Санкт-Петербургский государственный университет

Фундаментальная математика и механика

Механика жидкости, газа и плазмы

Баринова Ольга Вячеславовна

«Частные решения уравнения Колмогорова-Чепмена и их связь с уравнениями математической физики»

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор Мирошин.Р.Н.

Рецензент:

доктор физико-математических наук, профессор Халидов.И.А.

Санкт-Петербург

2016г.

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Fundamental Mathematics and Mechanics

Mechanics of a liquid , gas and plasma

Barinova Olga

“Particular solutions of Chapman- Kolmogorov equation and their connection with equations of mathematical physics”

Graduation Thesis

Scientific supervisor:

Professor, Doctor of Physics and Mathematics Miroshin Roman

Reviewer:

Professor, Doctor of Physics and Mathematics Khalidov Iscander

Saint-Petersburg

2016

Оглавление

Введение

При изучении различного рода явлений мы нередко сталкиваемся с теми процессами, течение которых заранее предсказать в точности невозможно. Иными словами, это те процессы, физическая система которых с течением времени переходит из одного состояние в другое случайным образом. Теория случайных процессов в последние десятилетия бурно развивается, потому как является востребованной в таких науках как механика, физика, биология, экономика, социология и в других областях. Особое место среди случайных процессов занимает так называемые марковские случайные процессы, впервые введенные русским ученым А.А.Марковым в 1907г.

Отличительную черту марковского процесса можно сформулировать следующим образом: Если именовать момент t настоящим, а моменты t_k $(t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_m < t) -$ прошлым, то зависимость процесса в настоящем только от значений процесса в последний перед настоящим момент времени из прошлого. Итак, марковские процессы отличаются тем, что нам нет необходимости знать "предысторию" состояния системы, а лишь достаточно знать ее "настоящее", и тогда мы сможем предсказать "будущее" состояние системы.

Настоящая работа включает в себя две главы, первая из которых отведена теории марковских процессов с непрерывной и разрывной траекториями, вторая — исследованию примеров, описывающих вышеупомянутые процессы, взятых из статьи [2]. В частности, в качестве примеров, были рассмотрены три частных решения интегрального уравнения Колмогорова-Чепмена и по ним получены уравнения Колмогорова. Среди примеров были взяты решения в виде интеграла без особенности, со слабой особенностью и сингулярный интеграл. Первостепенная цель данной работы — по имеющимся решениям уравнения Колмогорова-Чепмена получить первое и второе уравнения Колмогорова, используя асимптотику и приемы из математической физики. Среди них уравнения диффузии, интегро-дифференциальные уравнения, с использованием дробных производных, ранее в теории марковских процессов нам неизвестны, хотя дробные производные в прикладных науках в последнее время нередко встречаются.

Глава I. Случайные марковские процессы.

Эта глава посвящена основным определениям, к которым мы будем возвращаться в дальнейшем. Основополагающим источником литературы является Б.В.Гнеденко [1]. Автор этого пособия - крупный специалист по теории вероятности и математической статистике и ее приложениях в науке и технике.

В этом и в последующих параграфах, мы будем рассматривать исключительно марковские случайные процессы с непрерывным параметром t, именуемым временем. Также мы будем предполагать, что множество всевозможных состояний системы принадлежит множеству действительных чисел. Итак, дадим определение случайного марковского процесса с непрерывным временем.

Определение 1.2. [1, 3]

Случайный процесс $\xi(t)$ *называется марковским, если выполняется равенство для любой* $\varphi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{f_{t_1 \dots t_m t}[\xi(t_1), \dots, \xi(t_m), \xi(t)]}{f_{t_1 \dots t_m}[\xi(t_1) \dots \xi(t_m)]} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{f_{t_m t}[\xi(t_m), \xi(t)]}{f_{t_m}[\xi(t_m)]} d\xi, \quad (1.1)$$

где $t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t$, $f_{t_1 \dots t_m t}[\xi(t_1), \dots, \xi(t_m)\xi(t)] -$ *плотность распределения процесса.*

В частности, при $m = 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{f_{t_1 t_2 t}[\xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t)]}{f_{t_1 t_2}[\xi(t_1)\xi(t_2)]} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{f_{t_2 t}[\xi(t_2)\xi(t)]}{f_{t_2}[\xi(t_2)]} d\xi, \qquad (1.1')$$

Запись $(1.1')$ можно преобразовать в запись без интегралов, учитывая произвольность $\varphi(\xi)$:

$$\frac{f_{t_1 t_2 t}[\xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t)]}{f_{t_1 t_2}[\xi(t_1)\xi(t_2)]} = \frac{f_{t_2 t}[\xi(t_2)\xi(t)]}{f_{t_2}[\xi(t_2)]}, \tag{1.2}$$

или

$$\frac{f_{t_2 t}[\xi(t_2)\xi(t)]}{f_{t_2}[\xi(t_2)]} = \pi_{t_2 \to t}\big(\xi(t_2) \to \xi(t)\big), \tag{1.3}$$

где $\pi_{t_2 \to t}\big(\xi(t_2) \to \xi(t)\big) -$ плотность вероятности перехода процесса из состояния $\xi(t_2)$ в момент времени t_2 в состояние $\xi(t)$ в момент времени $t < t_2$.

Таким образом, марковский процесс характеризуется функцией начального распределения f_{t_1} и плотностью вероятности перехода (1.3), уравнение для которой имеет вид

$$\pi_{t_1 \to t_3}\big(\xi(t_1) \to \xi(t_3)\big) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \pi_{t_1 \to t_2}(\xi(t_1) \to \xi(t_2))\, \pi_{t_2 \to t_3}(\xi(t_2) \to \xi(t_3) d\,\xi(t_2), \tag{1.4}$$

где $t_1 < t_2 < t_3 < t$.

Уравнение (1.4) называют *обобщенным уравнением Маркова* (в терминологии Гнеденко [1]) или *уравнением Колмогорова-Чепмена*. В то же время, уравнение, аналогичное (1.4), можно записать и для вероятности перехода, учитывая соотношение

$$F(t_1, \xi(t_1); t_3, \Lambda) = \int_{\Lambda} \pi_{t_1 \to t_3}(\xi(t_1) \to \xi) d\xi, \tag{1.5}$$

где $\Lambda \in \mathbb{R} -$ пространство состояний.

Тогда преобразованное уравнение (1.4) примет вид

$$F(t_1, \xi(t_1); t_3, \Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi_{t_1 \to t_2}(\xi(t_1) \to \xi(t_2))\, F(t_2, \xi(t_2); t_3, \Lambda)\, d\xi(t_2), \tag{1.4'}$$

К последнему уравнению $(1.4')$ мы будем обращаться в дальнейшем.

1.1. Процессы с непрерывной траекторией.

Настоящий параграф посвящен процессам, траектория которых является непрерывной. Будем говорить, что случайный процесс $\xi(t)$ непрерывен, если за сколь угодно малые промежутки времени лишь с малой вероятностью $\xi(t)$ может получить заметные по величине приращения. Иными словами, сформулируем определение, сославшись на [1].

Определение 1.2. [1]

Случайный процесс $\xi(t)$ непрерывен, если для $\forall\ \delta = const > 0$ *существует*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x| \geq \delta} d_y F(t-\Delta t, x; t, y) = 0, \tag{1.5}$$

Здесь $F(t-\Delta t, x; t, y)$ – вероятность того, что в момент t случайная величина $\xi(t)$ принимает значение, меньшее y, если известно, что в момент времени $t-\Delta t < t$ процесс принимал значение, равное $\xi(t-\Delta t) = x$. Заметим, как и всякая функция распределения, $F(t-\Delta t, x; t, y)$ при любых x, t, s удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{y \to -\infty} F(t, x; s, y) = 0,$

2) $\lim\limits_{y \to +\infty} F(t, x; s, y) = 1;$

В то же время функция $F(t, x; s, y)$ определена для $s > t$ и для нее выполняются дополнительные условия:

3) $\lim\limits_{s \to t+0} F(t, x; s, y) = \lim\limits_{s \to t-0} F(t, x; s, y) = E(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq x, \\ 1 & \text{при } y > x. \end{cases}$

Также предположим существование частных производных первого и второго порядков

$$\frac{\partial F(t,x;s,y)}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial^2 F(t,x;s,y)}{\partial x^2}$$

Пусть они непрерывны при любых $x, t, s > t$.

Тогда для $\forall\, \delta > 0$ существуют пределы:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta\, t} \int\limits_{|y-x|<\delta} (x-y)\, d_y F(t-\Delta t, x; t, y) = A(t,x), \tag{1.6}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|<\delta} (x-y)^2\, d_y F(t-\Delta t, x; t, y) = B(t,x), \tag{1.7}$$

На основе этих предположений сформулируем первую теорему [1].

Т е о р е м а 1.1. [1]

Если выполнены условия (1.1), (1.2) и (1.3), тогда функция распределения $F(t,x;s,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial F(t,x;s,y)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A_1(t,x) F(t,x;s,y) - \frac{1}{2} B(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(t,x;s,y), \tag{1.8}$$

Доказательство выводится из уравнения Колмогорова-Чепмена $(1.4')$ и свойств функции распределения $F(t,x;s,y)$ [1]. В то же время уравнение (1.8) можно записать с использованием плотности вероятности перехода, при ряде допущений, а именно:

1) Пусть существует $\pi_{t\to s}(x \to y) = f(t,x;s,y) = \frac{\partial}{\partial y} F(t,x;s,y)$;
2) Существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial f(t,x;s,y)}{\partial s}, \frac{\partial [A(s,y) f(t,x;s,y)]}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 [B(s,y) f(t,x;s,y)]}{\partial y^2}.$$

Т е о р е м а 1.2. [1]

Если выполнены условия (1.5), (1.6) и (1.7), а также вышеизложенные допущения 1), 2), то функция распределения $f(t,x;s,y)$ дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial f(t,x;s,y)}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial y}[A_1(s,y)f(t,x;s,y)] + \frac{1}{2}B(s,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(t,x;s,y), \qquad (1.8')$$

Определив непрерывный случайный процесс, мы ознакомились с уравнениями Колмогорова для непрерывного процесса. Наша ближайшая цель определить разрывный процесс и выявить для них уравнения.

1.2. Скачкообразные марковские процессы.

Значимую роль играют процессы, изменение состояния системы которых с течением времени меняется не непрерывно, а скачкообразно. Случайный процесс $\xi(t)$ чисто разрывен, если за любой промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ траектория процесса, начавшаяся в точке x, остается равной с вероятностью $1 - p(t,x)\Delta t + o(\Delta t)$, а с вероятностью $p(t,x)\Delta t + o(\Delta t)$ может претерпеть скачком некоторое изменение.

О п р е д е л е н и е 1.3. [1]

Пусть $P(t,x,y) -$ условная вероятность распределения случайной величины $\xi(t)$, при условии, что в момент t произошел скачок, а до скачка величина $\xi(t)$ принимала значение равное x. Тогда функция распределения $F(t,x;s,y)$ при $s - t \to 0$ выражается через функции $p(t,x)$, $P(t,x,y)$ следующим образом:

$$F(t,x;s,y) = [1 - p(t,x)(s-t)]E(x,y) +$$
$$+(s-t)p(t,x)P(t,x,y) + o(s-t), \quad (1.9)$$

Отметим, что, как и для всякой функции распределения, так и для

$P(t,x,y)$ выполняются равенства

1) $P(t,x,-\infty)=0$,

2) $P(t,x,+\infty)=1$.

Также будем иметь ввиду неотрицательность и непрерывность $P(t,x,y)$ относительно t, x.

Т е о р е м а 1.3. [1]

Функция распределения вида (1.9) удовлетворяет двум интегро-дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial F(t,x;s,y)}{\partial t}=p(t,x)\left[F(t,x;s,y)-\int F(t,z;s,y)\,d_zP(t,x,z)\right], \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial F(t,x;s,y)}{\partial s}=-\int_{-\infty}^{y}p(t,z)\,d_zF(t,x;\tau,y)+$$

$$+\int p(\tau,z)\,P(\tau,x,z)d_zF(t,x;\tau,z)], \qquad (1.11)$$

В завершении первой главы, хочется отметить, что нам удалось познакомиться с различными процессами, а также с уравнениями, описывающими те самые процессы. Ближайшими задачами являются получить уравнения Колмогорова на примерах, основываясь на теоремы 1.1, 1.2, 1.3.

Глава II. Уравнения Колмогорова.

Определяющим уравнением в теории марковских процессов является уравнение Колмогорова-Чепмена. С.Н.Бернштейн показал при каких условиях из этого интегрального уравнения можно получить дифференциальное уравнение второго порядка параболического типа [4]. В дальнейшем, О.В.Сарманов получил частное решение в виде ряда [5]. Известен общий вид решения уравнения Колмогорова, полученный в работе [2]. Нам следует выяснить, к какому виду дифференциального уравнения сводятся некоторые частные решения интегрального уравнения Колмогорова-Чепмена.

2.1. Частное решение уравнения Колмогорова-Чепмена для непрерывного процесса. (Пример 1).

В статье [2] представлены некоторые решения интегрального уравнения Колмогорова-Чепмена. В этом параграфе будем рассматривать плотность вероятности перехода, которая имеет следующий вид

$$\pi_{t\to t+h}(x\to z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}}+e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right), \qquad (2.1)$$

где $h=|s-t|$.

Как показано в [2], плотность (2.1) является решением уравнения Колмогорова-Чепмена $(1.4')$. Рассмотрим, какому линейному уравнению отвечает это решение. Следуем процедуре, описанной в предыдущей главе.

Глядя на решение (2.1), интуитивно понятно, что траектория является непрерывной, но чтобы убедиться в этом, докажем следующую лемму.

2.1.2. Об оценке непрерывной функции распределения.

Л е м м а 1.

Марковский случайный процесс с плотностью вероятности перехода

$$\pi_{t\to t+h}(x \to y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}} + e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right),$$

имеет непрерывную траекторию, т.е. выполняются условия

$$\text{(a)}\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{|y-x|\geq\delta} dy\int\limits_0^y \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(z-x)^2}{4h}} + e^{\frac{-(z+x)^2}{4h}}\right)dz = 0,$$

$$\text{(b)}\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{\mathrm{h}}\int\limits_{|y-x|<\delta} dy\int\limits_0^y \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}(x-z)^n\left(e^{\frac{-(z-x)^2}{4h}} + e^{\frac{-(z+x)^2}{4h}}\right)dz = A_n(t,x),$$

при $\forall\, t, x$ и $\tau > t, n = 1{,}2.$

Доказательство.

В пределе (a) сделаем замену переменных: $p = z - x$ и $p + 2x =$ $= z + x, |p| \geq \delta.$ После чего условие (a) примет вид

$$\text{(a}'\text{)}\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{|p|\geq\delta}\frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-p^2}{4h}} + e^{\frac{-(p+2x)^2}{4h}}\right)dp.$$

Для удобства разобьём (a′) на два предельных интеграла и рассмотрим первый случай, когда $p \geq \delta$. Случай $p < -\delta$ аналогичен.

$$I_1 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{p\geq\delta}\frac{e^{\frac{-p^2}{4h}}}{2\sqrt{\pi h}}dp = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int\limits_{\frac{\delta}{\sqrt{2h}}}^{+\infty} e^{\frac{-q^2}{2}}dq = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,erfc\left(\frac{\frac{\delta}{\sqrt{2h}}}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}erfc\left(\frac{\delta}{\sqrt{h}}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left[1 - erf\left(\frac{\delta}{\sqrt{h}}\right)\right] = 0,$$

где erf и $erfc$, соотственно, функция ошибок и дополнительная функция ошибок, которая определяется через первую.

Аналогичными процедурами получаем предельное значение для второго интеграла

$$I_2 = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{p \geq \delta} \frac{e^{\frac{(-p+2x)^2}{4h}}}{2\sqrt{\pi h}} dp = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} erfc\left(\frac{\frac{\delta + 2x}{\sqrt{2h}}}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} erfc\left(\frac{\frac{\delta + 2x}{\sqrt{2h}}}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} erfc\left(\frac{\delta + 2x}{\sqrt{h}}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h}\left[1 - erf\left(\frac{\delta + 2x}{\sqrt{h}}\right)\right] = 0.$$

Таким образом, $I_1 + I_2 = 0$ и условие (a′) выполнено. Производя обратную замену, условие (a) также выполняется. Что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к доказательству второго утверждения, а именно к доказательству условия непрерывности (b) и нахождению функций $A_1(t, x)$ и $A_2(t, x)$. Рассмотрим случай первый, когда $n = 1$ и сделаем такую же замену $p = y - x$, упомянутую выше, а также для удобства разобьём (b) на два интеграла. Тогда выражение для $A_1(t, x)$ примет вид

$$(b') \qquad n = 1, \;\; A_1(t, x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{|p| < \delta} \frac{p}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-p^2}{4h}} + e^{\frac{-(p+2x)^2}{4h}}\right) dp = I_1' + I_2'.$$

$$I_1' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \int\limits_{\left|\frac{p^2}{4h}\right| < \delta} e^{-q}\, dq = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{\delta^2}{4h}} - e^{\frac{-\delta^2}{4h}}\right) = 0;$$

$$I_2' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} = \int\limits_{\left|\frac{p^2}{4h}\right| < \delta} e^{-\frac{q^2}{2}}\, dq =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2}h} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(erf\left(\frac{\delta + 2x}{\sqrt{2}h}\right) - erf\left(-\frac{\delta + 2x}{\sqrt{2}h}\right)\right) = 0.$$

Следовательно, $A_1(t,x)$ является коэффициентом, равным нулю. Перейдем к нахождению другой функции $(n=2)$, которая задается схожим выражением, а именно

$$(\mathrm{b}'') \qquad n=2, \quad A_2(t,x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{|p|<\delta}\frac{p^2dp}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-p^2}{4h}}+e^{\frac{-(p+2x)^2}{4h}}\right)=I_1''+I_2''.$$

$$I_1''=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}h^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{|p|<\delta}p^2e^{\frac{-p^2}{4h}}\,dp=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi}h^{\frac{3}{2}}}[2\sqrt{\pi}h^{\frac{3}{2}}\operatorname{erf}\left(\frac{p}{2\sqrt{h}}\right)-$$

$$-2he^{\frac{-p^2}{4h}}]_{-\delta}^{\delta}=2-0=2;$$

$$I_2''=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{|p|<\delta}\frac{p^2}{2\sqrt{\pi h}}e^{\frac{-(p+2x)^2}{4h}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}e^{\frac{-(p+2x)^2}{4h}}\cdot$$

$$\cdot[2\sqrt{\pi h}(p+2x^2)e^{\frac{(p+2x)^2}{4h}}erf\left(\frac{2x+p}{2\sqrt{h}}\right)+\ h(4x-2p)]_{-\delta}^{\delta}=0.$$

Таким образом, мы получили сумму двух интегралов равную двум.

$$I_1''+I_2''=2\,.$$

Следовательно, $A_2(t,x)=2$. Лемма доказана.

В итоге нам удалось проверить условия на непрерывность с плотностью вероятности перехода (2.1), после чего сформулируем некоторые утверждения, основанные на теоремах из первой главы.

2.1.2. О связи математической физики и плотности вероятности перехода.

У т в е р ж д е н и е 1.

Если условия (a) и (b) в лемме 1 выполнены, тогда функция распределения

$$F(t,x;s,y)=\int_0^y \frac{dz}{2\sqrt{\pi|t-s|}}\left(e^{\frac{-(z-x)^2}{4|t-s|}}+e^{\frac{-(z+x)^2}{4|t-s|}}\right), \tag{2.2}$$

и плотность вероятности перехода

$$f(t,x;s,y)=\pi_{t\to t+h}(x\to y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}}+e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right), \tag{2.3}$$

удовлетворяют первому (прямому) уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial F(t,x;s,y)}{\partial t}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(t,x;s,y), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial f(t,x;s,y)}{\partial t}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x;s,y), \tag{2.4'}$$

Действительно, случайный процесс с функциями (2.2) и (2.3) является непрерывным, что показано выше в лемме. В общем виде из теоремы 1 первое уравнение Колмогорова для функции распределения имеет вид

$$\frac{\partial F(t,x;s,y)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(A_1(t,x)F(t,x;s,y))-\frac{1}{2}A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(t,x;s,y),$$

или для плотности

$$\frac{\partial f(t,x;s,y)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(A_1(t,x)f(t,x;s,y))-\frac{1}{2}A_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x;s,y),$$

где $A_1(t,x)=0$ и $A_2(t,x)=2$.

Итак, подставив данные коэффициенты в вышеуказанные уравнения, получаем (2.4) и $(2.4')$.

Полученные уравнения в частных производных второго порядка параболического типа, являются уравнениями теплопроводности или же уравнениями, описывающими явление диффузии.

Второе уравнение Колмогорова было получено физиками Фоккером и Планком, в связи с развитием теории диффузии. Выясним, какой вид будет иметь второе (или обратное) уравнение Колмогорова, где частные производные первого и второго порядка берутся соответственно, не по t, а по s и не по x, а по y.

Утверждение 2.

Если выполнены условия (a) *и* (b) *в лемме 1, а также выполняется* (2.4), *тогда для непрерывного случайного процесса плотность распределения вероятностей* (2.3) *удовлетворяет второму (или обратному) уравнению Колмогорова*

$$\frac{\partial f(t,x;s,y)}{\partial s} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(t,x;s,y), \tag{2.5}$$

Действительно, при подстановке коэффициентов $A_1(s,y)=0$ и $A_2(s,y)=2$ во второе уравнение Колмогорова в общем виде, упомянутом в первой главе (теореме 2), получаем (2.5).

Также в данном параграфе покажем сведение к уравнению $(4')$, но уже другой процедурой, а именно, методом моментов.

В [3] показано уравнение (2.6), эквивалентное уравнению Колмогорова $(4')$, и полученное методом моментов. Обозначив $f_t(x)=W$, уравнение можно записать следующим образом

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n (K_n(t,x)W), \qquad n = 0,1,2\ldots \tag{2.6}$$

где $K_n(t,x)$ $-$ коэффициенты интенсивности, определяющиеся равенством

$$K_n(t,x) = \lim_{h\to 0}\frac{m_n(y)}{h}, \qquad \text{т.е.} \qquad m_n(y) = K_n(t,x)\cdot h\big(1+o(1)\big). \tag{2.7}$$

Также имеет место тождество: $m_n(y) = \mathrm{M}(y-h)^n$, где $\mathrm{M(A)}$ $-$ математическое ожидание случайной величины A. Или в другой записи: $m_n(y) = \int_0^\infty (y-x)^n \pi_{s\to t}(x\to y)dx$.

Ниже приведены вычисления моментов для случаев $n = 0, 1, 2$.

1). $n = 0,\ m_0 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}} + e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right)dy = \int\limits_x^\infty \frac{dy}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}}\right) +$

$$+\int\limits_0^x \frac{dy}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}}\right) + \int\limits_x^\infty \frac{dy}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right) + \int\limits_0^x \frac{dy}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\left(\sqrt{h}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{h}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\big(1 + o(1)\big) + o(h)\right) = 1;$$

2). $n = 1,\ m_1 = \int\limits_0^\infty \frac{y-x}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}} + e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right)dy = \int\limits_x^\infty \frac{y-x}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}}\right)dy +$

$$+\int\limits_0^x \frac{y-x}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}}\right)dy + \int\limits_x^\infty \frac{y-x}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right)dy + \int\limits_0^x \frac{y-x}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right)dy =$$

$$= O\left(\sqrt{h}e^{\frac{-x^2}{4h}}\right);$$

3). $n = 2,\ m_2 = \int\limits_0^\infty \frac{(y-x)^2}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}} + e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right)dy =$

$$= \int\limits_x^\infty \frac{(y-x)^2}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}}\right)dy + \int\limits_0^x \frac{(y-x)^2}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y-x)^2}{4h}}\right)dy +$$

$$+\int\limits_x^\infty \frac{(y-x)^2}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right)dy + \int\limits_0^x \frac{(y-x)^2}{2\sqrt{\pi h}}\left(e^{\frac{-(y+x)^2}{4h}}\right)dy = h + O\left(\sqrt{h}e^{\frac{-x^2}{4h}}\right) +$$

$$+h\big(1 + o(1)\big) - O\left(\sqrt{h}e^{\frac{-x^2}{4h}}\right) + o(h) = 2h.$$

Вычисленные моменты $m_0,\ m_1,\ m_2$ подставим в выражение (2.7) для отыскания коэффициентов интенсивности. Заметим, моменты при $n \geq 3$ равны нулю.

$$K_0(t,x) = K_0 = 1, \qquad K_1(t,x) = K_1 = 0, \qquad K_2(t,x) = K_2 = 2. \qquad (2.8)$$

Поставим (2.8) в уравнение (2.6) и получим уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

2.2. Частное решение уравнения Колмогорова-Чепмена для скачкообразного процесса. (Пример 2).

Перейдем к примерам, описывающим процесс с разрывной траекторией. Так же, как и в предыдущем параграфе, мы будем рассматривать частные решения Колмогорова—Чемпена [2].

Имеем следующую плотность вероятности перехода

$$\pi_{t\to t+h}(x \to z) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{h}{h^2 + (z+x)^2} + \frac{h}{h^2 + (z-x)^2}\right\}, \tag{2.9}$$

где $h = |s-t|, x > 0, z > 0.$

Пользуясь классическим определением функции распределения

$$F(t,x;s,y) = \int_0^y \pi_{t\to\tau}\,(x \to z)dz,$$

и взяв интеграл от плотности, получаем

$$F(t,x;t+h,y) = \frac{1}{\pi}\left\{arctg\,\frac{y+x}{h} - arctg\,\frac{x}{h} + arctg\,\frac{y-x}{h} - arctg\,\frac{-x}{h}\right\},$$

Используем первые члены ряда Тейлора для этих функций [6]:

при $\frac{y+x}{h} > 1,$ $\qquad arctg\,\frac{y+x}{h} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{h}{y+x} + \frac{1}{3}\left\{\frac{h}{y+x}\right\}^3 + \cdots\right\},$

при $\frac{y+x}{h} < -1,$ $\qquad arctg\,\frac{y+x}{h} = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{2} - \frac{h}{y+x} + \frac{1}{3}\left\{\frac{h}{y+x}\right\}^3 + \cdots\right\},$

при $\frac{x}{h} > 1,$ $\qquad arctg\,\frac{x}{h} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{h}{x} + \frac{1}{3}\left\{\frac{h}{x}\right\}^3 + \cdots\right\},$

при $\frac{x}{h} < -1,$ $\qquad arctg\,\frac{x}{h} = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{2} - \frac{h}{x} + \frac{1}{3}\left\{\frac{h}{x}\right\}^3 + \cdots\right\},$

при $\dfrac{y-x}{h}>1,$ $\quad arctg\dfrac{y-x}{h}=\dfrac{1}{\pi}\left\{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{h}{y-x}+\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{h}{y-x}\right\}^3+\cdots\right\}$

при $\dfrac{y-x}{h}<-1,$ $\quad arctg\dfrac{x}{h}=\dfrac{1}{\pi}\left\{-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{h}{y-x}+\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{h}{y-x}\right\}^3+\cdots\right\}$

при $\dfrac{-x}{h}>1,$ $\quad arctg\dfrac{x}{h}=\dfrac{1}{\pi}\left\{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{h}{x}-\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{h}{x}\right\}^3+\cdots\right\},$

при $\dfrac{-x}{h}<-1,$ $\quad arctg\dfrac{-x}{h}=\dfrac{1}{\pi}\left\{-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{h}{x}-\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{h}{x}\right\}^3+\cdots\right\},$

Тогда имеем два случая

1). $0<x<y,\dfrac{x}{h}>1,\dfrac{y-x}{h}>1,h\to 0;$

$$F(t,x;t+h,y)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{y+x}+\frac{\pi}{2}-\frac{h}{y-x}+\cdots\right\}=1-\frac{2y}{y^2-x^2}\frac{h}{\pi}\big(1+O(1)\big);$$

2). $y<x,\dfrac{x}{h}>1,\dfrac{y+x}{h}>1,-\dfrac{x}{h}<-1,\dfrac{y-x}{h}<-1,h\to 0;$

$$F(t,x;t+h,y)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{y+x}-\frac{\pi}{2}-\frac{h}{y-x}+\cdots\right\}=\frac{2y}{y^2-x^2}\frac{h}{\pi}\big(1+O(1)\big);$$

или в упрощенном виде:

$$F(t,x;t+h,y)=\begin{cases} 1-\dfrac{2y}{y^2-x^2}\dfrac{h}{\pi}, & 0\le x<y,\\ \dfrac{2y}{x^2-y^2}\dfrac{h}{\pi}, & 0\le y<x.\end{cases}$$

С помощью функции Хэвисайда, т.е. $\mathcal{E}(x,y)=1$ при $x<y$ и $\mathcal{E}(x,y)=0$ при $x>y$, функцию распределения можно записать в виде

$$F(t,x;t+h,y)=\left[1-\frac{2y}{y^2-x^2}\frac{h}{\pi}\right]\mathcal{E}(x,y)+\frac{2y}{x^2-y^2}\frac{h}{\pi}, \qquad (2.10)$$

или

$$F(t,x;t+h,y)=\left[1-\left(\frac{1}{y+x}+\frac{1}{y-x}\right)\frac{h}{\pi}\right]\mathcal{E}(x-y)+$$

$$+\left[\frac{1}{x-y}-\frac{1}{y+x}\right]\frac{h}{\pi}\big(1-\mathcal{E}(x-y)\big)+O(1),\quad (2.10')$$

Подставляя $(2.10')$ в уравнение Чепмена $-$ Колмогорова

$$F(t,x;\tau,z)=\int_0^\infty F(t+h,y,t,z)d_y\,F(t+h,x;t,y),\quad t\le t+h\le\tau$$

и пользуясь свойством $\delta-$ функции $\dfrac{d\mathcal{E}(x,y)}{dy}=\delta(x-y),$ получаем

$$F(t,x;\tau,z)=F(t+h,x;\tau,z)+\int_0^\infty\frac{F(t+h,y;\tau,z)}{(y+x)^2}dy-$$

$$-\int_0^\infty F(t+h,y;\tau,z)\frac{d}{dy}E_x(y)dy+\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}F(t+h,y;\tau,z)\frac{d}{dy}E_x(y)dy\,,\qquad (2.11)$$

где $E_x(y)=\begin{cases}\frac{1}{y-x}, & y>x,\\ -\frac{1}{x-y}, & y<x.\end{cases}$

Убедимся в том, что последним интегралом в (2.11) можно пренебречь.

2.2.2. Об оценке интеграла.

Л е м м а 2.

Для интеграла I имеет место следующая оценка

$$I=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}F(t+h,y;\tau,z)\frac{d}{dy}E_x(y)dy\sim A\varepsilon\to 0,\text{при}\quad\varepsilon\to 0,\qquad (2.12)$$

где $A=4\dfrac{h}{\pi}\dfrac{z\big(1-\mathcal{E}(y-z)\big)}{[y^2-z^2](z-y)^2}.$

Доказательство.

Для удобства, обозначим $\varphi(z)=F(t+h,y;\tau,z)$ и проинтегрируем (2.12) по частям.

$$I=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\varphi(z)\frac{d}{dy}E_x(y)dy=\varphi(z)\cdot E_x(y)|_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}-\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}E_x(y)\frac{d}{dy}\varphi(z)dy,$$

$$\tilde{I}=[\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x-\varepsilon)]\cdot\begin{cases}\dfrac{1}{y-(x+\varepsilon)}-\dfrac{1}{y-(x-\varepsilon)}, & y>x+\varepsilon,\\ -\dfrac{1}{(x+\varepsilon)-y}+\dfrac{1}{(x-\varepsilon)-y}, & y<x+\varepsilon.\end{cases}$$

Преобразовывая последнее равенство, получаем

$$\tilde{I}=[\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x-\varepsilon)]\cdot\begin{cases}\dfrac{2\varepsilon}{(y-x)^2-\varepsilon^2}, & y>x+\varepsilon,\\ \dfrac{2\varepsilon}{(x-y)^2-\varepsilon^2}, & y<x+\varepsilon.\end{cases}$$

Или в другом виде:

$$\tilde{I}=[\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x-\varepsilon)]\cdot\frac{2\varepsilon}{(y-x)^2-\varepsilon^2}=$$

$$=\{-\frac{8h}{\pi}\cdot\frac{E_x(y)xz\varepsilon}{\{-[x+\varepsilon]^2+z^2\}\{[x-\varepsilon]^2+z^2\}}+$$

$$+\frac{8h}{\pi}\cdot\frac{\big(1-E_x(y)\big)z(x^2-z^2)}{\{[x+\varepsilon]^2-z^2\}\{[x-\varepsilon]^2-z^2\}}\}\cdot\frac{2\varepsilon}{(y-x)^2}=$$

$$=\frac{8h}{\pi}[\frac{-2E_x(y)xz\varepsilon^2}{\{z^2-x^2-2x\varepsilon-\varepsilon^2\}\{x^2-2x\varepsilon+\varepsilon^2+z^2\}(y-x)^2}+$$

$$+\frac{\big(1-E_x(y)\big)z(x^2-z^2)}{\{x^2+\varepsilon^2-z^2+2x\varepsilon\}\{x^2+\varepsilon^2-z^2-2x\varepsilon\}}\}\cdot\frac{2\varepsilon}{(y-x)^2}]=$$

$$=\frac{8h}{\pi}[\frac{-2E_x(y)xz\varepsilon^2}{\{x^2+\varepsilon^2-z^2-2x\varepsilon\}\{x^2+\varepsilon^2+z^2-2x\varepsilon\}(y-x)^2}+$$

$$+\left(\frac{\big(1-E_x(y)\big)z(x^2-z^2)}{\{(x^2+\varepsilon^2-z^2)^2-4x^2\varepsilon^2\}}\right)]\cdot\frac{2\varepsilon}{(y-x)^2}.$$

Т.к ε^2 – величина более высокого порядка, то первым слагаемым в правой части предыдущего равенства можно пренебречь, а во втором слагаемом мы ограничимся величиной ε, следовательно

$$\tilde{I}=[\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x-\varepsilon)]\cdot\frac{2\varepsilon}{(y-x)^2-\varepsilon^2}\sim A\varepsilon,$$

где $A = 4\frac{h}{\pi}\frac{z\big(1-\mathcal{E}(y-z)\big)}{[y^2-z^2](z-y)^2}$.

Осталось доказать при $\varepsilon \to 0$ интеграл $\tilde{\tilde{I}}$ сходится к нулю.

$$\tilde{\tilde{I}} = \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} E_x(y)\frac{d\varphi(y)}{dy} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} V.p.\left(\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon_1} \frac{\pi_{t+h\to\tau}(y\to z)}{x-y}dy + \int\limits_{x+\varepsilon_1}^{x+\varepsilon} \frac{\pi_{t+h\to\tau}(y\to z)}{y-x}dy)\right), \quad (2.13)$$

Здесь, в (2.13) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Сделав замену $p = x - y$, положив $\varepsilon = \varepsilon_1 e^{\varepsilon_1}$, причем $\varepsilon > \varepsilon_1$ и $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \to 1$, имеем следующую запись:

$$\tilde{\tilde{I}} = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \frac{h}{\pi p}(\frac{1}{h^2+(x-p+z)^2} + \frac{1}{h^2+(z-x+p)^2} +$$

$$+ \frac{1}{+h^2+(x+p+z)^2} + \frac{1}{h^2+(z-x-p)^2})dp, \quad (2.14)$$

Ограничиваясь первым членом в разложении выражения в круглых скобках по степеням p, получаем

$$\tilde{\tilde{I}} = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon}(\frac{1+\frac{2p}{h^2+(z+x)^2}}{h^2+(z+x)^2} + \frac{1-\frac{2p}{h^2+(z-x)^2}}{h^2+(z-x)^2} + \frac{1-\frac{2p}{h^2+(z+x)^2}}{h^2+(z+x)^2} +$$

$$+ \frac{1+\frac{2p}{h^2+(z-x)^2}}{h^2+(z-x)^2})dp + O(h^2), \quad (2.15)$$

Перейдем к вычислению предела с учетом вышеуказанного выражения (2.15)

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}[\frac{2}{h^2+(z-x)^2} + \frac{2}{h^2+(z+x)^2}]\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon}\frac{dp}{p}, \quad (2.16)$$

При выполнении соотношений $\varepsilon > \varepsilon_1$ и $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \to 1$, выражение (2.16) стремится к нулю:

$$\tilde{\tilde{I}} = [\frac{2}{h^2 + (z - x)^2} + \frac{2}{h^2 + (z + x)^2}] \cdot ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \to 0.$$

Лемма доказана.

В итоге мы получили, слагаемым (2.12) можно пренебречь в (2.11).

$$F(t, x; \tau, z) = F(t + h, x; \tau, z) + \int_0^\infty \frac{F(t + h, y; \tau, z)}{(y + x)^2} dy -$$

$$- \int_0^\infty F(t + h, y; \tau, z) \frac{d}{dy} E_x(y) dy,$$

где $E_x(y) = \begin{cases} \frac{1}{y - x}, & y > x, \\ -\frac{1}{x - y}, & y < x. \end{cases}$

2.2.2. Разрывный процесс. (Пример 3).

Рассмотрим еще одно из решений уравнения Колмогорова-Чепмена, полученного в [2].

$$\pi_{t \to t+h}(x \to z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-h\lambda^\nu} sin(\lambda z) sin(\lambda x) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}[g(x + z) - g(z - x)], \qquad (2.17)$$

где $g(x + z)$, $g(z - x)$ – синус-преобразования Фурье от функций $e^{-h\lambda^\nu}(t, s)$:

$$g(x + z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-h\lambda^\nu} sin\,\lambda(x + z)\, d\lambda,$$

$$g(z - x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-h\lambda^\nu} sin\,\lambda(z - x)\, d\lambda,$$

где $0 < \nu < 1, h = \alpha(t) - \alpha(s), \alpha(t) -$ непрерывная функция.

Как известно, функция распределения связана с плотностью вероятности перехода следующим соотношением:

$$\pi_{t \to s}(x \to z) = \frac{\partial}{\partial z} F(t, x; s, z)\,, \qquad (2.18)$$

$$F(t, x; s, z) = \int_0^z \pi_{t \to s}(x \to y) dy, \qquad (2.19)$$

Подставляя (2.17) в (2.19) получим выражение для $F(t, x; s, z)$

$$F(t, x; s, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^z dy \int_0^\infty e^{-h\lambda^\nu} [g(x + y) - g(y - x)] d\lambda, \qquad (2.20)$$

Взяв интеграл по переменной y в (2.20) получаем функцию в виде:

$$F(t, x; s, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-h\lambda^\nu} [cos\lambda(z - x) - cos\lambda(x + z)] d\lambda, \qquad (2.21)$$

Отметим основные свойства функции распределения $F(t, x; s, z)$:

1) Неотрицательность;
2) при $z = 0$, функция принимает значение, равное нулю;
3) при $z \to \infty$, значение функции стремится к единице.

Свойства $1) - 3)$ нетрудно проверить. Неотрицательность $F(t, x; s, z)$ вытекает из неотрицательности $\pi_{t \to s}(x \to y)$. Осталось показать, что $\pi_{t \to s}(x \to y) \geq 0$. Заметим, что $e^{-h\lambda^\nu} \to 0$ при $\lambda \to \infty$, $0 < \nu < 1$. Следовательно, упомянутая функция является характеристической (теорема Пойа [3]), а это гарантирует неотрицательность синус-преобразования Фурье (теорема Бохнера [3]).

Во втором свойстве легко убедиться, если в (2.21) вычислить интеграл при $z = 0$. В самом деле,

$$F(t, x; s, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-h\lambda^\nu} [cos\lambda(0 - x) - cos\lambda(x + 0)] d\lambda = 0,$$

И наконец, перейдем к третьему свойству. Положим $-h\lambda^{\nu} = p$, тогда

$$F(t,x;s,z) = \frac{1}{\pi\rho}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{p^{1-\beta}} e^{-p}\left[\cos\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}(z-x) - \cos\left(\frac{h}{p}\right)^{1/\nu}(x+z)\right]dp,$$

При помощи формул Эйлера, определим функции следующим образом:

$$\cos\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}(z-x) = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{\mathrm{i}\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}(z-x)} + e^{-\mathrm{i}\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}(z-x)}\right],$$

$$\cos\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}(z+x) = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{\mathrm{i}\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}(z+x)} + e^{-\mathrm{i}\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}(z+x)}\right],$$

Тогда можно применить лемму Эрдейи [7] к (2.22) и получаем (2.23).

$$F(t,x;s,z) = Re\frac{\nu^{-1}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{2p^{1-\beta}}e^{-p}\left[e^{\mathrm{i}\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}(z-x)} - e^{\mathrm{i}\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}(z+x)}\right]dp,\ \beta \to 0 \quad (2.22)$$

$$F(t,x;s,\infty) = \frac{1}{2}\Gamma(1+\beta\nu)\frac{\cos\left(\frac{\pi\beta\nu}{2}\right)}{\frac{\beta\nu}{2}}\left(C_1^{-\beta\nu} + C_2^{-\beta\nu}\right)\left(1+o(1)\right) =$$

$$= 1, \text{при } \beta \to 0, \quad (2.23)$$

где $C_1 = \frac{z+x}{\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}}, C_2 = \frac{z+x}{\left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{1}{\nu}}}$ стремятся к бесконечности.

(2.23) будет выполняться при $z \to \infty$, при определенном $\beta \to 0$, например, $\beta = \max(lnC_1, lnC_2)^{-\delta}$, где $\delta \in (0;1)$.

В итоге, нам удалось убедиться в вероятностном смысле решения (2.17), проверив на свойствах функцию (2.21).

Теперь выведем новое соотношение для функции распределения $F(t,x;s,z)$, но уже без интегралов.

2.2.3. Об оценке разрывной функции распределения.

Л е м м а 3.

Функция распределения $F(t,x;t+h,y)$ может быть записана в виде

$$F(t,x;t+h,y) = \{1 - \frac{\tau_\gamma(t)h^\gamma}{\pi}\Gamma(\nu)(cos\frac{\pi\nu}{2})\left\{\frac{1}{(y-x)^\nu} - \frac{1}{(x+y)^\nu}\right\}\theta(y-x) +$$

$$+\frac{\tau_\gamma(t)h^\gamma}{\pi}\Gamma(\nu)(cos\frac{\pi\nu}{2})\left\{\frac{1}{(x-y)^\nu}+\frac{1}{(x+y)^\nu}\right\}\left(1-\theta(y-x)\right)+o\left(h^\beta\right)\},$$

где функция представима $\alpha(t+h)=\alpha(t)+\mu_\gamma(t)h^\gamma\left(1+0(1)\right)$, *при* $h\to 0$, *т.е.* $h\sim\tau_\gamma(t)h^\gamma$.

$$\theta(y-x)=\begin{cases}1, & \text{если } x<y;\\ 0, & \text{если } x>y.\end{cases}$$

Доказательство.

Действительно, имеем выражение для функции $F(t,x;t+h,y)$:

$$F(t,x;t+h,y)=\theta(y-x)+\frac{1}{\pi}\int_0^y dz\int_0^\infty\left(e^{-h\lambda^\nu}-1\right)[sin\,\lambda(x+z)-sin\,\lambda(z-x)]d\lambda,$$

в котором h устремляем к нулю, причем $\alpha(t+h)-\alpha(t)\sim\mu_\gamma(t)h^\gamma$.

Возьмем интеграл по переменной z, и в то же время, оставим от $e^{-h\lambda^\gamma}$ два первых члена асимптотики при условии, что $h\to 0$, тогда имеет место следующее выражение:

$$F(t,x;t+h,y)=\ \theta(y-x)+\frac{\mu_\gamma(t)h^\gamma}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{\nu-1}[-cos\,\lambda(x+y)+$$
$$+cos\,\lambda(y-x))]d\lambda+o(h^\gamma),\qquad(2.24)$$

Также (2.24) можно получить, используя лемму Эрдейи [7].

Воспользуемся [8.68] при $0<\nu<1, x>0, y>0$ [инте]

$$\int_0^\infty\lambda^{\nu-1}cos(y+x)\lambda d\lambda=(y+x)^{-\nu}\Gamma(\nu)cos\frac{\pi\nu}{2},\qquad(2.25)$$

Подставим (2.25) в (2.24), получаем преобразованное выражение:

$$F(t,x;t+h,y)=\begin{cases}1-\frac{\mu_\gamma(t)h^\gamma}{\pi}\Gamma(\nu)cos\frac{\pi\nu}{2}\left\{\frac{1}{(y-x)^\nu}-\frac{1}{(x+y)^\nu}\right\}\left(1+0(1)\right),\text{при } y>x;\\ \frac{\mu_\gamma(t)h^\gamma}{\pi}\Gamma(\nu)cos\frac{\pi\nu}{2}\left\{\frac{1}{(x-y)^\nu}+\frac{1}{(x+y)^\nu}\right\}(1+0(1)),\text{при } x<y.\end{cases}$$

Как и в предыдущих примерах, мы будем следовать процедуре, описанной в [1]. Для этого подставим последнее выражение для $F(t,x;t+h,y)$ в уравнение

Колмогорова–Чепмена (4′) и получаем, положив $\psi_\nu(t) = \frac{\mu_\gamma(t)h^\gamma}{\pi}\Gamma(\nu)(cos\frac{\pi\nu}{2})$ и используя свойство $\delta -$ функции:

$$F(t,x;\tau,z) = F(t+h,x;\tau,z) + \psi_\nu(t)\{-\nu\int_0^\infty \frac{F(t+h,y;\tau,z)}{(y+x)^{\nu+1}}dy -$$

$$-\int_0^\infty F(t+h,y;\tau,z)\frac{d}{dy}\mathcal{Z}_x(y)dy\}, \qquad (2.26)$$

где $\mathcal{Z}_x(y) = \begin{cases} (y-x)^{-\nu} & \text{при } y > x; \\ -(x-y)^{-\nu} & \text{при } x < y. \end{cases}$

Следующая лемма направлена на оценку последнего интеграла в (2.26), для возможного использования производной $\frac{d}{dy}\mathcal{Z}_x(y)dy$, невзирая на особенность функции $\mathcal{Z}_x(y)$ в точке $y = x$.

2.2.4. Дополнительная оценка интеграла.

Л е м м а 4.

При предположении $\varepsilon \to 0$, справедлива следующая оценка

$$\bar{\bar{I}} \equiv \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} F(t+h,y;\tau,z)\frac{d}{dy}\mathcal{Z}_x(y)dy \sim C\varepsilon^{1-\nu}, \qquad (2.27)$$

где $C = const$.

Доказательство.

Пусть $\omega(y) = F(t+h,y;\tau,z)$, тогда проинтегрировав (2.27) по частям, получаем:

$$\bar{\bar{I}} = [\omega(x+\varepsilon) - \omega(x-\varepsilon)]\varepsilon^{-\nu} - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{d}{dy}\mathcal{Z}_x(y)\omega(y)dy, \qquad (2.28)$$

Преобразуем (2.28), сославшись на формулу (2.21)

$$i_1 = [\omega(x+\varepsilon) - \omega(x-\varepsilon)] = 2\varepsilon\int_0^\infty e^{-h\lambda^\nu}[cos\lambda(z-x) - cos\lambda(x+z)]d\lambda, \ \Rightarrow$$

$$\bar{\bar{I}} = \varepsilon^{1-\nu}\int\limits_0^\infty e^{-h\lambda^\nu}[cos\lambda(z-x) - cos\lambda(x+z)]d\lambda - \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{d}{dy}\mathcal{Z}_x(y)\omega(y)dy\,,$$

Первый член последнего выражения порядка $\varepsilon^{1-\nu}$, осталось разобраться со вторым. Преобразуем последнее выражение к виду:

$$i_2 = \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{d}{dy}\mathcal{Z}_x(y)\omega(y)dy = \int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\frac{\pi_{t+h\to\tau}(y\to z)}{(x-y)^\nu}dy + \int\limits_{x}^{x+\varepsilon}\frac{\pi_{t+h\to\tau}(y\to z)}{(y-x)^\nu}dy =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon u^{-\nu}[\,\pi_{t+h\to\tau}(x-u\to z) + \pi_{t+h\to\tau}(x+u\to z)]du =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon u^{-\nu}[\,2sin\lambda x + O(u^2)]du = \frac{2sin\lambda x}{1-\nu}\varepsilon^{1-\nu}.$$

Таким образом, учитывая оценки для интегралов $i_1,\ i_2,$ мы получили оценку

$$\bar{\bar{I}} \equiv i_1 + i_2 = C\varepsilon^{1-\nu}.$$

Лемма доказана.

Перейдем к выводу уравнения Колмогорова, но перед этим, определим некоторые понятия.

О п р е д е л е н и е 2.1. [8]

В равенстве

$$f(t) - f(a) = \int\limits_a^t \frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{1-\gamma}}d\tau, \qquad 0<\gamma<1,$$

функция $v(\tau)$ *называется дробной производной от* $f(t)$ *степени* γ *в смысле Г.Харди и Д.Е.Литтльвуда [6] и обозначается*

$$v(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}D^\gamma_{[a,x]}[f(x) - f(a)]. \qquad (2.29)$$

Согласно *[6]*, при $h\to 0$

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h^\gamma} \sim \frac{v(t)}{\gamma} \equiv \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}f_a^{(\gamma)}(t), \qquad (2.30)$$

т.е.

$$f(t+h)=f(t)+\frac{h^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}f_a^{(\gamma)}(t)\big(1+o(1)\big). \qquad (2.31)$$

При $\gamma=1$ дробная производная $f_a^{(\gamma)}(t)$ совпадает с обычной $\frac{df(t)}{dt}$.

Определяя дробную производную в смысле Гельдера [4] равенством

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h^\gamma}=\frac{\partial^\gamma f(t)}{\partial t^\gamma}, 0<\gamma<1, \qquad (2.32)$$

Видим, что она совпадает с правой частью (2.3018), но, в отличие от (2.32), нелокальная (зависит от $f(a)$). Дробная производная (2.29) допускает восстановление $f(t)$, как по обычной производной.

Определение 2.2. [8]

Правосторонняя и левосторонняя дробные производные Римана-Лиувилля порядка ν *от вещественной функции* ω *определяется следующими соотношениями* $(0<\nu<1)$:

$$D_{0+}^\nu\omega(y)=\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{\omega(u)}{(y-u)^\nu}du, -\text{ левосторонняя;}$$

$$D_{\infty-}^\nu\omega(y)=-\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{\omega(u)}{(u-y)^\nu}du, -\text{правосторонняя.}$$

Интегрируя в этих равенствах по частям, находим что

$$\int_y^\infty\frac{\omega'(u)}{(y-u)^\nu}du=-\Gamma(1-\nu)D_{\infty-}^\nu\omega(y)+\lim_{u\to 0}\frac{\omega(u)}{(y-u)^\nu},$$

$$\int_0^y\frac{\omega'(u)}{(y-u)^\nu}du=\Gamma(1-\nu)D_{0+}^\nu\omega(y)-\lim_{u\to 0}\frac{\omega(u)}{(y-u)^\nu}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}F(t,x;\tau,z)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h,x;\tau,z)-F(t,x;\tau,z)}{h^\gamma}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}D_{[s,t]}^\gamma[F(t,x;\tau,z)-F(s,x;\tau,z)].$$

2.2.5. Применение дробных производных в первом и втором уравнениях Колмогорова.

Утверждение 3.

Вероятности перехода $\omega_t(x) = F(t,x;\tau,z)$ *и* $\omega_\tau(y) = F(t,x;\tau,z)$ *удовлетворяют первому и второму уравнениям Колмогорова соответственно:*

$$1).\ \frac{1}{\mu_\gamma(t)\Gamma(1+\gamma)} D^\gamma_{[s,t]}\{\omega_t(x) - \omega_s(x)\} = -\nu\psi_\nu(t)\{\int_0^\infty \frac{\omega_t(y)}{(y+x)^{1+\nu}}dy +$$
$$+\Gamma(1-\nu)D^\nu_{0+}\omega_t(y) + \Gamma(1-\nu)D^\nu_{\infty-}\omega_t(y)\},$$

$$2).\ \frac{1}{\mu_\gamma(t)\Gamma(1+\gamma)} D^\gamma_{[t,\tau]}\{\omega_\tau(y) - \omega_t(y)\} = \nu\psi_\nu(t)\{\int_0^\infty \frac{\omega_\tau(y)}{(y+z)^{1+\nu}}dy +$$
$$+\Gamma(1-\nu)D^\nu_{0+}\omega_\tau(y) + \Gamma(1-\nu)D^\nu_{\infty-}\omega_\tau(y)\},$$

где $\mu_\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}\int_s^t \frac{\alpha(x)-\alpha(s)}{(t-x)^\gamma}dx,\ 0<\gamma<1,\ 0<\nu<1.$

Доказательство.

Обратимся к уравнению (2.21) при $h \to 0$

$$F(\tau,y;\tau+h,z) = \int_0^z \delta(u-y)\,du -$$
$$-\frac{\tau_\gamma(t)h^\gamma}{\pi}\psi_\nu(t)\left\{\frac{1}{(y-x)^\nu} - \frac{1}{(x+y)^\nu}\right\}\theta(y-x) +$$
$$+\frac{\tau_\gamma(t)h^\gamma}{\pi}\psi_\nu(t)\left\{\frac{1}{(x-y)^\nu} + \frac{1}{(x+y)^\nu}\right\}\big(1-\theta(y-x)\big) + o\big(h^\beta\big)\}, \qquad (2.33)$$

Решение (2.33) подставим в уравнение Колмогорова-Чепмена и получим

$$F(\tau,y;\tau+h,z) = F(t,x;\tau,z) - \frac{\tau_\gamma(t)h^\gamma}{\pi}\psi_\nu(t)\{\int_0^\infty -\frac{d_yF(t,x;\tau,y)}{(y+z)^\nu} +$$
$$-\int_0^{y-\varepsilon}\frac{d_yF(t,x;\tau,y)}{(z-y)^\nu} + \int_{y+\varepsilon}^\infty \frac{d_yF(t,x;\tau,y)}{(y-z)^\nu} + K_\varepsilon\}, \qquad (2.34)$$

где $K_\varepsilon = -\int\limits_{y-\varepsilon}^{y} \frac{d_y F(t,x;\tau,y)}{(z-y)^\nu} + \int\limits_{y}^{y+\varepsilon} \frac{d_y F(t,x;\tau,y)}{(y-z)^\nu},$ (2.35)

Л е м м а 5.

При $\varepsilon \to 0$ имеет место следующая оценка:

$$K_\varepsilon = C_1 \varepsilon^{1-\nu}, \text{где } C_1 = const.$$

Доказательство.

Воспользуемся соотношением $d_y F(t,x;\tau,y) = \pi_{t\to\tau}(x \to y)dy$, запишем (2.34) через плотность вероятности перехода, предварительно сделав замену переменной $z - y = u, y - z = u$.

$$K_\varepsilon = \int\limits_0^\varepsilon \frac{du}{u^\nu}\{\pi_{t\to\tau}(x \to z+u) - \pi_{t\to\tau}(x \to z+u)\}, \quad (2.36)$$

где $(x \to z+u) - \pi_{t\to\tau}(x \to z+u) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-h\lambda^\nu}\{\sin\lambda(z-u) -$

$$-sin\lambda(z+u)\}sin\lambda x d\lambda.$$

Используя последнее, возьмем интеграл (2.36)

$$K_\varepsilon = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-h\lambda^\nu} cos\lambda x sin\lambda d\lambda \int\limits_0^\varepsilon \frac{cos\lambda x}{u^\nu}du,$$

где справедлива оценка $\int_0^\varepsilon \frac{cos\lambda x}{u^\nu}du \le \lambda\int_0^\varepsilon u^{1-\nu}du = \frac{\lambda}{1-\nu}\varepsilon^{1-\nu}$, следовательно справедлива и оценка

$$K_\varepsilon = C_1 \varepsilon^{1-\nu}, \text{где } C_1 = const.$$

Аналогичными рассуждениями, мы получаем для вероятности перехода $\omega_\tau(y)$ второе уравнение Колмогорова:

$$\frac{1}{\mu_\gamma(t)\Gamma(1+\gamma)} D^\gamma_{[t,\tau]}\{\omega_\tau(y) - \omega_t(y)\} = \nu\Gamma(\nu)(cos\frac{\pi\nu}{2})\{\int\limits_0^\infty \frac{\omega_\tau(y)}{(y+z)^{1+\nu}}dy +$$

$$+\Gamma(1-\nu)D^\nu_{0+}\omega_\tau(y) + \Gamma(1-\nu)D^\nu_{\infty-}\omega_\tau(y)\}.$$

Заключение

В настоящей работе установлена связь некоторых частных решений билинейного уравнения Колмогорова-Чепмена с линейными дифференциальным и интегро-дифференциальными уравнениями. Причем, рассмотрены примеры случайных марковских процессов с непрерывной и разрывной траекторией. Оказалось, среди интегро-дифференциальных уравнений есть уравнения с сингулярными интегралами и уравнения с дробными производными. При выводе использовались нестандартные оценки интегралов посредством леммы Эрдейи и процедуры взятия интеграла с помощью главного значения по Коши.

Литература

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2011. 488 с.

2. *Мирошин Р. Н.* О некоторых решениях интегрального уравнения Колмогорова-Чепмена // Вестн. С.-Петерб. Ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2007. Вып. 4. С. 22-29.

3. *Мирошин Р. Н.* О некоторых решениях интегрального уравнения Колмогорова-Чепмена // Вестн. С.-Петерб. Ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2007. Вып. 4. С. 22-29.

4. *Бернтштейн С. Н.* О зависимостях между случайными величинами // Собр. Соч. Т. 4.: Наука, 1964. С. 235-254.

5. *Сарманов О. В.* Исследование стационарных марковских процессов методом разложения по собственным функциям // Труды Мат. Ин-та АН СССР. Т. 60. М.: Наука, 1961. С. 238-259.

6. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы// Пер. с англ. М.: Наука, 1966. 228 с.

7. *Федорюк М. В.* Метод аеревала. М.:Наука, 1977. 368 с.

8. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. М.: Физмалит, 2003. 272 с.

9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований // Пер. с англ. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.