Санкт-Петербургский государственный университет

Математика

Теория вероятностей и математическая статистика

Мушенко Святослав Васильевич

Асимптотическое поведение приращений сумм в схеме серий независимых случайных величин.

Дипломная работа

Научный руководитель:

профессор, доктор физ.-мат.наук, Фролов А.Н.

Рецензент:

профессор, доктор физ.-мат.наук, Розовский Л.В

Санкт-Петербург

2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics

Probability Theory and Mathematical Statistic

Mushenko Svjatoslav Vasil'evich

The asymptotic behavior of increments of sums for arrays of independent random variables.

Graduation Thesis

Scientific supervisor:

Professor, Doctor of Sciences, Andrei Frolov

Reviewer:

Professor, Doctor of Sciences, Leonid Rozovsky

Saint-Petersburg

2016

Оглавление.

1. Введение.

В этой работе мы исследовали асимптотическое поведение приращений сумм в схеме серий независимых случайных величин, в том числе изложили полученные ранее результаты, а также получили аналог законов повторного логарифма для приращений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Для начала рассмотрим следующую теорему, которая была получена А.Н.Фроловым [1, стр. 122]. Пусть $a(x), x \geq 0$ - неубывающая непрерывная функция, такая, что $1 \leq a(x) \leq x$ и $\frac{x}{a(x)}$ не убывает. Положим $a_n = [a(n)]$ для всех натуральных n.

Теорема 1. *Пусть* $\{X_k\}$ *– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,* $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$ *и* $h_0 > 0$. *Предположим, что* $\frac{a_n}{\ln n} \to \infty$. *Обозначим* $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$,

$$U_n = \max_{0 \leq k \leq n-a_n} (S_{k+a_n} - S_k), W_n = \max_{0 \leq k \leq n-a_n} \max_{1 \leq j \leq a_n} (S_{k+j} - S_k).$$

Тогда

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} = \limsup \frac{W_n}{b_n} = 1 \text{ п.н.} \tag{1}$$

где $b_n = \sqrt{2a_n(\ln \frac{n}{a_n} + \ln \ln n)}$.

Если дополнительно выполнено условие $\ln \ln n = o(\ln \frac{n}{a_n})$ *, то в соотношении (1) можно заменить* $\limsup$ *на* $\lim$.

В начале Теорема 1 была доказана М.Чёргё и Ревесом [9] для случая, в котором выполняется условие Крамера (существует $h_1 > 0$ такая, что $Ee^{hX} < \infty$ при $|h| < h_1$) с использованием сильного принципа инвариантности Комлоша-Майора-Тушнади.

Принцип Комлоша-Майора-Тушнади формулируется следующим образом. Пусть X –случайная величина с $EX = 0$, удовлетворяющему условию Крамера. Тогда можно построить вероятностное пространство и задать на нем последовательность независимых случайных величин $\{X_k\}$, имеющих одинаковое с X распределение, и стандартный винеровский процесс $w(t)$ так, что $S_n - w(n) = O(\ln n)$ п.н.

Теорема 1 имела разнообразные следствия . Ее результаты были названы законами сильной аппроксимации. В последствии А.Н.Фроловым теорема была доказана и для случая выполнения одностороннего условия Крамера ($h_0 = \sup\{h : Ee^{hX} < \infty\} > 0$). Для доказательства теоремы была использована техника анализа вероятностей больших уклонений. Важным фактом является то, что упомянутая теорема обладает рядом интересных закономерностей которые не встречались ранее.

Очевидно то, что заключение теоремы Хартмана-Винтнера [1, стр.111] о законе повторного логарифма мы можем получить из соотношения (1) при $a_n = n$. При $\ln \frac{n}{a_n} \sim \ln \ln n$ выражение (1) представляет собой закон повторного логарифма для приращений, но в отличие от теоремы Хармана–Винтера в которой верхний предел равен 1, в нашем случае он равен некоторой другой постоянной C. Если последовательность a_n возрастает достаточно медленно, то и последовательность $\frac{U_n}{b_n}$ становится более устойчивой и имеет предел. Из вышеописанного можно заключить , что промежуточным между законами Эрдёша-Реньи [1,стр.117] и законом повторного логарифма является закон Чёргё-Ревеса.

В исследовании поведения последовательности U_n долгое время можно было обнаружить некоторую дихотомию: ее поведение исследовали отдельно для малых ($a_n = O(\ln n)$) и больших ($\frac{a_n}{\ln n} \to \infty$) приращений. Это было обусловлено тем, что в случае малых приращений нормирующая последовательность b_n зависит от распределения X_1 , подчас даже однозначно определяет данное распределение. Результаты теоремы для малых приращений называются законами Эрдёша-Реньи [1, стр.117] и Шеппа. В случае больших приращений нормирующая последовательность зависит лишь от лишь от некоторых численных характеристик. Эти результаты именуются законами Чёргё-Ревеса [1, стр.122]. А.Н.Фроловым был предложен универсальный подход [4-6] к сильным предельным теоремам для сумм независимых одинаково распределённых случайных величин. Полученная там теория смогла объединить в себе законы Эрдёша-Реньи и Шеппа, законы Чёргё-Ревеса, закон повторного логарифма и усиленный закон больших чисел. Одним из важнейших моментов было то, что она содержала формулу универсальной нормирующей последовательности сильных предельных теорем для приращений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. В случае разнораспределенных слагаемых возможны две различные постановки задачи об отыскании асимптотики приращений сумм. Первая постановка совпадает с постановкой случая одинаков распределенных слагаемых. Задача состоит в том, чтобы отыскать последовательность положительных постоянных b_n такую, что либо выполнено

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} = 1 \text{ п.н.}, \tag{2}$$

либо выполнено (2) с заменой $\limsup$ на $\lim$ в тех случаях, когда это возможно. Альтернативная постановка состоит в том, чтобы найти последовательность положительных постоянных $\{b_{n,k}\}$ такую, что либо

$$\limsup \max_{0 \le k \le n-a_n} \frac{S_{k+a_n} - S_k}{b_{n,k}} = 1 \text{ п.н.}, \tag{3}$$

либо последнее соотношение выполнено с заменой $\limsup$ на $\lim$.

Обе задачи представляют существенный интерес, но так как обе близки, можно ограничится первым вариантом.

В работе А.Н.Фролова [2] был предложен единый подход к сильным предельным теоремам для приращений сумм неодинаково распределенных случайных величин и доказаны теоремы 2—6. Вместе с U_n мы будем рассматривать W_n и $R_n = S_n - S_{n-a_n}$.

Пусть $\{\sigma_i^2\}$ последовательность положительных чисел такая, что $B_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \to \infty$. Положим $B_0 = 0$. Обозначим

$$B_n^* = \max_{0 \le k \le n-a_n} (B_{k+a_n} - B_k).$$

Пусть выполнены следующие два условия:

1) последовательность $\{\frac{B_n}{B_n^*}\}$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности.

2) $\max_{1\le\ i\le\ n} \frac{\sigma_i^2}{B_n^*} \to 0$.

Для фиксированных n и $\epsilon > 0$ определим последовательность натуральных чисел $\{i_m\}$ следующим образом. Положим $i_0 = 0$, $i_m = \min\{i : B_i \ge 2\epsilon m B_n^*\}$, где $m = 1, 2, ..., M-1$, $M = \min\{m : i_m \ge n - a_n\}$. Обозначим $i_M = n - a_n$. В случае $M = 1$ мы считаем, что последовательность $\{i_m\}$ состоит из двух элементов $i_0 = 0$ и $i_1 = n - a_n$.

Подчеркнем, что $i_m = i_m(n, \epsilon)$, $M = M(n, \epsilon)$.

Заметим, что в силу условия 2) мы имеем

$$B_{i_m} = B_{i_m-1} + \sigma_{i_m}^2 < 2\epsilon(m+1)B_n^* \le B_{i_{m+1}}.$$

Поэтому $i_{m+1} > i_m$, если n достаточно велико. Следовательно $\{i_m\}$ и M корректно определены для всех достаточно больших n.

Обозначим

$$\beta_n = \log \frac{B_n}{B_n^*} + \log\log B_n.$$

Теорема 2. ([3, стр. 263]) *Пусть выполнены условия 1) и 2) Пусть $\{b_n\}$ - последовательность положительных постоянных такая, что выполнены следующие условия:*

A) последовательность $\{b_n\}$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности и

$$\limsup_{\theta \searrow 1} \limsup_{k\to\infty} \frac{b_{n_{k+1}}}{b_{n_k}} = 1, \tag{4}$$

где $n_k = \min n : B_n > \theta^k$.

B) для всех достаточно малых $\epsilon > 0$ *существуют* $\delta > 0$ *и* $H_1 > 0$ *такие, что неравенство*

$$\max_{1\le m\le M} P(S_{i_m+a_n} - S_{i_{m-1}} \ge (1+\epsilon)b_n) \le H_1 e^{-(1+\delta)\beta_n} \tag{5}$$

выполнено для всех достаточно больших n.

C) Для любого $\epsilon > 0$ *существует* $q > 0$ *такое, что*

$$\min_{1\le m\le M} \min_{1\le j\le i_m - i_{m-1}+a_n} P(S_{i_{m-1}+j} - S_{i_{m-1}} \ge -\epsilon b_n) \ge q, \tag{6}$$

$$\min_{1\le m\le M} \min_{1\le j\le i_m - i_{m-1}+a_n} P(S_{i_m+a_n} - S_{i_{m-1}+j} \ge -\epsilon b_n) \ge q, \tag{7}$$

для всех достаточно больших n.

Тогда

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} \le 1 \text{ п.н.} \tag{8}$$

Условие A) можно заменить условием

A') соотношение (4) выполнено с заменой n_k *на* n'_k, *где* $n'_k = \min\{n : n_k \le n < n_{k+1}, b_n = \min_{n_k\le m<n_{k+1}} b_m\}$, $n_k = \min n : B_n > \theta^k$.

Условия B) и C) можно заменить условиями

$$\limsup a_n n (\frac{B_n^*}{B_n})^{1+\epsilon} < \infty$$

для любого $\epsilon > 0$ *и*

B') для всех достаточно малых $\epsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *и* $H_1 > 0$ *такие, что неравенство*

$$\max_{0\le k\le n-a_n} \max_{1\le j\le a_n} P(S_{k+j} - S_k \ge (1+\epsilon)b_n) \le H_1 e^{-(1+\delta)\beta_n} \tag{9}$$

выполнено для всех достаточно больших n.

В соотношении (5) можно заменить $(1+\epsilon)b_n$ на $(1+\epsilon)b_n$, где c – произвольное фиксированное число.

Условие C) выполнено, если для $\epsilon > 0$ существует $q > 0$ такое, что для любых $1 \leq i \leq j \leq n$ и всех достаточно больших n выполняется неравенство $P(S_j - S_i \geq -\epsilon b_n) \geq q$. Последнее условие эквивалентно условию для любого $\epsilon > 0$ $\epsilon > 0$существует $q > 0$ такое, что для любых $1 \leq i \leq n$ и всех достаточно больших n выполняется неравенство $P(S_n - S_i \geq -\epsilon b_n) \geq q$.

Условия B) выполнено, в частности, если X_i симметричный или $\frac{S_n}{b_n} \to 0$ по вероятности.

Теорема 3. ([3, стр. 264])*Пусть выполнены условия 1) и 2) и для любого* $\theta > 1$

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N_k}{\theta^k} > 0, \tag{10}$$

где N_k *-число элементов в множестве* $I_k = \{n : \theta^k < B_n \leq \theta^{k+1}\}$.

Пусть $\{p_n\}$ *– последовательность положительных постоянных, такая , что* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$. *Определим* n'_k *по формуле*

$$n'_k = \min\{n : n \in I_k, B_n p_n = \min_{m\in I_k} B_m p_m\}. \tag{11}$$

Пусть $\{b_n\}$ *– последовательность положительных постоянных, такая , что выполнены условие C) Теоремы 2 и следующие два условия:*

A1) $\{b_n\}$ *эквивалентна некоторой неубывающей последовательности и выполнено соотношение*

$$\limsup_{\theta\searrow 1} \limsup_{k\to\infty} \frac{b_{n'_k}}{b_{n'_{k+1}}} = 1. \tag{12}$$

B1) Для всех достаточно малых $\epsilon > 0$ *существуют* $\delta > 0$ $H_1 > 0$ *и* $H_2 > 0$ *такие, что неравенства*

$$\max_{1\leq m\leq M} P(S_{i_m+a_n} - S_{i_{m-1}} \geq (1+\epsilon)b_n) \leq H_1 e^{-(1+\delta)\beta_n} + H_2 B^*_n p_n, \tag{13}$$

выполнено для всех достаточно больших n.

Тогда справедливо (8).

Условия A1) можно заменить условием A1') соотношение (12) выполнено с заменой n'_k на n''_k, где $n''_k = \min\{n : n'_k \le n < n'_{k+1}, b_n = \min_{n'_k \le n < n'_{k+1}} b_n\}$.

Обозначим

$$\widetilde{B}_n = B_n - B_{n-a_n},\ \widetilde{\beta}_n = \log \frac{B_n}{\widetilde{B}_n} + \log\log B_n\ .$$

Теорема 4. ([3, стр. 265])*Пусть $\{b_n\}$ –последовательность положительных постоянных. Пусть последовательность $\{\frac{B_n}{\widetilde{B}_n}\}$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности.*

Если $\limsup \frac{B_n}{\widetilde{B}_n} < 1$, то предположим, что для любого $\epsilon > 0$ сущетсвуют $\tau > 0$ и $H_3 > 0$ такие, что неравенство

$$P(S_n - S_{n-a_n} \ge (1-\epsilon)b_n) \ge H_3 e^{-(1-\tau)\widetilde{\beta}_n} \tag{14}$$

выполнено для всех достаточно больших n.

Если $\frac{B_n}{\widetilde{B}_n} \to 1$, то предположим, что $\frac{\sigma_n^2}{B_n} \to 0$, для любых $\epsilon > 0$ и $\theta > 1$ неравенство

$$P(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \ge (1-\epsilon)b_{n_k}) \ge H_3 e^{-(1-\tau)\widetilde{\beta}_{n_k}}, \tag{15}$$

выполнено для всех достаточно больших k, где $n_k = \min\{n : B_n > \theta^k\}$, и выполнено условие

C') для любых $\epsilon > 0$ и $\theta > 1$ существует $q > 0$ такое, что

$$P(S_{n_{k-1}} - S_{n_k - a_{n_k}} \ge \epsilon b_{n_k}) \ge q,$$

для всех достаточно больших k.

Тогда

$$\limsup \frac{R_n}{b_n} \geq 1 \text{ п.н.} \tag{16}$$

Обозначим

$$B'_n = \min_{0 \leq k \leq \frac{n}{a_n}-1} (B_{(k+1)a_n} - B_{(k)a_n}).$$

Теорема 5. ([3, стр. 266])*Пусть $\{b_n\}$ – последовательность положительных постоянных. Предположим, что выполнено условие 1) и $\frac{B'_n}{B^*_n} \to 1$.*

Пусть

$$\frac{\log \frac{B_n}{B^*_n}}{\log \log \max(B_n, n)} \to \infty. \tag{17}$$

Пусть для $\epsilon > 0$ существуют $\tau > 0$ $H_4 > 0$ такие, что неравенство

$$\min_{0 \leq k \leq \frac{n}{a_n}} P(S_{(k+1)a_n} - S_{ka_n} \geq (1+\epsilon) b_n) \geq H_4 e^{-(1+\tau)\beta_n}, \tag{18}$$

выполнено для всех достаточно больших n.

Тогда

$$\liminf \frac{U_n}{b_n} \geq 1 \text{ п.н.} \tag{19}$$

Из теорем 2-5 и неравенств $R_n \leq U_n \leq W_n$ вытекает следующая теорема.

Теорема 6. ([3, стр. 266])*Пусть выполнены условия теорем 2 и 3. Предположим, что $\frac{B^*_n}{\widetilde{B}_n} \to 1$. Тогда*

$$\limsup \frac{W_n}{b_n} = \limsup \frac{U_n}{b_n} = \limsup \frac{R_n}{b_n} = 1 \text{ п.н.} \tag{20}$$

Если дополнительно предположить, что выполнены условия теоремы 5, то

$$\lim \frac{W_n}{b_n} = \lim \frac{U_n}{b_n} = 1 \text{ п.н.} \tag{21}$$

Условия теоремы 2 можно заменить на условия теоремы 3.

В работе Ки [3] была рассмотрена сильная сходимость сумм одинаково распределенных случайных величин в схеме серий независимых случайных величин. Рассмотрим $\{X_n, n \geq 1\}$– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Усиленный закон больших чисел Колмогорова : Для того, чтобы

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \to a \text{ п.н.}$$

при $n \to \infty$ необходимо и достаточно

$$EX_{11} < \infty. \tag{22}$$

Закон повторного логарифма Хартмана–Винтнера утверждает:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1 \text{ и } \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -1 \text{ п.н.} \tag{23}$$

при условии $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$.

Рассмотрим схему серий $\{X_{nk}, k = 1, 2, ..., n; n = 1, 2, ...\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с $EX_{11} = 0$. Положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}$.

Ху, Морич и Тейлор [7] доказали, следующую теорему.

Теорема 7. *Для того чтобы*

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \text{ п.н.}$$

при $n \to \infty$ необходимо и достаточно

$$EX_{11}^2 < \infty. \tag{24}$$

Ху и Вебер [8] доказали теорему.

Теорема 8. *Пусть выполнено $EX_{11}^4 < \infty$ и $EX_{11}^2 = 1$, тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln n}} = 1 \text{ и } \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln n}} = -1 \text{ п.н.} \tag{25}$$

.

Заметим, что (24) и (25) отличаются от (22) и (23) соответственно тем, что при расширении законов подобного закону больших чисел или закону повторного логарифма с последовательности на схему серий требуются более сильные условия. В работе Ки [3] усиленный закон Марцинкевича был расширен на схемы серий и приведены необходимые и достаточные условия для выполнения (4).

Теорема 9. ([3, стр.2]) *Пусть $\frac{1}{2} < \alpha < \infty$, тогда следующие условия равносильны:*

a) Существует вещественное μ такое, что

$$\frac{S_n - n\mu}{n^\alpha} \to 0 \text{ п.н.} \tag{26}$$

при $n \to \infty$,

b)$E|X_{11}|^{\frac{2}{\alpha}} < \infty$.

Кроме того, если (b) выполнено, то при $\alpha > 1$ (5) верно для любого действительного μ, а при $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ (5) верно для $\mu = E(X_{11})$.

Теорема 10. ([3, стр.2]) *Для выполнения (4) необходимо и достаточно*

$$E|X_{11}|^4(\log^+|X_{11}|)^{-2} < \infty, E|X_{11}|^2 = 1, EX_{11} = 0, \tag{27}$$

где $\log^+(x) = \log(\max(e, x))$.

2. Результаты.

В качестве результата данной работы получена теорема 11, которая является аналогом теоремы 2[3] для приращений сумм в схеме серий независимых одинаково распределенных случайных величин.

Теорема 11. *Пусть $a(x)$, $x \geq 0$– неубывающая непрерывная функция такая , что $1 \leq a(x) \leq x$ и $\frac{x}{a(x)}$ не убывает. Положим $a_n = [a(n)]$ для любого натурального n.*

Предположим, что $a_n > cn$ для некоторого $c \in (0,1)$ и для всех достаточно больших n. Пусть $\{X_{nk}, k = 1,2,...,n; n = 1,2,...\}$ – схема серий независимых одинаково распределенных случайных величин, такая что $EX_{11} = 0$, $EX_{11}^2 = 1$, $EX_{11}^4 < \infty$. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n X_{nk}$, $b_n = \sqrt{2a_n \ln n}$.

Тогда

$$\limsup \frac{S_n - S_{n-a_n}}{b_n} = 1 \text{ п.н.}$$

Доказательство.

В начале докажем, что $\limsup \frac{S_n - S_{n-a_n}}{b_n} \leq 1$ п.н.

Аналогично доказательству теоремы 2 из [3] мы возьмем $\theta > 0$, рассмотрим $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n X_{nk} I(|X_{nk}| \leq \theta\sqrt{a_n \ln n})$.

Докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\max_{1 \leq k \leq a_n} |X_{1k}| > \theta\sqrt{a_n \ln n}) < \infty.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P(|X_{1k}| > \theta\sqrt{a_n \ln n}) < \infty.$$

Рассмотрим событие $A_k = (\sqrt{a_k \ln k} \le |X_{11}| \le \sqrt{a_{k+1} \ln k + 1})$.

Отсюда мы имеем

$$E|X_{11}|^4 = \sum_{k=1}^{\infty} E|X_{11}|^4 I(A_k) \ge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \ln^2 k P(A_k) \ge c^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \ln^2 k P(A_k) \ge$$

$$\ge c^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(A_k) \ge c^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{k} n) P(A_k) = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=n}^{\infty} n) P(A_k) \ge$$

$$\ge c^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n P(|X_{11}| > \sqrt{a_n \ln n}).$$

Далее

$$a_n |E X_{11} I(|X_{11}| \ge \theta \sqrt{a_n \ln n})| \le a_n E \frac{|X_{11}|^3}{|X_{11}|^2} I(|X_{11}| \ge \theta \sqrt{a_n \ln n}) \le$$

$$\le \frac{a_n E|X_{11}|^3 I(|X_{11}| \ge \theta \sqrt{a_n \ln n})}{\theta^2 a_n \ln n} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Для любого положительного ε, $\delta = \min(1, \varepsilon), \Delta = \frac{1+\varepsilon}{1+\delta}\sqrt{2}, \theta = \min(\frac{\Delta}{5}, 1)$.

В теореме [3, стр. 3] было доказано, что

$$e^x \le 1 + x + \frac{1+\delta}{2} x^2 + \frac{1}{\delta^4} x^4 + \frac{x^5}{5!} e^{|x|}$$

для любого вещественного x.

Положим

$$\widetilde{X}_{11} = X_{11} I(|X_{11}| \le \theta \sqrt{a_n \ln n}) - E X_{11} I(|X_{11}| \le \theta \sqrt{a_n \ln n}),$$

$t = \Delta \sqrt{\frac{\ln n}{a_n^l}}$.

Мы имеем

$$E\widetilde{X}_{11}^2 = E(X_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}) - EX_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}))^2 =$$

$$= D(X_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n})) \le E(X_{11}^2 I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n})) \le EX_{11}^2,$$

$$E\widetilde{X}_{11}^4 = E(X_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}) - EX_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}))^4 =$$

$$= EX_{11}^4 I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}) -$$
$$-4EX_{11}^3 I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}) EX_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}) +$$
$$+6EX_{11}^2 I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n})(EX_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}))^2 -$$
$$-4EX_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n})(EX_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}))^3 +$$
$$+(EX_{11}I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}))^4 \le$$
$$\le 32EX_{11}^4 I(|X_{11}| \le \theta\sqrt{a_n \ln n}) \le 32EX_{11}^4.$$

Отсюда следует, что

$$E(\exp t\widetilde{X}_{11}) \le E(1 + t\widetilde{X}_{11} + \frac{1+\delta}{2}t^2\widetilde{X}_{11}^2 + \frac{1}{\delta^4}t^4\widetilde{X}_{11}^4 + \frac{1}{5!}t^5\widetilde{X}_{11}^5 e^{|t\widetilde{X}|}) \le$$

$$\le 1 + \frac{1+\delta}{2}t^2 EX_{11}^2 + \frac{32}{\delta^4}t^4 EX_{11}^4 + t^5 EX_{11}^4 \theta\sqrt{a_n \ln n}\exp(2\theta t\sqrt{a_n \ln n}) \le$$

$$\le \exp(\frac{1+\delta}{2}t^2 + \frac{32}{\delta^4}\Delta^4\frac{\ln^2 n}{a_n^2}EX_{11}^4 + \Delta^5\frac{\ln^{2.5} n}{a_n^{2.5}}\exp(\ln n^{2\theta\Delta})EX_{11}^4) \le$$

$$\le \exp(\frac{1+\delta}{2}t^2 + \frac{1}{n^{1.1}})$$

для любых достаточно больших n.

$$P_n = P(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-a_n} - E(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-a_n}) > (1+\epsilon)\sqrt{2a_n \ln n}) =$$
$$= P(\tilde{S}_{a_n} - E\tilde{S}_{a_n} > (1+\epsilon)\sqrt{2a_n \ln n}) \leq$$
$$\leq E(exp(t(\tilde{S}_{a_n} - E\tilde{S}_{a_n})))exp(-(1+\epsilon)t\sqrt{2a_n \ln n}) \leq$$
$$\leq 2\exp(a_n \frac{1+\delta}{2} t^2 - (1+\epsilon)t\sqrt{2a_n} \ln n) =$$
$$= 2exp(\frac{(1+\epsilon)^2}{1+\delta} \ln n - 2\frac{(1+\epsilon)^2}{1+\delta} \ln n) <$$
$$< 2exp(-(1+\epsilon) \ln n) = 2n^{-(1+\epsilon)}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ будет сходиться. Применяя лемму Бореля-Кантелли, получим
$$\limsup \frac{S_n - S_{n-a_n}}{b_n} \leq 1 \text{ п.н.}$$

Теперь докажем $\limsup \frac{S_n - S_{n-a_n}}{b_n} \geq 1$ п.н.

$$P'_n = P(S_n - S_{n-a_n} \geq (1-\epsilon)\sqrt{2a_n \ln n}) =$$
$$= P(S_{a_n} \geq (1-\epsilon)\sqrt{2a_n \ln n}) \sim$$
$$\sim \exp(-(1-\epsilon)^2 \ln n) = n^{-(1-\epsilon)^2} \text{по теореме 6.4 из [1].}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P'_n$ будет расходиться. Применяя лемму Бореля-Кантелли получим
$$\limsup \frac{S_n - S_{n-a_n}}{b_n} \geq 1 \text{ п.н.}$$

Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Список литературы

[1] Фролов А.Н. Предельные теоремы теории вероятностей: учеб. пособие.— СПБ.: Из-дво С.-Петерб.Ун-та, 2014. — 152 с.

[2] Фролов А.Н. Сильные предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин. Записки научнных семинаров ПОМИ, 2004, т. 311, стр. 260-285

[3] Qi Y.C. On strong convergence of arrays. Bull. Austral. Math. Soc., 1994, v.50 , pp.219-223

[4] Фролов А.Н. Об асимптотическом поведении приращений сумм независимых случайных величин. ДАН 372, No.5(200), стр. 596-599.

[5] Frolov A. N. On one-sided strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables.–Studia Sci. Math. Hungar., 39 (2002)., pp. 333-359.

[6] Фролов А. Н. Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин.Теор. вероятн. и ее примен. 48, вып. 1 (2003), стр. 104-121.

[7] Hu T.C., Moricz F. and Taylor R.L. Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables, Acta Math. Hungar. 54 (1989), pp. 153-162.

[8] Hu T.C., and Weber N.C. On the rate of convergence in the strong law of large numbers for arrays, Bull. Austral. Math. Soc. 45 (1992), pp. 479-482.

[9] Csörgő M., Révész P. Strong approximations in probability and statistics. Budapest: Akadémiai. Kiadó, (1981).