

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Клюенков Андрей Леонидович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Реализация алгоритмов оптимального управления
с учетом реальных условий
функционирования объектов управления**

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Смирнов Н. В.

Санкт-Петербург

2016

| | |
|--|-----------|
| Содержание | |
| Введение. Обзор литературы | 3 |
| Постановка задачи | 4 |
| Глава 1. Решение задач оптимального управления при помощи адаптивного метода | 6 |
| §1.1. Сведение линейной непрерывной задачи оптимального управления к задаче линейного программирования | 6 |
| §1.2. Сведение дискретной задачи оптимального управления к задаче линейного программирования | 8 |
| §1.3. Случай постоянных возмущений | 9 |
| §1.4. Идея адаптивного метода и его основные положения | 10 |
| §1.5. Адаптивный метод | 12 |
| §1.6. Построение начального плана | 13 |
| §1.7. Численная реализация | 14 |
| Глава 2. Прикладные задачи | 16 |
| §2.1. Стабилизация трехмассовой колебательной системы | 16 |
| §2.2. Стабилизация системы при воздействии на нее постоянных возмущений | 17 |
| §2.3. Оптимальное управление макроэкономическими тенденциями на основе разностной схемы МОБ | 19 |
| §2.4. Оптимальная стабилизация гибкого робота-манипулятора | 26 |
| Заключение | 31 |
| Список литературы | 32 |
| Приложение | 34 |

Введение. Обзор литературы

В связи с возникновением необходимости решения различных технических и экономических задач, в середине прошлого века была создана теория оптимального управления. Направленная на оптимизацию функционалов, характеризующих всевозможные параметры математических моделей, данная теория позволяет при помощи теоретических подходов, а наряду с повсеместным внедрением в жизнь программных средств, и численно, находить наиболее выгодные режимы управления объектом. Под оптимальностью, как правило, понимается максимизация или минимизация некоторых характеристик объекта, таких как быстродействие, расход энергии, производительность.

Для задач оптимального управления применяются различные динамические модели, описывающие поведение объектов управления. Примерами таких моделей служат системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы разностных уравнений, системы дифференциальных уравнений в частных производных. В XX веке различные ученые занимались развитием классической теории оптимального управления. Л. С. Понтрягин для широкого класса задач сформулировал принцип максимума [1]. Известным достижением в области оптимального управления стало динамическое программирование, разработанное Р. Беллманом [2]. Большой вклад в развитие теории внесли В. И. Зубов [3, 4, 5], Р. Е. Калман [6] и другие. С появлением программных средств разработки стало возможным создание регуляторов, позволяющих находить оптимальное управление с учетом реальных условий функционирования объектов управления. Для решения данных задач были предложены различные подходы и методы. Один из таких методов был разработан Р. Габасовым и его учениками [7, 8, 9].

Настоящая работа посвящена реализации алгоритмов оптимального управления в режиме реального времени.

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений общего вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t_*) = x_0, \quad (2)$$

$$t \in [t_*, t^*] = T, \quad t_* < t^* < +\infty,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ — вектор управляющих параметров, $f(t, x, u)$ — непрерывная по всем аргументам и непрерывно-дифференцируемая по x и u вектор-функция. Множество всех допустимых управлений обозначим U .

Функция $u(t) \in U, t \in T$, называется *дискретным управлением* (с периодом квантования h), если

$$\begin{cases} u(t) = u(t_* + kh) = u_{kh}, & t \in [t_* + kh, t_* + (k+1)h[\\ k = \overline{0, N-1} \end{cases} \quad (3)$$

где $h = (t^* - t_*)/N$ — период квантования, N — натуральное число. И кроме того, $l_* \leq u(t) \leq l^*$, при $t \in T$. Множество точек разбиения будем обозначать $T_u = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}$.

Сформулируем задачу терминального управления. Для решения системы (1) с начальными условиями (2), в классе кусочно-постоянных управлений (3), обеспечить максимум целевой функции

$$c^T x(t^*) \rightarrow \max, \quad (4)$$

при условии

$$Hx(t^*) = g, \quad (5)$$

где $g \in \mathbb{R}^m$, $\text{rank } H = m \leq n$ — в общем случае.

Таким образом уравнение (5) задает линейное многообразие в пространстве \mathbb{R}^m , на которое необходимо вывести программное движение системы (1) в конечный момент $t = t^*$.

Помимо задач оптимального управления с функционалом (4) будем рассматривать задачи с функционалами непосредственно описывающими качество управления:

$$\int_{t_*}^{t^*} c^T u(t) dt \rightarrow \max.$$

Далее в работе будет рассмотрен метод решения поставленной задачи оптимального управления и некоторые его приложения.

Глава 1. Решение задач оптимального управления при помощи адаптивного метода

Для поиска оптимального управления проведем сведение задачи оптимального управления к задаче линейного программирования, которую, в свою очередь, будем решать при помощи адаптивного метода [7].

§1.1. Сведение линейной непрерывной задачи оптимального управления к задаче линейного программирования

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad (6)$$

с начальными условиями (2).

Запишем общее решение системы (6), (2) в форме Коши в момент $t = t^*$

$$x(t^*, t_*, x_0) = Y(t^*)[Y^{-1}(t_*)x_0 + \int_{t_*}^{t^*} Y^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau], \quad (7)$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы. Тогда, подставляя полученное представление (7) в функционал (4), получим эквивалентное представление

$$\int_{t_*}^{t^*} c^T Y(t^*)Y^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau \rightarrow \max. \quad (8)$$

Рассмотрим сопряженную систему с начальными условиями

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -A^T(t)z, \\ z(t^*) &= c, \end{aligned} \quad (9)$$

где c и t^* из условий (4), (5). Ее решение представимо в виде $z_c(t) = Z(t)Z^{-1}(t^*)c$, где $Z(t)$ — фундаментальная матрица системы (9). Запишем основное свойство этой фундаментальной матрицы: $Z^T(t) = Y^{-1}(t)$.

Используя данное свойство, легко убедиться, что

$$z_c^T(t) = c^T(Z^{-1}(t^*))^T Z^T(t) = c^T Y(t^*) Y^{-1}(t). \quad (10)$$

Учитывая (10), условие (8) можно записать в виде

$$\int_{t_*}^{t^*} z_c^T(\tau) b(\tau) u(\tau) d\tau \rightarrow \max. \quad (11)$$

Таким образом, мы можем не вычислять фундаментальную матрицу системы (6), а найти решение сопряженной системы численным методом.

Обозначая строки матрицы H за h_i ($i = \overline{1, m}$) и проводя рассуждения аналогичные рассуждениям из предыдущего абзаца, можем найти численное решение для ограничения (5), которое с учетом (7) может быть записано в виде

$$\int_{t_*}^{t^*} H Y(t^*) Y^{-1}(\tau) b(\tau) u(\tau) d\tau = g_0, \quad (12)$$

где $g_0 = g - H Y(t^*) Y^{-1}(t_*) x_0$ — m -мерный вектор.

Учитывая, что мы ищем управление в виде (3), можем записать (11) и (12) соответственно следующим образом

$$\sum_{k \in T_u} \gamma_k u_k \rightarrow \max, \quad (13)$$

$$\sum_{k \in T_u} d_k u_k = g_0, \quad (14)$$

где $d_k = \int_t^{t+h} H Y(t^*) Y^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau$, $\gamma_k = \int_t^{t+h} z_c^T(\tau) b(\tau) d\tau$, при $t = t_* + kh$, $k = \overline{0, N-1}$.

Запишем полученные выражения в векторной форме. Для этого введем обозначения: $\omega = (u_{0h}, u_{1h}, \dots, u_{kh}, \dots, u_{(N-1)h})^T$, $C = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1})$, $D = (d_0, d_1, \dots, d_{N-1})$. Тогда окончательно задачу (13)–(14) можно записать

В виде

$$\begin{cases} C\omega \rightarrow \max, \\ D\omega = g_0, \\ L_* \leq u_k \leq L^*, \quad k = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (15)$$

где $L_* = (l_*, \dots, l_*)$, а $L^* = (l^*, \dots, l^*)$.

Таким образом, мы свели задачу оптимального управления к желаемому виду (15) — канонической задаче оптимального управления.

§1.2. Сведение дискретной задачи оптимального управления к задаче линейного программирования

Рассмотрим разностную управляемую систему

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \quad (16)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad (17)$$

здесь $x, b \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$, A — $(n \times n)$ -матрица. Будем предполагать, что время t может принимать следующие значения $t \in \{0, 1, \dots, N\} = T_0$.

Поставим задачу терминального управления. Обеспечить максимум функционала

$$c^T x(N) \rightarrow \max \quad (18)$$

с ограничениями

$$Hx(N) = g, \quad (19)$$

где $\text{rank } H = m \leq n$, $g \in \mathbb{R}^m$. Управление будем считать ограниченным $|u(t)| \leq L$ для всех $t \in T_0$. Введем также в рассмотрение множество $T_1 = \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Выпишем общее решение задачи (16)–(17)

$$x(t) = A^t x_0 + \sum_{i=1}^t A^{i-1} bu(t-i). \quad (20)$$

В конечный момент времени $t = N$ решение (20) будет иметь вид

$$x(N) = A^N x_0 + \sum_{i=1}^N A^{i-1} b u(N - i). \quad (21)$$

Подставляя (21) в (18)

$$\sum_{i=0}^{N-1} c^T A^i b u(N - i) \rightarrow \max.$$

Теперь подставим (21) в ограничения (19), получим

$$\sum_{i=0}^{N-1} H A^i b u(N - i) = g_0,$$

где $g_0 = g - H A^N x_0$.

Введем обозначения $\gamma_t = c^T A^t b$, $d_t = H A^t b$, тогда

$$\sum_{t \in T_1} \gamma_t u(N - t) \rightarrow \max,$$

$$\sum_{t \in T_1} d_t u(N - t) = g_0.$$

Тогда полагая $\omega = (u(N - 1), u(N - 2), \dots, u(0))^T$, $C = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1})$, $D = (d_0, d_1, \dots, d_{N-1})$, приходим к виду (15).

§1.3. Случай постоянных возмущений

Рассмотрим теперь систему линейных дифференциальных уравнений в условиях постоянно действующих периодических возмущений $f(t)$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + f(t), \quad (22)$$

$$x(\tau) = z, \quad Hx(t^*) = g, \quad 0 \leq u(t) \leq L, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t^*], \quad (23)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ — $(n \times n)$ -матрица, $b(t)$ — n -мерная вектор-функция, $u \in \mathbb{R}^1$ — управляющий параметр. Будем искать управление в классе кусочно-постоянных функций, а множество допустимых управлений обозначим $U(\tau)$. Пусть $u^0(t | (\tau, z)) \in U(\tau)$, $t \in T(\tau)$ — оптимальное управление задачи (22),

(23) для (t, z) , $z \in X(\tau)$, $X(\tau)$ — множество состояний, для которых (22), (23) имеет решение при фиксированном τ .

Предположим, что в моменты времени t_* , $t_* + h, \dots, \tau$ определены управления $u^*(t_*)$, $u^*(t_* + h), \dots, u^*(\tau)$. Тогда реальное состояние системы $x(\tau + h)$, в которое она перешла за время h , связано с состоянием в отсутствие возмущения $x^0(\tau + h)$ в момент $\tau + h$ следующим образом:

$$x^*(\tau + h) = x^0(\tau + h) + \int_{\tau}^{\tau+h} Y(\tau + h)Y^{-1}(s)f(s) ds.$$

В момент $\tau + h$ надо определить оптимальное управление:

$$\begin{aligned} u^*(\tau + h) &= u^0(\tau + h | (\tau + h, x^*(\tau + h))), \\ c^T x(t^*) &\rightarrow \max, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \\ x(\tau + h) &= x^*(\tau + h), \quad Hx(t^*) = g, \\ 0 &\leq u(t) \leq L, \quad t \in T(\tau + h). \end{aligned}$$

Таким образом, в момент времени $\tau + h$ надо решить следующую задачу линейного программирования

$$\sum_{k=\tau}^{N-1} c_k u(k) \rightarrow \max, \quad \sum_{k=\tau}^{N-1} d_k u(k) = g_0(\tau) + \Delta g(\tau),$$

$$\Delta g(\tau) = Y(t^*)Y^{-1}(\tau)x^*(\tau) + d_k(\tau)u^*(\tau) - Y(t^*)Y^{-1}(\tau + h)x^*(\tau + h).$$

Полученная задача линейного программирования может быть решена при помощи адаптивного метода.

§1.4. Идея адаптивного метода и его основные положения

Обозначим через I множество индексов строк матрицы D , а через J — множество индексов ее столбцов. Выделим подмножества $I_{bs} \in I$ и $J_{bs} \in J$ с одинаковым количеством элементов в каждом из них ($|I_{bs}| = |J_{bs}|$) и, на основе этих подмножеств, составим квадратную матрицу $D_{bs} = D(I_{bs}, J_{bs})$. Совокупность множеств $K_{bs} = \{I_{bs}, J_{bs}\}$ будем называть опорой, а матрицу

D_{bs} — опорной (базисной) матрицей, если $\det D_{bs} \neq 0$. Также введем неопорные элементы: $I_n = I \setminus I_{bs}$, $J_n = J \setminus J_{bs}$, а также представим матрицу D в блочном виде $D = \begin{pmatrix} D_{bs} & D_{b,n} \\ D_{n,b} & D_n \end{pmatrix}$.

Будем рассматривать задачу линейного программирования (15). Пусть ω — базисный план этой задачи, D_{bs} — его базисная матрица, $\bar{\omega}$ — другой базисный план, $\Delta\omega = \bar{\omega} - \omega$ — приращение плана ω . Подсчитаем приращение целевой функции

$$\Delta\varphi = C\bar{\omega} - C\omega = C\Delta\omega. \quad (24)$$

Учитывая, что ω и $\bar{\omega}$ — планы задачи (15),

$$D\Delta\omega = D\bar{\omega} - D\omega = b - b = 0$$

или в компонентной форме $D_{bs}\Delta\omega_{bs} + D_n\Delta\omega_n = 0$, откуда следует, что

$$\Delta\omega_{bs} = D_{bs}^{-1}D_n\omega_n. \quad (25)$$

Подставим теперь значение приращения по опорным компонентам вектора ω из уравнения (25) в равенство (24)

$$C\Delta\omega = C_{bs}\Delta\omega_{bs} + C_n\Delta\omega_n = C_{bs}D_{bs}^{-1}\Delta z_{bs} + (C_n - C_{bs}D_{bs}^{-1}D_{b,n})\Delta\omega_n.$$

Вводя обозначения

$$v_{bs} = C_{bs}D_{bs}^{-1},$$

$$\Delta_n = C_n - v_{bs}D_{b,n},$$

получим формулу приращения целевой функции

$$C\Delta\omega = \Delta_n\Delta\omega_n = \sum_{j \in J_n} \Delta_j\Delta\omega_j.$$

Физический смысл оценок и потенциалов подробно рассмотрен в работе [8].

Таким образом можно сформулировать следующую теорему [9].

Теорема 1. *Для оптимальности плана ω необходимо и достаточно*

существования такой опоры K_{bs} , при которой выполняется соотношение

$$\begin{cases} \Delta_j \leq 0 & \text{при } \omega_j = l_*, \\ \Delta_j \geq 0 & \text{при } \omega_j = l^*, \end{cases} \quad j \in J_n.$$

Адаптивный метод является итеративным. Последовательность приближений можно описать в виде следующей схемы

$$\{\omega^1, K_{bs}^1\} \rightarrow \{\omega^2, K_{bs}^2\} \rightarrow \dots \rightarrow \{\omega^n, K_{bs}^n\}.$$

Будем называть построение первого приближения $\{\omega^1, K_{bs}^1\}$ первой фазой, а последовательности всех остальных — второй.

§1.5. Адаптивный метод

Приближения базисного плана можно представить в виде $\bar{\omega} = \omega + \Delta\omega$, где $\bar{\omega}$ — новый базисный план. Учитывая идею метода, приращение $\Delta\omega$ можно представить в виде

$$\Delta\omega = \theta^0 l. \quad (26)$$

Вектор $l \in \mathbb{R}^n$ называется направлением изменения плана ω , $\theta^0 \geq \theta$ — шаг вдоль этого направления.

Из свойства $D\Delta\omega = 0$ следует, что $D_{bs}l_{bs} + D_n l_n = 0$, а тогда для направления по базисным переменным справедлива формула

$$l_{bs} = -D_{bs}^{-1} D_n l_n. \quad (27)$$

Из соотношений (26) и (27) видно, что для любого выбора l_n основные ограничения задачи для $\bar{\omega}$ выполняются, тогда не умаляя общности можем выбрать вектор неопорных компонент вектора l следующим образом

$$l_n = (0, \dots, 0, l_{j_0}, 0, \dots, 0),$$

где для компоненты l_{j_0} , находящейся на позиции $j_0 \in J_n$, выполняется $l_{j_0} = \text{sign}\Delta_{j_0}$.

При вычислении оптимальной длины шага θ^0 разумно исходить из соображений о том, что вдоль направления l целевая функция возрастает. Таким образом, будем увеличивать значение θ до тех пор, пока не будет достигнута граница допустимых значений множества планов. Такие требования могут быть достигнуты при выборе

$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_*}\},$$

где $\theta_{j_*} = \min_{j \in J_{bs}} \theta_j$, $\theta_{j_0} = l^* - l_*$.

Для завершения итерации требуется определить новое опорное множество, а также проверить условие оптимальности построенного плана. Перейдем к рассмотрению этих вопросов. Важным в вопросе выбора опоры является выбор длины шага θ^0 . В случае, если оптимальная длина шага равна θ_{j_*} , следует заменить индекс j_* из опорного множества, при котором новый план достигает границы допустимого множества, на индекс j_0 . Тогда новое множество опорных индексов будет иметь вид $\bar{J}_{bs} = (J_{bs} \setminus j_*) \cup j_0$. Когда же при выборе длины шага θ^0 активным становится ограничение j_0 , то есть нарушаются ограничения при неопорных компонентах плана, новое множество неопорных компонент примет вид $\bar{J}_n = J_n \setminus j_0$. Если такое множество оказывается пустым $\bar{J}_n = \emptyset$, это говорит о том, что новый план является оптимальным.

§1.6. Построение начального плана

Для того чтобы приступить к поиску оптимального плана задачи (15), необходимо определить начальный план задачи, который будет являться допустимым. Стоит отметить, что адаптивный метод позволяет использовать в качестве начального плана не только вычисленные на первой фазе значения, но и использовать апостериорную информацию, полученную от специалистов, так как данный метод оперирует не только вершинами симплекса, но и точками, находящимися внутри него.

Целью первой фазы является поиск начального базисного плана или, в

случае, если такого плана не существует, доказательство несовместности ограничений задачи. Разобьем множество индексов J на два подмножества J_* и J^* таким образом, чтобы $J_* \cap J^* = \emptyset$, $J_* \cup J^* = J$ и положим $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_j = l^*$, $j \in J^*$; $\tilde{\omega}_j = l_*$, $j \in J_*$). Вычислим теперь вектор невязок $\xi = g_0 - D\tilde{\omega}$. Обозначим $I^+ = \{i \in I : \xi \geq 0\}$, $I^- = \{i \in I : \xi < 0\}$. Если множество $I^- = \emptyset$, то задача первой фазы решена, а вектор $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_f = g_0 - D\tilde{\omega})$ — базисный план задачи с базисной матрицей $D_{bs} = (a_{n+i}, i \in I) = E$. Предположим, что $I^- \neq \emptyset$. Введем вспомогательную задачу для первой фазы

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i \in I^-} \omega_{n+i} \rightarrow \max, \\
 & \begin{cases} D(i, J)\omega + \omega_{n+i} = g_{0i}, & i \in I^+, \\ D(i, J)\omega - \omega_{n+i} = g_{0i}, & i \in I^-, \end{cases} \quad (28) \\
 & L_* \leq \omega \leq L^*, \quad 0 \leq \omega_{n+i} \leq l^*, \quad i \in I^+, \\
 & 0 \leq \omega_{n+i} \leq |\xi_i|, \quad i \in I^-,
 \end{aligned}$$

где ω_{n+i} , $i \in I^+$ — свободные переменные, а ω_{n+i} , $i \in I^-$ — искусственные переменные.

Вектор $(\tilde{\omega}, \omega_{n+i} = \xi_i, i \in I^+, \omega_{n+i} = |\xi_i|, i \in I^-)$ является базисным планом задачи (28) с базисной матрицей $\tilde{D}_{bs} = (a_{n+i} = e_i, i \in I^+, a_{n+i} = -e_i, i \in I^-)$. Взяв его в качестве начального плана и применив к задаче (28) вторую фазу метода, можем построить оптимальный базисный план $(\omega^*, \omega_{n+i}^*, i \in I)$ с оптимальной базисной матрицей $D_{bs}^* = (a_j, j \in J_{bs})$.

§1.7 Численная реализация

Основываясь на данном алгоритме, был написан комплекс программ в пакете MATLAB. Для поиска численного значения определенного интеграла используется метод Симпсона, а для решения системы линейных дифференциальных уравнений метод Рунге — Кутты четвертого порядка точности.

Полученный комплекс программ легко адаптируется к изменениям модели. Учитывая специфику подхода, алгоритм можно модифицировать даже для нелинейных случаев, при которых при отыскании оптимального управления используются управления типа обратной связи. Результаты работы программы представлены в примерах, которые будут рассмотрены далее.

Глава 2. Прикладные задачи

§2.1. Стабилизация трехмассовой колебательной системы

В качестве примера, иллюстрирующего работу алгоритма для линейных систем, рассмотрим задачу стабилизации колебательной трехмассовой системы за фиксированное время с минимальным расходом топлива (см. рис. 1).

Математическая модель задачи имеет

вид

$$\int_0^{25} u(t) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}_1 = x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6 \quad \dot{x}_4 = -2,33x_1 - x_2 + 0,33x_3 + u,$$

$$\dot{x}_5 = -0,88x_1 - 2,06x_2 - 0,88x_3, \quad \dot{x}_6 = 0,25x_1 - 0,75x_2 - 1,75x_3,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 2, \quad x_5(0) = 1, \quad x_6(0) = 1,$$

$$x_1(25) = x_2(25) = x_3(25) = x_4(25) = x_5(25) = x_6(25) = 0,$$

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, 25],$$

где $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ — отклонение от положения равнове-

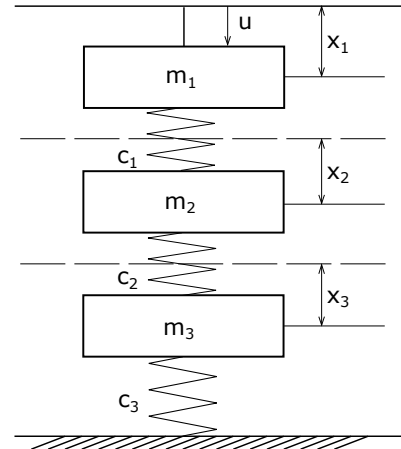


Рис. 1. Трехмассовая колебательная система

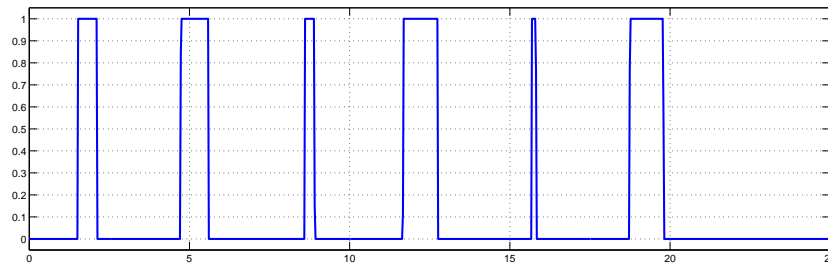


Рис. 2. Оптимальное управление

сия первой, второй и третьей масс соответственно, $u = u(t)$ — управляющий параметр силы.

Для построения оптимального управления был использован адаптивный метод. Результаты вычислений представлены на рис. 2–3.

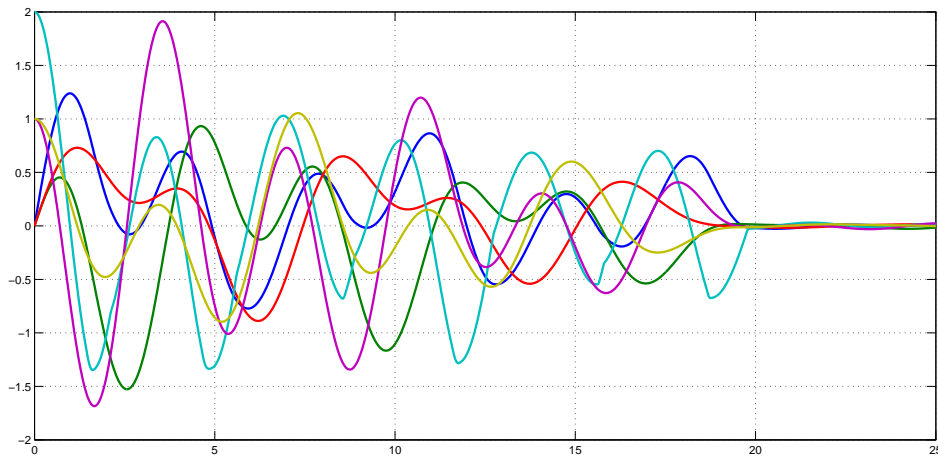


Рис. 3. Интегральные кривые замкнутой системы

§2.2. Стабилизация двухмассовой колебательной системы при воздействии на нее постоянных возмущений

Рассмотрим задачу стабилизации с минимальным расходом топлива колебательной двухмассовой системы (рис.4), на которую оказывает влияние постоянно действующее возмущение $f(t) = 0,2 \sin 10t$.

Такую колебательную систему можно описать в виде соотношений

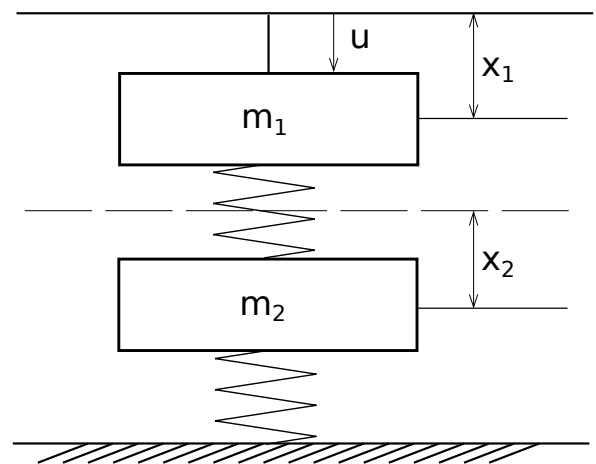


Рис. 4. Двухмассовая колебательная система

$$\int_0^{20} u(t)dt \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4,$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + u, \quad \dot{x}_4 = 0,1x_1 - 1,02x_2 + 0,2 \sin 10t,$$

$$x(0) = (0; 0; 2; 1), \quad x(20) = (0; 0; 0; 0), \quad 0 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, 20].$$

Данная задача была решена предложенным методом, с учетом действующего возмущения, и проведено сравнение с моделью без возмущений. Полученные результаты представлены на рисунках 5–7.

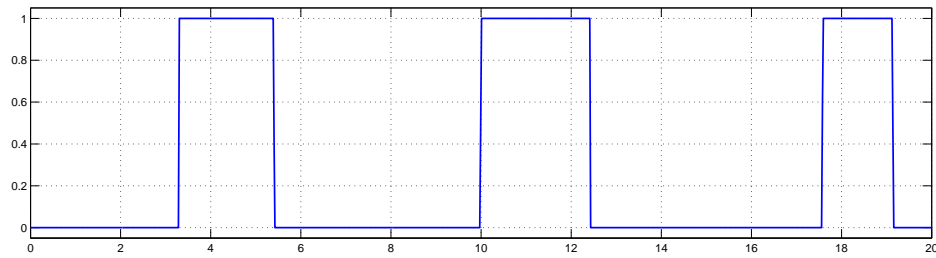


Рис. 5. Оптимальное управление

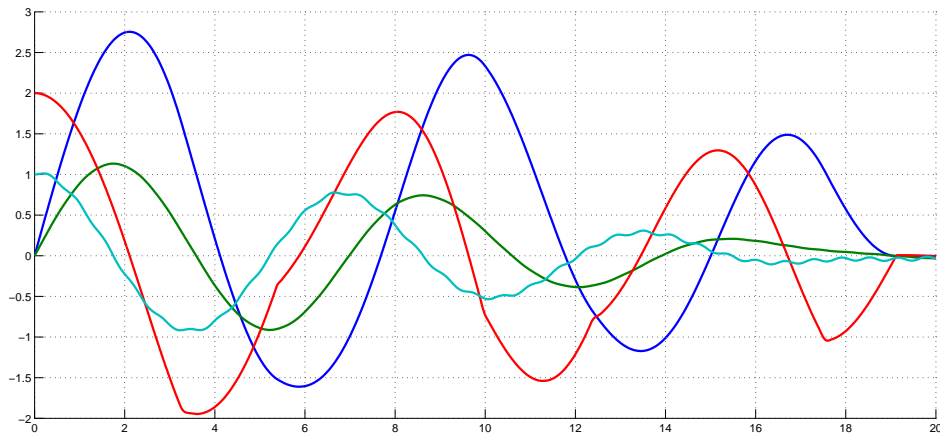


Рис. 6. Интегральные кривые замкнутой системы

На рис. 7 показан фазовый портрет системы для переменной, на которую действует возмущение (здесь x_2 — положение второй массы, а x_4 — ее скорость).

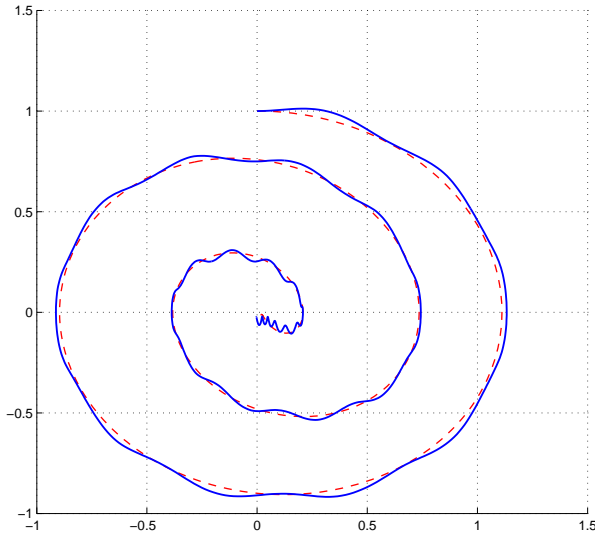


Рис. 7. Фазовый портрет системы по переменным x_2, x_4 (сплошной линией изображена кривая для возмущенной, пунктирной – без возмущений)

§2.3. Оптимальное управление макроэкономическими тенденциями на основе разностной схемы МОБ

Рассмотрим применение адаптивного метода для модели межотраслевого баланса (МОБ).

Таблица МОБ и обозначения. Таблица МОБ описывает n секторов экономики региона. Рассмотрим таблицу межотраслевого баланса, которая описывает n секторов региональной экономики. Таблица межотраслевого баланса состоит из 4 квадрантов (см. таблицу 1) [10]. Рассмотрим каждый из них более подробно. Будем использовать обозначения в соответствии с работой [11].

Первый квадрант представляет собой $(n \times n)$ -матрицу производственной сферы $\mathbf{A}p = \{p_{ij}\}$. Столбцы определяют промежуточное потребление каждой j -ой отрасли как производителя. Элементы матрицы можно представить в следующем виде $p_{ij} = P_i a_{ij} I n_j$, где P_i – это цены потребленной продукции каждой i -ой отрасли, a_{ij} – технологический коэффициент и, наконец, $I n_j$ –

объём годового выпуска j -ой отрасли в натуральном выражении.

| Производящие отрасли | Потребляющие отрасли | | | | | Конечный продукт (\mathbf{Y}) | Валовой продукт (\mathbf{X}) |
|----------------------|----------------------|----------|----------|-------|----------|-----------------------------------|----------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | ... | n | | |
| 1 | p_{11} | p_{12} | p_{13} | ... | p_{1n} | Y_1 | X_1 |
| 2 | p_{21} | p_{22} | p_{23} | ... | p_{2n} | Y_2 | X_2 |
| 3 | p_{31} | p_{32} | p_{33} | ... | p_{3n} | Y_3 | X_3 |
| · | · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | (I) | · | (II) | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · |
| n | p_{n1} | p_{n2} | p_{n3} | ... | p_{nn} | Y_n | X_n |
| Оплата труда | W_1 | W_2 | W_3 | ... | W_n | V_b (IV) | |
| Оплата налогов | Tx_1 | Tx_2 | Tx_3 | (III) | Tx_n | | |
| Чистая прибыль | Prh_1 | Prh_2 | Prh_3 | ... | Prh_n | | |
| Валовой продукт | X_1 | X_2 | X_3 | ... | X_n | | |

Таблица 1. Таблица межотраслевого баланса

Рассмотрим суммы по столбцам матрицы $\mathbf{A}p$. Они равны стоимости промежуточного потребления в j -ой отрасли

$$Pp_j = In_j \sum_{i=1}^n P_i a_{ij}.$$

Сумма по каждой i -ой строке равна стоимости объема реализованной продукции X_i этой отрасли экономики

$$X_i = P_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} In_j + Y n_j \right) \quad (29)$$

Второй квадрант матрицы МОБ — $(n + 1)$ -ый столбец, представляет собой n -мерный вектор-столбец стоимостей продукции конечного потребления $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T = (P_1 Y n_1, \dots, P_n Y n_n)^T$.

Третьим квадрантом матрицы «затраты-выпуск» является $(n + 1)$ -ая строка \mathbf{V} . Ее элементы V_j представляют собой показатели добавленной стоимости

$$V_j = I_j - Pp_j = In_j \left(P_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} P_i \right).$$

Четвертым квадрантом матрицы МОБ является государственный бюджет V_b , который представлен в $(n + 1)$ -ом диагональном элементе матрицы

МОБ. Он формируется как сумма всех налогов и других выплат.

Как видно из приведенной таблицы, каждый элемент строки «Итого» (Валовой продукт) равен сумме затрат на промежуточное потребление и добавленную стоимость. Он представляет собой ожидаемую стоимость выпущенной продукции в j -ой отрасли, т. е. $I_j = Pp_j + V_j$. Тогда, учитывая соотношения для выпусков, получим

$$I_i = P_i I n_i = P_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} I n_j + Y n_i \right).$$

Таким образом, можно заметить, что $V = Y$.

Основное уравнение баланса в натуральной форме

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{In} = \mathbf{Yn}.$$

Для построения балансовых уравнений введем в рассмотрение матрицу относительных цен $\mathbf{R}\{r_{ij}\}$

$$r_{ij} = \frac{p_{ij}}{I_j}, \quad p_{ij} = P_i a_{ij} I n_j.$$

Тогда система уравнений (29), для случая ($I_i \neq X_i$), в новых обозначениях примет следующий вид

$$\begin{cases} r_{11}I_1 + r_{12}I_2 + \dots + r_{1n}I_n + Y_1 = X_1, \\ r_{21}I_1 + r_{22}I_2 + \dots + r_{2n}I_n + Y_2 = X_2, \\ \dots \\ r_{n1}I_1 + r_{n2}I_2 + \dots + r_{nn}I_n + Y_n = X_n, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{RI} + \mathbf{Y} = \mathbf{X}. \quad (30)$$

В случае динамического равновесия ($I_i = X_i$) система уравнений (30) принимает следующий вид

$$(\mathbf{E} - \mathbf{R})\mathbf{I} = \mathbf{Y},$$

где $\mathbf{I} = (P_1 I n_1, \dots, P_n I n_n)$, $\mathbf{Y} = (P_1 Y n_1, \dots, P_n Y n_n)$.

Полученное уравнение является основным уравнением баланса в стоимостной форме.

Разностная модель МОБ

Предположим, что годовой объем продаж равен объему годового выпуска продукции $\mathbf{X} = \mathbf{I}$, а общая добавленная стоимость равна общему потреблению $\mathbf{V} = \mathbf{Y}$.

$$I_i = r_{i1}I_1 + r_{i2}I_2 + \dots + r_{in}I_n + Y r_i I_{n+1}. \quad (31)$$

В уравнении (31) $r_{ij} = p_{ij}/I_j$ это элементы матрицы относительных цен $R = \{r_{ij}\}$, $Y r_i = Y_i/I_{n+1}$ итоговое потребление, нормированное по ВВП. Под ВВП мы понимаем сумму добавленной стоимости V_j и бюджета V_b , который является добавленной стоимостью сферы потребления. Чистая операционная прибыль Prh_j – это источник инвестиций $Cp_j = Prh_j$. Значение Prh_j отличается от добавленной стоимости V_j , оплаты труда работника W_j и налогов Tx_j .

Обозначим изменение объема выпуска продукции за единицу времени как $\Delta I_j = I_j(t) - I_j(t - 1)$. Инвестиции необходимые для расширения производства (ускорения) выпуска продукции можно считать пропорциональными желаемому ускорению. Таким образом получим систему разностных уравнений

$$Prh_j = Fe_j \Delta I_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (32)$$

где Fe_j представляют капитальные фондоемкости каждого сектора. Они являются коэффициентами пропорциональности между ростом выпуска продукции и необходимыми для этого инвестициями.

Уравнения, аналогичные (32), можно записать для I_{n+1} (ВВП):

$$Prh_b = Fe_b \Delta I_{n+1}. \quad (33)$$

Здесь Fe_b – это фондоемкость сферы потребления. Для вычисления Fe_j можно использовать следующие выражения:

$$Fe_j = \frac{Prh_j(T_2)(T_2 - T_1)}{I_j(T_2) - I_j(T_1)}.$$

Используя (31)–(33) и вводя обозначение $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_n, I_{n+1})$, получаем систему уравнений

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{D}\mathbf{I}(t-1), \quad \mathbf{D} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{R}} + \mathbf{E}, \quad (34)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица,

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & Yr_1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & Yr_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} & Yr_n \\ Vr_1 & Vr_1 & \cdots & Vr_n & rg \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{Vr_1 - Wr_1}{Fe_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{Vr_n - Wr_n}{Fe_n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{Vr_b - Wr_b}{Fe_b} \end{pmatrix}.$$

Здесь rg обозначает ставку обобщенного налога, которая определяется как доля бюджета ВВП, $Vr_j = V_j/I_j$ и $Wr_j = W_j/I_j$ это относительные добавленные стоимости и относительные оплаты труда работников.

В систему (34) может быть введено управление как экзогенный параметр. В частности, таким параметром могут выступать инвестиции. Тогда динамику системы можно описать следующими уравнениями

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{D}\mathbf{I}(t-1) + \mathbf{Q}\mathbf{U}(t-1), \quad (35)$$

$$0 \leq u_j \leq L_j. \quad (36)$$

Здесь $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_{n+1})^T$ – вектор управления (инвестиции), $L_j > 0$ – константы, элементы матрицы $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}$, где $q_{ij} = \delta_{ij}/Fe_j$ и δ_{ij} – это дельты Кронекера, $i, j = 1, \dots, n+1$.

Прогнозирование и сравнение

Стоит отметить, что для полученной модели МОБ, решения будут отличаться от решений для модели, описываемой системой дифференциальных уравнений [12]. В связи с этим проведем сравнение этих двух моделей.

| в млн руб. | 1 | 2 | 3 | Y |
|------------|-----------|-----------|------------|------------|
| 1 | 9 069 545 | 1 774 978 | 3 740 019 | 10 938 888 |
| 2 | 716 976 | 633 869 | 209 075 | 6 476 850 |
| 3 | 1 615 173 | 893 268 | 4 150 585 | 6 074 466 |
| V | 7 538 260 | 4 171 580 | 11 825 365 | 6 170 500 |
| W | 1 975 907 | 2 168 750 | 3 838 591 | 1 057 900 |

Таблица 2. Агрегированная таблица за 2006 год

Рассмотрим таблицу межотраслевого баланса за 2006 год. Для этих целей воспользуемся агрегированными данными по трем секторам (промышленность, жизнеобеспечение и инфраструктура), представленные Росстатом (табл. 2) [13].

Для проверки адекватности модели ее матрица D построена по таблице товаров и услуг за 2005 год. Фондоземкости вычислены с использованием данных по выпуску и ВВП за 2004 и 2005 годы:

$$Fe_j(2005) = \frac{Prh_j(2005)}{I_j(2005) - I_j(2004)}.$$

Результаты прогнозирования представлены в таблице 3

| I(2004) | I(2005) | I(2006) | $\hat{I}(2006)$ | $\tilde{I}(2006)$ |
|------------|------------|------------|-----------------|-------------------|
| 11 994 582 | 15 547 550 | 18 939 954 | 20 790 352 | 19 984 787 |
| 5 126 942 | 6 067 326 | 7 473 695 | 7 218 155 | 7 599 113 |
| 12 415 833 | 15 478 184 | 19 925 044 | 17 704 991 | 18 393 854 |
| 18 611 055 | 24 227 335 | 29 705 705 | 30 452 286 | 29 720 487 |

Таблица 3. Реальные и смоделированные выпуски в текущих ценах

Здесь $\hat{I}(2006)$ – спрогнозированные значения выпусков для системы дифференциальных уравнений, а $\tilde{I}(2006)$ – для разностных.

Для сравнения результатов прогнозирования с реальными данными за

2006 год использовалась формула относительной ошибки

$$r = \frac{\|\widehat{\mathbf{I}}(2006) - \mathbf{I}(2006)\|}{\|\widehat{\mathbf{I}}(2006)\|} 100\%.$$

В таблице 4 используются следующие обозначения: r_1 – относительная ошибка прогнозирования дифференциальной системы, а r_2 – для разностной. Таким образом можно увидеть, что разностная модель наиболее точно описывает динамику выпусков продукции на данном промежутке времени.

| | |
|--------|--------|
| r_1 | r_2 |
| 7,28 % | 4,53 % |

Таблица 4. Относительная ошибка прогнозирования

Оптимальное управление инвестициями в экономике

Поставим задачу оптимального управления, которая заключается в увеличении выпусков и ВВП на 8% за год при минимальных инвестициях

$$\sum_{t=1}^4 (u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t)) \rightarrow \min_{u_j},$$

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{D}_{2006} \mathbf{I}(t-1) + \mathbf{Q}_{2006} \mathbf{U}(t-1),$$

$$\sum_{t=1}^4 \sum_{j=1}^4 u_j(t) \leq 5 \cdot 10^{11}, \quad \mathbf{I}(0) = \mathbf{I}_{2006}, \quad \mathbf{I}(1) = \mathbf{I}_{2007} = 1.08\mathbf{I}(0),$$

где матрицы \mathbf{D}_{2006} , \mathbf{Q}_{2006} , \mathbf{I}_{2006} получены из таблиц 1, 2.

Предполагается, что инвестиции поступают в экономику ежеквартально, а их сумма не превосходит 0,5 триллионов рублей в квартал. Решение данной задачи найдено при помощи адаптивного метода, результаты представлены в таблице 5.

| | 1-ый квартал | 2-ой квартал | 3-ий квартал | 4-ый квартал |
|---------|-------------------|-------------------|----------------------|----------------------|
| u_1^* | 0 | 0 | 0 | $2.45 \cdot 10^{11}$ |
| u_2^* | 0 | 0 | 0 | $1.61 \cdot 10^{11}$ |
| u_3^* | 0 | 0 | $4.61 \cdot 10^{11}$ | $0.87 \cdot 10^{11}$ |
| u_4^* | $5 \cdot 10^{11}$ | $5 \cdot 10^{11}$ | $0.39 \cdot 10^{11}$ | 0 |

Таблица 5. Оптимальное распределение инвестиций

Функционал оптимальности при полученном распределении инвестиций имеет значение

$$\sum_{t=1}^4 \sum_{j=1}^4 u_j(t) = 1.99 * 10^{12}.$$

§2.4. Оптимальная стабилизация гибкого робота-манипулятора

Перейдем теперь к вопросу о построении оптимального управления для нелинейных систем дифференциальных уравнений. В общем случае для систем, в которых нелинейность по фазовым переменным выражается в виде периодических функций или функций, которые можно заменить их кусочно-линейной аппроксимацией, также можно применять предложенный алгоритм.

Рассмотрим модель односвязного робота-манипулятора с парой моторов [14, с. 313]. Когда соединения рассматриваются как пружины кручения, система динамических уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\phi}_1 + F_1 \dot{\phi}_1 + K \left(\phi_1 - \frac{\phi_2}{N} \right) + mgd \cos \phi_1 &= 0, \\ J_2 \ddot{\phi}_2 + F_2 \dot{\phi}_2 - \frac{K}{N} \left(\phi_1 - \frac{\phi_2}{N} \right) &= K_t i, \quad L \frac{di}{dt} + Ri + K_b \dot{\phi}_2 = u, \end{aligned} \quad (37)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы поворота соединений на каждом из моторов, i — ток якоря, u — напряжение якоря, R и L — сопротивление якоря и его индукция, J_1 и J_2 — моменты инерции, F_1, F_2 — коэффициенты вязкого трения, K — коэффициент жесткости пружины, K_t — крутящий момент, K_b — коэффициент обратной ЭДС, m — масса соединения, d — положение центра тяжести соединения, N — передаточное число и g — ускорение свободного падения.

Преобразуя систему (37), как это показано в [14], получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1, & \dot{x}_2 &= x_3 + \theta_2 x_1 + \theta_3 \cos x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4 + \theta_4 x_1 + \theta_5 \cos x_1, & \dot{x}_4 &= x_5 + \theta_6 x_1 + \theta_7 \cos x_1, \\ \dot{x}_5 &= \theta_8 \cos x_1 + b_0 u, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= - \left(\frac{R}{L} + \frac{F_1}{J_1} + \frac{F_2}{J_2} \right) \\
\theta_2 &= - \left[\frac{R}{L} \left(\frac{F_1}{J_1} + \frac{F_2}{J_2} \right) + \frac{K_b K_t}{L J_2} + \left(\frac{K}{J_1} + \frac{K}{J_2 N^2} + \frac{F_1 F_2}{J_1 J_2} \right) \right] \\
\theta_3 &= - \frac{mgd}{J_1} \\
\theta_4 &= - \left[\frac{R}{L} \left(\frac{K}{J_1} + \frac{K}{J_2 N^2} + \frac{F_1 F_2}{J_1 J_2} \right) + \frac{F_1 K}{J_1 J_2 N^2} + \frac{F_2 K}{J_1 J_2} + \frac{K_b F_1 K_1}{L J_1 J_2} \right] \\
\theta_5 &= - \frac{mgd}{J_1} \left(\frac{R}{L} + \frac{F_2}{J_2} \right) \\
\theta_6 &= - \left[\frac{R}{L} \left(\frac{F_1 K}{J_1 J_2 N^2} + \frac{F_2 K}{J_1 J_2} \right) + \frac{K_b F_1 K_1}{L J_1 J_2} \right] \\
\theta_7 &= - \left(\frac{K}{N^2} + \frac{R F_2}{L} + \frac{K_b K_t}{L} \right) \frac{mgd}{J_1 J_2} \\
\theta_8 &= - \frac{R mgd K}{L J_1 J_2 N^2}, \quad b_0 = \frac{K_t K}{J_1 J_2 N L} > 0.
\end{aligned}$$

Для (38) рассмотрим задачу стабилизации с минимальным расходом топлива

$$B(t^*) = \int_0^{t^*} u(t) dt \rightarrow \min$$

и краевыми значениями $x(0) = z$, $x(t^*) = 0$, где $x = (x_1, \dots, x_5)^T$, $z = (z_1, \dots, z_5)^T$, $t \in T = [0, t^*]$. Кроме того, будем полагать управление ограниченным $|u(t)| < L = \text{const}$.

Заменим нелинейную характеристику системы $\cos x$ на периодическую кусочно-линейную функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & 2\pi k - \pi \leq x \leq 2\pi k \\ -x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & 2\pi k \leq x \leq 2\pi k + \pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (39)$$

Будем предполагать, что в начальный момент времени значение фазовой переменной x_1 лежит в области $I : 0 < x_1 \leq \pi$, а с течением времени переходит в область $II : -\pi < x_1 \leq 0$, в которой и заканчивает свое движение. Такое предположение обусловлено характеристиками модели и зависит от кон-

кретных ее параметров. Управление строится в виде кусочно-постоянно функции. Разобьем интервал времени T на N равных частей: $t^* = N\nu$, $u_j = u(t)$, $t \in [(j-1)\nu, j\nu)$, $j = 1, \dots, N$. Учитывая вышесказанное и аппроксимацию (39), получим следующую задачу

$$\begin{aligned}
B(z) = C(z, t_1^0, t^*) &= \min_{u, t_1} \int_0^{t^*} |u(t)| dt = \min_{u, N_1} \left(\sum_{j=1}^{N_1} |u_j| + \sum_{j=N_1+1}^N |u_j| \right) \\
\dot{x}^1 &= A^1 x^1 + bu^1 + c, \quad x^1(0) = z, \quad x_1^1(t_1) = 0, \quad t \in [0, t_1], \\
\dot{x}^2 &= A^2 x^2 + bu^2 + c, \quad x^2(t^*) = 0, \quad t \in [t_1, t^*], \\
|u(t)| &\leq L, \quad t \in T,
\end{aligned} \tag{40}$$

где t_1^0 — оптимальный момент перехода траектории x_1 из области I в область II ; матрицы A^1 , A^2 и векторы b и c вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
A^1 &= \begin{pmatrix} \theta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 - \theta_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \theta_4 - \theta_5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \theta_6 - \theta_7 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\theta_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} \theta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 + \theta_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \theta_4 + \theta_5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \theta_6 + \theta_7 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \theta_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
b &= (0, 0, 0, 0, b_0)^T, \quad c = \left(0, \frac{\pi\theta_3}{2}, \frac{\pi\theta_5}{2}, \frac{\pi\theta_7}{2}, \frac{\pi\theta_8}{2} \right)^T.
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Коши общего решения для системы (40)

$$\begin{aligned}
x^1(t_1) &= F^1(N_1\nu)z + \int_0^{N_1\nu} F^1(N_1\nu - t)c dt + \\
&+ \sum_{j=1}^{N_1} u_j \int_{(j-1)\nu}^{j\nu} F^1(N_1\nu - t)b dt = k^1 + \sum_{j=1}^{N_1} u_j d_j,
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
x^2(t^*) &= F^2(N\nu - N_1\nu)x^1(t_1) + \int_{N_1\nu}^{N\nu} F^2(N\nu - t)c dt + \\
&+ \sum_{j=N_1+1}^N u_j \int_{(j-1)\nu}^{j\nu} F^2(N\nu - t)b dt = k^2 + \sum_{j=N_1+1}^N u_j d_j,
\end{aligned} \tag{42}$$

здесь k^1 и k^2 — константы, соответствующие первым двум слагаемым, для обоих равенств соответственно, d_j , $j = 1, \dots, N$ — множители при u_j , а $F^1(t)$ и $F^2(t)$, $t \geq 0$ — фундаментальные матрицы соответствующих однородных систем $\dot{x}^1 = A^1 x^1$ и $\dot{x}^2 = A^2 x^2$

$$F^1(t) = \begin{pmatrix} F_{11}^1 & \dots & F_{15}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{51}^1 & \dots & F_{55}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ \vdots \\ F_5^1 \end{pmatrix}, \quad F^2(t) = \begin{pmatrix} F_{11}^2 & \dots & F_{15}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{51}^2 & \dots & F_{55}^2 \end{pmatrix}.$$

Перепишем задачу (40) с учетом решений (41) и (42)

$$\begin{aligned} B(z) &= \min_{u, N_1} \sum_{j=1}^N |u_j| \\ x_1^1(t_1) &= F_1^1(N_1\nu)z + \int_0^{N_1\nu} F_1^1(N_1\nu - t)c dt + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_1} u_j \int_{(j-1)\nu}^{j\nu} F_1^1(N_1\nu - t)b dt = k_1^1 + \sum_{j=1}^{N_1} u_j d_j^1 = 0, \\ x^2(t^*) &= k^2 + \sum_{j=N_1+1}^N u_j d_j = 0, \\ |u(t)| &\leq L, \quad t \in T. \end{aligned} \tag{43}$$

Задача (43) — задача оптимального управления, в ней все элементы известны. Будем искать ее решение при помощи адаптивного метода Р. Габасова.

Данная постановка задачи позволяет искать управления типа обратной связи, которое будем обозначать $u(x(\tau))$, $\tau \in T$, для оптимального управления и соответствующей ему оптимальной траектории введем обозначения u^0 и x^0 соответственно [15, 16]. Для того, чтобы в момент времени τ вычислить оптимальное управление $u_\nu^0(x^0(\tau))$, нужно решить задачу с начальными значениями $z = x^0(\tau)$, с учетом того, что в момент времени $\tau - \nu$ уже была решена задача с начальными значениями $z = x^0(\tau - \nu)$. Кроме того на каждом шаге необходимо вычислять оптимальный момент перехода t_1^0 , его вычисление

можно производить простым перебором, начиная со значения $t_1^0(\tau - \nu)$. Если время на вычисление оптимального управления $u_\nu^0(x^0(\tau))$ и на оптимизацию параметра t_1 не превосходит ν , то можно говорить о построении оптимального управления в режиме реального времени [17, 18].

Для фиксированных значений параметров модели построены оптимальное управление и оптимальные траектории. Результаты работы программы представлены на рис. 8–9. В данном примере оптимальным временем перехода из области I в область II является момент времени $t_1^0 = 0.266$.

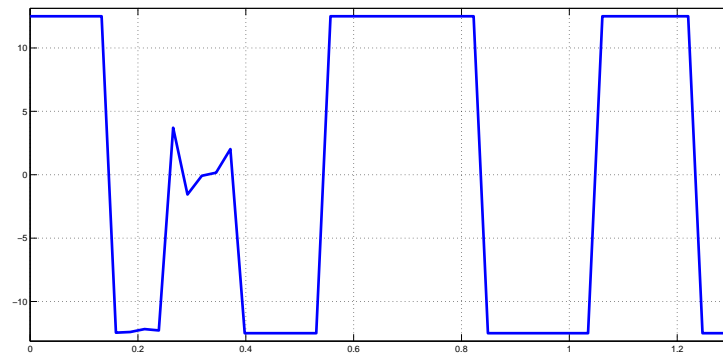


Рис. 8. Построенное управление

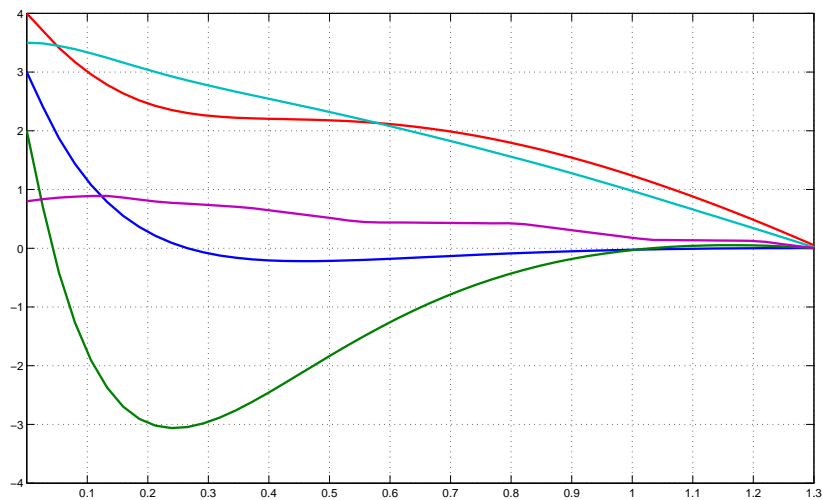


Рис. 9. Интегральные кривые системы замкнутой построенным управлением

Заключение

В данной работе рассмотрен метод построения оптимального управления, основанный на построении управления в виде кусочно-постоянной функции, поиск которой осуществляется после сведения задачи оптимального управления к задаче линейного программирования. Показано как можно адаптировать данный подход для разностных систем, неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений и даже для некоторых классов нелинейных систем. Написан пакет прикладных программ в системе MATLAB, который реализует данный алгоритм. Программное обеспечение протестировано на примерах: рассмотрена задача стабилизации трехмассовой колебательной системы с оптимальным расходом топлива, а также аналогичная задача для двухмассовой системы с возмущениями; основываясь на реальных данных построена разностная динамическая модель межотраслевого баланса, проведено сравнение ее с дифференциальной моделью, построен прогноз, найдено оптимальное распределение инвестиций в секторы экономики; для нелинейной модели гибкого робота-манипулятора определено оптимальное управление. Результаты работы программы представлены на графиках.

Стоит отметить, что, при проведении численных экспериментов, программный комплекс легко адаптировался к разным типам задач, а время работы программы было незначительным, учитывая реальные условия функционирования объектов управления. Также при построении оптимального управления для нелинейных моделей, а как следствие и для линейных моделей, возможно построение позиционного управления типа обратной связи.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М.: ИЛ, 1962. 336 с.
3. Zubov V. I. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судпромгиз, 1966. 352 с.
4. Zubov V. I. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974. 336 с.
5. Zubov V. I. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
6. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Труды I Международного конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521–547.
7. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления// Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Вып. 40, № 6. С. 838–859.
8. Альсевич В. В., Габасов Р., Глушенков В. С. Оптимизация линейных экономических моделей. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 211 с.
9. Габасов Р. Методы оптимизации: пособие. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
10. Федосеев В. В., Гармаш А. Н., Дайитбегов Д. М. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ, 1999. 391 с.
11. Пересада В. П., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Управление развитием многопродуктовой экономики на основе динамической модели «затраты-выпуск»// Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. При-

- кладная математика, информатика, процессы управления, 2014. — № 4. — Р. 121–134.
12. Попков А. С. Идентификация динамической модели межотраслевого баланса для экономики России и оптимальное распределение инвестиций на ее основе // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 696–701.
 13. Краткие таблицы ресурсов и использования товаров и услуг [Электронный ресурс]: URL:http://www.gks.ru/free_doc/new_site/vvp/tab-zatr-vip.htm (дата обращения: 13.03.15).
 14. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design. New York: Library of Congress Catalog in Publication Data, 1995. p. 536.
 15. Смирнов М.Н., Смирнова М.А. Вопросы синтеза стабилизирующих управлений при наличии неопределенных внешних возмущений // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 503–508.
 16. Смирнов М.Н. Метод учета ограниченных внешних воздействий при синтезе обратных связей с многоцелевой структурой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 2. С. 130–140.
 17. Клюенков А. Л. Реализация адаптивного метода в одной задаче оптимального управления // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 53–58.
 18. Баранов О.В., Попков А.С., Смирнов Н.В. Оптимальная стабилизация квадрокоптера в режиме реального времени // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.И. Зубова. СПб, 2015. С. 115–116.

Приложение

В приложении приведен код функций метода (MatLab).

Вторая фаза адаптивного метода

```
1 function [J_bs, J_n, x, u, delta, A1, r] = adapt_oc(x, c, A, A1, J_bs, J_n, d0, d1, u, delta)
2 [n, N] = size(A);
3 [nbs, q] = size(J_n);
4 J_bs = sort(J_n);
5 J = NaN(N,1);
6 for j = 1:N
7     J(j) = j;
8 end
9 %% локальные переменные
10 r = 0;
11 l = zeros(N,1);
12 theta = NaN(N,1);
13 J0 = NaN(N,1);
14 %% векторы оценок и потенциалов
15 if (N - nbs == n)
16     A1 = inv(A(:,J_bs));
17     u = c(J_bs)*A1;
18     delta = NaN(N,1);
19     delta(J_n) = c(J_n) - u*A(:, J_n);
20 end
21 %% поиск оптимального направления и длины шага
22 for j=J_n'
23     if (delta(j) < 0) && (x(j) ~= d0(j))
24         J0(j) = delta(j);
25     elseif (delta(j) > 0) && (x(j) ~= d1(j))
26         J0(j) = delta(j);
27     elseif (delta(j) == 0) && ((x(j) ~= d0(j)) || (x(j) ~= d1(j)))
28         J0(j) = delta(j);
29     end
30 end
31 if isnan(J0) == 1
32     r = 1;
33 else
34     [deltamax, j0] = max(abs(J0));
35     l(j0) = sign(delta(j0));
36     l(J_bs) = (-1)*A1*A(:,j0)*sign(delta(j0));
37     for j = J_bs'
38         if l(j) > 0
39             theta(j) = (d1(j) - x(j))/l(j);
40         elseif l(j) < 0
41             theta(j) = (d0(j) - x(j))/l(j);
42         else
43             theta(j) = inf;
44         end
45     end
46     if l(j0) > 0
47         theta(j0) = (d1(j0) - x(j0))/l(j0);
```

```

48     elseif l(j0) < 0
49         theta(j0) = (d0(j0) - x(j0))/l(j0);
50     else
51         theta(j0) = inf;
52     end
53     [theta_s, js] = min(theta(J_bs));
54     [theta_0, j_0] = min([theta(J_bs(js)), theta(j0)]);
55     x = x + theta_0*l';
56     if j_0 == 2 % Замена опоры
57         buf = size(J_n);
58         for j = 1:buf(1,1)
59             if J_n(j) == j0
60                 J_n(j) = [];
61                 break;
62             end
63         end
64     else
65         J_bs(js) = [];
66         J_n = setdiff(J,J_bs);
67         buf = size(J_n);
68         for j = 1:buf(1,1)
69             if J_n(j) == j0
70                 J_n(j) = [];
71                 break;
72             end
73         end
74         J_bs = setdiff(J,J_n);
75     end
76 end
77 end

```

Первая фаза адаптивного метода

```

1 function [u, c, D, D1, J_bs, J_n, d0, d1, v, delta] = the_first_phase_oc(D, b, c, d0, d1)
2 [n,N] = size(D);
3 u = (D\b)';
4 w = b - D*u';
5 r = 0;
6 v = []; delta = []; D1 = [];
7 if w == zeros(n,1)
8     D = cat(2,D,eye(n));
9     d0 = cat(2,d0,zeros(1,n));
10    d1 = cat(2,d1,zeros(1,n));
11    c = cat(2,c,zeros(1,n));
12    u = cat(2,u,zeros(1,n));
13    J = NaN(N+n,1);
14    J_n = NaN(N,1);
15    for j = 1:N+n
16        J(j) = j;
17    end
18    for j = 1:N
19        J_n(j) = j;
20    end
21    J_bs = setdiff(J,J_n);
22    while r == 0

```

```

23     [J_bs, J_n, u, v, delta, D1, r] = adapt_oc(u, c, D, D1, J_bs, J_n, d0, d1, v, delta);
24     [nbs, q] = size(J_n);
25     k = 0;
26     for j = 1:nbs
27         if J_n(j-k) > N
28             J_n(j-k) = [];
29             k = k+1;
30         end
31     end
32 end
33 else
34     c1 = cat(2, zeros(1,N), -1*ones(1,n));
35     D2 = eye(n);
36     for i = 1:n
37         if w(i) < 0
38             D2(i,:) = (-1)*D2(i,:);
39         end
40     end
41     D = cat(2,D,D2);
42     u = cat(2,u,abs(w)');
43     d0 = cat(2,d0,zeros(1,n));
44     d1 = cat(2,d1,abs(w)');
45
46     J = NaN(N+n,1);
47     J_n = NaN(N,1);
48     for j = 1:N+n
49         J(j) = j;
50     end
51     for j = 1:N
52         J_n(j) = j;
53     end
54     J_bs = setdiff(J,J_n);
55     while r == 0
56         [J_bs, J_n, u, v, delta, D1, r] = adapt_oc(u, c1, D, D1, J_bs, J_n, d0, d1, v, delta);
57         [nbs, q1] = size(J_n);
58         [bss, q2] = size(J_bs);
59         [q3, nn] = size(u);
60         if u(N+1:nn) == zeros(1,nn-N)
61             c1 = cat(2,c,zeros(1,nn-N));
62             for j = 1:bss
63                 if J_bs(j) > N && u(J_bs(j)) == 0
64                     d0(J_bs(j)) = 0;
65                     d1(J_bs(j)) = 0;
66                 end
67             end
68         end
69         for j = 1:nbs
70             if j > nbs
71                 break;
72             end
73             if J_n(j) > N && u(J_n(j)) < 1e-7
74                 D = cat(2,D(:,1:J_n(j)-1),D(:,J_n(j)+1:nn));
75                 u = cat(2,u(1:J_n(j)-1), u(J_n(j)+1:nn));
76                 c1 = cat(2,c1(1:J_n(j)-1), c1(J_n(j)+1:nn));
77                 d0 = cat(2,d0(1:J_n(j)-1), d0(J_n(j)+1:nn));

```

```

78         d1 = cat(2,d1(1:J_n(j)-1), d1(J_n(j)+1:nn));
79         for i = 1:bss
80             if J_bs(i) > N && J_bs(i) > J_n(j)
81                 J_bs(i) = J_bs(i) - 1;
82             end
83         end
84         J_n(j) = [];
85         nbs = nbs - 1;
86     end
87 end
88 end
89 end
90 D = D(:,1:N);
91 d0 = d0(1:N);
92 d1 = d1(1:N);
93 c = c(1:N);
94 u = u(1:N);
95 J = J(1:N);
96 for i = 1:n
97     J_bs(i) = J(i);
98 end
99 J_n = setdiff(J,J_bs);
100 end

```