 0.3$  при нормальном глазном давлении  $P_1 = 20$  мм. рт. столба (слева) и при внутриглазном давлении, возникающем при инъекции,  $P_1 = 60$  мм. рт. ст. или  $P_1 = 60 \times 133.3$  Па (справа).

Таким образом, краевая задача для первого приближения состоит из уравнений (16) и граничных условий (17)–(18). Заметим, что изменения модулей сдвига ( $G', G''$ ) не входят в уравнения и граничные условия первого приближения.

Численное решение граничной задачи, полученное методом конечных разностей, сравнивалось с решением, полученным в конечно-элементном пакете Comsol Multiphysics 5.0. В качестве примера рассматривался ортотропный слой со следующими значениями параметров:  $E_\varphi = E = 14$  МПа,  $E_\rho = E_1 = 1.26$  МПа,  $\nu = 0.48$ ,  $\nu_1 = 0.03$ ,  $R_2 = 12$  мм,  $R_1 = 0.9R_2$  [8]. На внутренней поверхности слоя  $\rho = R_1$  задано давление  $P_1 = 60 \times 133.3$  Па (или же  $P_1 = 60$  мм. рт. столба, как принято измерять внутриглазное давление в офтальмологии).

На рис. 4 и 5 представлены профили ортотропного слоя до и после деформации, а также распределения перемещений в слое.

Полученное численное решение позволяет по соотношению для нормального перемещения получить изменение толщины внешней обложки глаза под действием внутреннего давления, а также оценить удлинение передне-задней оси глазного яблока при увеличении внутриглазного давления. Для нахождения численного (неаналитического) решения в программном пакете Maple 17 был реализован метод сеток. Представление производных в конечно-разностной форме представлено в приложении, см. (22). На рис. 6 приводится сравнение распределений перемещений ортотропного сферического слоя в случаях нормального (слева) и повышенного внутриглазного давления (справа). Второй случай соответствует интрасклеральной инъекции; значение давления для него указывается в [9].

## 6 Заключение

Полученное численное решение может быть использовано для построения изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при введении внутриглазных инъекций, а в некоторых случаях для оценки соотношения модулей упругости в меридиональном направлении и направлении параллели. Решение задачи позволяет оценить изменение передне-задней оси глаза при повышении внутриглазного давления при миопии или гиперметропии, а также при таких заболеваниях, как глаукома. Наблюдение изменения формы сферического слоя позволяет оценить соотношение модулей упругостей материала слоя относительно друг друга.

## 7 Приложение

Значения коэффициентов из уравнений (16)–(18):

$$\begin{aligned}
 m_0 &= 1, \quad m_1 = 2\rho^{-1}, \quad m_2 = \frac{1}{2} \frac{(2E\nu_1^2 + E_1\nu - E_1)G_1}{\rho^2(\nu - 1)E_1^2}, \\
 m_3 &= \frac{1}{2} \frac{(2E\nu_1^2 + E_1\nu - E_1)\cot(\varphi)G_1}{\rho^2(\nu - 1)E_1^2}, \\
 m_4 &= -2 \frac{(\nu_1 - 1)E}{\rho^2(\nu - 1)E_1}, \quad m_5 = -\frac{1}{2} \frac{-2EG_1\nu_1^2 + 2EE_1\nu_1 - E_1G_1\nu + E_1G_1}{E_1^2(\nu - 1)\rho}, \\
 m_6 &= -\frac{1}{2} \frac{(-2EG_1\nu_1^2 + 2EE_1\nu_1 - E_1G_1\nu + E_1G_1)\cot(\varphi)}{E_1^2(\nu - 1)\rho}, \\
 m_7 &= -\frac{1}{2} \frac{2EG_1\nu_1^2 + 2EE_1\nu_1 + E_1G_1\nu - 2EE_1 - E_1G_1}{\rho^2(\nu - 1)E_1^2}, \\
 m_8 &= -\frac{1}{2} \frac{(2EG_1\nu_1^2 + 2EE_1\nu_1 + E_1G_1\nu - 2EE_1 - E_1G_1)\cot(\varphi)}{\rho^2(\nu - 1)E_1^2}, \\
 m_9 &= -2 \frac{E\nu(\nu_1 - 1)}{\rho^2(\nu - 1)^2 E_1};
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 n_0 &= 1, \quad n_1 = \frac{2}{\rho}, \quad n_2 = -2 \frac{E(E\nu_1^2 + E_1\nu)}{(2E\nu_1^2\nu + 2E\nu_1^2 + E_1\nu^2 - E_1)G_1\rho^2}, \quad n_3 = n_2 \cot(\varphi), \\
 n_4 &= \frac{A_2(\cot(\varphi))^2 + A_3}{A_1}, \quad n_5 = -\frac{-2EG_1\nu_1^2 + 2EE_1\nu_1 - E_1G_1\nu + E_1G_1}{G_1\rho(2E\nu_1^2 + E_1\nu - E_1)}, \\
 n_6 &= -2 \frac{-2EG_1\nu_1^2 - E_1G_1\nu + EE_1 + E_1G_1}{\rho^2(2E\nu_1^2 + E_1\nu - E_1)G_1}, \\
 n_7 &= -2 \frac{\cot(\varphi)E_1\nu_1E}{(2E\nu_1^2\nu + 2E\nu_1^2 + \nu^2E_1 - E_1)\rho}, \\
 n_8 &= -2 \frac{\cot(\varphi)EE_1}{(2E\nu_1^2\nu + 2E\nu_1^2 + E_1\nu^2 - E_1)\rho^2}, \\
 A_1 &= \rho^2 G_1 (2E\nu_1^2\nu + 2E\nu_1^2 + E_1\nu^2 - E_1), \\
 A_2 &= 4EG_1\nu_1^2\nu + 4E^2\nu_1^2 + 4EG_1\nu_1^2 + 2E_1G_1\nu^2 + 2E\nu E_1 - 2EE_1 - 2E_1G_1, \\
 A_3 &= -4EG_1\nu_1^2\nu - 2E^2\nu_1^2 - 4EG_1\nu_1^2 - 2E_1G_1\nu^2 + 2EE_1 + 2E_1G_1;
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 l_0 &= 1, \quad l_1 = \frac{2}{\rho} \frac{E\nu_1}{E_1(1 - \nu)}, \quad l_2 = 0, \\
 l_3 &= \frac{l_2}{\nu_1\rho}, \quad l_4 = \frac{E\nu_1}{E_1(1 - \nu)\rho}, \quad l_5 = l_4 \cot(\varphi), \\
 k_1 &= \frac{G_1}{2\rho}, \quad k_2 = -\frac{G_1}{2\rho}, \quad k_3 = \frac{G_1}{2}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

При реализации метода сеток используются следующие стандартные представления производных в конечно-разностной форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} u(\rho, \varphi) &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \varphi} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{h_1 h_2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(\rho, \varphi) &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} w(\rho, \varphi) &= \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h_1^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} w(\rho, \varphi) &= \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{h_2^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \varphi} w(\rho, \varphi) &= \frac{1}{4} \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{h_1 h_2}, \\
\frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h_1}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h_2}, \\
\frac{\partial}{\partial \rho} w(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2} \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{h_1}, \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} w(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2} \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{h_2}, \\
u(\rho, \varphi) &= u_{i,j}, \\
w(\rho, \varphi) &= w_{i,j}.
\end{aligned} \tag{22}$$



## Список литературы

- [1] Teodor M. Atanackovic and Ardéshir Guran. *Theory of elasticity for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Robert L Avery, Sophie J Bakri, Mark S Blumenkranz, Alexander J Brucker, Emmett T Cunningham Jr, Donald J D'Amico, Pravin U Dugel, Harry W Flynn Jr, K Bailey Freund, Julia A Haller, et al. Intravitreal injection technique and monitoring: updated guidelines of an expert panel. *Retina*, 34:S1–S18, 2014.
- [3] S.M. Bauer and A.L. Smirnov. Axisymmetric deformations of the orthotropic spherical layer under normal pressure. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 48(1):35–40, 2015.
- [4] Konstantin Kotliar, Mathias Maier, Svetlana Bauer, and Nikolaus Feucht. Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model/kotliar, konstantin; maier, mathias; bauer, svetlana; feucht, nikolaus; lohmann, chris; lanzl, ines.
- [5] V.A. Rodionova, V.F. Titaev, and K. Chernykh. Applied theory of anisotropic plates and shells. *SPb.: SPbGU*, 1996.
- [6] С.М. Бауэр, Л.А. Замураев, and К.Е. Котляр. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях. *Российский журнал биомеханики*, 10(2):43–49, 2006.
- [7] Гуляев Ю.П. Березяк В.В. Математическое моделирование изменения внутриглазного давления при введении внутрикамерных инъекций. *Материалы ежегодной Всероссийской научной школы-семинара «Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине-2008»*, pages 39–42, 2008.
- [8] Е.Н. Иомдина. Механические свойства тканей глаза человека. *Современные проблемы биомеханики*, (11):183–200, 2006.
- [9] Е.Н. Иомдина, С.М. Бауэр, and К.Е. Котляр. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. *Нероева ВВ-Москва: Реал Тайм*, 2015.