Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра теории управления

Гайфулин Роман Вячеславович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Построение области асимптотической устойчивости для одного дифференциально-разностного уравнения

Направление 010300

Фундаментальная информатика и информационные технологии

Научный руководитель,

доктор физ.-мат. наук

профессор

Жабко А. П.

Санкт-Петербург

2016

Оглавление

Введение

Решения многих дифференциальных уравнений и их систем не выражаются в элементарных функциях, поэтому для отыскания их решения прибегают к приближенным методам интегрирования. Однако чаще всего существует необходимость не узнать конкретное решение, а исследовать его свойства. В качестве таких свойств могут выступать: изменение поведения решения при изменении некоторых параметров, изменение некоторых решений при незначительных изменениях начальных данных, характер решения, изменение поведения целой системы при изменении отдельных параметров. Изучением этих вопросов занимается качественная теория дифференциальных уравнений.

Одним из важнейших вопросов этой теории является исследование на устойчивость дифференциальных уравнений и их систем. Важность данного вопроса обусловлена физическим смыслом дифференциального уравнения: это модель движения физического объекта. При исследовании дифференциального уравнения на устойчивость главным вопросом является то, как поведут себя отдельные решения при незначительном изменении начальных условий: будут ли малые изменения начальных условий означать малое изменение всего решения.

Для постановки задачи об устойчивости, необходимы следующие данные:

1) объект, об устойчивости которого будет идти речь,
2) определение устойчивости.

Большинство реальных динамических объектов, чаще всего это механические системы, могут быть описаны дифференциальными уравнениями или их системами. Устойчивость таких систем чаще всего рассматривается в смысле устойчивости по Ляпунову. Это понятие, реализующее идею «малых» отклонений решения дифференциального уравнения на промежутке времени $[0,+\infty)$ при «небольших» вариациях начальных данных этого решения.

Теория устойчивости занимается разработкой методов, которые бы позволяли судить об устойчивости некоторого заданного решения, не зная при этом общего решения дифференциального уравнения. Основоположником этой теории является российский математик А.М. Ляпунов.

Он разделил все многообразие методов теории устойчивости на два класса. В первый класс были включены те методы исследования дифференциальных уравнений на устойчивость, которым требуется определенная информация о решениях данной системы. Этот подход получил название первого метода Ляпунова. Второй же метод Ляпунова составляет совокупность приемов и средств, которые позволяют исследовать решения дифференциальных уравнений и их систем при помощи специальных функций Ляпунова.

Частное решение, которое исследуется на устойчивость, часто называют невозмущенным, а любое другое – возмущенным решением.

Устойчивость бывает двух типов:

1) Устойчивость относительно возмущения начальных данных.

   Основная идея заключается в том, что решения $x = x(t;\, t_0, x_0)$ и $x = x(t;\, t_0, x_1)$ с начальными данными (t_0, x_0) и (t_0, x_1) должны быть близкими для любого $t \geq t_0$, если x_0 и x_1 достаточно близки.

   Важнейшим требованием в этом случае является требование близости решений при всех значениях $t \geq t_0$, так как если ограничить рассмотрение конечным интервалом изменения времени t, то указанное свойство сохранения близости будет прямо следовать из классической теоремы о непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от начальных данных.

2) Устойчивость относительно постоянно действующих внешних возмущений.

   Для конечного временного интервала решения исходной $x = f(t, x)$ и возмущенной $x = f(t, x) + g(t, x)$ систем, выходящие из одной и той же начальной точки, будут близкими на данном конечном интервале, при условии, что внешние возмущения $g(t, x)$ во второй системе достаточно малы.

   Это – прямое следствие классической теоремы о непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от правых частей уравнений. Поэтому, когда говорят об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, подразумевают, что $t \geq t_0$.

Понятие устойчивости по Ляпунову можно расширить. Решение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и при малых отклонениях начальных данных отклонения решения на промежутке времени $[0, +\infty)$ стремятся к нулю. Асимптотическая устойчивость гарантирует, что при небольшом изменении начальных данных с течением времени отклонения решения системы станут незначительны.

Большинство процессов, заключающихся в передаче массы, энергии или информации характеризуются тем, что в них присутствует запаздывание. Существует множество обуславливающих его причин — например, ограничение скорости распространения сигнала или инерционность некоторых элементов. Если описывать их без использования параметра, учитывающего запаздывание, результаты могут оказаться неточными или вовсе абсурдными. Поэтому целесообразно рассматривать дифференциальные уравнения, принимающие различные значения аргумента.

Одним из возможных вариантов является рассмотрение дифференциально-разностных уравнений вида $x'(t) = f[t, x(t), x(t - h)]$, в котором x — неизвестная функция независимого аргумента $t, f: R^3 \to R,$ а h — положительное число – запаздывание. Такие уравнения называются дифференциально-разностными уравнениями с запаздыванием.

В данной работе решается задача аналитического построения области асимптотической устойчивости для одного такого дифференциально-разностного уравнения и анализа устойчивости его решения при изменении начальных параметров с помощью среды MATLAB.

Постановка задачи

Целью данной работы является анализ аналитически построенной области асимптотической устойчивости одного дифференциально-разностного уравнения в среде MATLAB. Теоретическим обоснованием для проверки на асимптотическую устойчивость является модифицированный метод Адамса. В качестве решения задачи построения области асимптотической устойчивости будет использован амплитудно-фазовый метод.

Таким образом, для достижения поставленной цели можно сформулировать ряд задач:

- Найти решение дифференциально-разностного уравнения при наперед заданном начальном условии с помощью модифицированного метода Адамса;
- Исследовать найденное решение на асимптотическую устойчивость;
- В случае, если оно устойчиво – аналитически построить область асимптотической устойчивости и провести анализ при разных отклонениях параметров.

Результатом работы должна стать программа, которая строит численное решение дифференциально-разностного уравнения с запаздывающим аргументом и позволяет пользователю изменять входные изменять входные параметры уравнения (коэффициенты и запаздывание) для последующего анализа области асимптотической устойчивости.

Обзор литературы

В работе «Дифференциально-разностные уравнения» Беллмана Р. и Кука К. Л. подробно излагается теория линейных дифференциально-разностных уравнений, теория устойчивости и асимптотическое поведение решений.

Учебное пособие «Теория устойчивости движения», написанное Ногиным В. Д. излагает базовые понятия и методы теории устойчивости, в том числе первый и второй методы Ляпунова, последний из которых будет рассмотрен в данной работе.

Книга «Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений» за авторством Л. Э. Эльсгольца предоставляет обширный материал по теории дифференциально-разностных уравнений, а так же способы их решения и исследования на асимптотическую устойчивость.

В статье «Построение области асимптотической устойчивости дифференциально – разностных уравнений в среде MATLAB», написанной Жабко А. П. и Зараник У. П., был выведен алгоритм метода Адамса для дифференциально-разностных уравнений, который впоследствии был модифицирован в данной работе для дифференциально-разностного уравнения с запаздыванием и реализован в среде MATLAB.

Глава 1. Основные теоретические сведения

1.1 Понятие дифференциального уравнения

В работе [2] приводятся общие определения, процитированные ниже.

Дифференциальное уравнение – это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала**.**

Если неизвестная функция является функцией одной переменной, то дифференциальное уравнение называют обыкновенным (ОДУ).

Максимальный порядок производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется **порядком** дифференциального уравнения.

Приведем еще несколько определений из работ [1] и [2]. Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

между независимым переменным x, его функцией y и производными $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Функция $y = \varphi(x)$ называется **решением** этого дифференциального уравнения, если после замены y на $\varphi(x)$, y' на $\varphi'(x), \ldots, y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ оно обращается в тождество.

Общее решение дифференциального уравнения – это множество решений, содержащее все без исключения решения этого дифференциального уравнения.

Если же решение дифференциального уравнения удовлетворяет изначально заданным дополнительным условиям, то его называют **частным решением дифференциального уравнения**.

Основными задачами теории дифференциальных уравнений являются задачи Коши, краевые задачи и задачи нахождения общего решения дифференциального уравнения на каком-либо заданном интервале X.

Задача Коши – это задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$f(x_0) = f_0;\ f'(x_0) = f_1;\ f''(x_0) = f_2; \dots ; f^{(n-1)}(x_0) = f_{n-1},$$

где $f_0;\ f_1;\ f_2; \dots ; f_{n-1}$ – числа.

Характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения n-ой степени с постоянными коэффициентами – это уравнение n-ой степени вида

$$f_n * k^n + f_{n-1} * k^{n-1} + \dots + f_1 * k + f_0 = 0.$$

Стоит упомянуть, что на данный момент не существует единого подхода для решения дифференциальных уравнений, в силу многообразия их видов.

Отдельного рассмотрения требует такой класс дифференциальных уравнений как **дифференциально-разностные уравнения**.

1.2 Дифференциально-разностные уравнения

Теория изложена в работе [3].

Под дифференциально-разностным уравнением мы будем в дальнейшем понимать уравнение относительно неизвестной функции и её производных, вычисленных при некоторых значениях аргумента, отличающихся на постоянные. Все производные будем считать обыкновенными.

Так как наши уравнения будут включать в себя производные и разности различных порядков, стоит дать пару определений.

Дифференциальный порядок – порядок наивысшей входящей в него производной.

Разностный порядок – число, на единицу меньше числа различных значений аргумента, встречающихся в уравнении.

Общее дифференциально-разностное уравнение дифференциального порядка n и разностного порядка m имеет вид:

$$F\big[t, u(t), u(\ t-\omega_1), \dots, u\ (t-\omega_m), u'\ (t), u'\ (t-\omega_1)\ , \dots,\ u^{(n)}\ (t),\ u^n\ (t - \omega_1), \dots, u^n(t-\omega_m)\big] = 0,$$

где F – заданная функция от $1+(m+1)(n+1)$ переменных; числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, называемые **запаздываниями**, также заданы.

Даже простейшее уравнение вида

$$a_0 u'(t) + a_1 u'(t-\omega) + b_0 u(t) + b_1 u(t-\omega) = f(t)$$

может приводить к различным заключениям при различных значениях коэффициентов. Поэтому выделим несколько видов дифференциально-разностных уравнений:

- Уравнения запаздывающего типа
  $a_0 u'(t) + a_1 u'(t-\omega) + b_0 u(t) + b_1 u(t-\omega) = f(t)$, если $a_0 \neq 0$ и $a_1 = 0$,
- Уравнения нейтрального типа
  $a_0 u'(t) + a_1 u'(t-\omega) + b_0 u(t) + b_1 u(t-\omega) = f(t)$, если $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$,
- Уравнения опережающего типа
  $a_0 u'(t) + a_1 u'(t-\omega) + b_0 u(t) + b_1 u(t-\omega) = f(t)$, если $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$.

Если $a_0 = a_1 = 0$, то уравнения является чисто разностным, и в этом случае оно принадлежит к весьма детально исследованному типу функциональных уравнений. Если $b_0 = b_1 = 0$, то оно сводится к чисто разностному уравнения. Если $a_0 = b_0 = 0$ или $a_1 = b_1 = 0$, то оно является ОДУ.

1.3. Основные понятия теории устойчивости

Предположим, что некоторое явление описывается системой n дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad i = 1,2, \dots, n$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

Будем считать, что функции $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными на множестве

$\{t \in [t_0, +\infty), x_i \in R^n\}$. Далее без ограничения общности полагаем, что начальный момент равен нулю:

$$t_0 = 0.$$

Систему дифференциальных уравнений удобнее записать в векторной форме:

$$X' = f(t, X), \text{где} X = (x_1, x_2, \dots, x_n), f = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Если траектория движения системы мало изменяется при малых возмущениях начального положения, то говорят, что движение системы является **устойчивым.** [4]

1.4. Второй метод Ляпунова

Второй метод Ляпунова [5] включает в себя методы исследования решений систем дифференциальных уравнений на устойчивость.

1.4.1 Некоторые предварительные определения.

Рассмотрим вещественную непрерывную числовую функцию

$$V = V(t, x) \in Ctx\,(Z),$$

где $Z = \{(t, x) \mid t \geq 0, || x || \leq H \}$ при некотором $H > 0$.

Определение 1. Функция $V(t,x)$ называется положительно (отрицательно) определенной в Z, если существует непрерывная числовая функция $W(x) \in C(||x|| \leq H)$, такая, что

$$V(t,x) \geq W(x) > 0 \; \forall (t,x) \in Z, x \neq 0,$$

$$(V(t,x) \leq -W(x) < 0 \; \forall (t,x) \in Z, x \neq 0)$$

$$V(t,0) = W(0) = 0 \; \forall t \geq 0.$$

Следует заметить, что в качестве $W(x)$ из приведённого определения иногда удается использовать функцию вида $W(x) = \inf\limits_{t \geq 0} |V(t,x)|$.

Определение 2. Положительно или отрицательно определенную функцию именуют **знакоопределенной.**

Определение 3. Функция $V(t,x)$ имеет (допускает**) бесконечно малый высший предел** (б.м.в.п.), если $V(t,0) = 0$ при всех $t \geq 0$, причём эта функция непрерывна по x в точке x $= 0$ равномерно относительно $t \geq 0$, т.е.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \colon |V(t,\boldsymbol{x})| < \varepsilon \qquad \forall t \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \colon \|\boldsymbol{x}\| < \delta.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \quad (t \geq 0), \tag{1.1}$$

где

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(t,\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

причем $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ непрерывна на $\boldsymbol{Z} = \{(t,\boldsymbol{x}) \mid t \geq 0, ||\boldsymbol{x}|| \leq H\}$ при некотором $H > 0$. Будем считать, что система (3.1) имеет нулевое решение $\xi = 0$, т.е. $f(t,0) = 0 \;\; \forall t \geq 0$.

Определение 4. Пусть имеется функция $V = V(t,\boldsymbol{x}) \in C_{t\boldsymbol{x}}^{(1,1)}(\boldsymbol{Z})$. Рассмотрим произвольную пару $(t,\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{Z}$ и соответствующее этой паре начальных данных решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\tau;\ t, \boldsymbol{x})$ системы (3.1), так что $\boldsymbol{x}(\ t;\ t, \boldsymbol{x}\ ) = \boldsymbol{x}$. **Производной по времени t функции** $V(t, \boldsymbol{x})$ в силу системы (3.1) называют функцию

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) = \left[\frac{d}{d\tau} V\big(\tau, \boldsymbol{x}(\tau; t, \boldsymbol{x})\big)\right]\Big|_{\tau=t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_k} \cdot f_k(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} +$$

$$+ \langle \nabla V, \boldsymbol{f} \rangle, \tag{1.2}$$

есть градиент функции V.

1.4.2 Устойчивость по Ляпунову

Решение $\varphi(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$X' = f(t, X)$$

с начальными условиями

$$X(0) = X_0$$

Устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если

$$\parallel X(0) - \varphi(0) \parallel < \delta, \text{то} \parallel X(t) - \varphi(t) \parallel < \varepsilon$$

для всех значений $t \geq 0$. В противном случае решение $\varphi(t)$ называется неустойчивым.

Теорема (теорема Ляпунова об устойчивости)

Пусть дана система (1.1), имеющая нулевое решение. Если существует положительно определённая функция $V = V(t, \boldsymbol{x}) \in C_{tx}^{(1,1)}(\boldsymbol{Z})$, называемая **функцией Ляпунова**, которая обладает неположительной производной по времени $\dot{V}(t, \boldsymbol{x})$ в силу системы (1.1), то нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову.

1.4.3 Асимптотическая устойчивость

Если решение φ(t) системы дифференциальных уравнений не только устойчиво в смысле Ляпунова, но и удовлетворяет соотношению

$$limt \to \infty \parallel X(t) - \varphi(t) \parallel = 0$$

при условии

$$\parallel X(0) - \varphi(0) \parallel < \delta,$$

то говорят, что решение $\varphi(t)$ является асимптотически. В этом случае все решения, достаточно близкие к $\varphi(0\ )$ в начальный момент времени, постепенно сходятся к $\varphi(t)$ при увеличении t.

Графическое представление асимптотической устойчивости изображено на рисунке 1.1.

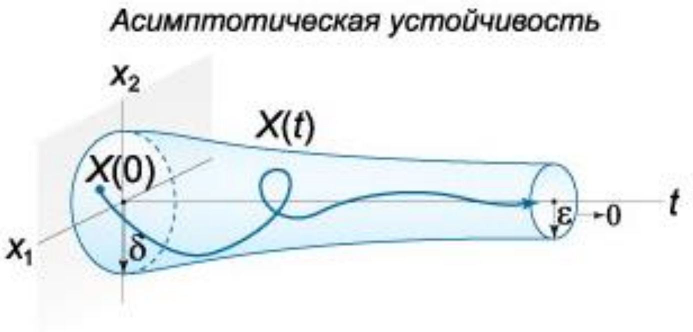

Рис. 1.1 – Асимптотическая устойчивость

Теорема (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости)

Если для системы (1.1) существует положительно определенная функция Ляпунова $V = V(t, \boldsymbol{x}) \in C_{tx}^{(1,1)}(\boldsymbol{Z})$, допускающая бесконечно малый высший предел и имеющая отрицательно определенную производную $\dot{V}(t, \boldsymbol{x})$ по времени в силу системы (3.1), то нулевое решение $\xi = 0$ рассматриваемой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.

1.4.4 Теорема о неустойчивости

Теорема (первая теорема Ляпунова о неустойчивости)

Пусть для системы $\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \ \ (t \geq 0)$, удовлетворяющей предположениям из пункта 1.4.1, сделанным к системе 1.1 (в частности, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{0}) \equiv \boldsymbol{0}$), существует функция Ляпунова $V = V(t, \boldsymbol{x}) \in C_{tx}^{(1,1)}(\boldsymbol{Z})$, такая, что

1) $V(t, \boldsymbol{x})$ допускает б.м.в.п.;
2) существует число $\bar{t} \geq 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдется точка $\overline{\boldsymbol{x}}$, удовлетворяющая неравенствам $\|\overline{\boldsymbol{x}}\| < \ \delta, V(\bar{t}, \overline{\boldsymbol{x}}) > 0$;
3) производная $\dot{V}(t, \boldsymbol{x})$ по t в силу системы 1.1 положительно определена.

Тогда нулевое решение системы 1.1 неустойчиво.

1.5 Применение второго метода Ляпунова к исследованию на устойчивость дифференциально-разностных уравнений

Второй метод Ляпунова лишь с незначительными изменениями может применяться к дифференциально-разностным уравнениям. Поэтому переформулируем вышеописанные теоремы для дифференциально-разностных уравнений.

Теорема (первая теорема второго метода Ляпунова)

Если для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = \ f_i\left(t, x_j\left(t - \tau_{js}(t)\right)\right), \tag{1.3}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n; s = 1, 2, \ldots, m,$$

возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой производная по времени вдоль интегральных кривых

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s = \Phi\left(t, x_i(t), x_j\left(t - \tau_{js}(t)\right)\right)$$

знакопостоянна, противоположного знака с функцией V или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема (вторая теорема Ляпунова)

Если в условиях предыдущей теоремы производная $\frac{\partial V}{\partial t}$ является функцией знакоопределенной (то есть $\frac{dV}{dt} = \Phi\left(t, x_i(t), x_j\left(t - \tau_{js}(t)\right)\right) \leq -W_1(x_i, x_{js})$, где $W_1 = 0$ лишь при $x_i = x_{js} = 0$ $(i, j = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, m$, причем если некоторые $\tau_{is} \equiv 0,$ то $x_i = x_{is}$), а функция V допускает бесконечно малый высший предел $и \sup_{t \geq t_0} \max_{j,\ s} \tau_{js}(t) < \infty$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема (теорема о неустойчивости)

Если для системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.3) существует дифференцируемая функция $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая в некоторой h-окрестности начала координат условиям:

1) $V(t, 0,0, \dots,0) = 0;$
2) при $t \geq t_0$ в сколь угодно малой окрестности начала координат существует независящая от t область $V > 0;$
3) в области $V > 0$ функция V ограничена;
4) в области $V > 0$ производная

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i\left(t, x_i(t), x_j\big(t - \tau_s(t)\big)\right) = \Phi\left(t, x_i(t), x_j\big(t - \tau_s(t)\big)\right) > 0$$

(это значит, что $\Phi\big(t, x_i, x_j\big) > 0$, если $t \geq t_0$, а точки с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns})$, $s = 1, 2, \dots, m$, лежат в области $V > 0$), причем при $V \geq a > 0$ производная будет $\frac{dV}{dt} \geq l > 0$, где l – постоянная, - то невозмущенное движение неустойчиво.

Можно доказать и аналоги других теорем о неустойчивости, но значение второго метода Ляпунова для уравнений с запаздывающим аргументом, очевидно, не очень велико, поэтому в данной работе они не приводятся.

Подытожив все сказанное выше, можно сказать, что большинство основных теорем теории устойчивости могут быть перенесены на дифференциально-разностные уравнения с незначительными изменениями. Однако стоит заметить, что эффективное исследование устойчивости точек покоя дифференциально-разностных уравнений сейчас осуществимо лишь для тех уравнений, которые стационарны в первом приближении в некритических случаях. [6]

Так как второй метод для исследования на устойчивость дифференциально-разностных уравнений недостаточно эффективен, для определения и построения области асимптотической устойчивости дифференциально разностного уравнения нужно использовать новые методы. Один из них мы разберем в этой работе далее.

Глава 2. Построение области асимптотической устойчивости

2.1 Постановка начальной задачи и определение устойчивости

Пусть имеется дифференциально-разностное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(l) = f\left(f, x(t), x\big(t - x(\tau)\big)\right), \ \tau(t) > 0. \tag{2.1}$$

Основной нашей начальной задачей является определение непрерывного решения $x(t\ )$ при $t \geq t_0$ при условии, что $x(t) = \varphi(t)$ на начальном множестве E_{t_0} состоящем из точки $t \ = \ t_0$ и значений $t - \tau(t) \leq t_0$ при $t \geq t_0$. Функция $\varphi(t)$ называется **начальной функцией** на множестве E_{t_0}. При постоянном запаздывании $\tau(t) = \tau$ начальное множество E_{t_0} является отрезком $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$

Как известно, существует единственное решение этой начальной задачи, если f, φ и $\tau(t)$ непрерывны и f удовлетворяет условию Липшица по второму и третьему аргументам. [6]

Условие Липшица

Если для любых точек x и x', принадлежащих отрезку [а, Ь], приращение функции f удовлетворяет неравенству

$$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x|'^{\alpha},$$

Где $0 < \alpha \leq 1$ и М – некоторая постоянная, то, говорят, что функция $f(x)$ на отрезке [a,b] удовлетворяет условия Липшица порядка a, и пишут:

$f(x) \in Lip\ \alpha$, *или* $f \in Lip_{M^{\alpha}}$, или $f \in H^{\alpha}(M)$. Каждая функция, удовлетворяющая при каком-либо $a > 0$ условию Липшица. на отрезке [a, b], равномерно непрерывна на $[\mathrm{a}, b]$, а функции, удовлетворяющие условию Липшица степени $a = 1$,- абсолютно непрерывны. Функция, имеющая на $[\mathrm{a}, b]$ ограниченную производную, удовлетворяет на $[\mathrm{a}, b]$ условию Липшица с любым $\alpha \leq 1$. [7]

В дальнейшем в данной работе эти условия будем считать выполненными.

Для уравнения n-го порядка с запаздывающим аргументом :

$$x^n(t) = f\left(t, x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), x\big(t - \tau(t)\big), \ldots, x^{n-1}\big(t - \tau(t)\big)\right),$$

где на $\tau(t)$ наложены прежние ограничения.

Основная начальная задача ставится почти так же:

$$x(t) = \varphi(t) \text{ и } x^{(k)}(t) = \varphi^k(t), \;\; k = 1,2, \ldots, (n-1),$$

на начальном множестве E_{t_0}, если определяется решение, имеющее непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно при $t \geq t_0$.

В тех процессах, которые описываются ОДУ без отклоняющихся аргументов, или дифференциально-разностными уравнениями, возмущения могут происходить в любой момент времени, а не только в какой-то фиксированный момент времени $t = t_0$. Но в определении устойчивости по Ляпунову для дифференциальных уравнений без отклоняющихся аргументов, которые удовлетворяют обычным условия существования единственности непрерывной зависимости решения от начальных условий, достаточно потребовать выполнения устойчивости только для возмущений в некоторый фиксированный момент времени $t = t_0$, посклько теорема о непрерывной зависимости решения от начальных значений и возможность продолжить решение в сторону убывающих значений t дают нам возможность утверждать, что устойчивое по отношению к возмущению начальных значений решение будет устойчиво и к возмущениям в любой другой момент времени $\bar{t}_0 > t_0$.

Вообще говоря, решения многих дифференциальных уравнений не могут быть непрерывно продолжены в сторону убывающих значений t. Поэтому устойчивые по отношению к возмущению начальной функции на множестве E_{t_0} решения могут оказаться неустойчивыми по отношению к возмущениям на начальном множестве $E_{\bar{t}_0}$.

Поэтому, целесообразно изменить определение устойчивости дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида (2.1).

Как уже говорилось ранее, функция $\varphi(t)$ называется **начальной функцией** на множестве E_{t_0}. Начальную функцию на множестве $E_{\bar{t}_0}$мы будем обозначать $\psi(t)$. Решение $x(t)$ на множестве E_{t_0} будем обозначать $\underset{\varphi(t)}{x(t)}$, а решение $x(t)$ на множестве $E_{\bar{t}_0}$ будем обозначать $\underset{\psi(t)}{x(t)}$.

Решение $x(t)$, определяемое начальной функцией $\varphi(t)$ называется устойчивым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\overline{t_0}\,, \varepsilon)$, что из неравенства $\left|\psi(t) - \underset{\varphi(t)}{x(t)}\right| < \delta(\overline{t_0}\,, \varepsilon)$ на начальном множестве $E_{\bar{t}_0}$ следует неравенство $\left|\underset{\psi(t)}{x(t)} - \underset{\varphi(t)}{x(t)}\right| < \varepsilon$ при $t \geq \overline{t_0}$ для любого $\bar{t}_0 > t_0$.

Если, помимо этого, $\lim\limits_{t\to\infty}\left|\underset{\psi(t)}{x(t)} - \underset{\varphi(t)}{x(t)}\right| = 0$, то решение $\underset{\varphi(t)}{x(t)}$ называется асимптотически устойчивым. Если же мы можем выбрать δ таким образом, чтобы она зависела только от ε, то устойчивость будет называться равномерной.

Для дифференциально-разностных уравнений n -го порядка данное определение будет сохраняться, но близость начальных функций решений будет пониматься в смысле близости $(n-1)$-го порядка. Впрочем, уравнение n-го порядка можно заметить системой уравнений 1-го порядка и применять данное выше определение устойчивости для систем уравнений. [6]

2.2 Исследование на устойчивость по первому приближению

Часто для исследований на устойчивость по первому приближению дифференциально-разностных уравнений, стационарных в первом приближении применяется метод, обоснованный в работах Белмана и Райта.

Для тех уравнений первого приближения, которые имеют переменные коэффициенты или переменные запаздывания в настоящее время не дано обоснование метода исследования на устойчивость по первому приближению. Результаты Белмана в применении к одному уравнению 1-го порядка с одним запаздывающим аргументом можно сформулировать так:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bs(t-\tau) + c(t)x(t) + d(t)x(t-\tau) +$$

$$+ \sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij}(t)x^i(t)x^j(t-\tau), \qquad (2.2)$$

где a и b это постоянные, $c(t)$ и $d(t)$ – непрерывные функции t, такие, что $\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} d(t) = 0$; все непрерывные функции $a_{ij}(t)$ ограничены по модулю, а ряд $\sum_{i+j=2}^{\infty} a_{ij}(t)y^i z^j$ сходится при достаточно малых по модулю y и z, i и j- целые положительные числа.

Уравнение (2.2) имеет асимптотически устойчивое тривиальное решение, если действительные части всех корней характеристического уравнения $s = a + be^{-st}$ удовлетворяют неравенству $R(s_i) \leq -\alpha < 0$.

Результат Райта обобщает теорему Белмана.

Теорема Райта

Тривиальное решение уравнения

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x^{\nu}\left(t+\tau_{\mu}\right) + \ \psi(t, x^{\nu}(t+\tau_{\mu})) = 0, \qquad (2.3)$$

асимптотически устойчиво, если все корни s_i характеристического уравнения

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} s^{\nu} e^{\tau_\mu s} = 0$$

удовлетворяют неравенству $R(s_i) \le -\alpha < 0$.

В уравнении (2.3) все $a_{\mu\nu}$ и τ_μ – постоянные,

$a_{mn} \ne 0$, $0 \le \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m$; функция

$$\psi\left(t, x^{\nu}(t+\tau_\mu)\right) =$$

$$= \psi\big(t, x(t+\tau_0), x(\dot{t}+\tau_0), \dots, x^{(n-1)}(t+\tau_0), \dots, x(t+\tau_m), \dots, x^{(n-1)}(t+\tau_m),$$

$$\nu = 0, 1, \dots, (n-1);\ \mu = 0, 1, \dots, m,$$

непрерывна по всем аргументам в области R, в которой $t \ge 0$, а остальные аргументы по модулю меньше некоторой постоянной $\sigma > 0$. Помимо этого, функция ψ должна удовлетворять условию: если $\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\omega_{\mu\nu}\right| < \omega$, то $\left|\psi(t,\ \omega_{\mu\nu})\right| \le \omega\chi(\omega)$, где $\chi(\omega)$ – ограниченная функция ω, такая, что $\int_0^a \frac{\chi^2\omega}{\omega} d\omega$ сходится при $a > 0$.

Схема доказательства теоремы Райта.

Для доказательства теоремы достаточно обнаружить, что

$$\left|x^{(\nu)}_{\varphi}(t)\right| < \varepsilon e^{-ct},\ \nu = 0,1, \dots, (n-1) \qquad (2.4)$$

для всех $t \ge 0$, где $0 < c < \alpha, |\varphi^{\nu}(t) < \delta|$ на начально множестве E_0, а ε – положительная постоянная. Допустим, что неравенства (2.4) справедливы не для всех $t \ge 0$; тогда найдутся числа $t = \xi$ и $\nu = \lambda$, при которых

$$\left|x^{(\lambda)}(\xi) = \varepsilon e^{-c\xi}\right| \text{и} \left|x^{(\nu)}(t)\right| \le \varepsilon e^{-ct}, \qquad 0 \le t \le \xi, \qquad 0 \le \nu \le (n-1)$$

Заменим теперь уравнение (2.3), которое мы кратко запишем в виде

$L(x) + \psi = 0$, линейным неоднородным уравнением

$$L(z) = \nu(t), \tag{2.5}$$

где

$$\nu(t) = \begin{cases} -\dot{\psi}\left(t, \overset{x^{(\nu)}}{}_{\varphi}(t+\tau_\mu)\right) \text{при } 0 \le t \le \xi - \tau_m, \\ 0 \ \text{при } t > \xi - \tau_m, \end{cases}$$

решение которого $z(t)$, как нетрудно проверить, будет совпадать с решением $\overset{x}{}_{\varphi}(t)$ уравнения (2.3) при , $0 \le t \le \xi$, если для $z(t)$ взять следующие условия:

$$z(t) = \overset{x}{}_{\varphi}(t),\ 0 \le t \le \tau_m.$$

Далее доказывается, что функция $z^{(\lambda)}(t)$ удовлетворяет всем условиям, которым должен удовлетворять оригинал при преобразовании Лапласа; а это значит, что при применении преобразования Лапласа к (2.5) можно явно выразить функцию $z^{(\lambda)}(t)$ и, построив ее оценку, показать, что

$\left|z^{(\lambda)}(t)\right| < \frac{1}{2}\varepsilon e^{-c\xi}$, что противоречит предположению (2.4). [6]

2.3 Методы нахождения областей асимптотической устойчивости дифференциально-разностных уравнений, стационарных в первом приближении

Если к дифференциально-разностным уравнениям применим метод исследования на устойчивость по первому приближению, то исследование таких уравнений, стационарных в первом приближении, сводится к определению знаков действительных частей корней квазиполинома. Вычисление корней квазиполинома – трудная задача даже в простейшем случае, поэтому имеет смысл использовать признаки отрицательности вещественных частей всех корне квазиполинома.

Амплитудно-фазовый метод в применении к линейному однородному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом с одним постоянным запаздыванием τ и с постоянными коэффициентами сводится к следующему: характеристическое уравнение имеет вид

$$\Phi(z) + \Psi(z)e^{-\tau z} = 0,$$

или кратко $f(z) = 0$, где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ – полиномы, причем $\Phi(z)$ имеет более высокую степень, чем $\Psi(z)$. Рассмотрим образ Γ_ω контура γ_z, состоящего из отрезка мнимой оси $-R \le y \le R$ и полуокружности $|z| = R, Re(z) > 0$, радиуса R в плоскости $\omega: \omega = f(z)$; согласно принципу аргумента, если при однократном обходе контура γ_z в положительном направлении его образ Γ_ω обходит точку $\omega = 0$ в положительном направлении $N - P$ раз. Если точнее, то коэффициент зацепления контура Γ_ω с точкой $\omega = 0$ равен $N - P$. P – сумма кратностью полюсов функции $f(z)$ внутри контура. Тогда сумма кратности нулей функции $f(z)$, находящихся внутри контура γ_z, равна N; при этом предполагается, что на контура γ_z нет нулей и полюсов функции $f(z)$.

Если на мнимой оси нет нулей функции $f(z)$ и при $R \to \infty$ число N остается равным нулю, то все нули функции $f(z)$ расположены в левой полуплоскости $Re(z) < 0$ и точка покоя $x \equiv 0$ исходного дифференциального уравнения асимптотически устойчива. Но вместо отображения $f(z)$ будет лучше рассмотреть отображение, определяемое функцией

$$\frac{f(z)}{\Phi(z)} = 1 + \frac{\Psi(z)}{\Phi(z)}e^{-\tau z},$$

имеющей те же нули, что и функция $f(z)$, и полюсы, совпадающие с нулями функции $\Phi(z)$ (в данной работе мы предполагаем, что функции $f(z)$ и $\Phi(z)$ не имеют общих нулей), или даже отображение

$$\omega_\tau(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Phi(z)}e^{\tau z}.$$

В последнем случае возникает необходимость считать число обходов образом контура γ_z при отображении $\omega_\tau(z)$ точки $\omega = 1$.

Так как при $R \to \infty$ образ полуокружности $|z| = R$, $Re(z) > 0$, стягивается в точку $\omega = 0$, то остается лишь построить образ при отображении $\omega_\tau(z)$ мнимой оси, проходимой в направлении убывания y. Этот образ называется амплитудно-фазовой характеристикой. Для ее нахождения строят так называемую предельную характеристику – образ мнимой оси при отображении $\omega_0(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Phi(z)}$, а после учитывают влияние множителя $e^{-i\tau y}$: $\omega_\tau(iy) = \omega_0(iy)e^{-i\tau y}$. [6]

Глава 3. Программная реализация

В настоящее время вычислительная техника не позволяет находить аналитическое решение многих задач. К числу таких задач относится и нахождение решения дифференциально-разностных уравнений. Однако численные методы решения позволяют находить приближенные решения с минимальными погрешностями. В данной работе используется метод Адамса для численного решения дифференциального уравнения. Стандартный алгоритм может использоваться для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому возникает необходимость модифицировать его на случай дифференциально-разностного уравнения с запаздывающим аргументом. Схема такого модифицированного метода Адамса приводится далее в работе.

3.1 Метод Адамса численного решения дифференциально-разностного уравнения

Предположим найдено несколько приближений x_j в моменты времени

$$x_j = x(t_j), \qquad j = \overline{0,\imath}, t_j = t_0 + j\Delta.$$

Требуется построить правило вычисления $x_{i+1} \approx x(t_i + 1)$ на следующем шаге. Для этого проинтегрируем правую и левую часть системы $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-T))$ по промежутку $[t_i; t_{i+1}]$:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(x(t), x(t-T)\big)dt. \qquad (3.1)$$

Заменив подынтегральную функцию $f\big(x(t), x(t-T)\big)$ интерполирующим её многочленом $P_k(t)$, будем считать, что дискретные приближенные значения

$$f_j = f(x_j, x_{T_j}) \approx f\left(x(t_j), x(t_j - T)\right)$$

известны.

При интерполировании назад из угла t_i имеем

$$P_k = P_k(t_i + qh) = f_i + q\Delta f_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 f_{i-2} +$$

$$+ \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 f_{i-3} + \cdots + \frac{q(q+1)(q+2) \times \ldots \times (q+k-1)}{k!}\Delta^k f_{i-k},$$

из узла t_{i+1}

$$\tilde{P}_k = \tilde{P}_k(t_{i+1} + qh) = f_{i+1} + q\Delta f_i + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 f_{i-1} +$$

$$+ \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 f_{i-2} + \cdots + \frac{q(q+1)(q+2) \times \ldots \times (q+k-1)}{k!}\Delta^k f_{i-k+1}.$$

Подставим многочлены $P_k(t), \tilde{P}_k(t)$ в равенство (3.1), используя конечные разности, получаем формулы для вычисления очередного значения $x_{i+1} \approx x(t_{i+1})$

$$x_{i+1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_k(t)dt, \tag{3.2}$$

$$x_{i+1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{P}_k(t)dt. \tag{3.3}$$

На основании формул (3.2), (3.3) получаем два семейства методов Адамса.

Рассмотрим первое семейство методов (3.2). Сделав замену переменных $t = t_i + qh$ в пределах интегрирования, формулу (3.2) можно переписать в виде

$$x_{i+1} = x_i + hI_k,$$

где

$$I_k = \int_0^1 P_k(t_i + qh)dq = [f_i q + \tfrac{q^2}{2}\Delta f_{i-1} + \left(\tfrac{q^3}{6} + \tfrac{q^2}{4}\right)\Delta^2 f_{i-2} +$$

$$+ \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{q^4}{4} + q^3 + q^2\right)\Delta^3 f_{i-1} + \tfrac{1}{24}\left(\tfrac{q^5}{5} + \tfrac{3q^4}{2} + \tfrac{11q^3}{3} + 3q^2\right)\Delta^4 f_{i-4} + \cdots] = f_i +$$

$$+ \tfrac{\Delta f_{i-1}}{2} + \tfrac{5\Delta^2 f_{i-2}}{12} + \tfrac{1}{6}\Delta^3 f_{i-3} + \tfrac{251}{720}\Delta^4 f_{i-4} + \cdots$$

Таким образом, ограничиваясь методом Адамса четвертого порядка, получаем

$$x_{i+1} = x_i + h\left(f_i + \tfrac{1}{2}\Delta f_{i-1} + \tfrac{5}{12}\Delta^2 f_{i-2} + \tfrac{1}{6}\Delta^3 f_{i-3} + \tfrac{251}{720}\Delta^4 f_{i-4}\right). \tag{3.4}$$

Сделаем аналогичную замену в пределах интегрирования в (3.3)

$t = t_{i+1} + qh$ и, подставляя выражение многочлена $\tilde{P}_k(t)$ под знак интеграла, получаем равенство

$$x_{i+1} = x_i + h\tilde{I}_k,$$

где

$$\tilde{I}_k = \int_{-1}^{0} \tilde{P}_k(t_i + qh)dq == [f_{i+1}q + \frac{q^2}{2}\Delta f_i + \left(\frac{q^3}{6} + \frac{q^2}{4}\right)\Delta^2 f_{i-1} +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{q^4}{4} + q^3 + q^2\right)\Delta^3 f_{i-1} + \frac{1}{24}\left(\frac{q^5}{5} + \frac{3q^4}{2} + \frac{11q^3}{3} + 3q^2\right)\Delta^4 f_{i-4} + \cdots] = f_{i+1} -$$

$$- \frac{\Delta f_i}{2} - \frac{\Delta^2 f_{i-1}}{12} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{i-2} - \frac{19}{720}\Delta^4 f_{i-3} + \cdots$$

Следовательно, схема вычисления следующего значения при интерполировании из угла t_{i+1} выглядит следующим образом

$$x_{i+1} = x_i + h\left(f_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta f_i - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{i-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{i-2} - \frac{19}{720}\Delta^4 f_{i-3}\right). \quad (3.5)$$

Можно заметить, что первое семейство методов (3.4) является явным, а второе (3.5) неявным.

Предположим, что правые части уравнений $(k + 1)$ раз непрерывно дифференцируемые функции. Тогда ошибка на шаге составляет

$$R_k(x) = \frac{f^{k+1}(\xi, x(\xi))}{(k+1)!} q(q+1) \times \cdots \times (q+k)h^{k+1}.$$

Таким образом, локальная погрешность метода (3.5), вычисляемая по формуле $h\int_0^1 R_k(x_i + qh)dq$, составляет величину порядка $O(h^{k+2})$, а глобальная – $O(h^{k+1})$. Величина погрешности для второго метода (3)

$$R_k(x) = \frac{f(\xi, x(\xi))}{(k-1)!} q(q+1) \times \cdots \times (q+k)h^{k-1}. \text{ [8]}$$

3.2 Пример построения области асимптотической устойчивости

Рассмотрим применение амплитудно-фазового метода к простейшему уравнению

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0.$$

Характеристическая функция этого уравнения имеет вид:

$$f(z) = z + a + be^{-\tau z},$$

а построенные на его основе новые отображения:

$$\frac{f(z)}{\Phi(z)} = 1 + \frac{b}{z+a}e^{-\tau z},\ \omega_\tau(z) = -\frac{b}{z-a}e^{-\tau z},\ \omega_0(z) = -\frac{b}{z-a}.$$

Предельной характеристикой является окружность с центром в точке $\omega = -\frac{b}{2a}$ радиуса $\left|\frac{b}{2a}\right|$. Очевидно, что при $a > 0, |b| < a$ при любом τ амплитудно-фазовая характеристика не включает в себя точку $\omega = 1$, а значит, при этих условиях решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво. При $a < 0$ у функции $\omega_\tau(z)$ есть полюс в правой полуплоскости $Re(z) > 0$, поэтому приходится учитывать влияние множителя $e^{-i\tau y}$. В результате этого исследования получаем область устойчивости, показанную на рисунке 3.1.

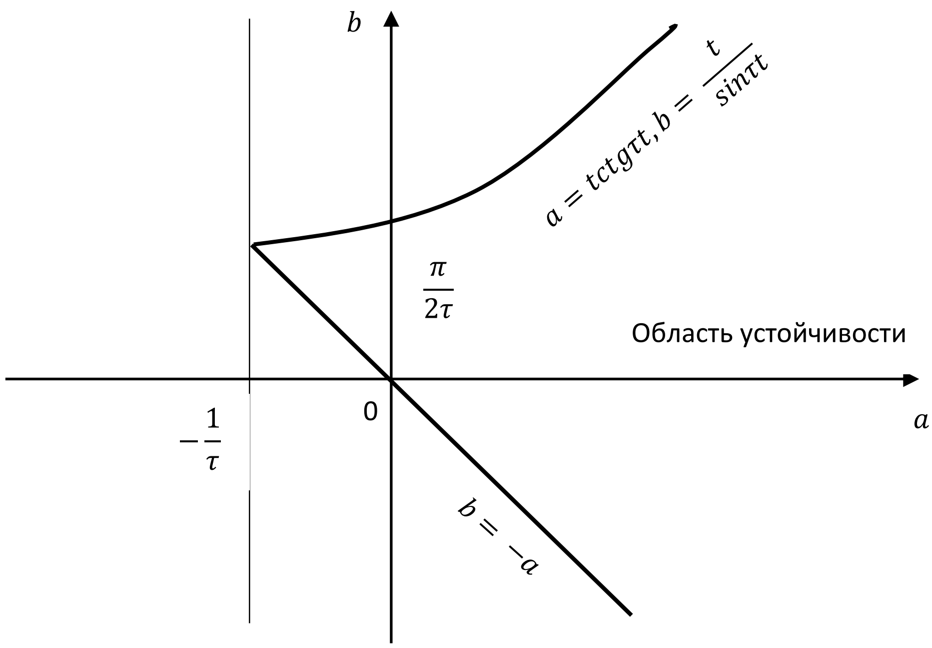

Рис.3.1 - Область устойчивости решения $x \equiv 0$ уравнения
$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0.$

Изменяя параметры a и b в программной реализации модифицированного алгоритма Адмса, программа строит графики решения, которые будут представлены далее на рисунках 3.2 – 3.3.

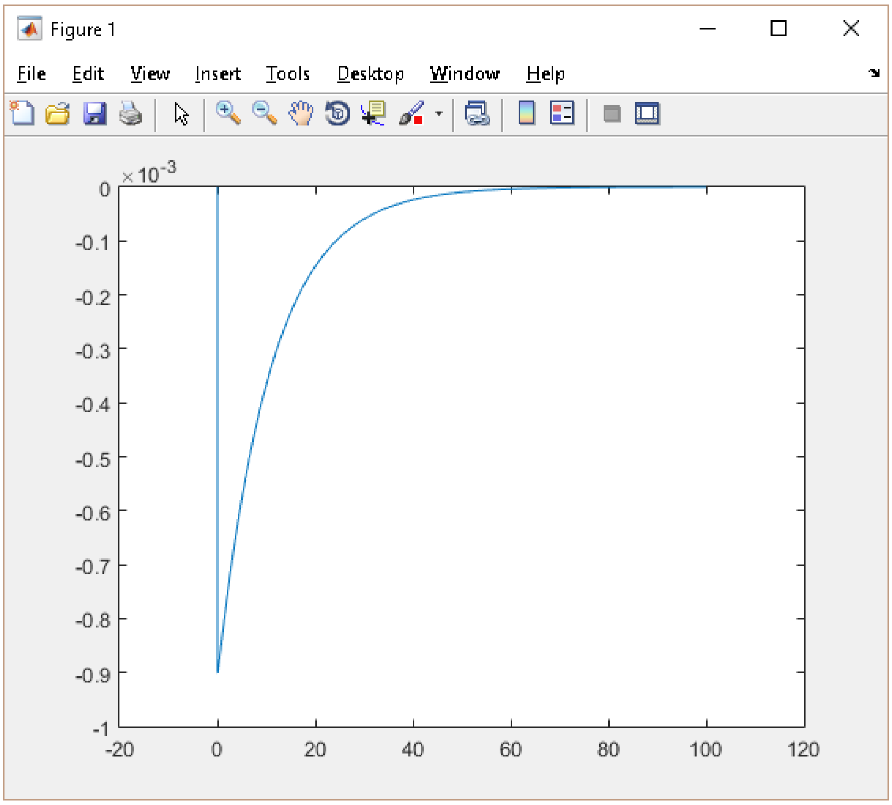

Рис. 3.2 – b = -0.01, a = 0.1, решение асимптотически устойчиво.

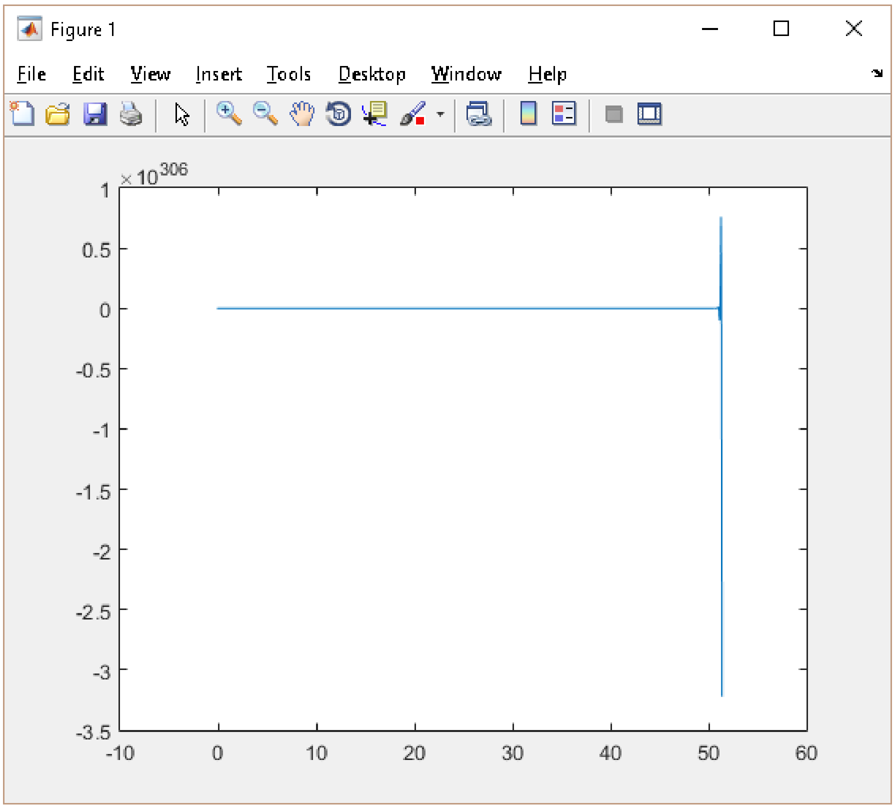

Рис. 3.3 – b = 100, a = 0.001, решение неустойчиво

Так как верхняя граница области асимптотической устойчивости зависит от параметра τ, имеет смысл рассмотреть влияние этого параметра при одинаковых значениях a и b. Примеры представлены на рисунках 3.4 – 3.7. Значения $a = 0.01, b = 10$.

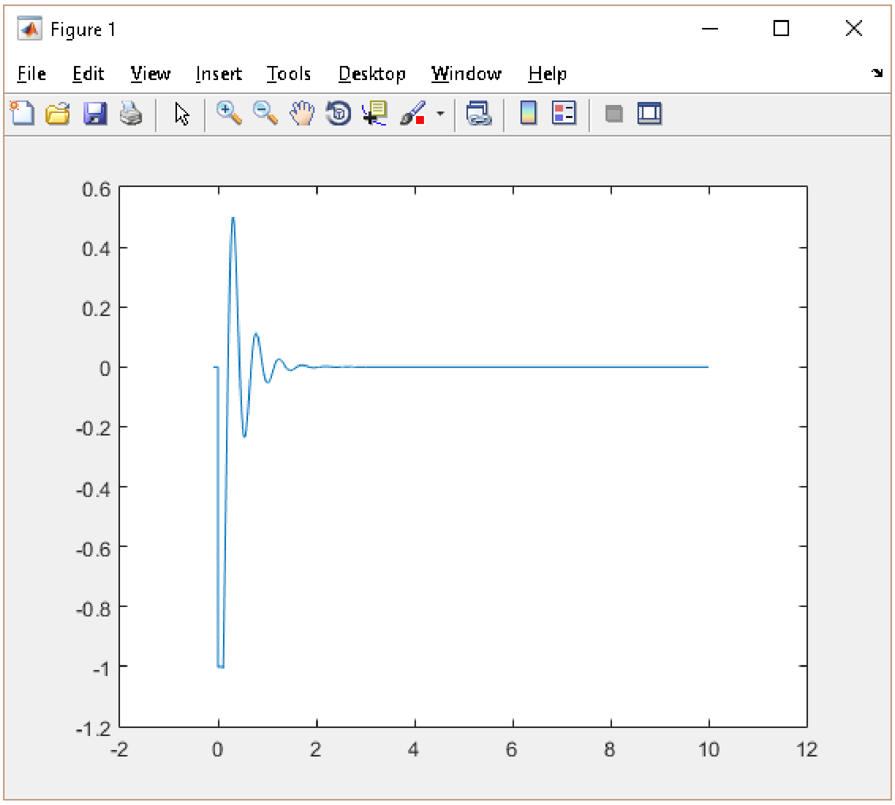

Рис. 3.4 – $\tau = 0.1$, решение устойчиво

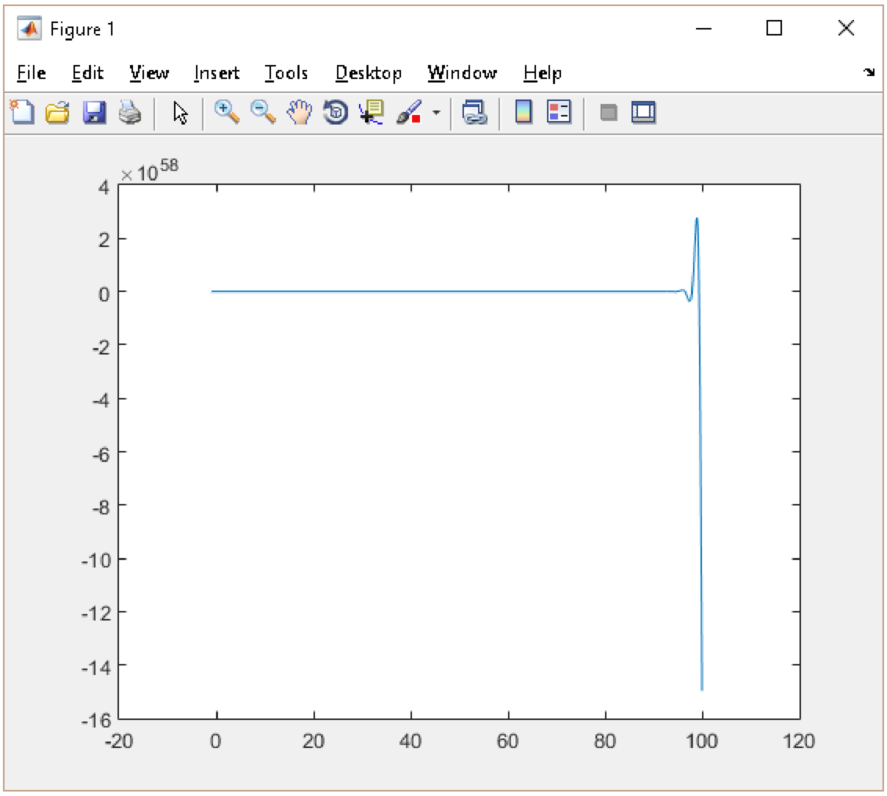

Рис. 3.5 - $\tau = 1$, решение неустойчиво

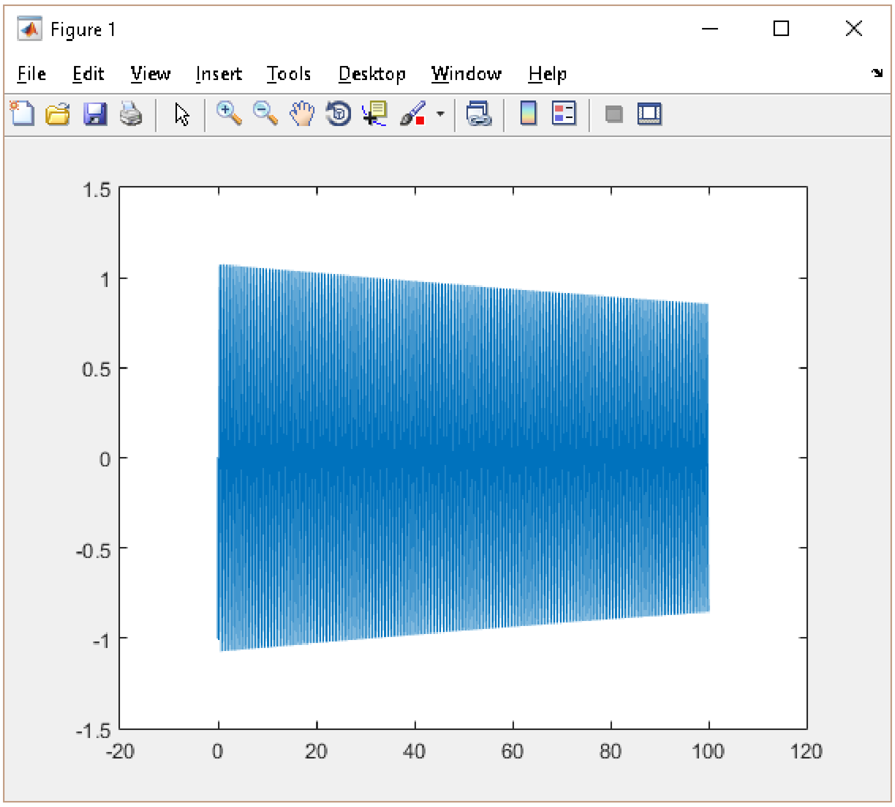

Рис. 3.6 - $\tau = 0.1571$, решение устойчиво

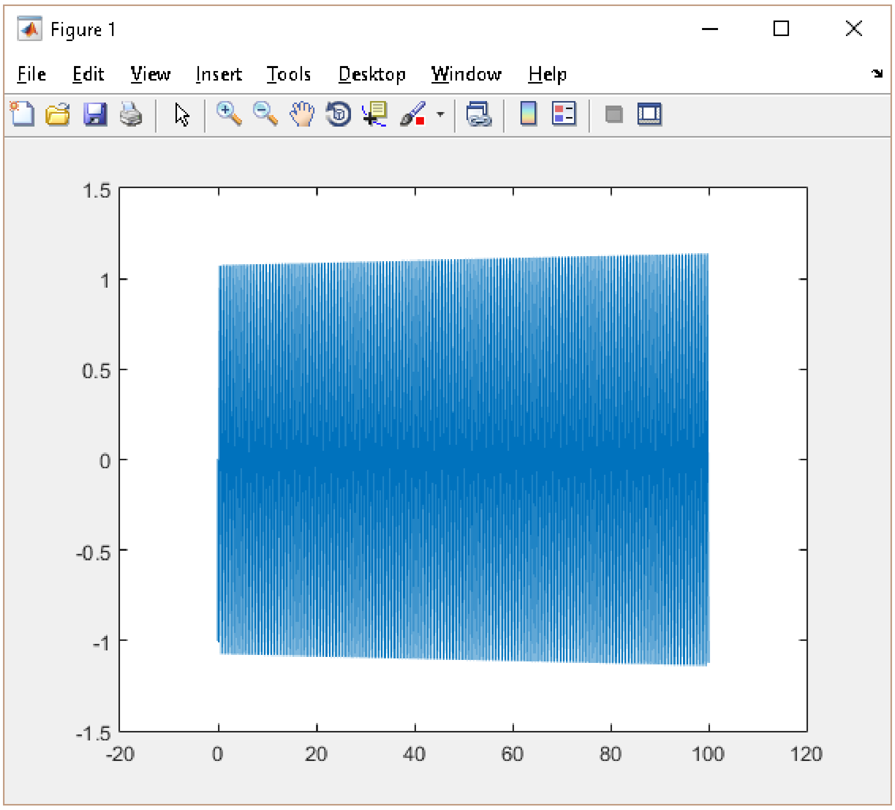

Рис. 3.7 - $\tau = 0.1572$, решение неустойчиво

Выводы

В ходе данной работы была подробно рассмотрена проблема построения области асимптотической устойчивости для одного дифференциально-разностного уравнения с запаздывающим аргументом. Для этого в первой и второй части работы были рассмотрены основные сведения по теории обыкновенных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений.

Существующие алгоритмы численного решения не подходят для дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом, поэтому возникает необходимость модифицировать один из них. В третьей части работы приведен модифицированный алгоритм Адамса [8] для численного решения.

С его помощью была проанализирована построенная аналитически область асимптотической устойчивости. Программное построение области асимптотической устойчивости в настоящее время – достаточно трудоемкий процесс, так как возникает необходимость вычисления корней квазиполинома.

Заключение

В ходе данной работы, были рассмотрены основные методы решения и исследования на устойчивость дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом.

В силу того, что стандартный метод Адамса используется для решения обычных дифференциальных уравнений, был приведен и программно реализован метод Адамса для построения численного решения дифференциально-разностных уравнений.

С помощью метода амплитудно-фазовых колебаний была аналитически построена область асимптотической устойчивости дифференциально-разностного уравнения и проведено ее исследование с помощью программной реализации метода Адамса.

Программная реализация, построенная в ходе данной работы может быть использована для облегчения исследования области асимптотической устойчивости дифференциально-разностного уравнения с запаздыванием.

Оперируя изменениями входных параметров уравнения, можно ускорить процесс анализа и проверить правильность теоретически выкладок, не затрачивая много времени на точное решение.

Цели и задачи, поставленные в начале работы, были выполнены.

Список литературы

1) Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А. Д. Мышкнса, О. А. Олейник. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.
2) Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисления. / Эльсгольц Л.Э. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 424с.
3) Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. – 548 с.
4) Основные понятия теории устойчивости. http://www.math24.ru/основные-понятия-теории-устойчивости.html
5) Ногин В.Д. Теория устойчивости движения. СПбГУ: ф-т ПМ-ПУ, 2008.
6) Л. Э. Эльсгольц, Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений, УМН, 1954, том 9, выпуск 4(62), 95–112.
7) Условие Липшица. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/2821/ЛИПШИЦА
8) Жабко А. П., Зараник У. П. Построение области асимптотической устойчивости дифференциально – разностных уравнений в среде MATLAB // Сборник избранных трудов V научно-практической конференции. Москва. 8-10 ноября 2010 г. / Под ред. В. А. Сухомлина. М.: ИНТУИТ. РУ, 2010. - 640 с.