САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Буркина Наталья Николаевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕЖИМ ПРОФИЛАКТИКИ ПРИ НЕМОНОТОННОМ ПРОЦЕССЕ ИЗНОСА

Направление 010400

Прикладная математика, фундаментальная информатика
и основы программирования

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Расова С. С.

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Введение

Рассматривается техническая система. Её режим функционирования состоит в чередовании периодов работы и ремонта. При этом ремонт может быть двух типов: профилактический ремонт и ремонт после внезапного отказа. Предполагается, что опасность отказа системы пропорциональна степени износа некоторой детали. Также будем считать, что возможно наблюдение за процессом износа. В данной работе в качестве процесса износа рассматривается кусочно-монотонный процесс – процесс регенерации (при достижении некоторого фиксированного уровня происходит мгновенная замена детали, вследствие чего уровень износа становится равен нулю), а на интервалах монотонности – процесс максимальных значений винеровского процесса. Необходимо найти правило, определяющее моменты времени профилактических отключений.

В работе [6] было показано, что в случае монотонного процесса износа оптимальным является отключение системы на профилактический ремонт сразу при достижении процессом уровня b, определяемого из некоторого уравнения. В работе [5] в качестве процесса износа был рассмотрен кусочно-монотонный процесс, на его интервалах монотонности - обращённый гамма процесс. Там же было показано, что в случае немонотонного процесса не всегда оптимально отключать систему при достижении процессом уровня b. Возможны ситуации, когда каждое последующее пересечение этого уровня предпочтительнее предыдущего. В таком случае профилактический ремонт осуществлять нецелесообразно.

1 Вспомогательные сведения

С точки зрения используемого математического аппарата данная глава опирается на книги [1, 3, 4].

1.1 Опасность отказа

Определение 1.1. Отказ – частичная или полная утрата или видоизменение свойств изделий, которые приводят к полной потере работоспособности системы.

Будем считать, что в момент $t = 0$ система начинает работу, в момент ζ_i происходит отказ. Функция распределения величины ζ_i:

$$Q(t) = P\left\{\zeta_i \le t\right\}.$$

Определение 1.2. Функция

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - P\left\{\zeta_i \le t\right\}$$

называется функцией надёжности.

Она означает вероятность безотказной работы за время t. Следует отметить следующие свойства функции надёжности:

1) $P(0) = 1$,

2) $P(t) \to 0$ при $t \to \infty$,

3) функция надёжности является монотонно убывающей.

Дадим определение функции опасности отказа. Для этого предположим, что элемент некоторой системы проработал без отказов до момента времени t. Пусть событие A означает безотказную работу элемента на $(0, t)$, событие B – безотказную работу элемента на (t, t_1). Тогда вероятность того, что этот элемент не откажет на (t, t_1):

$$P(t, t_1) = P\left\{B|A\right\} = \frac{P\left\{AB\right\}}{P\left\{A\right\}}.$$

Заметим, что событие AB состоит в безотказной работе элемента на $(0, t_1)$. Следовательно,

$$P(t, t_1) = \frac{P(t_1)}{P(t)}.$$

Тогда вероятность отказа:

$$Q(t,t_1) = 1 - P(t,t_1) = 1 - \frac{P(t_1)}{P(t)} = \frac{P(t) - P(t_1)}{P(t)}.$$

Возьмём теперь $t_1 = t + \Delta t$, где $\Delta t \to 0$. Имеем:

$$Q(t,t_1) = \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{P(t)} = \frac{-(P(t+\Delta t) - P(t))}{P(t)\Delta t}\Delta t =$$

$$= -\frac{P'(t)}{P(t)}\Delta t + o(\Delta t).$$

.

Определение 1.3. Функцию

$$\psi(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} \tag{1}$$

будем называть опасностью отказа.

Опасность отказа $\psi(t)$ — вероятность того, что элемент, работавший без отказов до момента t, откажет в следующую единицу времени.

1.2 Вероятность безотказной работы

В дальнейшем нам понадобится знать вероятность безотказной работы на отрезке $(0,t)$. Для того чтобы найти эту вероятность, разрешим уравнение (1) относительно функции надёжности $P(t)$:

$$\int_0^t \frac{dP(s)}{P(s)} = -\int_0^t \psi(s)ds,$$

$$\ln\left(P(s)\right)\Big|_0^t = -\int_0^t \psi(s)ds,$$

$$\ln\frac{P(t)}{P(0)} = -\int_0^t \psi(s)ds,$$

$$\frac{P(t)}{P(0)} = \exp\left(-\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

Учитывая то свойство функции надёжности, что в начальный момент времени, элемент всегда находится в рабочем состоянии, т.е. $P(0) = 1$, имеем вероятность безотказной работы элемента на $(0,t)$:

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

1.3 Процесс максимальных значений винеровского процесса

Определение 1.4. Процессом с независимыми приращениями называется процесс $\xi(t)$, обладающий следующим свойством: при $t_1 < ... < t_n$ $(n \geq 3)$ разности $\xi(t_2) - \xi(t_1), ..., \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ взаимно независимы.

Определение 1.5. Случайный процесс $\xi(t)$ будем называть винеровским процессом, если выполняются следующие условия:

1) Процесс $\xi(t)$ является процессом с независимыми приращениями;
2) Случайная величина $\xi(t) - \xi(s)$, $s < t$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией $t - s$;
3) Траектории процесса $\xi(t)$ непрерывны.

Определение 1.6. Для непрерывного одномерного процесса $\xi(t)$ с начальной точкой $\xi(0) = x_1$ его процессом максимальных значений называется процесс

$$\Theta(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \xi(s).$$

Пусть D_0 — множество кусочно-постоянных функций $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$, имеющих на каждом конечном интервале конечное число точек разрыва (ступенчатая функция), непрерывных справа, что определяет их в точках разрыва.

Пусть $\theta_t : D_0 \to D_0$ — оператор сдвига,

$$f(s) \circ \theta_t f = (\theta_t f)(s) = f(t + s), \qquad s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Пусть $\mathcal{F}_t$ — неубывающее семейство σ-алгебр в пространстве элементарных событий, $t \in T \subseteq \mathbb{R}^1 : \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ при $s \leq t$. Все эти σ-алгебры будем предполагать под-σ-алгебрами основной σалгебры $\mathcal{F}$.

Определение 1.7. Пусть $\tau(\omega)$ — случайная величина, принимающая значение из T или значение $+\infty$. Мы говорим, что τ — марковский момент, если для любого $t \in T$ событие

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

2 Постановка задачи

Рассматривается техническая система. Её режим функционирования состоит в чередовании периодов работы и ремонта. При этом ремонт может быть двух типов: профилактический ремонт и ремонт после внезапного отказа. Предполагается, что опасность отказа системы пропорциональна степени износа некоторой детали. Также будем считать, что возможно наблюдение за процессом износа $\xi(t)$, а значит и за опасностью отказа $\psi(\xi(t))$, где ψ - неубывающая функция. Так как для рассматриваемого нами процесса максимальных значений винеровского процесса справедливо $\xi(t) \geq 0$ с вероятностью единица, то далее будем считать $\psi(\xi(t)) = \xi(t)$.

2.1 Процесс регенерации

В данной работе в качестве процесса износа рассматривается кусочно монотонный процесс — процесс регенерации с моментами первого выхода из интервала $(0; c)$ в качестве моментов регенерации и с возвращениями в точку 0 в момент регенерации. Траектория такого процесса состоит из последовательности сдвинутых отрезков непрерывных неубывающих процессов со значениями из интервалов $[0; c)$, $c > 0$. Этот процесс определяется последовательностью независимых одинаково распределенных процессов $X_k(t)$, причем $X_k(0) = 0$. Каждый процесс $X_k(t)$ является непрерывным неубывающим процессом на интервале $[0; S_k)$, где S_k — первый момент достижения уровня c после k-ого нуля. Предполагается, что все S_k — конечны. Тогда k-тый момент достижения уровня c после 1-ого нуля $\tau_c^k = \sum_{i=1}^{k} S_i$ конечен и стремится к бесконечности с вероятностью единица при $k \to \infty$. Тогда процесс регенерации определен однозначно:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(S_k + \left(t - \tau_c^k\right)\right) I_{[\tau_c^k, \tau_c^{k+1})}(t),$$

где $I_A(t)$ — индикаторная функция множества A. τ_c^k — моменты регенерации, $X(\tau_c^k) = 0$, $X(\tau_c^k - 0) = c$. Такой процесс полностью определяется распределением отрезка траектории до момента первого возвращения на уровень ноль, а дальше используется марковское свойство процесса относительно этого момента. В данной работе на интервалах монотонности в качестве процесса износа рассмотрен процесс максимальных значений винеровского процесса со сдвигом с параметрами локальной дисперсии D и сдвига μ. Известно [2], что винеровсий процесс является марковским процессом, а значит и полумарковским. Процесс максимальных значений сохраняет свойство полумарковости винеровсого процесса [6].

Необходимо найти правило, определяющее моменты времени профилактических отключений.

2.2 Процесс функционирования системы

В рамках данной модели под циклом будем понимать время, прошедшее от момента установления одного из состояний до смены этого состояния другим. Пусть $T_i \geq 0$ — длительность цикла, $\xi_i(t)$ — частный случайный процесс, $t \geq 0$. Совокупность таких пар $(T_i, \xi_i), (i = \overline{1, \infty})$ определяет процесс функционирования системы $\xi(t)$.

Будем рассматривать три типа частных случайных процессов:

1) Процесс, принимающий постоянное значение $\xi_i(t) = S_1$ на интервале $[0, T_i)$, где под состоянием S_1 понимается ремонт после отказа, под T_i — длительность ремонта после отказа. Функция распределения $F_1(t)$, где $t \geq 0$, одинакова для всех частных случайных процессов первого типа.

2) Процесс, принимающий постоянное значение $\xi_i(t) = S_2$ на интервале $[0, T_i)$, где под состоянием S_2 понимается профилактический ремонт, под T_i – его длительность. Функция распределения $F_2(t)$, где $t \geq 0$, одинакова для всех частных случайных процессов второго типа.

3) Процесс третьего типа ξ_i: $[0, T_i) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ имеет траектории, непрерывные справа и имеющие пределы слева. Под T_i в этом случае понимается минимум между моментом отключения на профилактический ремонт τ_i и моментом отказа ζ_i в i-ом цикле, т.е. $T_i = \tau_i \wedge \zeta_i$. Пусть $Q(d\xi)$ — функция распределения, одинаковая всех случайных процессов третьего типа.

Распределение величины ζ_i зависит от реализации случайного процесса ξ_i. Таким образом, функция распределения момента отказа ζ_i относительно i-ого цикла с частным случайным процессом третьего типа имеет вид:

$$P(\zeta_i < t \mid \xi_i) = 1 - P(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right).$$

Будем считать, что момент τ_i отключения системы на профилактический ремонт, который необходимо определить в каждом цикле третьего типа, зависит от реализации ξ_i. Переходы между циклами осуществляются по следующим правилам:

1) После цикла первого типа всегда следует цикл третьего типа;
2) После цикла второго типа всегда следует цикл третьего типа;
3) Если $T_i < \tau_i$, то после цикла третьего типа следует цикл первого типа;
4) Если $T_i = \tau_i$, то после цикла третьего типа следует цикл второго типа.

2.3 Коэффициент готовности

Коэффициент готовности $K(t)$ — вероятность рабочего состояния в момент времени t. Однако на практике под коэффициентом готовности обычно понимают то стационарное значение, к которому стремится $K(t)$ с ростом времени. Именно такой коэффициент готовности и будем рассматривать в качестве показателя оптимальности выбора правила, по которому будем определять момент отключения на профилактический ремонт:

$$1 - \gamma = 1 - \lim_{t \to +\infty} (P(X(t) = S_1) + P(X(t) = S_2)).$$

Нам необходимо определить уровень износа, при котором будем отключать систему на профилактический ремонт таким образом, чтобы коэффициент готовности был максимальным. Вместо задачи максимизации коэффициента готовности $1 - \gamma$ перейдём к задаче минимизации коэффициента неготовности γ. Отметим, что γ является некоторой функцией от момента τ отключения системы на профилактический ремонт: $\gamma = W(\tau)$.

Таким образом, необходимо получить вид функции $W(\tau)$ и минимизировать её.

Введём обозначения:

$E_Q(f)$ — интегрирование функции f по мере $Q(d\xi)$,

$$m_i = \int_0^\infty (1 - F_i(t))dt, \quad i = \overline{1,2},$$

Теорема 2.1. Если хотя бы для одного T_i распределение является нерешетчатым, то

1) коэффициент готовности имеет вид

$$1 - \gamma = \frac{V}{m_1 - (m_1 - m_2)U + V},$$

где

$$U = U(\tau) = E_Q \exp\left(-\int_0^{\tau(\xi)} \xi(s)ds\right),$$

$$V = V(\tau) = E_Q \int_0^{\tau(\xi)} \exp\left(-\int_0^t (\xi(s)ds)dt\right).$$

2) необходимым условием минимума функционала

$\gamma = W(\tau)$ является равенство:

$$\xi(\tau) = \frac{m_1 - (m_1 - m_2)U(\tau)}{(m_1 - m_2)V(\tau)}. \tag{2}$$

Доказательство приведено в [6].

Основная трудность решения уравнения (2) состоит в вычислении функционалов $U(\tau)$ и $V(\tau)$, в которых под знаком интеграла стоит случайный процесс.

3 Решение задачи

Процесс регенерации пересекает уровень $b \in (0, c)$ бесконечное число раз. Обозначим τ_b^n – первый после $(n-1)$-ого момента регенерации момент достижения уровня b. Известно [1], что момент первого достижения некоторого уровня является марковским моментом, поэтому τ_b^n — марковский момент со свойством $X(\tau_b^n) = b$. Величины τ_b^n, как и τ_c^n, независимы и одинаково распределены. До момента τ_b^n уровень c достигался $n-1$ раз, поэтому:

$$\tau_b^n = \tau_c^{n-1} + \tau_b^1 \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}, \qquad n \geq 1, \quad \tau_c^0 = 0.$$

Заметим, что

$$\xi(t + \tau_c^{n-1}) = \xi(t) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}},$$

$$\int_{\tau_c^{n-1}}^{\tau_b^n} \xi(s)ds = \left(\int_0^{\tau_b^1} \xi(s)ds\right) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}.$$

Теперь

$$\int_0^{\tau_b^n} \xi(s)ds = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\tau_c^{k-1}}^{\tau_c^k} \xi(s)ds + \int_{\tau_c^{n-1}}^{\tau_b^n} \xi(s)ds = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_0^{\tau_c^1} \xi(s)ds\right) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}} +$$

$$+ \left(\int_0^{\tau_b^1} \xi(s)ds\right) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}.$$

Тогда

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_0^{\tau_c^1} \xi(s)ds\right) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left(-\int_0^{\tau_c^1} \xi(s)ds\right) \circ \theta_{\tau_c^{k-1}} \exp\left(-\int_0^{\tau_b^1} \xi(s)ds\right) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}.$$

Обозначим

$$f(b) = E_Q\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_b^1} \xi(s)ds\right)\right).$$

Используя свойство регенерации процесса $\xi(t)$ с мерой Q, имеем:

$$U(\tau_b^n) = E_Q\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_b^n} \xi(s)ds\right)\right) =$$

$$= E_Q\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_c^1} \xi(s)ds\right) \circ \theta_{\tau_c^{k-1}}\right)\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_b^1} \xi(s)ds\right) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}\right)\right) =$$

$$= f^{n-1}(c) f(b).$$

Теперь рассмотрим функционал $V(\tau_b^n)$.

$$\int_0^{\tau_b^n} \exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right)dt = \int_0^{\tau_c^{n-1}} \exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right)dt + \int_{\tau_c^{n-1}}^{\tau_b^n} \exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right)dt.$$

Обозначим первое слагаемое за Ψ и преобразуем его:

$$\Psi = \int_0^{\tau_c^{n-1}} \exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\tau_c^{k-1}}^{\tau_c^k}\left(\exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right)\right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_c^{k-1}} \xi(s)ds\right) \int_{\tau_c^{k-1}}^{\tau_c^k}\left(\exp\left(-\int_{\tau_c^{k-1}}^t \xi(s)ds\right)\right)dt\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_c^{k-1}} \xi(s)ds\right) \int_{\tau_c^{k-1}}^{\tau_c^k}\left(\exp\left(-\int_0^{t-\tau_c^{k-1}} \xi(s-\tau_c^{k-1})ds\right) \circ \theta_{\tau_c^{k-1}}\right) dt_1\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_c^{k-1}} \xi(s)ds\right) \int_0^{\tau_b^1}\left(\exp\left(-\int_0^{t_1} \xi(s_1)ds_1\right)dt_1\right) \circ \theta_{\tau_c^{k-1}}\right),$$

здесь использована замена $t_1 = t - \tau_c^{k-1}$, $s_1 = s - \tau_c^{k-1}$.

Второе слагаемое:

$$\int_{\tau_c^{n-1}}^{\tau_b^n} \exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right)dt = \exp\left(-\int_0^{\tau_c^{n-1}} \xi(s)ds\right) \times$$

$$\times \int_{\tau_c^{n-1}}^{\tau_b^n} \exp\left(-\int_0^{t-\tau_c^{n-1}} \xi(s-\tau_c^{n-1})ds\right)dt =$$

$$= \exp\left(-\int_0^{\tau_c^{n-1}} \xi(s)ds\right) \int_0^{\tau_b^1 \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}} \left(\exp\left(-\int_0^{t_1} \xi(s_1)ds_1\right) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}\right) dt_1 =$$

$$= \exp\left(-\int_0^{\tau_c^{n-1}} \xi(s)ds\right) \left(\int_0^{\tau_b^1}\left(\exp\left(-\int_0^{t_1} \xi(s_1)ds_1\right)dt_1\right) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}\right),$$

здесь использована замена $t_1 = t - \tau_c^{n-1}$, $s_1 = s - \tau_c^{n-1}$.

Тогда получаем

$$V(\tau_b^n) = E_Q(\Psi) + E_Q\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_c^{n-1}} \xi(s)ds\right) \times\right.$$

$$\left.\times \left(\int_0^{\tau_b^1}\left(\exp\left(-\int_0^{t_1} \xi(s)ds\right)dt_1\right) \circ \theta_{\tau_c^{n-1}}\right)\right) = g(c)\sum_{k=1}^{n-1} f^{k-1}(c) + f^{n-1}(c)g(b),$$

где

$$f(b) = E_Q\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_b} \xi(s)ds\right)\right),$$

$$g(b) = E_Q\left(\int_0^{\tau_b^1} \exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right)\right).$$

Таким образом, необходимое условие (2) минимума функционала $\gamma = W(\tau)$ можем записать в виде:

$$b = \frac{1 - \Delta f^{n-1}(c) f(b)}{\Delta \left(h(c) + g(b) f^{n-1}(c)\right)}, \tag{3}$$

где

$$\Delta = \frac{m_1 - m_2}{m_1},$$

$$h(c) = \frac{g(c)(1 - f^{n-1}(c))}{1 - f(c)}.$$

Процесс регенерации пересекает уровень b бесконечное число раз. Из всего множества решений уравнения (3), доставляющих локальный минимум коэффициенту неготовности γ, необходимо выбрать единственный момент τ_b, при котором коэффициент неготовности примет наименьшее значение.

Пусть $F_n(\Delta, b, c)$ — правая часть уравнения (3). Оценим приращения

$$F_{n+1} - F_n = \frac{Y}{Z},$$

где

$$Z = \Delta \left(\frac{g(c)\,(1 - f^n(c))}{1 - f(c)} + g(b) f^n(c) \right) \left(\frac{g(c)\left(1 - f^{n-1}(c)\right)}{1 - f(c)} + g(b) f^{n-1}(c) \right),$$

$$Y = (1 - \Delta f^n(c) f(b))\, \frac{g(c)\left(1 - f^{n-1}(c)\right)}{1 - f(c)} + g(b) f^{n-1}(c) -$$

$$- \left(1 - \Delta f^{n-1}(c) f(b)\right) \frac{g(c)\,(1 - f^n(c))}{1 - f(c)} + g(b) f^n(c) =$$

$$= \frac{g(c)\,(1 - f^n(c))}{1 - f(c)} + g(b) f^{n-1}(c) - \frac{g(c)(1 - f^{n-1}(c)) \Delta f^n(c) f(b)}{1 - f(c)} -$$

$$- \Delta g(b) f^{2n-1}(c) f(b) - \frac{g(c)\,(1 - f^n(c))}{1 - f(c)} - g(b) f^n(c) +$$

$$+ \frac{\Delta f^{n-1}(c) f(b) g(c)\,(1 - f^n(c))}{1 - f(c)} + \Delta f(b) g(b) f^{2n-1}(c) =$$

$$= f(b) \Delta g(c) f^{n-1}(c) + g(b) f^{n-1}(c)\,(1 - f(c)) + \frac{g(c)\left(1 - f^{n-1}(c)\right)}{1 - f(c)} +$$

$$+ \frac{g(c)\,(1 - f^n(c))}{1 - f(c)} = f(b) \Delta g(c) f^{n-1}(c) + g(b) f^{n-1}(c)\,(1 - f(c)) -$$

$$-g(c)f^{n-1}(c) = g(c)f^{n-1}(c)\left(\Delta f(b) + \frac{g(b)\left(1 - f(c)\right)}{g(c)} - 1\right).$$

Обозначим

$$A = \frac{g(c)f^{n-1}(c)}{Z},$$

$$G(\Delta, b, c) = \Delta f(b) + \frac{g(b)(1 - f(c))}{g(c)}.$$

Таким образом, имеем

$$F_{n+1} - F_n = A(G\left(\Delta, b, c\right) - 1).$$

Покажем, что A является положительной величиной. Сначала рассмотрим $f(c)$. Обозначим $c_1 = \exp\left(\int_0^{\tau_c}\xi(s)ds\right)$. Ясно, что $c_1 > 0$. Теперь $f(c) = E_{Q_1}(c_1)$, а так как $Q_1(dx)$ является функцией распределения, то $f(c)$ будет положительной величиной(для $f(b)$ всё аналогично). Далее рассмотрим $g(c)$: так как

$$\exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right) > 0,$$

то и

$$\int_0^{\tau_c^1} \exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right) dt > 0.$$

Следовательно, и $g(c) > 0$ (для $g(b)$ всё аналогично).

Осталось показать, что Z является положительной величиной. Для этого рассмотрим два случая:

1) $f(c) \in [0, 1]$,

2) $f(c) > 1$.

В первом случае $1 - f(c)$, $1 - f^n(c)$, $1 - f^{n-1}(c)$ положительны, во втором - отрицательны. При этом в обоих случаях получается $Z > 0$, тогда из всего вышесказанного имеем $A > 0$.

Таким образом, знак приращения зависит только от знака выражения $G(\Delta, b, c) - 1$. При этом в полученной оценке от n явно зависит только A, а значит, знак приращения не зависит от n.

Известно [6], что процесс максимальных значений винеровского процесса является процессом с независимыми положительными приращениями. Следовательно, для него справедливо разложение Леви-Хинчина: для любого $\lambda \geq 0$ и $b \geq 0$:

$$E_{Q_1}\left(\exp(-\lambda\tau_b)\right) = \exp\left(-\int_0^b \beta(\lambda, s)ds\right),$$

где

$$\beta(\lambda, x) = \lambda\alpha(x) + \int_{0+}^{+\infty} \big(1 - \exp(-\lambda u)\big)v(du|x),$$

$\alpha(x)$ — интегрируемая неотрицательная функция, $v(du|x)$ — интегрируемое семейство мер на интервале $(0, +\infty)$. Будем полагать, что $\beta \to \infty$ при $\lambda \to \infty$ равномерно по всем $x > 0$ и отношение $\frac{\beta(\lambda,x)}{\lambda}$ равномерно ограничено при всех $\lambda \geq 0$ и $x \geq 0$.

Приведём теорему, которая позволит нам преобразовать $f(b)$ и $g(b)$.

Теорема 3.1. Если при любых $\lambda, x \geq 0$ функция $\beta(\lambda, x)$ непрерывна на своей области определения, и существуют такие неотрицательные ϵ, a, что выполняются неравенства $\alpha(x) \leq a$ и $\int_0^{+\infty} uv(du|x) < \alpha$ при всех $x \leq \epsilon$, то

$$E_{Q_1}\left(\exp\left(-\int_0^{\tau_b} \xi(s)ds\right)\right) = \exp\left(-\int_0^b \beta(x, x)dx\right),$$

$$E_{Q_1}\left(\int_0^{\tau_b} \exp\left(-\int_0^t \xi(s)ds\right)\right) = \int_0^b \exp\left(-\int_0^x \beta(s, s)ds\right)\frac{\beta(x, x)}{x}dx.$$

Доказательство теоремы приведено в [8].

Используя эту теорему, получаем

$$f(b) = \exp\left(-\int_0^b \beta(s)ds\right),$$

$$g(b) = \int_0^b \exp\left(-\int_0^t \beta(s)ds\right)\frac{\beta(t)}{t}dt.$$

Теорема 3.2. Если для рассматриваемой модели $g(\infty) < \infty$, то для любого $\Delta \in (0, 1)$ найдётся область $B_\Delta \subset \{(b, c) : 0 < b < c\}$, на которой $G(\Delta, b, c) > 1$. Если при этом прямая $\{c = const\}$ пересекает эту область, то для любого $n \geq 0$ минимум функции $F_n(\Delta, b, c)$ по b на этой прямой принадлежит этой области, причём последовательность корней уравнений (3) (b_n) не убывает. Если прямая $c = const$ не пересекает эту область, то последовательность (b_n) не возрастает и при $n \to \infty$ стремится к $b_\infty = \frac{1-f(c)}{\Delta g(c)}$

Доказательство теоремы приведено в [5].

В [5] был получен коэффициент неготовности γ через решение b уравнения (3)

$$\gamma = \frac{(m_1 - m_2)b}{1 + (m_1 - m_2)b}.$$

Заметим, что чем больше b, тем больше коэффициент неготовности. Поэтому возможны два варианта режима профилактических отключений:

1) В случае, когда последовательность (b_n) возрастает, для того чтобы коэффициент неготовности был минимальным, нужно производить профилактическое отключение системы при достижении процессом уровня b_1. При $n = 1$ получаем $h(c) = 0$, поэтому формула (3) принимает вид

$$b_1 = \frac{1 - \Delta f(b_1)}{\Delta g(b_1)}. \qquad (4)$$

2) В случае, когда последовательность (b_n) убывает, коэффициент неготовности уменьшается с ростом n. Значит, отключение системы на профилактический ремонт предпочтительнее совершать при каждом последующем достижении процессом износа уровня b_n. Поэтому в этом случае профилактический ремонт не имеет смысла.

3.1 Численное решение

Известно [7], что при процессе максимумов винеровского процесса со сдвигом параметр разложения Леви-Хинчина принимает вид:

$$\beta(x) = \sqrt{2\frac{x}{D} + \mu^2} - \mu,$$

где D — локальная дисперсия, μ — параметр сдвига.

Вычислим интеграл в степени экспоненты в $f(b)$:

$$\int_0^b \beta(s)ds = \int_0^b \left(\sqrt{2\frac{s}{D} + \mu^2} - \mu\right) ds,$$

сделаем замену: $y = \frac{2}{D}x + \mu^2$, тогда $x = \frac{(y-\mu^2)D}{2}$ и

$$\int_0^b \left(\sqrt{2\frac{s}{D} + \mu^2} - \mu\right) ds = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{y} d\left(\frac{(y-\mu^2)D}{2}\right) - \mu b =$$

$$= \frac{D}{2}\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{y}dy - \mu b = \frac{D}{2}\frac{2}{3}y^{3/2}\bigg|_{a_1}^{a_2} - \mu b = \frac{D}{3}\left(\frac{2}{D}x+\mu^2\right)^{3/2}\bigg|_0^b - \mu b =$$

$$= \frac{D}{3}\left(\left(\frac{2}{D}b+\mu^2\right)^{3/2} - \mu^3\right) - \mu b.$$

Тогда

$$g(b) = \int_0^b \exp\left(-\frac{D}{3}\left(\left(\frac{2}{D}x+\mu^2\right)^{3/2} - \mu^3\right) - \mu b\right)\frac{1}{x}\left(\sqrt{2\frac{x}{D}+\mu^2} - \mu\right)dx.$$

Пусть $g_1(x)$ - подынтегральная функция в $g(b)$. Так как при стремлении x к нулю справа предел $g_1(b)$ равен бесконечности, представим $g(b)$ в виде суммы интегралов:

$$g(b) = \int_0^{\varepsilon} g_1(x)dx + \int_{\varepsilon}^{b} g_1(x)dx,$$

где ε —достаточно малое число.

Для вычисления первого интеграла разложим в ряд Маклорена корень в $g_1(b)$

$$\sqrt{\frac{2x}{D}+\mu^2} = \mu\sqrt{\frac{2x}{D\mu^2}+1} = \mu\sqrt{y+1} = \mu\left(1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+\frac{y^3}{16}+o\left(y^3\right)\right) =$$

$$= \mu + \mu\left(\frac{x}{\mu^2 D} - \frac{x^2}{2\mu^4 D^2} + \frac{x^3}{2\mu^6 D^3} + o\left(y^3\right)\right),$$

где использована замена $y = \frac{2x}{D\mu^2}$.

Таким образом,

$$\int_0^{\varepsilon} g_1(x)dx = \int_0^b \exp\left(-\frac{D}{3}\left(\left(\frac{2}{D}x+\mu^2\right)^{3/2} - \mu^3\right) - \mu b\right) \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\mu D} - \frac{x}{2\mu^3 D^2} + \frac{x^2}{2\mu^5 D^3} + o(x^2)\right).$$

Обозначим

$$\Phi(b_1) := b_1 - F_1(b_1) = 0.$$

$\Phi(b_1)$ непрерывна на интервале $(0, \infty)$, следовательно, для нахождения корней этого уравнения можем воспользоваться методом половинного деления, задавая начальный отрезок $[0, C]$, где ε — достаточно малое число, а $C > c > b$.

Ниже приведена таблица с заданными параметрами D, μ, m_1, m_2, c и результатами работы программы b_1 и G.

	D	μ	m_1	m_2	c	b_1	G
1	1	2	2	1	5	2.25425	0.789856
2	1	2	8	1	5	0.464917	1.05804
3	0.5	0	20	2	5	0.121594	5.26339
4	5	2	2	1	15	4.95434	0.291548
5	1	2	20	17	5	7.83086	0.717503

Таблица 1: Результаты численного решения

Из таблицы видно, что профилактический ремонт имеет смысл только для второго и третьего наборов параметров. Для второго набора оптимальным моментом отключения системы на профилактический ремонт является момент первого достижения процессом износа уровня 0.464917, для третьего – 0.121594. Для остальных наборов параметров оптимального момента не существует.

Заключение

Опираясь на теоретические результаты, полученные в [6] для монотонного процесса, и в [5] для немонотонного, работа решает задачу определения режима профилактических отключений технической системы для кусочно монотонного процесса износа, на интервалах монотонности которого рассмотрен процесс максимумов винеровского процесса. Основная трудность задачи состоит в вычислении функционалов U и V. Однако благодаря тому, что для рассматриваемого процесса справедливо разложение Леви-Хинчина, а параметр разложения $\beta(x)$ известен, удаётся довести решение до конца.

Численно был найден функционал G, в зависимости от значения которого определяется, существует ли в данном случае оптимальное решение. Также численно был найден уровень b. Удалось показать, что для различных наборов параметров действительно реализуются две альтернативы, в одной из которых оптимальным моментом отключения системы на профилактику является момент первого достижения процессом уровня b, в другой же оптимального момента не существует.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вентцель А. Д, Курс теории случайных процессов. 2-е изд., доп. - М.: Физматлит, 1996.

[2] Волков И. К, Зуев С. М, Цветкова Г. М. Случайные процессы. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 1999.

[3] Гнеденко Б. В, Беляев Ю. К, Соловьёв А. Д. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ. Изд.2, испр. и доп. URSS. 2013.

[4] Дуб Дж. Л, Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

[5] Расова С. С, Харламов Б. П. Полумарковская модель деградации и задачи надёжности. // В сб. Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах. СПб.2006.С.404-414.

[6] Харламов Б. П. Оптимальный режим обслуживания системы с наблюдаемой опасностью отказа. //Автоматика и Телемеханика, Наука, М.1998. С. 117-134.

[7] Харламов Б. П. Непрерывные полумарковские процессы. СПб.: Наука, 2001.

[8] Харламов Б. П. О выборе момента начала страхования //Автоматика и Телемеханика. 2003. Вып. 7. С.134-142.