

Санкт-Петербургский Государственный Университет  
Физический факультет  
Кафедра квантовой механики



**ИЗУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВКЛАДОВ В ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА  
В МНОГОЗАРЯДНЫХ ИОНАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА А-ДКВ**

Бакалаврская работа студента  
дневного отделения

Волчковой Анны Михайловны

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., без у/з, доцент Д. А. Глазов

Рецензент:

д.ф.-м.н., доцент, профессор С. В. Ульянов

Санкт-Петербург

2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Эффект Зеемана</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Метод А-ДКБ</b>	<b>4</b>
3.1	Четность состояния . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Линейный и квадратичный вклады в эффект Зеемана</b>	<b>7</b>
4.1	Численное дифференцирование . . . . .	9
4.2	Результаты . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Эффект Зеемана для уровней сверхтонкой структуры</b>	<b>13</b>
5.1	Общие сведения . . . . .	13
5.2	Вычисление поправки к $g$ -фактору на сверхтонкое расщепление . . . . .	15
5.3	Формула Брейта-Раби . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Приложение</b>	<b>19</b>

# 1 Введение

Многозарядные ионы — это относительно простая система для теоретических расчетов, что позволяет получить результаты с высокой точностью. Сравнение теоретических и экспериментальных значений  $g$ -фактора позволяет с высокой точностью получить значения фундаментальных констант. Высокоточные измерения  $g$ -фактора были выполнены для водородоподобных ионов углерода [1, 2], кислорода [3] и кремния [4, 5]. Последнее наиболее точное измерение для водородоподобного углерода позволило определить массу электрона с рекордной точностью [6]. Кроме того, были выполнены аналогичные эксперименты для литиеподобных ионов кремния [7] и кальция [8].

Все описанные выше экспериментальные данные находятся в прекрасном согласии с теоретическими значениями. Среди наиболее существенных теоретических достижений по  $g$ -фактору водородоподобных ионов можно отметить работы [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Наиболее точные расчёты для литиеподобных ионов были выполнены в работах [16, 17, 18, 19, 20]. Более полный обзор по этой тематике можно найти, например, в работе [21].

Как показано в работах [22, 23] исследования  $g$ -фактора водородо-, литие- и бороподобных ионов в различных комбинациях позволят независимо определить постоянную тонкой структуры  $\alpha$  при достижении необходимой точности как в теории, так и в эксперименте. Первым высокоточным экспериментом для бороподобных ионов должно стать измерение зеемановского расщепления в бороподобном аргоне, которое готовится в настоящее время в GSI. Как показано в работе [24], в этом случае существенную роль играют нелинейные по магнитному полю эффекты. В работах [25, 26] получены наиболее точные на сегодня значения  $g$ -фактора, а также квадратичного и кубического вкладов в эффект Зеемана для бороподобного аргона.

Изучение эффекта Зеемана для уровней сверхтонкой структуры позволяет также с значительной точностью определить магнитный момент ядра. В работе [27] предложена схема соответствующего эксперимента. Теоретические расчёты различных поправок были выполнены в работах [28, 29, 30] для водородоподобных ионов и в работе [31] для литиеподобных ионов. Высокоточное определение магнитных моментов ядер важно как для атомной спектроскопии, так и для тестирования различных моделей в ядерной физике.

Метод А-ДКБ [32] позволяет учесть магнитное поле вместе с полем ядра в нулевом приближении, что дает возможность более точного определения вкладов в  $g$ -фактор и упрощения расчетов, по сравнению с теорией возмущений.

## 2 Эффект Зеемана

Эффект Зеемана — расщепление уровней энергии электрона в атоме под действием магнитного поля. Частица, имеющая магнитный момент  $\mu_J$ , приобретает дополнительную

энергию

$$\Delta E = -\vec{\mu}_J \vec{B}.$$

Так как магнитный момент частицы сонаправлен с ее угловым моментом

$$\vec{\mu}_J \sim \vec{J},$$

то сдвиг энергии пропорционален проекции момента  $M_J$  на направление магнитного поля (в дальнейшем — ось  $z$ )

$$\Delta E \sim M_J.$$

Так как  $M_J$  может принимать значения

$$-J, -J + 1, \dots, J - 1, J,$$

то каждый уровень энергии расщепится на  $2J + 1$  подуровней. На Рис. 1 показан пример расщепления уровней  $2p_{\frac{1}{2}}$  и  $2p_{\frac{3}{2}}$ .



Рис. 1: Расщепление уровней  $2p_{\frac{1}{2}}$  и  $2p_{\frac{3}{2}}$  в магнитном поле.

### 3 Метод А-ДКБ

Рассмотрим стационарное уравнение Дирака для электрона в поле ядра в присутствии внешнего магнитного поля

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) , \quad (1)$$

где

$$\hat{H} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + mc^2\beta + V ,$$

$$V = V_{\text{nucl}}(r) + V_{\text{ext}}(r, \theta) ,$$

где  $V_{\text{nucl}}(r)$  — потенциал ядра. Для точечного ядра

$$V_{\text{nucl}}(r) = -\frac{\alpha Z}{r} ,$$

$V_{\text{ext}}(r, \theta)$  — потенциал внешнего магнитного поля

$$V_{\text{ext}}(r, \theta) = -\frac{e}{2} \left( [\vec{r} \times \vec{\alpha}] \cdot \vec{B} \right) .$$

Так как при наличии магнитного поля гамильтониан не коммутирует с квадратом полного орбитального момента, а коммутирует только с его проекцией на ось  $z$

$$[\hat{H}, \hat{J}^2] \neq 0 , \quad [\hat{H}, \hat{J}_z] = 0 ,$$

то в выражениях для волновой функции можно выделить только зависимость от угла  $\varphi$ . Решением уравнения Дирака (1) являются функции

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} G_1(r, \theta)e^{i\varphi(M-\frac{1}{2})} \\ G_2(r, \theta)e^{i\varphi(M+\frac{1}{2})} \\ iF_1(r, \theta)e^{i\varphi(M-\frac{1}{2})} \\ iF_2(r, \theta)e^{i\varphi(M+\frac{1}{2})} \end{pmatrix} . \quad (2)$$

В методе А-ДКБ [32] набор функций

$$\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} G_1(r, \theta) \\ G_2(r, \theta) \\ F_1(r, \theta) \\ F_2(r, \theta) \end{pmatrix}$$

и соответствующих им энергий находится численным решением задачи на собственные значения. Функции  $\Phi$  представляются в виде разложения по конечному набору базисных

функций:

$$\Phi(r, \theta) \cong \sum_{u=1}^4 \sum_{i_r=1}^{N_r} \sum_{i_\theta=1}^{N_\theta} C_{i_r i_\theta}^u W_{i_r i_\theta}^{(u)}(r, \theta) \quad (3)$$

$$W_{i_r i_\theta}^{(u)}(r, \theta) = \Lambda B_{i_r}(r) Q_{i_\theta}(\theta) e_u ,$$

где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2mc} D_M \\ -\frac{1}{2mc} D_M & 1 \end{pmatrix}$$

накладывает условия на соотношения между верхней и нижней частью биспинора Дирака для обеспечения правильного нерелятивистского предела.

$$D_M = (\sigma_z \cos \theta + \sigma_x \sin \theta) \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} (\sigma_x \cos \theta - \sigma_z \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left( iM \sigma_y + \frac{1}{2} \sigma_x \right) ,$$

$\{B_{i_r}(r)\}_{i_r=1}^{N_r}$  —  $B$ -сплайны некоторого порядка  $k$ ,

$Q_{i_\theta}(\theta)$  — полиномы Лежандра:

$$Q_{i_\theta}(\theta) = P_{i_\theta-1} \left( \frac{2}{\pi} \theta - 1 \right) .$$

Подстановка разложения (3) в уравнение (1) приводит к обобщенной задаче на собственные значения, решение которой дает энергии  $E$  и коэффициенты  $C_{i_r i_\theta}^u$  для конечного набора решений.

В качестве примера, на Рис. 2 представлено расщепление уровней энергии в магнитном поле для состояний  $2p_{\frac{1}{2}}, 2p_{\frac{3}{2}}$  в водородоподобном аргоне ( $Z=18$ ). Для построения графика были использованы энергии, полученные в программе А-ДКБ.

Далее в работе используется релятивистская система единиц ( $\hbar = 1, m = 1, c = 1$ ).

### 3.1 Четность состояния

В программе А-ДКБ состояние электрона задается номером уровня энергии. В достаточно сильном магнитном поле уровни могут пересекаться, а их порядок меняться (Рис. 3, 4, 5). Для того, чтобы разделить уровни с близкими энергиями, например  $2s$  и  $2p_{\frac{1}{2}}$ , необходимо производить отбор по четности.

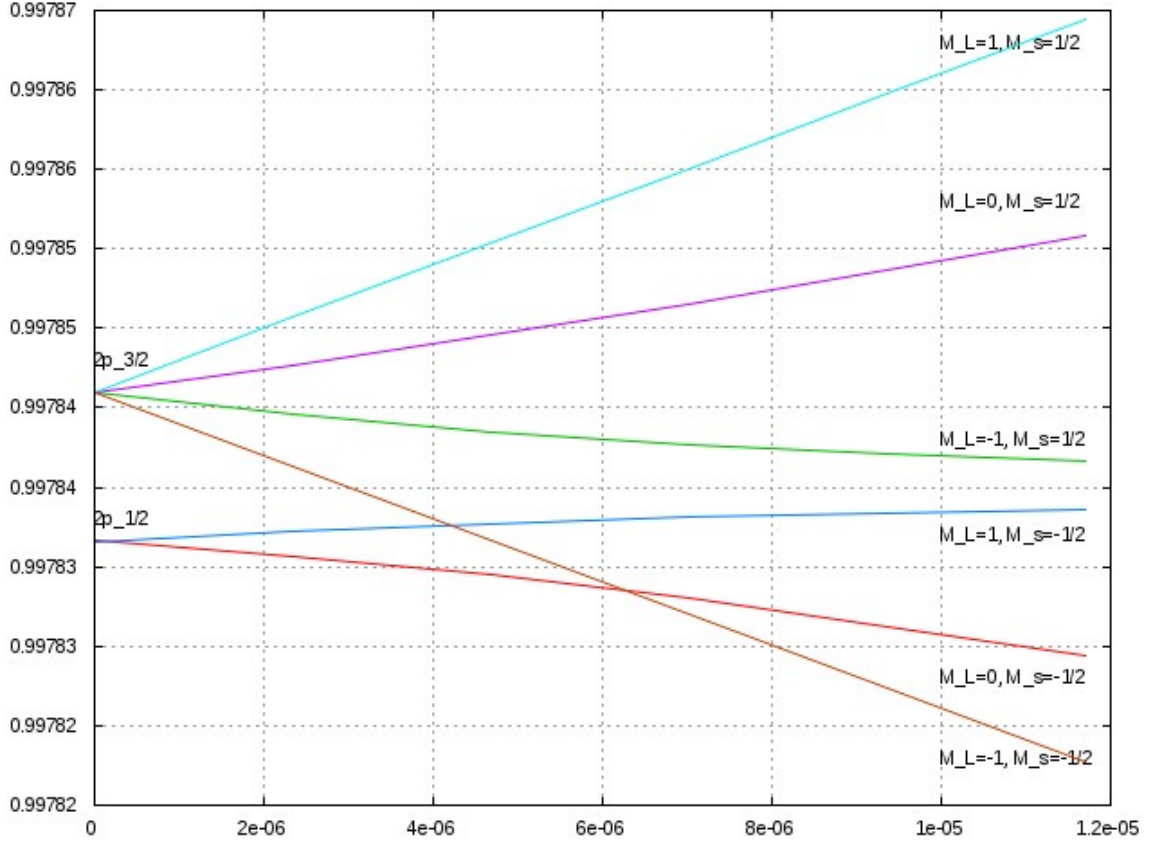


Рис. 2: Расщепление уровней энергии электрона в магнитном поле. Зависимость энергии (в релятивистских единицах) от магнитного поля (в единицах  $\lambda = \mu_0 B$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-5}$  соответствует  $B = 4,4 \times 10^4$  Тл) для  $Z=18$ , уровни  $2p_{\frac{1}{2}}, 2p_{\frac{3}{2}}$ .

Введем оператор пространственной четности  $\hat{P}$ :

$$\hat{P} : r \rightarrow r, \quad \varphi \rightarrow \pi + \varphi, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta .$$

В магнитном поле четность состояния сохраняется. Гамильтониан коммутирует с оператором четности

$$[\hat{H}, \hat{P}] = 0 ,$$

поэтому решения уравнения (1) обладают определенной четностью

$$\hat{P}\psi = \pm\psi ,$$

хотя и не обладают квантовыми числами  $j$  и  $l$ .

Для определения четности волновой функции  $a$  нужно вычислить матричный элемент  $\langle a | \hat{P} | a \rangle$ . Для этого интеграл по углу  $\varphi$  был взят аналитически:

$$\langle a | \hat{P} | a \rangle = \int_0^\infty r^2 dr \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \psi_a^\dagger(r, \theta, \varphi) \beta \psi_a(r, \pi - \theta, \pi + \varphi) =$$

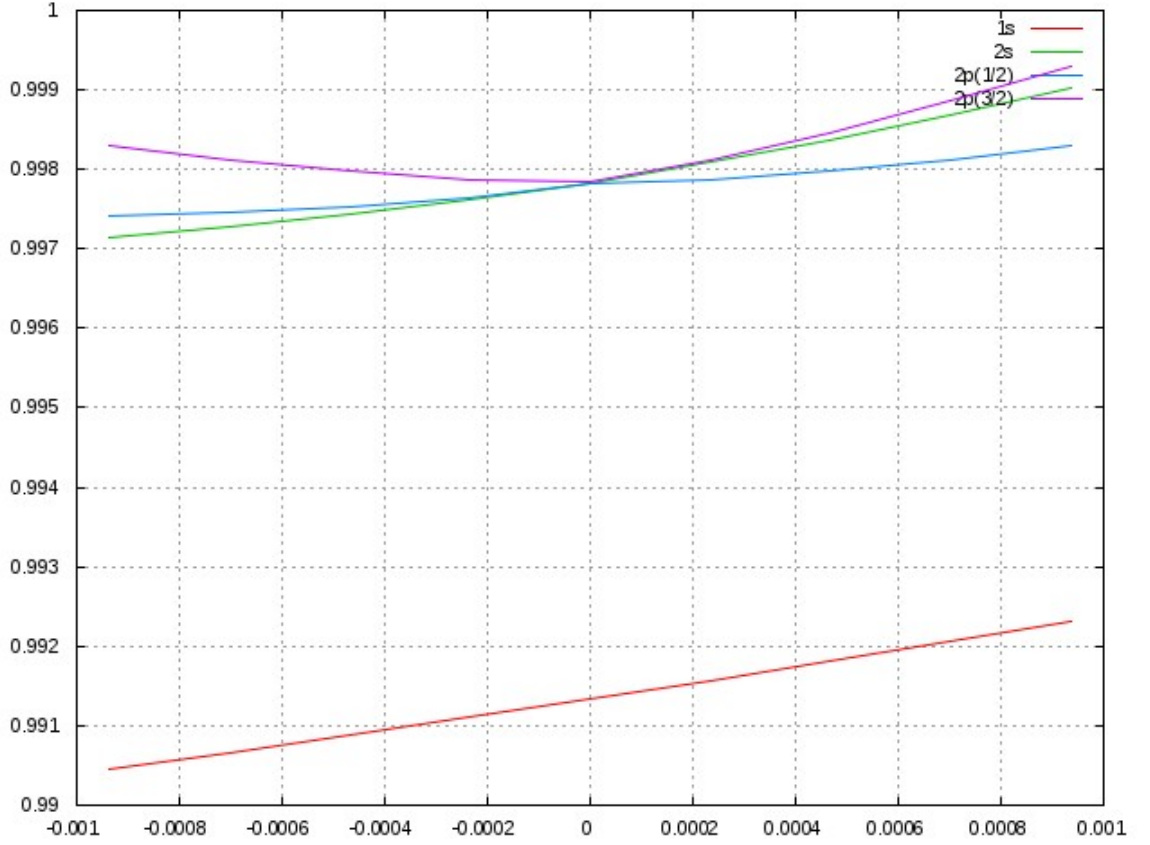


Рис. 3: Зависимость энергии (в релятивистских единицах) от величины магнитного поля (в единицах  $\lambda = \mu_0 B$ ,  $\lambda = 0.001$  соответствует  $B = 4,4 \times 10^6$  Тл) для  $Z = 18$ , уровни  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p_{\frac{1}{2}}$ ,  $2p_{\frac{3}{2}}$ ,  $M = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}
&= e^{i(m-\frac{1}{2})\pi} \int_0^{\infty} r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta (G_1(r, \theta)G_1(r, \pi - \theta) - G_2(r, \theta)G_2(r, \pi - \theta)) + \\
&+ e^{i(m-\frac{1}{2})\pi} \int_0^{\infty} r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta (-F_1(r, \theta)F_1(r, \pi - \theta) + F_2(r, \theta)F_2(r, \pi - \theta)) = \pm 1 . \quad (4)
\end{aligned}$$

По переменным  $r, \theta$  интеграл взят численно методом Гаусса. Вывод формул для (4), а также для различных матричных элементов на функциях вида (2) приведены в приложении.

## 4 Линейный и квадратичный вклады в эффект Зеемана

Рассмотрим взаимодействие с магнитным полем как возмущение. Гамильтониан электрона представим в виде:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{magn}} ,$$

где

$$\hat{H}_0 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \beta m + V(\vec{r}) ,$$



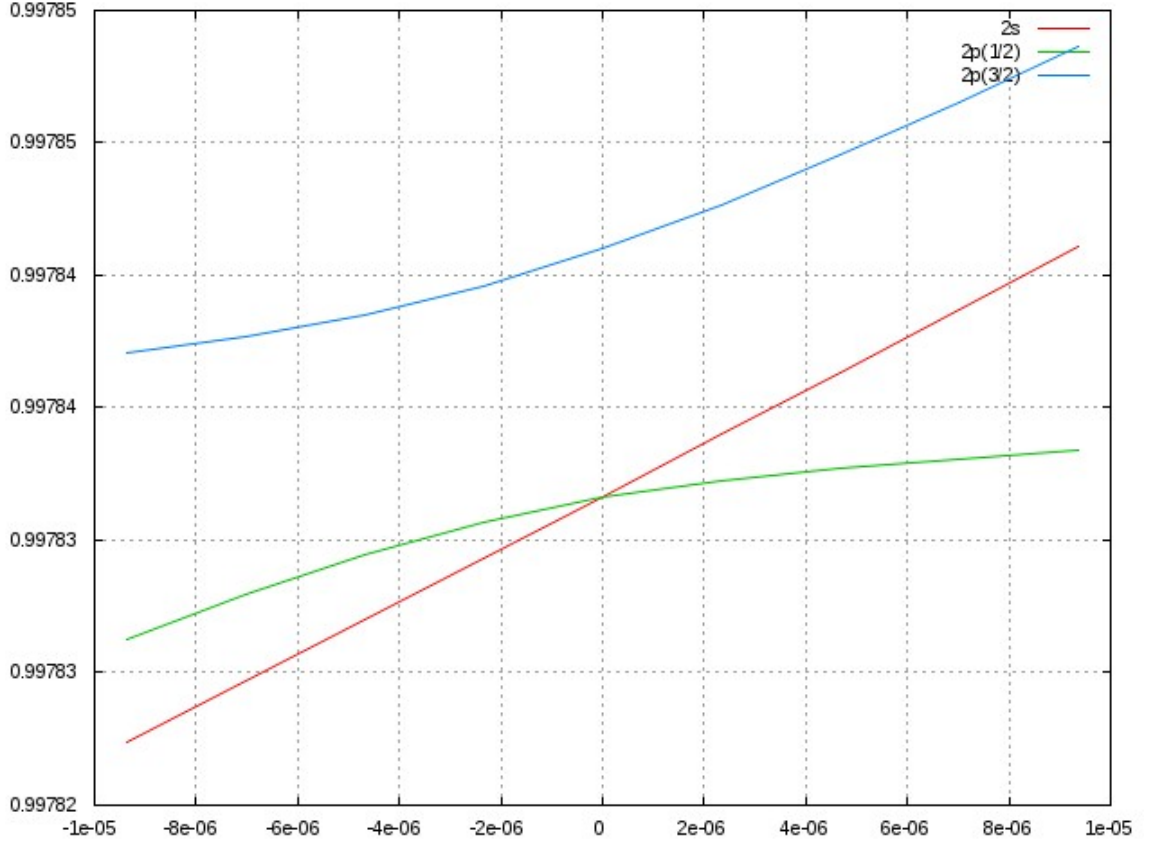


Рис. 4: Зависимость энергии (в релятивистских единицах) от величины магнитного поля (в единицах  $\lambda = \mu_0 B$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-5}$  соответствует  $B = 4,4 \times 10^4$  Тл) для  $Z = 18$ , уровни  $2s$ ,  $2p_{\frac{1}{2}}$ ,  $2p_{\frac{3}{2}}$ ,  $M = \frac{1}{2}$ .

$$\hat{H}_{\text{magn}} = \lambda \hat{U} ,$$

$$\hat{U} = [\vec{r} \times \vec{\alpha}]_z .$$

$\lambda = \mu_0 B$  — безразмерный параметр (в релятивистских единицах), который можно считать малым при полях порядка 1 Тл. Например,  $\lambda = 2.27 \times 10^{-10}$  соответствует магнитному полю  $B = 1$  Тл.

Тогда, по теории возмущений,  $E(\lambda)$  можно разложить в ряд:

$$E(\lambda) = E^{(0)} + \Delta E^{(1)} + \Delta E^{(2)} + \dots , \quad (5)$$

где

$$\Delta E^{(1)} = \mu_0 B g M , \quad \Delta E^{(2)} = (\mu_0 B)^2 g^{(2)} .$$

Здесь  $g$  —  $g$ -фактор, а коэффициент  $g^{(2)}$  совпадает с введенным в статье [24]. Формулу (5) можно представить в виде

$$E(\lambda) = E^{(0)} + \lambda g^{(1)} + \lambda^2 g^{(2)} + \dots .$$

Видно, что коэффициенты  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$  можно вычислить как производные по  $\lambda$  в точке

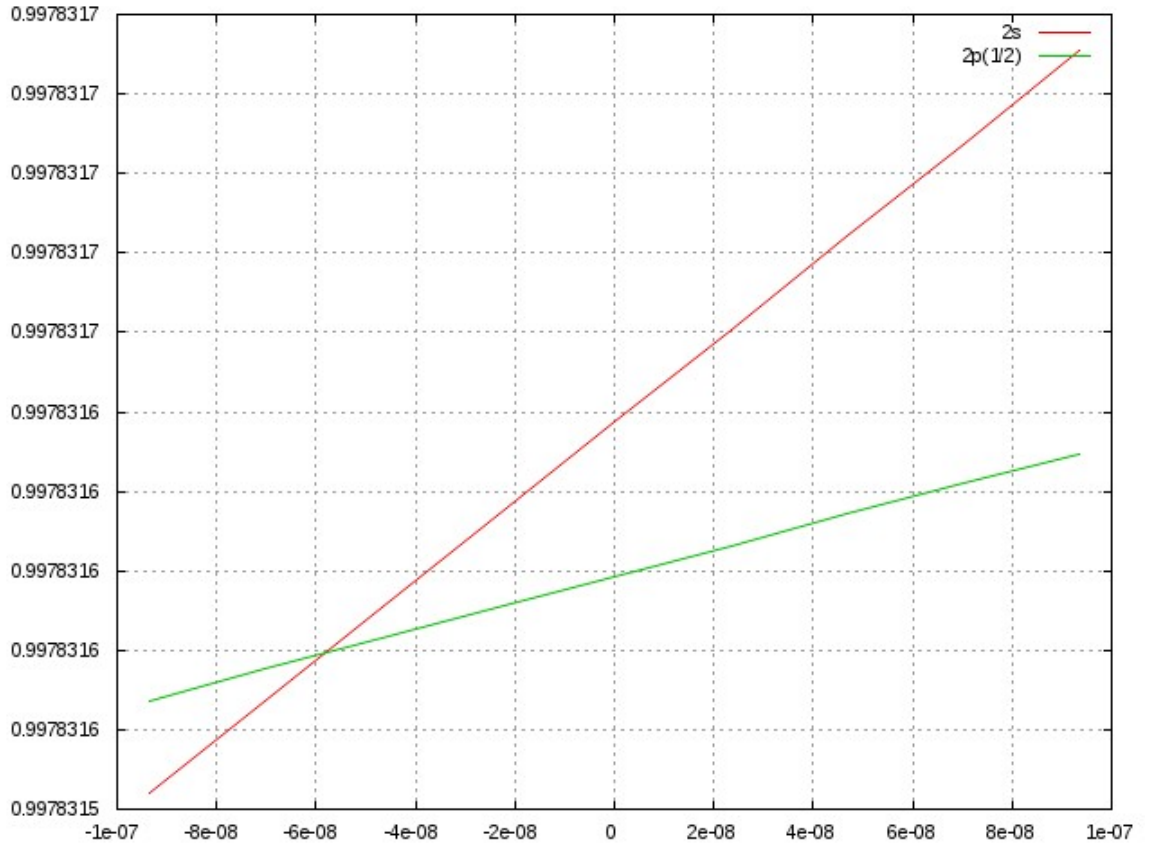


Рис. 5: Зависимость энергии (в релятивистских единицах) от величины магнитного поля (в единицах  $\lambda = \mu_0 B$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-7}$  соответствует  $B = 440$  Тл) для  $Z = 18$ , уровни  $2s$ ,  $2p_{\frac{1}{2}}$ ,  $M = \frac{1}{2}$ .

$\lambda = 0$ :

$$g^{(1)} = gM = \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0},$$

$$g^{(2)} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0}.$$

#### 4.1 Численное дифференцирование

В данной работе для нахождения коэффициентов  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$  используются энергии  $E(\lambda)$ , полученные методом А-ДКБ для состояний  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p_{\frac{1}{2}}$ ,  $2p_{\frac{3}{2}}$ . Дифференцирование производится численно методом конечных разностей по 3, 5, 7 точкам с различным шагом  $h$ . Для примера приведем формулы для первой и второй производных по 5 точкам:

$$f'(x_0) = \frac{\frac{1}{12}f(x_{-2}) - \frac{2}{3}f(x_{-1}) + \frac{2}{3}f(x_{+1}) - \frac{1}{12}f(x_{+2})}{h} + O(h^3),$$

$$f''(x_0) = \frac{-\frac{1}{12}f(x_{-2}) + \frac{4}{3}f(x_{-1}) - \frac{5}{2}f(x_0) + \frac{4}{3}f(x_{+1}) - \frac{1}{12}f(x_{+2})}{h^2} + O(h^4),$$

где

$$h = x_{i+1} - x_i$$

— шаг дифференцирования.

Погрешность при численном дифференцировании обусловлена двумя причинами:

1. Погрешность формулы численного дифференцирования. В основе любого метода численного дифференцирования лежит аппроксимация функции. Так как аппроксимация функции имеет погрешность, то и вычисленные производные также будут иметь погрешность. Эта погрешность будет возрастать с ростом шага дифференцирования  $h$ .

2. Погрешность вычисления, возникающая из-за конечной машинной точности. Этот вид погрешности растет с уменьшением шага дифференцирования.

Для примера, на Рис. 6 показан график зависимости погрешности вычисления от шага дифференцирования для  $Z = 60$ , первой производной от энергии, состояние  $2s$ .

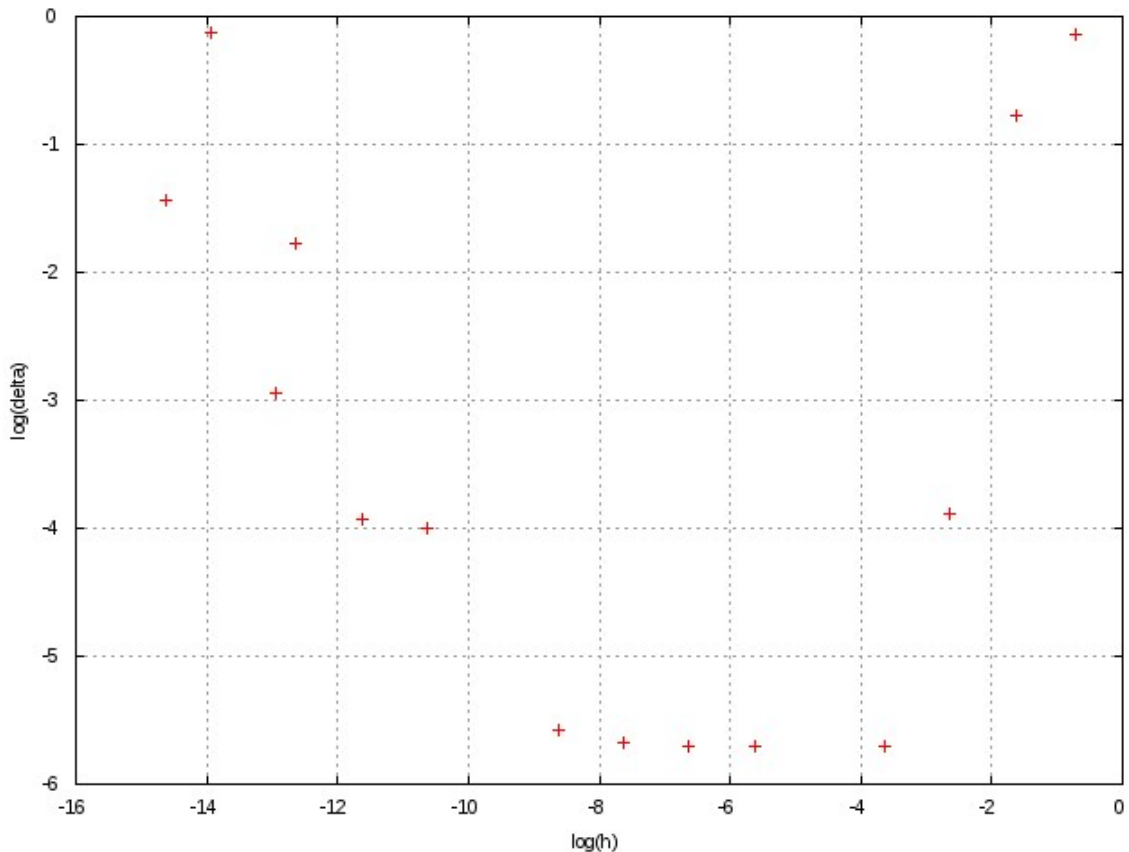


Рис. 6: Зависимость относительной погрешности от шага дифференцирования в логарифмическом масштабе (в релятивистской системе единиц), для  $Z = 60$ , коэффициента  $g^{(1)}$ , состояния  $2s$ .

Следовательно, для того, чтобы получить наиболее точные значения производных, шаг нужно выбирать в промежутке где сумма этих погрешностей имеет наименьшее значение.

Также, в данной работе, оптимальным выбрано дифференцирование по 5 точкам.

## 4.2 Результаты

Полученные результаты можно сравнить с расчетом по теории возмущений. Этот расчет по выполнен с помощью конечного базисного набора, полученного методом ДКБ [33]:

$$\Delta E^{(1)} = \langle a | H_{\text{magn}} | a \rangle ,$$

$$\Delta E^{(2)} = \sum_n \frac{\langle a | H_{\text{magn}} | n \rangle \langle n | H_{\text{magn}} | a \rangle}{E_a - E_n} ,$$

где  $a, n$  — волновые функции полученные методом ДКБ, суммирование ведется по состояниям  $n \neq a$ . В таблице 1 представлены коэффициенты  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$  для состояний  $1s, 2s, M = \frac{1}{2}$ , в таблице 2 представлены результаты для состояний  $2p_{\frac{1}{2}}, 2p_{\frac{3}{2}}, M = \frac{1}{2}$ , таблице 3 результаты для состояния  $2p_{\frac{3}{2}}, M = \frac{3}{2}$ . В целом, можно сказать, что применяемый нами метод работает, его точность зависит от различных факторов и может быть улучшена при необходимости.

Таблица 1: Коэффициенты  $g^{(1)}, g^{(2)}$  для состояний  $1s, 2s, M = \frac{1}{2}$ . А-ДКБ — результаты, полученные с помощью метода А-ДКБ, ТВ — расчет по теории возмущений.

$Z$	метод	$1s$		$2s$	
		$g^{(1)} = gM$	$g^{(2)}$	$g^{(1)} = gM$	$g^{(2)}$
6	А-ДКБ	0.999361	520.25	0.999840	7294.0
	ТВ	0.999361	520.30	0.999840	7292.5
20	А-ДКБ	0.992861602	45.61785	0.9982	647.1
	ТВ	0.992861602	45.61789	0.9986	646.8
60	А-ДКБ	0.932701566	3.92075	0.982960	62.63
	ТВ	0.932701565	3.92074	0.982958	62.60
100	А-ДКБ	0.78915336	0.657195	0.9453	15.8
	ТВ	0.78915344	0.657194	0.9450	15.7

Таблица 2: Коэффициенты  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$  для состояний  $2p_{\frac{1}{2}}$ ,  $2p_{\frac{3}{2}}$ ,  $M = \frac{1}{2}$ . А-ДКБ — результаты, полученные с помощью метода А-ДКБ, ТВ — расчет по теории возмущений.

$Z$	метод	$2p_{\frac{1}{2}}$		$2p_{\frac{3}{2}}$	
		$g^{(1)} = gM$	$g^{(2)}$	$g^{(1)} = gM$	$g^{(2)}$
6	А-ДКБ	0.33312	$-1.926 \cdot 10^6$	0.66659	$1.936 \cdot 10^6$
	ТВ	0.33317	$-1.927 \cdot 10^6$	0.66654	$1.936 \cdot 10^6$
20	А-ДКБ	0.3317	-14961.3	0.665139	15795.7
	ТВ	0.3315	-14960.9	0.665245	15795.0
60	А-ДКБ	0.316290	-121.103	0.653729	204.09
	ТВ	0.316291	-121.103	0.653729	204.06
100	А-ДКБ	0.27840	-3.86	0.629897	26.48
	ТВ	0.27835	-3.84	0.629898	26.44

Таблица 3: Коэффициенты  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$  для состояния  $2p_{\frac{3}{2}}$ ,  $M = \frac{3}{2}$ . А-ДКБ — результаты, полученные с помощью метода А-ДКБ, ТВ — расчет по теории возмущений.

$Z$	метод	$2p_{\frac{3}{2}}$	
		$g^{(1)} = gM$	$g^{(2)}$
6	А-ДКБ	1.999615	6254.3
	ТВ	1.999617	6254.4
20	А-ДКБ	1.995733	558.3
	ТВ	1.995734	558.2
60	А-ДКБ	1.961186	57.46
	ТВ	1.961188	57.45
100	А-ДКБ	1.889693	17.498
	ТВ	1.889695	17.495

## 5 Эффект Зеемана для уровней сверхтонкой структуры

### 5.1 Общие сведения

Рассмотрим систему электрон-ядро, помещенную в аксиально-симметричное магнитное поле. Эта система имеет гамильтониан  $\hat{H}$  :

$$\hat{H} = \hat{H}_0^{(n)} + \hat{H}_0^{(e)} + \hat{H}_{\text{magn}}^{(n)} + \hat{H}_{\text{magn}}^{(e)} + \hat{H}_{\text{HFS}} ,$$

где  $\hat{H}_0^{(n)}$  — гамильтониан ядра:

$$\hat{H}_0^{(n)} = \frac{\vec{P}^2}{2M} .$$

Ядро рассматривается как нерелятивистская частица массы  $M$ . В дальнейшем полагаем  $M \rightarrow \infty$ .

$\hat{H}_0^{(e)}$  — гамильтониан электрона в поле ядра:

$$\hat{H}_0^{(e)} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \beta m + V(r) ,$$

$\hat{H}_{\text{magn}}^{(n)}$  — гамильтониан взаимодействия ядра с магнитным полем:

$$\hat{H}_{\text{magn}}^{(n)} = -\vec{\mu} \vec{B} ,$$

$\hat{H}_{\text{magn}}^{(e)}$  — гамильтониан взаимодействия электрона с магнитным полем:

$$\hat{H}_{\text{magn}}^{(e)} = \mu_0 B [\vec{r} \times \vec{\alpha}]_z ,$$

$\hat{H}_{\text{HFS}}$  — гамильтониан взаимодействия электрона с магнитным моментом ядра (сверхтонкое взаимодействие):

$$\hat{H}_{\text{HFS}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu} [\vec{r} \times \vec{\alpha}]}{r^3} .$$

Будем считать вклады  $\hat{H}_{\text{magn}}^{(n)}$ ,  $\hat{H}_{\text{magn}}^{(e)}$ ,  $\hat{H}_{\text{HFS}}$  поправками к невозмущенному гамильтониану  $\hat{H}_0^{(n)} + \hat{H}_0^{(e)}$ . Система описывается волновыми функциями с определенным полным моментом  $F$  и его проекцией  $M_F$ :

$$|IjFM_F\rangle = \sum_{M_I M_j} C_{IM_I M_j}^{FM_F} |IM_I\rangle |jM_j\rangle ,$$

где  $|IM_I\rangle$  — волновая функция ядра,  $|jM_j\rangle$  — волновая функция электрона.

Тогда, по теории возмущений, поправка к энергии, обусловленная взаимодействием ядра с магнитным полем, равна

$$\Delta E \left[ \hat{H}_{\text{magn}}^{(n)} \right] = \langle IjFM_F | \hat{H}_{\text{magn}}^{(n)} | IjFM_F \rangle = \frac{\mu}{I} B M_F \frac{\langle \vec{I} \vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} = \frac{m_e}{m_p} g_I \mu_0 B M_F \frac{\langle \vec{I} \vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} .$$

А поправка на взаимодействие электрона с магнитным полем

$$\Delta E \left[ \hat{H}_{\text{magn}}^{(e)} \right] = \langle IjFM_F | \hat{H}_{\text{magn}}^{(e)} | IjFM_F \rangle = g_j \mu_0 B M_F \frac{\langle \vec{j} \vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} ,$$

где введены обозначения:

$$\frac{\langle \vec{I} \vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} = \frac{F(F+1) + I(I+1) - j(j+1)}{2F(F+1)} , \quad \frac{\langle \vec{j} \vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} = \frac{F(F+1) + j(j+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} .$$

Общая поправка на взаимодействие ядра и электрона с магнитным полем

$$\Delta E = \Delta E \left[ \hat{H}_{\text{magn}}^{(n)} \right] + \Delta E \left[ \hat{H}_{\text{magn}}^{(e)} \right] = g_F \mu_0 B M_F ,$$

где  $g_F$  —  $g$ -фактор системы ядро-электрон.

$$g_F = g_j \frac{\langle \vec{j}\vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} - \frac{m_e}{m_p} g_I \frac{\langle \vec{I}\vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle}$$

Сверхтонкое взаимодействие приводит к возникновению поправки

$$\Delta E \left[ H_{\text{magn}}^{(e)}, H_{\text{HFS}} \right] = 2 \sum_N \frac{\langle IjFM_F | H_{\text{magn}}^{(e)} | N \rangle \langle N | H_{\text{HFS}} | IjFM_F \rangle}{\epsilon_a - \epsilon_n}.$$

Где состояние  $|N\rangle$  отличается от состояния  $|IjFM_F\rangle$  только волновой функцией электрона.

С учетом этой поправки можно записать  $g$ -фактор в следующем виде:

$$g_F = g_j \frac{\langle \vec{j}\vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} - \frac{m_e}{m_p} g_I \frac{\langle \vec{I}\vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} + \Delta g_{\text{HFS}} = g_j \frac{\langle \vec{j}\vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} - (1 - \sigma) \frac{m_e}{m_p} g_I \frac{\langle \vec{I}\vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle},$$

где

$$\Delta g_{\text{HFS}} = \frac{m_e}{m_p} g_I \frac{\langle \vec{I}\vec{F} \rangle}{\langle F^2 \rangle} \sigma,$$

$$\sigma = \alpha \sum_n \frac{\langle a | W | n \rangle \langle n | U | a \rangle}{\epsilon_a - \epsilon_n}, \quad W = \frac{[\vec{r} \times \vec{\alpha}]}{r^3}, \quad U = [\vec{r} \times \vec{\alpha}]_z.$$

## 5.2 Вычисление поправки к $g$ -фактору на сверхтонкое расщепление

Для нахождения поправки на сверхтонкую структуру  $\Delta g_{\text{HFS}}$ , нужно взять первую производную от  $\Delta E \left[ \hat{H}_{\text{HFS}} \right]$  по  $\lambda$  в точке  $\lambda = 0$

$$2 \sum_n \frac{\langle a | W | n \rangle \langle n | U | a \rangle}{\epsilon_a - \epsilon_n} = \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \langle a(\lambda) | W | a(\lambda) \rangle.$$

Формула для этого матричного элемента получена в данной работе и представлена в приложении. По переменным  $r, \theta$  интеграл был взят численно методом Гаусса. Результат этого расчета можно сравнить с суммой по спектру, посчитанной на волновых функциях, полученных методом ДКБ, а также с результатами, опубликованными в статьях [28, 31, 30].

Для состояния  $1s$  в случае точечного ядра была выведена аналитическая формула [28]:

$$\sigma = \alpha \frac{\alpha Z}{3} S(\alpha Z),$$

где

$$S(\alpha Z) = \frac{2}{3} \left( \frac{2 + \gamma}{3(1 + \gamma)} + \frac{2}{\gamma(2\gamma - 1)} \left[ 1 - \frac{\gamma}{2} + (\alpha Z)^2 \right] \right) = 1 + \frac{97}{36} (\alpha Z)^2 + O((\alpha Z)^4),$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 - (\alpha Z)^2}, \quad k = (-1)^{j+l+\frac{1}{2}} \left( j + \frac{1}{2} \right).$$

Кроме того, там же был представлен расчет для конечного размера ядра. Аналогичные результаты были получены для состояния  $2s$  в работе [31]:

$$\sigma = \alpha \frac{\alpha Z}{12} S(\alpha Z),$$

где

$$\begin{aligned} S(\alpha Z) &= \frac{8}{3N} \left( \frac{1}{N+2} \left( N + \frac{10(N+1)}{3N} \right) + \frac{(\alpha Z)^2}{\gamma(\gamma+1)} \left( \frac{2(N+1)}{3-4(\alpha Z)^2} + 1 \right) - \frac{1}{\gamma} \right) = \\ &= 1 + \frac{229}{144} (\alpha Z)^2 + O((\alpha Z)^4), \end{aligned}$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 - (\alpha Z)^2}, \quad k = (-1)^{j+l+\frac{1}{2}} \left( j + \frac{1}{2} \right), \quad N = \sqrt{2(1+\gamma)}.$$

В таблице 4 представлены результаты расчетов методом А-ДКБ, а также по теории возмущений для состояний  $1s$  и  $2s$  в терминах функции  $S(\alpha Z)$  для конечного ядра. Для сравнения приведены данные из работ Московкина и соавторов [28, 31]. В таблице 5 представлено сравнение с данными из работы Ерохина и соавторов [30] для состояния  $1s$  в терминах функции  $\sigma \times 10^6$ . В таблице 6 представлены результаты для состояний  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p_{\frac{1}{2}}$ ,  $2p_{\frac{2}{3}}$  в терминах функции  $\sigma \times 10^6$ .

Таблица 4: Поправка к  $g$ -фактору на сверхтонкое взаимодействие для состояний  $1s$ ,  $2s$  в терминах функции  $S(\alpha Z)$ . Сравнение с данными, полученными по теории возмущений и результатами работ [28, 31].

$Z$	метод	$1s$	$2s$
6	А-ДКБ	1.00493	1.0019
	ТВ	1.00490	1.0028
	Московкин	1.00518	1.0030
16	А-ДКБ	1.0373	1.0209
	ТВ	1.0371	1.0219
	Московкин	1.0374	1.0222
32	А-ДКБ	1.1597	1.0947
	ТВ	1.1595	1.0961
	Московкин	1.1583	1.0956
92	А-ДКБ	3.5791	2.9283
	ТВ	3.5803	2.9368
	Московкин	3.583(3)	



Таблица 5: Поправка к  $g$ -фактору на сверхтонкое взаимодействие для состояния  $1s$  в терминах  $\sigma \times 10^6$ . Сравнение с данными полученными по теории возмущений и результатами работы [30].

$Z$	метод	$1s$
8	А-ДКБ	143.34
	ТВ	143.35
	Ерохин	143.31
20	А-ДКБ	375.98
	ТВ	376.05
	Ерохин	375.96
32	А-ДКБ	659.05
	ТВ	658.96
	Ерохин	657.93
83	А-ДКБ	4122
	ТВ	4112
	Ерохин	4112

Таблица 6: Поправка к  $g$ -фактору на сверхтонкое взаимодействие для состояний  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p_{\frac{1}{2}}$ ,  $2p_{\frac{3}{2}}$  в терминах  $\sigma \times 10^6$ . Сравнение с данными полученными по теории возмущений.

$Z$	метод	$1s$	$2s$	$2p_{\frac{1}{2}}$	$2p_{\frac{3}{2}}$
6	А-ДКБ	107.084	26.70	24717	-24670.0
	ТВ	107.080	26.72	24718	-24670.6
16	А-ДКБ	295	72.5	9325	9197
	ТВ	292	72.6	9318	9189
32	А-ДКБ	659.1	155.5	4748	-4487
	ТВ	659.0	155.7	4747	-4485
92	А-ДКБ	5848	1196	2240.9	-1176.8
	ТВ	5850	1198	2240.8	-1176.5

### 5.3 Формула Брейта-Раби

В предыдущем разделе рассматривалась поправка, учитывающая сверхтонкое расщепление и взаимодействие с магнитным полем в первом порядке. Однако, метод А-ДКБ позволяет учесть магнитное поле во всех порядках. Этот результат будет соответствовать формуле Брейта-Раби. Зависимость энергетических уровней от магнитного поля будет примерно такая же, как показано на Рис. 2 для уровней тонкой структуры.

При нулевом магнитном поле система описывается волновыми функциями  $|IjFM_F\rangle$ , где  $I$  — полный момент ядра,  $j$  — полный момент электрона,  $\vec{F} = \vec{I} + \vec{j}$ ,  $M_F = M_I + M_j$ ;  $M_I$ ,  $M_j$  — проекции момента ядра и электрона соответственно. В присутствии магнитного поля полный момент электрона  $j$ , а также и полный момент системы  $F$ , не сохраняется.

Система описывается волновыми функциями

$$|IM_I\gamma M_j\rangle = |IM_I\rangle|\gamma M_j\rangle ,$$

$|IM_I\rangle$  — волновая функция ядра,  $|\gamma M_j\rangle$  — волновая функция электрона,  $\gamma$  — совокупность квантовых чисел помимо  $M_j$ .

В данной работе невозмущенным гамильтонианом будем считать гамильтониан с учетом взаимодействия с электрона с магнитным полем:

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_0^{(n)} + \hat{H}_0^{(e)} + \hat{H}_{\text{magn}}^{(e)} .$$

Поправки к невозмущенному гамильтониану  $H_{\text{magn}}^{(n)}$  и  $H_{\text{HFS}}$  нужно учитывать по теории возмущений. Тогда поправка на взаимодействие ядра с магнитным полем равна:

$$\Delta E \left[ \hat{H}_{\text{magn}}^{(n)} \right] = \langle IM_I\gamma M_j | \hat{H}_{\text{magn}}^{(n)} | IM_I\gamma M_j \rangle = -\frac{\mu B M_I}{I} = \frac{m_e}{m_p} g_I \mu_0 B M_I .$$

Поправка на сверхтонкое взаимодействие:

$$\Delta E \left[ \hat{H}_{\text{HFS}} \right] = \langle IM_I\gamma M_j | \hat{H}_{\text{HFS}} | IM_I\gamma M_j \rangle = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu M_I}{I} \langle \gamma M_j | \hat{W} | \gamma M_j \rangle .$$

Диагональный элемент

$$\langle \gamma M_j | \hat{W} | \gamma M_j \rangle = \langle \gamma M_j | W_z | \gamma M_j \rangle .$$

При движении из области больших магнитных полей в сторону уменьшения, состояния с разными  $M_I$  и  $M_j$  будут смешиваться. Следовательно, оператор  $H_{\text{HFS}}$  будет иметь недиагональные элементы.

$$\begin{aligned} \langle a | H_{\text{HFS}} | b \rangle &= \langle IM_I^a | \vec{\mu} | IM_I^b \rangle \langle \gamma M_j^a | \hat{W} | \gamma M_j^b \rangle = \\ &= -\delta_{M_I^a, M_I^b+1} \frac{\mu\mu_0 M_I^a}{2\pi I} \sqrt{(I + M_I^a + 1)(I - M_I^a)} \langle \gamma M_j^a | W_+ | \gamma M_j^b \rangle - \\ &\quad -\delta_{M_I^a, M_I^b-1} \frac{\mu\mu_0 M_I^a}{2\pi I} \sqrt{(I - M_I^a + 1)(I + M_I^a)} \langle \gamma M_j^a | W_- | \gamma M_j^b \rangle + \\ &\quad + \delta_{M_I^a, M_I^b} \frac{\mu\mu_0 M_I^a}{2\pi I} \langle \gamma M_j^a | W_0 | \gamma M_j^b \rangle , \end{aligned} \quad (6)$$

где  $W_{+,-,0}$  сферические компоненты векторного оператора

$$\vec{W} = \frac{[\vec{r} \times \vec{\alpha}]}{r^3} .$$

Формулы для матричных элементов  $W_{+,-,0}$  выведены в данной работе и приведены в приложении. Вычисление недиагональных элементов (6) и диагонализация матрицы  $\langle a | H_{\text{HFS}} | b \rangle$

позволит получить зеемановское расщепление в произвольном магнитном поле, приближенно описываемое формулой Брейта-Раби.

## 6 Заключение

В данной работе были вычислены линейный и квадратичный вклады в эффект Зеемана для состояний  $1s, 2s, 2p_{\frac{1}{2}}, 2p_{\frac{3}{2}}$ , имеется хорошая сходимость с расчетом по теории возмущений. Получены формулы для матричных элементов на волновых функциях в присутствии магнитного поля для различных одноэлектронных и двухэлектронных операторов. Вычислена поправка к  $g$ -фактору водородоподобного иона на сверхтонкое расщепление. Результаты для состояний  $1s, 2s$  согласуются с уже опубликованными. Результаты для состояний  $2p_{\frac{1}{2}}, 2p_{\frac{3}{2}}$  являются новыми. В дальнейшем, с использованием развитого метода, планируется воспроизвести и уточнить формулу Брейта-Раби, описывающую зеемановское расщепление уровней сверхтонкой структуры в произвольном магнитном поле.

## 7 Приложение

При вычислении матричных элементов с решениями уравнения Дирака в магнитном поле интеграл по  $\varphi$  вычисляется аналитически, а интегралы по  $r, \theta$  только численно. Ниже приведены соответствующие формулы.

$$\langle a | \hat{F} | b \rangle = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \psi_a^\dagger(r, \theta, \varphi) \hat{F} \psi_b(r, \theta, \varphi)$$

$$\psi_a(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} G_1^a(r, \theta) e^{i\varphi(M-\frac{1}{2})} \\ G_2^a(r, \theta) e^{i\varphi(M+\frac{1}{2})} \\ iF_1^a(r, \theta) e^{i\varphi(M-\frac{1}{2})} \\ iF_2^a(r, \theta) e^{i\varphi(M+\frac{1}{2})} \end{pmatrix}$$

Матричный элемент оператора пространственной четности:

$$\langle a | \hat{P} | a \rangle = e^{-i(M+\frac{1}{2})\pi} \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot (G_1(r, \theta)G_1(r, \pi - \theta) - G_2(r, \theta)G_2(r, \pi - \theta) + F_1(r, \theta)F_1(r, \pi - \theta) - F_2(r, \theta)F_2(r, \pi - \theta))$$

Матричные элементы одноэлектронных операторов:

$$\langle a | f(r, \theta) | b \rangle = \delta_{M_a, M_b} \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta f(r, \theta) (G_1^a G_1^b + G_2^a G_2^b + F_1^a F_1^b + F_2^a F_2^b)$$

$$\begin{aligned}
\langle a|f(r, \theta) (\vec{r} \cdot \vec{\alpha})|b\rangle &= \\
&= \delta_{M_a, M_b} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta r i f(r, \theta) (\cos \theta (G_1^a F_1^b - G_2^a F_2^b - F_1^a G_1^b + F_2^a G_2^b) + \\
&\hspace{20em} + \sin \theta (G_1^a F_2^b + G_2^a F_1^b - F_1^a G_2^b - F_2^a G_1^b))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle a|f(r, \theta) \beta (\vec{r} \cdot \vec{\alpha})|b\rangle &= \\
&= \delta_{M_a, M_b} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta r i f(r, \theta) (\cos \theta (G_1^a F_1^b - G_2^a F_2^b + F_1^a G_1^b - F_2^a G_2^b) + \\
&\hspace{20em} + \sin \theta (G_1^a F_2^b + G_2^a F_1^b + F_1^a G_2^b + F_2^a G_1^b))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle a|f(r, \theta) [\vec{r} \times \vec{\alpha}]_+|b\rangle &= \\
&= \delta_{M_a, M_b-1} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta r f(r, \theta) (\sin \theta (G_1^a F_1^b + G_2^a F_2^b + F_1^a G_1^b - F_2^a G_2^b) + \\
&\hspace{20em} + \cos \theta (2G_2^a F_1^b - 2F_2^a G_1^b))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle a|f(r, \theta) [\vec{r} \times \vec{\alpha}]_-|b\rangle &= \\
&= \delta_{M_a, M_b+1} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta r f(r, \theta) (\sin \theta (G_1^a F_1^b - G_2^a F_2^b - F_1^a G_1^b + F_2^a G_2^b) - \\
&\hspace{20em} - \cos \theta (2G_1^a F_2^b - 2F_1^a G_2^b))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle a|f(r, \theta) [\vec{r} \times \vec{\alpha}]_z|b\rangle &= \\
&= \delta_{M_a, M_b} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta r f(r, \theta) \sin \theta (G_1^a F_2^b - G_2^a F_1^b - F_1^a G_2^b + F_2^a G_1^b)
\end{aligned}$$

$$\langle a|f(r, \theta) \beta [\vec{r} \times \vec{\alpha}]_+|b\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{M_a, M_b-1} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta r f(r, \theta) (\sin \theta (G_1^a F_1^b + G_2^a F_2^b - F_1^a G_1^b + F_2^a G_2^b) + \\
&\hspace{25em} + \cos \theta (2G_2^a F_1^b + 2F_2^a G_1^b))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle a | f(r, \theta) \beta [\vec{r} \times \vec{\alpha}]_- | b \rangle &= \\
&= \delta_{M_a, M_b+1} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta r f(r, \theta) (\sin \theta (G_1^a F_1^b - G_2^a F_2^b + F_1^a G_1^b - F_2^a G_2^b) - \\
&\hspace{25em} - \cos \theta (2G_1^a F_2^b + 2F_1^a G_2^b))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle a | f(r, \theta) \beta [\vec{r} \times \vec{\alpha}]_z | b \rangle &= \\
&= \delta_{M_a, M_b} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\theta r f(r, \theta) \sin \theta (G_1^a F_2^b - G_2^a F_1^b + F_1^a G_2^b - F_2^a G_1^b)
\end{aligned}$$

Матричные элементы двухэлектронных операторов:

$$\begin{aligned}
\left\langle ab \left| \frac{1}{r_{12}} \right| cd \right\rangle &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{lm} \delta_{m, m_c - m_a} \delta_{m, m_d - m_b} \frac{(-1)^m}{2\pi} \int_0^\infty r_1^2 dr_1 \int_0^\infty \frac{r_1^l}{r_1^{l+1}} r_2^2 dr_2 \times \\
&\times \int_{-\pi}^\pi \sin \theta_1 \Theta_{lm}(\cos \theta_1) (G_1^a G_1^c + G_2^a G_2^c + F_1^a F_1^c + F_2^a F_2^c) d\theta_1 \times \\
&\times \int_{-\pi}^\pi \sin \theta_2 \Theta_{lm}(\cos \theta_2) (G_1^b G_1^d + G_2^b G_2^d + F_1^b F_1^d + F_2^b F_2^d) d\theta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle ab \left| \frac{\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2}{r_{12}} \right| cd \right\rangle &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{lm\mu} \delta_{m, m_c + m_a} \delta_{m, m_d + m_b} \frac{(-1)^{m+\mu}}{2\pi} \int_0^\infty r_1^2 dr_1 \times \\
&\times \int_0^\infty \frac{r_1^l}{r_1^{l+1}} r_2^2 dr_2 \int_{-\pi}^\pi \sin \theta_1 \Theta_{lm}(\cos \theta_1) d\theta_1 \int_{-\pi}^\pi \sin \theta_2 \Theta_{lm}(\cos \theta_2) d\theta_2 \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \begin{pmatrix} G_1^a & G_2^a \end{pmatrix} \sigma_\mu \begin{pmatrix} F_1^c \\ F_2^c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1^a & F_2^a \end{pmatrix} \sigma_\mu \begin{pmatrix} G_1^c \\ G_2^c \end{pmatrix} \right) \times \\ & \times \left( \begin{pmatrix} G_1^b & G_2^b \end{pmatrix} \sigma_{-\mu} \begin{pmatrix} F_1^d \\ F_2^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1^b & F_2^b \end{pmatrix} \sigma_{-\mu} \begin{pmatrix} G_1^d \\ G_2^d \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

где

$$\Theta_{lm}(\cos(\theta)) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta))$$

## Список литературы

- [1] N. Hermanspahn, H. Häffner, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, and G. Werth, Phys. Rev. Lett. **84**, 427 (2000).
- [2] H. Häffner, T. Beier, N. Hermanspahn, H.-J. Kluge, W. Quint, S. Stahl, J. Verdú, and G. Werth, Phys. Rev. Lett. **85**, 5308 (2000).
- [3] J. L. Verdú, S. Djekić, S. Stahl, T. Valenzuela, M. Vogel, G. Werth, T. Beier, H.-J. Kluge, and W. Quint, Phys. Rev. Lett. **92**, 093002 (2004).
- [4] S. Sturm, A. Wagner, B. Schabinger, J. Zatorski, Z. Harman, W. Quint, G. Werth, C. H. Keitel, and K. Blaum, Phys. Rev. Lett. **107**, 023002 (2011).
- [5] S. Sturm, A. Wagner, M. Kretzschmar, W. Quint, G. Werth, and K. Blaum, Phys. Rev. A **87**, 030501(R) (2013).
- [6] S. Sturm, F. Köhler, J. Zatorski, A. Wagner, Z. Harman, G. Werth, W. Quint, C. H. Keitel, and K. Blaum, Nature **506**, 467 (2014).
- [7] A. Wagner, S. Sturm, F. Köhler, D. A. Glazov, A. V. Volotka, G. Plunien, W. Quint, G. Werth, V. M. Shabaev, and K. Blaum, Phys. Rev. Lett. **110**, 033003 (2013).
- [8] F. Koehler, K. Blaum, M. Block, S. Chenmarev, S. Eliseev, D. A. Glazov, M. Goncharov, J. Hou, A. Kracke, D. A. Nesterenko, Yu. N. Novikov, W. Quint, E. Minaya Ramirez, V. M. Shabaev, S. Sturm, A. V. Volotka, and G. Werth, Nature Communications **7**, 10246 (2016).
- [9] V. M. Shabaev and V. A. Yerokhin, Phys. Rev. Lett. **88**, 091801 (2002).
- [10] A. V. Nefiodov, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **89**, 081802 (2002).
- [11] V. A. Yerokhin, P. Indelicato, and V. M. Shabaev, Phys. Rev. Lett. **89**, 143001 (2002); Phys. Rev. A **69**, 052503 (2004).

- [12] K. Pachucki, A. Czarnecki, U. D. Jentschura, and V. A. Yerokhin, Phys. Rev. A **72**, 022108 (2005).
- [13] K. Pachucki, Phys. Rev. A **78**, 012504 (2008).
- [14] V. A. Yerokhin and U. D. Jentschura, Phys. Rev. A **81**, 012502 (2010).
- [15] V. A. Yerokhin and Z. Harman, Phys. Rev. A **88**, 042502 (2013).
- [16] Z.-C. Yan, Phys. Rev. Lett. **86**, 5683 (2001); Phys. Rev. A **66**, 022502 (2002); J. Phys. B **35**, 1885 (2002).
- [17] V. M. Shabaev, D. A. Glazov, M. B. Shabaeva, V. A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. A **65**, 062104 (2002).
- [18] D. A. Glazov, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, A. V. Volotka, V. A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. A **70**, 062104 (2004).
- [19] A. V. Volotka, D. A. Glazov, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Rev. Lett. **103**, 033005 (2009).
- [20] A. V. Volotka, D. A. Glazov, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Rev. Lett. **112**, 253004 (2014).
- [21] A. V. Volotka, D. A. Glazov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, Ann. Phys. (Berlin) **525**, 636 (2013).
- [22] V. M. Shabaev, D. A. Glazov, N. S. Oreshkina, A. V. Volotka, G. Plunien, H.-J. Kluge, and W. Quint, Phys. Rev. Lett. **96**, 253002 (2006).
- [23] V. A. Yerokhin, E. Berseneva, Z. Harman, I. I. Tupitsyn, and C. H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **116**, 100801 (2016).
- [24] D. von Lindenfels, M. Wiesel, D. A. Glazov, A. V. Volotka, M. M. Sokolov, V. M. Shabaev, G. Plunien, W. Quint, G. Birkl, A. Martin, and M. Vogel, Phys. Rev. A **87**, 023412 (2013).
- [25] D. A. Glazov, A. V. Volotka, A. A. Schepetnov, M. M. Sokolov, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Scr. **T156**, 014014 (2013).
- [26] A. A. Shchepetnov, D. A. Glazov, A. V. Volotka, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, J. Phys. Conf. Ser. **583**, 012001 (2015).
- [27] W. Quint, D. Moskovkin, V. M. Shabaev and M. Vogel, Phys. Rev. A **78**, 032517 (2008).
- [28] D. L. Moskovkin, N. S. Oreshkina, V. M. Shabaev, T. Beier, G. Plunien, W. Quint and G. Soff, Phys. Rev. A **70**, 032105 (2004).

- [29] D. L. Moskovkin and V. M. Shabaev, Phys. Rev. A **73**, 052506 (2006).
- [30] V. A. Yerokhin, K. Pachucki, Z. Harman, and C. H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **107**, 043004 (2011); Phys. Rev. A **85**, 022512 (2012),
- [31] D. L. Moskovkin, V. M. Shabaev and W. Quint, Phys. Rev. A **77**, 063421 (2008).
- [32] E. B. Rozenbaum, D. A. Glazov, V. M. Shabaev, K. E. Sosnova, and D. A. Telnov, Phys. Rev. A **89**, 012514 (2014).
- [33] V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, V. A. Yerokhin, G. Plunien, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **93**, 130405 (2004).