

Санкт-Петербургский государственный университет
Механика и математическое моделирование
Теоретическая механика

Корытников Дмитрий Геннадьевич

Электромагнитные эффекты в динамике вращательного движения
экранированного космического аппарата относительно центра масс

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор Тихонов А. А.

Рецензент:
доктор физ.-мат. наук,
профессор Александров А. Ю.

Санкт-Петербург

2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mechanics and mathematical modeling

Theoretical mechanics

Korytnikov Dmitriy Gennad'yevich

Electromagnetic effects in attitude dynamics of a shielded spacecraft with
respect to the centre of masses

Bachelor's Thesis

Scientific supervisor:

Professor, Dr.Sci.

A. A. Tikhonov

Reviewer:

Professor, Dr.Sci.

A. Yu. Aleksandrov

Saint-Petersburg

2016

Содержание

Введение	3
1 Физические и геометрические параметры системы электростатической защиты КА	9
2 Математическая модель вращательного движения КА, взаимодействующего с магнитным полем Земли	11
2.1 Основные понятия и обозначения	11
2.2 Динамические и кинематические уравнения	15
2.3 Выражение для гравитационного момента с учетом влияния эффектов, вызванных сжатием Земли	17
3 Стабилизация КА в прямом положении равновесия	21
3.1 Концепция построения электродинамической системы стабилизации КА	21
3.2 Методика электродинамической компенсации постоянно действующего возмущающего момента	24
3.3 Стабилизация КА в прямом положении равновесия	26
3.4 Заключение	40
Литература	42

Введение

Актуальность темы

Научно-технический прогресс позволил человеку преодолеть земное притяжение и приступить к изучению космического пространства, в частности, околоземного космического пространства. В настоящее время искусственные спутники Земли (ИСЗ) способны решать задачи различной сложности, в разных областях науки, техники и социальной жизни, начиная с военно-разведывательных космических аппаратов (КА), и заканчивая метеорологическими станциями.

Развитие космодинамики и возникновение в связи с этим новых направлений в науке и технике продолжают вызывать повышенный интерес исследователей к решению задач, тесно примыкающих к классической задаче механики о вращении твердого тела вокруг точки. Одной из таких задач является управление угловым движением ИСЗ относительно его центра масс. Исследуя эту задачу необходимо учитывать разнообразные по своей природе силы и моменты (гравитационные, аэродинамические, электромагнитные и др.), действующие на ИСЗ в околоземном пространстве [1]. Анализу динамики вращательного движения ИСЗ посвящены многочисленные работы ряда авторов, в том числе В.И. Попова, В.В. Белецкого, А.А. Хентова, Ф.Л. Черноусько, М.Ю. Овчинникова, А.А. Тихонова, К.А. Антипова и многих других исследователей.

Системы управления вращательным движением ИСЗ

В зависимости от природы управляющих моментов, воздействующих на угловое движение ИСЗ, и технических средств, используемых в процессах

управления, различают активные, пассивные и комбинированные системы управления угловым движением ИСЗ [2].

Если для создания управляющих моментов используются технические средства, для работы которых требуется расход рабочего тела или энергии, имеющихся на борту, то такая система называется **активной системой управления**. Как отмечает В.И. Попов [2], такие системы в процессе работы используют различные активные устройства: управляемые маховики, газовые реактивные двигатели, магнитоприводы, гироскопические и оптические чувствительные элементы и т.п. Главным достоинством активных систем управления является возможность создавать управляющие моменты, которые по величине существенно больше всех остальных (возмущающих) моментов, действующих на ИСЗ. Активные системы управления обеспечивают высокую точность ориентации ИСЗ при высоком быстродействии [2]. В то же время, высокая стоимость и ограниченное время работы, связанное с ограниченностью запаса энергии или рабочего вещества на борту, являются главными недостатками использования активных систем.

Пассивные системы управления, в отличие от активных, не расходуют энергию бортовых источников питания, а используют для создания управляющих моментов естественные силовые факторы, действующие в условиях космического пространства. Пассивные системы, как правило, конструктивно просты и имеют относительно долгий срок службы. Однако, простота пассивных систем влечет за собой меньшую (по сравнению с активными системами) точность ориентации ИСЗ. В отличие от активных систем управления, пассивные системы обеспечивают малые по величине управляющие моменты, поэтому к ним обычно предъявляются требования высокой точности начальной ориентации и малости угловых скоростей, что является большим недостатком и в ряде случаев ведет к ограничению об-

ласти их применения [2].

В настоящее время наиболее распространенными типами пассивных систем управления являются гравитационные системы и магнитные системы, использующие соответственно гравитационное и магнитное поля Земли (ГПЗ, МПЗ) для создания управляющих моментов [2]. Систему управления угловым движением ИСЗ, основанную на взаимодействии ИСЗ с МПЗ, называют **электродинамической системой управления (ЭДСУ)**, а сам процесс управления - электродинамическим управлением (ЭДУ).

Комбинированные системы управления включают в себя как активные так и пассивные элементы. Возникновение комбинированных систем вызвано тем, что задачи, которые решаются современными КА подразумевают строгое лимитирование запасов энергии и рабочего тела на борту КА с длительным сроком пребывания на орбите. Комбинированные системы строятся из элементов пассивных и активных систем с таким расчетом, чтобы они по возможности обладали достоинствами тех и других и не имели свойственных им в отдельности недостатков [2].

Электростатическая защита ИСЗ

Полет КА в космическом пространстве - сложнейший технологический процесс. Задача управления полетом, несомненно, имеет первоочередной статус. В случае пилотируемого полета, возникает не менее важная задача - защита пилотов КА от радиации. Радиоактивные частицы, присутствующие в космическом вакууме, способны нанести ущерб здоровью пилотов или другим живым организмам на борту. Также радиация может создавать помехи в работе технических приборов, размещенных на борту КА.

Прошло чуть более полувека с момента первого полета человека в кос-

мос, но вопросы, связанные с защитой человека от воздействия космической радиации, привлекают исследователей и сегодня. Классические способы защиты от радиации с применением тяжелых металлов оказываются малоэффективными, поскольку влекут за собой увеличение массы КА [3, 4]. Увеличение массы, в свою очередь, влечет за собой необходимость увеличения мощности реактивных двигателей, и, как следствие, происходит увеличение затрат на запуск КА.

В основе **систем электростатической защиты (СЭСЗ)** лежит создание электрического поля около КА, позволяющего влиять на траектории заряженных радиоактивных частиц и отклонять их от защищаемого объема. Этой теме посвящены многочисленные работы ряда авторов, в том числе К.А. Труханова, Т.Я. Рябовой, Д.Х. Морозова, Е.И. Воробьева, Е.Е. Ковалева, R.P. Joshi, Hao Qiu, R.K. Tripathi, J. G. Smith, T. Smith, M. Williams, R. Youngquist, W. Mendell, и многих других исследователей.

СЭСЗ, основанные на использовании заряженных сферических поверхностей

Во второй половине XX века появилось несколько концепций СЭСЗ, основанных на использовании заряженных сферических поверхностей. В 1964-м году была предложена система, состоящая из двух заряженных концентрических сфер, окружающих КА [3]. В рассматриваемой системе «внутренняя» сфера несет на себе положительный заряд, а «внешняя» - отрицательный. По величине суммарные заряды на обеих сферах одинаковы. Исследования проводились с предположением, что данная СЭСЗ будет применяться в условиях радиационного пояса Земли. Например, на расстоянии порядка двух радиусов Земли от центра Земли преобладают потоки электронов с

энергией около 20 МэВ и протонов с энергией около 100 МэВ [5]. Исследование эффективности рассматриваемой СЭСЗ выявило необходимость создания разности потенциалов между сферами не менее 17 МВ. Создавать столь большое во величине напряжение было предложено с помощью генератора Ван Дер Граафа [3]. По оценкам исследователей на практике рассматриваемая СЭСЗ, включающая в себя две сферы (6061 aluminum), электроды, источник энергии для обеспечения работы системы, и прочие расходные материалы, будет иметь массу около 4500 кг . В [3] отмечается что именно большая масса является главным недостатком данной системы.

Позже, в 1984-м году, описанная выше система концентрических заряженных сфер исследовалась в задаче радиационной защиты КА от ионов «HZE - излучения» (HZE ions, [6]). Для определенности в качестве вредоносной частицы был рассмотрен изотоп железа ^{56}Fe с энергией около 1.4 ГэВ, так как он является самым тяжелым из известных ионов спектра частиц космического излучения [3]. Исследуемая СЭСЗ рассмотрена в трех модификациях: 1) одна сфера, окружающая КА, несущая большой по величине положительный заряд, 2) две концентрические сферы, окружающие КА, несущие одинаковые по величине и разные по знаку заряды, 3) две концентрические сферы, окружающие КА, несущие разные по величине и знаку заряды. Исследования показали что рассматриваемые СЭСЗ требуют создания мощного поверхностного потенциала в первом случае и большого по величине напряжения между сферическими поверхностями во втором и третьем случаях, которые было невозможно обеспечить в то время по техническим причинам. Требуемая величина потенциала положительно заряженной сферы в первом случае должна быть порядка 3 ГВ, а это гораздо больше, чем можно было обеспечить в те времена (генератор Ван Дер Граафа, <30 МВ). Также расчеты показали то, что в случаях систем концен-

трических сфер (2, 3), минимальные диаметры внутренней и внешней сфер должны быть не менее 200 м и 400 м соответственно. Такие требования влекут за собой необходимость создания жесткой удерживающей конструкции в системе, которая неизбежно повлечет за собой увеличение общей массы КА вместе с СЭСЗ.

Цель работы

В статьях [3, 4] исследована СЭСЗ, включающая в себя систему заряженных сферических поверхностей (экранов). Доказана эффективность данной системы в решении задачи радиационной защиты КА. Цель данной работы - исследовать эффективность предложенной системы экранов в решении задачи об управлении вращательным движением экранированного КА относительно центра масс.

В работе рассматривается модель нецентрально поля тяготения, что существенно усложняет выражения для гравитационного момента, действующего на КА. Использована методика электродинамической компенсации постоянно действующего возмущающего момента, для решения задачи стабилизации КА, находящегося на регрессирующей вследствие сжатия Земли орбите.

1 Физические и геометрические параметры системы электростатической защиты КА

В статьях [3, 4] рассмотрена СЭСЗ, состоящая из 13-ти заряженных сферических экранов (Рис. 1). Защищаемый объем (КА) окружен сферой, радиус которой 20 м. Далее будем называть эту сферу «центральной». Цен-

тральная сфера создает около себя электрическое поле, потенциал которого равен 300 МВ. Геометрический центр данной сферы будем называть «центром системы ЭСЗ».

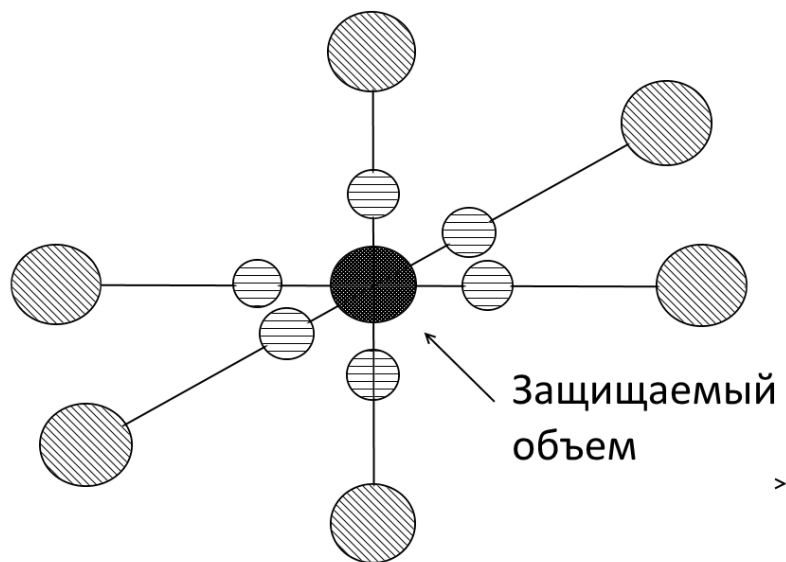


Рис. 1: модель СЭСЗ, 13 заряженных сферических экранов

Центры остальных 12 экранов расположены на трех взаимно перпендикулярных осях. Разделим оставшиеся 12 сфер на две группы, которые назовем «ближние» (горизонтальная штриховка, Рис. 1) и «дальные» (наклонная штриховка, Рис. 1). Ближние сферы (6 шт.) имеют радиус 10 м и каждая отстает от центра системы на 50 м. Каждая сфера из группы ближних заряжена положительно и создает около себя электрическое поле с потенциалом в 300 МВ. В то же время, каждая сфера из группы дальних имеет радиус равный 20 м, отстает от центра системы на 160 м, несет на себе отрицательный заряд и создает около себя электрическое поле с потенциалом -300 МВ. Таким образом, рассматриваемая система имеет три плоскости симметрии.

В работе [3] предполагается что сферы изготовлены из полимерных материалов с тонким, покрывающим внешнюю часть, слоем металла, напри-

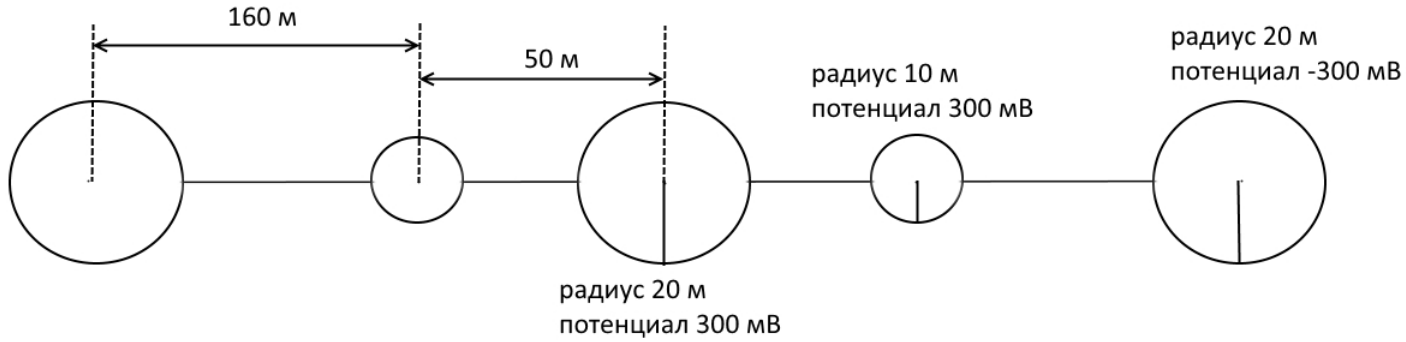


Рис. 2: Физические и геометрические параметры СЭСЗ

мер, золота. Таким образом, масса конструкции зависит от конкретных материалов, используемых при изготовлении элементов системы.

2 Математическая модель вращательного движения КА, взаимодействующего с магнитным полем Земли

2.1 Основные понятия и обозначения

В работе изучается вращательное движение КА вокруг центра масс под действием гравитационного, магнитного и лоренцева моментов. Центр масс КА движется по круговой орбите. Введем обозначения: C - центр масс КА, O_z - центр Земли. Все далее введенные в рассмотрение системы координат - правые ортогональные. Систему координат $O_z X_* Y_* Z_*$ (соответствующие орты $\vec{i}_*, \vec{j}_*, \vec{k}_*$) с началом в центре Земли зададим следующим образом: ось $O_z Z_*$ направим по оси суточного вращения Земли, ось $O_z X_*$ направим в восходящий узел орбиты, ось $O_z Y_*$ зададим так, чтобы плоскость $(X_* Y_*)$ совпадала с плоскостью экватора. Угловая скорость вращения Земли зада-

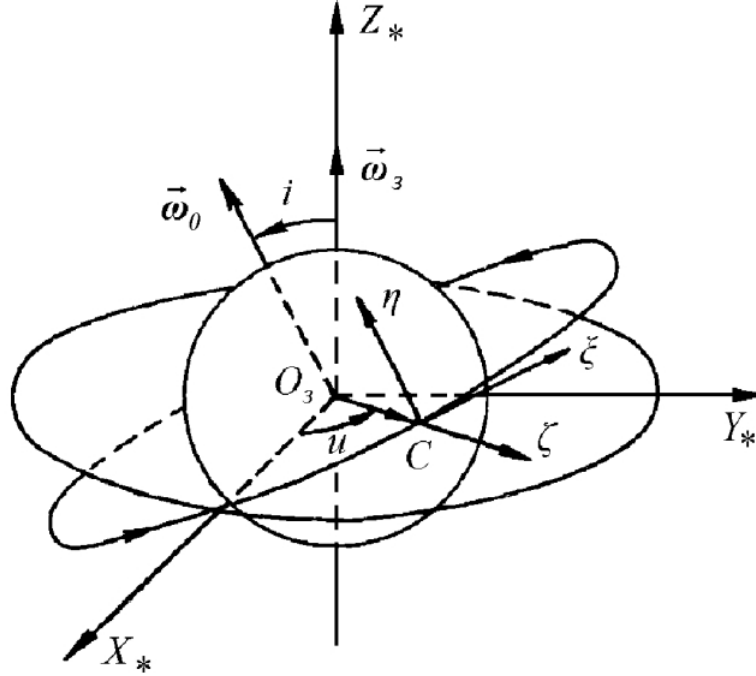


Рис. 3: Основные обозначения и рабочие системы координат

ется вектором $\vec{\omega}_3 = \omega_3 \vec{k}_*$. Систему координат $O_3 X_* Y_* Z_*$ примем в качестве инерциальной.

В качестве физической модели КА рассмотрим модель твердого тела. Введем систему координат $Cxyz$ с соответствующими ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции КА. Тогда в введенной системе координат тензор инерции КА будет иметь вид $J = \text{diag}(A, B, C)$.

Введем в рассмотрение орбитальную систему координат $C\xi\eta\zeta$ (соответствующие орты $\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\zeta}_0$), ось $C\xi$ направим вдоль вектора скорости центра масс КА, ось $C\eta$ - по нормали к плоскости орбиты, ось $C\zeta$ вдоль радиус-вектора $\vec{R} = \overline{O_3 C}$. Орбитальная система координат вращается относительно $O_3 X_* Y_* Z_*$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{\eta}_0$.

Ориентацию осей системы координат $C\xi\eta\zeta$ относительно осей системы

координат $Cxyz$ зададим с помощью матрицы направляющих косинусов

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

таким образом, что

$$\vec{\xi}_0 = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k},$$

$$\vec{\eta}_0 = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k},$$

$$\vec{\zeta}_0 = \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}.$$

Взаимная ориентация систем координат $C\xi\eta\zeta$ и $O_3X_*Y_*Z_*$ определяется с помощью соотношений

$$\vec{i}_* = -\sin u \cdot \vec{\xi}_0 + \cos u \cdot \vec{\zeta}_0,$$

$$\vec{j}_* = \cos i \cos u \cdot \vec{\xi}_0 - \sin i \cdot \vec{\eta}_0 + \cos i \sin u \cdot \vec{\zeta}_0, \quad (2)$$

$$\vec{k}_* = \sin i \cos u \cdot \vec{\xi}_0 + \cos i \cdot \vec{\eta}_0 + \sin i \sin u \cdot \vec{\zeta}_0,$$

где $i = \widehat{(\vec{k}_*, \vec{\eta}_0)}$ - угол наклона орбиты (Рис. 3), $u = \widehat{(\vec{i}_*, \vec{\zeta}_0)}$ - аргумент широты, при этом $u = \omega_\pi + \nu$, где ω_π - аргумент перигея, ν - истинная аномалия. Отметим, что в случае круговой орбиты $u = \omega_0 t$.

Абсолютная угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловая скорость КА относительно орбитальной системы координат $\vec{\omega}' = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ связаны соотношением $\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_0$. Вектор угловой скорости орбитальной системы координат в осях $Cxyz$ выглядит следующим образом

$$\vec{\omega}_0 = \omega_0(\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}). \quad (3)$$

С учетом (3) в осях $Cxyz$ компоненты вектора $\vec{\omega}$ имеют вид

$$\omega_x = p + \omega_0 \beta_1, \quad \omega_y = q + \omega_0 \beta_2, \quad \omega_z = r + \omega_0 \beta_3. \quad (4)$$

С помощью (2) разложим вектор угловой скорости суточного вращения Земли по ортам орбитальной системы координат

$$\vec{\omega}_z = \omega_z \vec{k}_* = \omega_z (\sin i \cos u \cdot \vec{\xi}_0 + \cos i \cdot \vec{\eta}_0 + \sin i \sin u \cdot \vec{\zeta}_0).$$

Электростатические свойства экранированного КА характеризуются плотностью σ распределения заряда по объему V и суммарным зарядом $Q = \int_V \sigma dV$. Следуя [7] введем в рассмотрение понятия центра заряда, главных центральных осей заряда и интегральных величин распределения заряда. По аналогии с инерционными свойствами КА как твердого тела, электростатические свойства КА будем характеризовать тензором заряда $\Sigma = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ в главных центральных осях заряда $Ox_1^0 x_2^0 x_3^0$ (соответствующие орты $\vec{i}_1^0, \vec{i}_2^0, \vec{i}_3^0$). Начало системы координат $Ox_1^0 x_2^0 x_3^0$ относительно центра масс КА определяется радиус-вектором

$$\vec{CO} = \vec{\rho}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} = Q^{-1} \int_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \vec{\rho}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) dV, \quad (5)$$

где $\vec{\rho}$ - радиус-вектор элемента dV относительно центра масс КА. В (5) интегрирование производится в объеме, в котором распределен заряд. В случае поверхностного распределения заряда (как в описанной ранее (п.1) СЭСЗ) интегрирование в формуле (5) стоит производить по поверхности.

В системе координат $Ox_1^0 x_2^0 x_3^0$ справедливы равенства:

$$\int_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \vec{\rho}^0 dV = 0, \quad \text{где } \vec{\rho}^0 = x_1^0 \vec{i}_1^0 + x_2^0 \vec{i}_2^0 + x_3^0 \vec{i}_3^0,$$

$$\int_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0) x_1^0 x_2^0 dV = \int_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0) x_2^0 x_3^0 dV = \int_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0) x_3^0 x_1^0 dV = 0.$$

Элементы тензора Σ вычисляются следующим образом

$$a_i = \int_V \sigma x_i^{02} dV, \quad i = 1, 2, 3.$$

Введем в рассмотрение статические моменты первого и второго порядков. Для краткости записи временно обозначим $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Тензорные величины $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ определим следующим образом

$$P^{(1)} = \int_V \sigma x_i dV = Q \vec{\rho}_0, \quad P^{(2)} = \int_V \sigma x_i x_j dV, \quad i = 1, 2, 3$$

и будем называть их статическими моментами первого и второго порядков соответственно.

2.2 Динамические и кинематические уравнения

Для описания вращательного движения КА относительно центра масс будем использовать динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z = M_x, \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x = M_y, \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = M_z, \end{cases} \quad (6)$$

где $\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$, - главный момент сил, приложенных к КА. Как упоминалось ранее, момент \vec{M} включает в себя разнообразные по своей природе и величине моменты. Наиболее значительным является гравитационный момент притяжения Земли \vec{M}_G [1]. При использовании модели центрального ньютоновского поля тяготения, гравитационный момент имеет вид [1]

$$\vec{M}_G = 3\omega_0^2 ((C - B)\gamma_2\gamma_3, (A - C)\gamma_3\gamma_1, (B - A)\gamma_1\gamma_2)^T.$$

Помимо гравитационных сил, существенное влияние на динамику вращательного движения КА вокруг центра масс оказывают силы электродинамического воздействия КА с МПЗ [1]. Далее будем предполагать что КА

обладает собственным магнитным моментом \vec{I} . Вследствие этого возникают моменты магнитного взаимодействия \vec{M}_M и лоренцевых сил \vec{M}_L . Момент \vec{M}_M будем вычислять следующим образом

$$\vec{M}_M = \vec{I} \times A^\top \vec{B}, \quad (7)$$

где \vec{B} - вектор магнитной индукции в центре масс КА [1]. Момент \vec{M}_L будем вычислять следующим образом

$$\vec{M}_L = \int_V \sigma \vec{\rho} \times (\vec{v} \times \vec{B}) dV, \quad (8)$$

где $\vec{\rho}$ - радиус-вектор (в системе координат $Cxyz$) элемента dV заряженного объема КА, \vec{v} - скорость элемента dV относительно МПЗ [1].

В данной работе учитывается только вклад вращающихся моментов, описанных выше. Таким образом, $\vec{M} = \vec{M}_G + \vec{M}_M + \vec{M}_L$.

В дополнение к (6) для описания вращательного движения КА относительно центра масс будем использовать кинематические уравнения Пуассона

$$\frac{d}{dt} \vec{\xi}_0 = \vec{\xi}_0 \times \vec{\omega} - \omega_0 \vec{\zeta}_0, \quad \frac{d}{dt} \vec{\eta}_0 = \vec{\eta}_0 \times \vec{\omega}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\zeta}_0 = \vec{\zeta}_0 \times \vec{\omega} + \omega_0 \vec{\xi}_0. \quad (9)$$

С использованием направляющих косинусов (1) кинематические уравнения можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 + \omega_y \alpha_3 - \omega_z \alpha_2 &= -\omega_0 \gamma_1, \\ \dot{\beta}_1 + \omega_y \beta_3 - \omega_z \beta_2 &= 0, & (x \rightarrow y \rightarrow z) \\ \dot{\gamma}_1 + \omega_y \gamma_3 - \omega_z \gamma_2 &= \omega_0 \alpha_1. & (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \end{aligned} \quad (10)$$

Конструкция $(x \rightarrow y \rightarrow z)_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}$ введена для краткости записи и означает циклическую перестановку числовых и символьных индексов в (10). Таким образом, (10) представляет собой девять уравнений в направляющих косинусах.

2.3 Выражение для гравитационного момента с учетом влияния эффектов, вызванных сжатием Земли

В разделе 2.2 приведено выражение для гравитационного момента, действующего на КА, центр масс которого движется по круговой орбите в случае если гравитационное поле считать ньютоновским центральным полем тяготения. В данной работе рассмотрим более сложную модель гравитационного поля Земли. Далее, начиная с этого момента, будем рассматривать КА, центр масс которого движется по круговой орбите, регрессирующей вследствие сжатия Земли [8]. Будем учитывать вековые возмущения орбиты, вызванные второй зональной гармоникой геопотенциала, т.е. уходом долготы восходящего узла Ω с угловой скоростью k_Ω и аргумента перигея ω_π с угловой скоростью k_ω при постоянном наклонении орбиты i к плоскости экватора (Рис. 4) [8].

Введем в рассмотрение «перигейную» систему координат $СХУZ$ (соответствующие орты $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$) следующим образом: ось $СХ$ направим параллельно касательной к орбите в сторону движения центра масс КА в перигее, ось $СУ$ - по нормали к плоскости орбиты, ось $СZ$ направим параллельно радиус-вектору перигея орбиты (Рис. 4). Вследствие регрессии орбиты «перигейная» система координат вращается относительно инерциальной системы координат с угловой скоростью

$$\vec{k} = \vec{k}_\Omega + \vec{k}_\omega = \dot{\Omega} \vec{k}_* + \dot{\omega}_\pi \vec{\sigma}_2, \quad \text{где}$$

$$k_\Omega = \dot{\Omega} = -\omega_0 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 \cos i, \quad k_\omega = \dot{\omega}_\pi = \frac{1}{2} \omega_0 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1),$$

$\tilde{\varepsilon} \approx 0.0016239$ - безразмерная постоянная величина, определяемая величиной сжатия Земли [31]. Ориентация осей «перигейной» системы координат

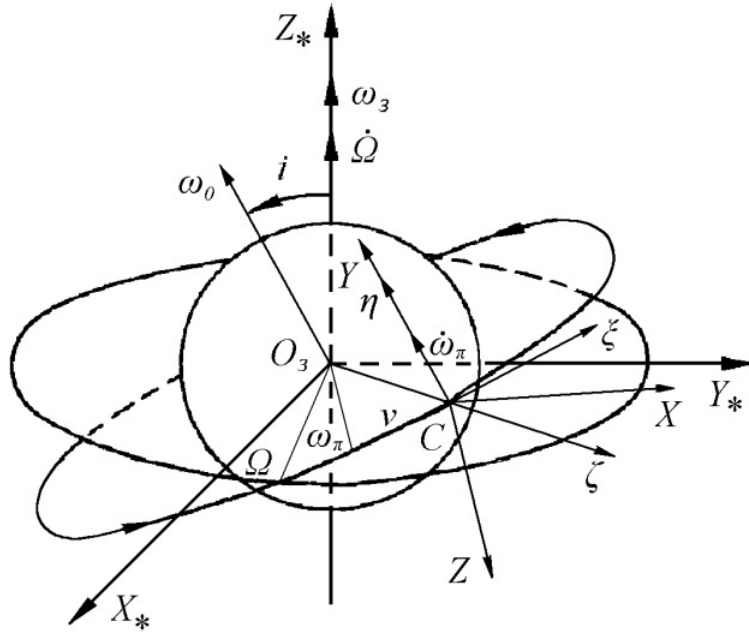


Рис. 4:

относительно орбитальной системы координат определяется матрицей направляющих косинусов

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & 0 & \sin(\omega_0 t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & 0 & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

следующим образом

$$\vec{\sigma}_i = U_{i1}\vec{\xi}_0 + U_{i2}\vec{\eta}_0 + U_{i3}\vec{\zeta}_0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ориентация «перигейной» системы координат относительно инерциальной системы координат $O_3 X_* Y_* Z_*$ определяется матрицей направляющих косинусов

$$P = \begin{pmatrix} -\sin \omega_\pi \cos \Omega - \cos i \cos \omega_\pi \sin \Omega & \sin i \sin \Omega & \cos \omega_\pi \cos \Omega - \cos i \sin \omega_\pi \sin \Omega \\ -\sin \omega_\pi \sin \Omega + \cos i \cos \omega_\pi \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos \omega_\pi \sin \Omega + \cos i \sin \omega_\pi \cos \Omega \\ \sin i \cos \omega_\pi & \cos i & \sin i \sin \omega_\pi \end{pmatrix}$$

следующим образом

$$\vec{i}_* = \sum_{n=1}^3 P_{1n} \vec{\sigma}_n, \quad \vec{j}_* = \sum_{n=1}^3 P_{2n} \vec{\sigma}_n, \quad \vec{k}_* = \sum_{n=1}^3 P_{3n} \vec{\sigma}_n.$$

С учетом влияния регрессии орбиты вектор \vec{M}_Γ в главных центральных осях инерции имеет компоненты [62]

$$M_{\Gamma x} = (C - B)(\omega_0 + k_\omega)^2 \left(\left(3 - 5\tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 (7 \sin^2 i \sin^2 u - 1) \right) \gamma_2 \gamma_3 + \right. \\ \left. + 10 \tilde{\varepsilon} \sin i \sin u \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 (\gamma_2 W_{3,3} + \gamma_3 W_{3,2}) - 2\tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 W_{3,2} W_{3,3} \right),$$

$$M_{\Gamma y} = (A - C)(\omega_0 + k_\omega)^2 \left(\left(3 - 5\tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 (7 \sin^2 i \sin^2 u - 1) \right) \gamma_1 \gamma_3 + \right. \\ \left. + 10 \tilde{\varepsilon} \sin i \sin u \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 (\gamma_3 W_{3,1} + \gamma_1 W_{3,3}) - 2\tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 W_{3,1} W_{3,3} \right),$$

$$M_{\Gamma z} = (B - A)(\omega_0 + k_\omega)^2 \left(\left(3 - 5\tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 (7 \sin^2 i \sin^2 u - 1) \right) \gamma_1 \gamma_2 + \right. \\ \left. + 10 \tilde{\varepsilon} \sin i \sin u \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 (\gamma_1 W_{3,2} + \gamma_2 W_{3,1}) - 2\tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 W_{3,1} W_{3,2} \right).$$

Здесь $R_\Theta = 6.378136 \cdot 10^6$ м - экваториальный радиус Земли. Матрица $W = PUA$ - матрица направляющих косинусов. Элементы W_{3i} выражаются следующим образом

$$W_{3,1} = \alpha_1 \sin i \cos u + \beta_1 \cos i + \gamma_1 \sin i \sin u,$$

$$W_{3,2} = \alpha_2 \sin i \cos u + \beta_2 \cos i + \gamma_2 \sin i \sin u,$$

$$W_{3,3} = \alpha_3 \sin i \cos u + \beta_3 \cos i + \gamma_3 \sin i \sin u.$$

Относительная скорость \vec{v}_C , может быть представлена как разность абсолютной и переносной скоростей:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{\omega}_3 \times \vec{R}.$$

Используя теорему о полной и локальной производных и принимая систему координат $CXYZ$ в качестве подвижной, получим:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{\omega}_3 \times \vec{R} = \dot{\vec{R}} + \vec{k} \times \vec{R} - \vec{\omega}_3 \times \vec{R} = \\ &= R \cos(\omega_0 t) [\omega_0 - \omega_3 \cos i + k_\omega + k_\Omega \cos i] \vec{\sigma}_1 - \\ &\quad - R(k_\Omega - \omega_3) \sin i \cos(\omega_\pi + \omega_0 t) \vec{\sigma}_2 + \\ &\quad + R \sin(\omega_0 t) [\omega_3 \cos i - \omega_0 - k_\omega - k_\Omega \cos i] \vec{\sigma}_3. \end{aligned}$$

В орбитальной системе координат:

$$\vec{v}_C = R[\omega_0 + k_\omega - (\omega_3 - k_\Omega) \cos i] \vec{\xi}_0 + R(\omega_3 - k_\Omega) \sin i \cos u \vec{\eta}_0 ,$$

где аргумент широты вычисляется по формуле

$$u = \omega_0 t + \omega_\pi = (\omega_0 + k_\omega)t. \tag{11}$$

3 Стабилизация КА в прямом положении равновесия

3.1 Концепция построения электродинамической системы стабилизации КА

В работе [7] показано, что для любых реальных КА момент $\vec{M}_Д$, задаваемый формулой (8) можно аппроксимировать выражением

$$\vec{M}_Д = \vec{P}^{(1)} \times A^\top (\vec{v}_C \times \vec{B}), \quad (12)$$

где \vec{v}_C - скорость центра масс КА относительно МПЗ, которая задается равенством

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{R}} - \vec{\omega}_3 \times \vec{R} = R(\omega_0 - \omega_3 \cos i) \vec{\xi}_0 + R\omega_3 \sin i \cos u \vec{\eta}_0, \quad (13)$$

векторы \vec{v}_C и \vec{B} заданы в орбитальной системе координат. Статический момент первого порядка $\vec{P}^{(1)}$ далее будем обозначать \vec{P} . Выражение (12) получено в предположении, что в формуле (8) векторы \vec{v} и \vec{B} можно считать одинаковыми во всех точках объема, занимаемого КА, и равными соответственно векторам \vec{v} и \vec{B} в центре масс КА. Введем обозначение $\vec{T} = A^\top (\vec{v}_C \times \vec{B})$ и будем далее представлять момент $\vec{M}_Д$ следующим образом

$$\vec{M}_Д = \vec{P} \times \vec{T}. \quad (14)$$

Моменты $\vec{M}_Д$ и $\vec{M}_М$ являются основой электродинамической системы управления КА. Однако, как отмечено в работе [10], стабилизация углового положения КА невозможна без демпфирующего момента $\vec{M}_Д$, необходимого для погашения собственных КА в окрестности устойчивого положения равновесия. Используемая в [9] концепция построения электродинамической системы управления на базе совместного использования лоренцева

и магнитного моментов с управляемыми электродинамическими параметрами — статическим моментом заряда первого порядка \vec{P} и собственным магнитным моментом \vec{I} - позволяет обеспечить механизм демпфирования собственных колебаний КА. Таким образом, задача состоит в том, чтобы подобрать такой закон изменения вектора \vec{P} , который обеспечивал бы создание составляющей момента $\vec{M}_Д$, направленной на погашение угловой скорости $\vec{\omega}'$ КА в орбитальной системе координат. Следуя [9] введем дополнительные условия для подбора искомого закона:

1. пропорциональность величины демпфирующего момента $\vec{M}_Д$ величине угловой скорости $\vec{\omega}'$;
2. направленность момента $\vec{M}_Д$ под тупым углом к вектору $\vec{\omega}'$, наличие максимального значения $|\vec{M}_Д|$ при $\widehat{(\vec{M}, \vec{\omega}')} = \pi$ и минимального значения $|\vec{M}| = 0$ при $\widehat{(\vec{M}, \vec{\omega}')} = \pi/2$.

Выбором управляемого момента \vec{P} в виде $\vec{P} = Qh_Д(t)\vec{\omega}' \times \vec{T}$ удовлетворим описанным выше условиям. Таким образом, демпфирующая составляющая момента $\vec{M}_Д$ имеет вид

$$\vec{M}_{ДД} = Qh_Д(\vec{\omega}' \times \vec{T}) \times \vec{T}, \quad (15)$$

где $h_Д$ - коэффициент пропорциональности, в качестве которого может выступать скалярная функция времени. Выражение (15) можно привести к записи в матричном виде

$$\vec{M}_{ДД} = -Qh_Д(\vec{\omega}'T^2 - \vec{T}(\vec{\omega}' \cdot \vec{T})) = -Qh_Д\mathbb{T}\vec{\omega}',$$

где

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} T_y^2 + T_z^2 & -T_xT_y & -T_xT_z \\ -T_xT_y & T_x^2 + T_z^2 & -T_yT_z \\ -T_xT_z & -T_yT_z & T_x^2 + T_y^2 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом подойдем к вопросу о подборе закона изменения вектора \vec{I} для создания демпфирующей составляющей момента \vec{M}_M , которая имеет вид

$$\vec{M}_{MД} = h_M(\vec{\omega}' \times A^\top \vec{B}) \times A^\top \vec{B},$$

где h_M - коэффициент пропорциональности, в качестве которого может выступать скалярная функция времени. Таким образом, $\vec{M}_{MД} = -h_v \mathbb{B} \vec{\omega}'$, где

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} B_y^2 + B_z^2 & -B_x B_y & -B_x B_z \\ -B_x B_y & B_x^2 + B_z^2 & -B_y B_z \\ -B_x B_z & -B_y B_z & B_x^2 + B_y^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы \mathbb{T} и \mathbb{B} неотрицательны, поэтому моменты $\vec{M}_{ЛД}$ и $\vec{M}_{MД}$, включенные в состав электродинамической системы управления, будут вызывать диссипацию энергии вращательного движения КА относительно центра масс. Таким образом, будет обеспечен процесс стабилизации КА в окрестности устойчивого положения равновесия ($A = A_0$). Введем обозначение $\vec{T}_0 = A_0^\top (\vec{v}_C \times \vec{B})$, тогда управляемый вектор $\vec{P} = Q \vec{\rho}_0$ имеет вид

$$\vec{P} = Q(k_L \vec{T}_0 + h_L \vec{\omega}' \times \vec{T}). \quad (16)$$

Введем обозначение $\vec{B}_0 = A_0^\top \vec{B}$, тогда управляемый вектор \vec{I} имеет вид

$$\vec{I} = k_M \vec{B}_0 + h_M \vec{\omega}' \times A^\top \vec{B}. \quad (17)$$

Управляющие моменты $\vec{M}_Л$ и \vec{M}_M примут вид

$$\vec{M}_Л = Q(k_L \vec{T}_0 \times \vec{T} + h_L (\vec{\omega}' \times \vec{T}) \times \vec{T}), \quad (18)$$

$$\vec{M}_M = k_M \vec{B}_0 \times A^\top \vec{B} + h_M (\vec{\omega}' \times A^\top \vec{B}) \times A^\top \vec{B}. \quad (19)$$

Выбор параметров управления k_L , k_M , h_L , h_M допускает определенный произвол, ограниченный техническими возможностями системы управления.

3.2 Методика электродинамической компенсации постоянно действующего возмущающего момента

В предыдущем разделе рассматривалась задача электродинамической стабилизации изолированного положения равновесия КА (в системе координат $Sxyz$) с помощью управляющих моментов $\vec{M}_Д$ и $\vec{M}_М$. Тем не менее, существует ряд задач, в которых наличие малого возмущающего момента приводит к исчезновению положений равновесия КА. В данном разделе покажем что не выходя за рамки электродинамической системы управления (т. е. только подбором вектора статического момента заряда КА и вектора собственного магнитного момента КА) можно скомпенсировать влияние постоянно действующего возмущающего момента и обеспечить существование и устойчивость программного положения равновесия КА.

Пусть \vec{g} - вектор постоянно действующего возмущающего момента, который надо скомпенсировать. Введем в рассмотрение ортонормированный базис векторов $(\vec{b}, \vec{t}, \vec{s})$, которые задаются следующим образом

$$\vec{b} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad \vec{t} = \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}, \quad \vec{s} = \frac{\vec{B} \times \vec{T}}{|\vec{B} \times \vec{T}|}.$$

Подберем вектор статического момента заряда КА

$$\vec{P}_g = p_1 \vec{b} + p_2 \vec{t} + p_3 \vec{s} \quad (20)$$

и вектор собственного магнитного момента КА

$$\vec{I}_g = i_1 \vec{b} + i_2 \vec{t} + i_3 \vec{s} \quad (21)$$

так, чтобы вектор \vec{g} лежал в плоскости управляющих моментов $\vec{M}_Д$ и $\vec{M}_М$. Это возможно потому, что векторы $\vec{P}_g \times \vec{T}$ и $\vec{I}_g \times \vec{B}$ лежат в ортогональных плоскостях. Таким образом, нужно требовать выполнение равенства

$$\vec{g} \left[(\vec{P}_g \times \vec{T}) \times (\vec{I}_g \times \vec{B}) \right] = 0. \quad (22)$$

Вектор \vec{g} в базисе $(\vec{b}, \vec{t}, \vec{s})$ имеет вид

$$\vec{g} = g_1\vec{b} + g_2\vec{t} + g_3\vec{s}, \quad (23)$$

где

$$g_1 = \frac{\vec{g}\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad g_2 = \frac{\vec{g}\vec{T}}{|\vec{T}|}, \quad g_3 = \frac{\vec{g}(\vec{B} \times \vec{T})}{|\vec{B}||\vec{T}|}.$$

С использованием (20) и (21) получаем

$$\vec{P}_g \times \vec{T} = (p_1\vec{b} + p_2\vec{t} + p_3\vec{s}) \times \vec{T} = |\vec{T}|(p_1\vec{b} \times \vec{t} + p_3\vec{s} \times \vec{t}) = |\vec{T}|(p_1\vec{s} - p_3\vec{b}), \quad (24)$$

$$\vec{I}_g \times \vec{B} = (i_1\vec{b} + i_2\vec{t} + i_3\vec{s}) \times \vec{B} = |\vec{B}|(-i_2\vec{s} + i_3\vec{t}). \quad (25)$$

Итого, с учетом (23), (24) и (25) требование (22) примет вид

$$g_1p_1i_3 + g_2p_3i_2 + g_3p_3i_3 = 0. \quad (26)$$

Таким образом, для того чтобы вектор \vec{g} лежал в плоскости управляющих моментов \vec{M}_L и \vec{M}_M необходимо подобрать параметры p_1, p_3, i_2, i_3 так, чтобы выполнялось соотношение (26).

Для компенсации вектора \vec{g} нужно требовать выполнения соотношения

$$k_1\vec{P}_g \times \vec{T} + k_2\vec{I}_g \times \vec{B} + \vec{g} = 0, \quad (27)$$

где k_1 и k_2 - коэффициенты, которые нужно подобрать. С помощью (23), (24) и (25) преобразуем соотношение (27) к виду

$$(-k_1|\vec{T}|p_3 + g_1)\vec{b} + (k_2|\vec{B}|i_3 + g_2)\vec{t} + (k_1|\vec{T}|p_1 - k_2|\vec{B}|i_2 + g_3)\vec{s} = 0.$$

Приравнявая к нулю первые две компоненты вектора из левой части последнего равенства, получим

$$k_1 = \frac{g_1}{|\vec{T}|p_3}, \quad k_2 = -\frac{g_2}{|\vec{B}|i_3}. \quad (28)$$

Нетрудно видеть, что такие k_1 и k_2 удовлетворяют условию равенства нулю третьей компоненты вектора, поскольку оно совпадает с условием (26), и значит выполняется. Также из (28) видно, что необходимо требовать $p_3 \neq 0$ и $i_3 \neq 0$.

Итого, чтобы скомпенсировать вектор \vec{g} необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{g_1}{|\vec{T}|p_3}(\vec{P}_g \times \vec{T}) - \frac{g_2}{|\vec{B}|i_3}(\vec{I}_g \times \vec{B}) + \vec{g} = 0,$$

где

$$\vec{P}_g = p_1\vec{b} + p_3\vec{s}, \quad (29)$$

$$\vec{I}_g = i_2\vec{t} + i_3\vec{s}, \quad (30)$$

и параметры $p_1, p_3 \neq 0, i_2, i_3 \neq 0$ удовлетворяют условию (26).

3.3 Стабилизация КА в прямом положении равновесия

Прямым положением равновесия КА (ППР) в орбитальной системе координат называется такое его положение, при котором оси x, y, z совпадают с осями ξ, η, ζ соответственно. В этом положении

$$\omega_x = \omega_z = 0, \quad \omega_y = \omega_0, \quad A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{30} \\ \beta_{10} & \beta_{20} & \beta_{30} \\ \gamma_{10} & \gamma_{20} & \gamma_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Задачи, связанные с электродинамической стабилизацией КА в прямом положении равновесия без учета эффекта сжатия Земли, исследованы в работах Антипова К. А., Петрова К. Г., Тихонова А. А.

Введем в рассмотрение «самолетные» углы: φ (крен), ψ (рыскание), θ (тангаж) (Рис. 5). «Самолетные» углы используются для определения положения осей системы координат $Cxyz$ относительно осей орбитальной системы координат $C\xi\eta\zeta$. «Самолетные» углы и направляющие косинусы

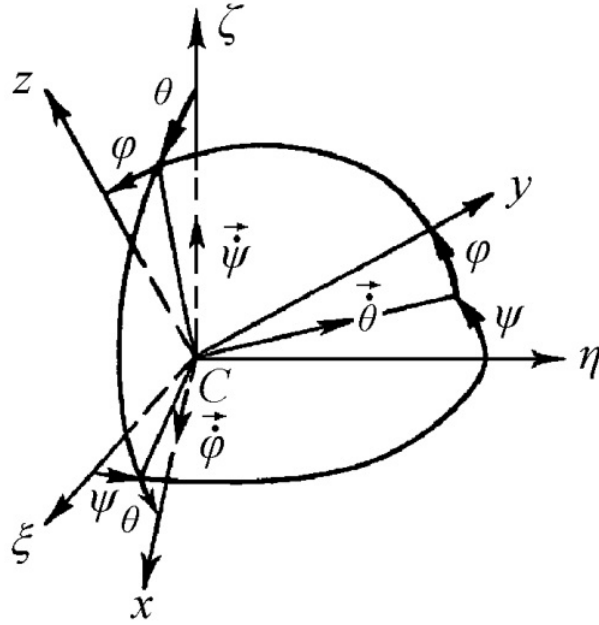


Рис. 5: «Самолетные» углы

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, ($i = 1, 2, 3$) связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \cos \psi \cos \theta, & \alpha_2 &= -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta, \\
 \alpha_3 &= \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \theta, & \beta_1 &= \sin \psi \cos \theta, \\
 \beta_2 &= \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta, & & \\
 \beta_3 &= -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta, & & \\
 \gamma_1 &= -\sin \theta, & \gamma_2 &= \sin \varphi \cos \theta, & \gamma_3 &= \cos \varphi \cos \theta.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Компоненты вектора относительной угловой скорости $\vec{\omega}'$ в системе координат $Cxyz$ с использованием «самолетных» углов (см. рис. 5) выглядят

следующим образом

$$p = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta, \quad q = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta, \quad r = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta. \quad (33)$$

Подставив (33) в (4) получим

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta + \omega_0 \sin \psi \cos \theta, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta + \omega_0 (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta), \\ \omega_z &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta + \omega_0 (-\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta). \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения вращательного движения КА под действием управляющих моментов $\vec{M}_Л$, $\vec{M}_М$, определяемых выражениями (18) и (19), и возмущающего момента $\vec{M}_Г$, учитывающего влияние эффекта сжатия Земли (см. раздел 2.3), строятся по схеме Эйлера - Пуассона (6), (9) или в векторном виде

$$\frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (J\vec{\omega}) = \vec{M}_Л + \vec{M}_М + \vec{M}_Г, \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\xi}_0 = \vec{\xi}_0 \times \vec{\omega} - \omega_0 \vec{\zeta}_0, \quad \frac{d}{dt}\vec{\eta}_0 = \vec{\eta}_0 \times \vec{\omega}, \quad \frac{d}{dt}\vec{\zeta}_0 = \vec{\zeta}_0 \times \vec{\omega} + \omega_0 \vec{\xi}_0,$$

где J - тензор инерции КА. Представим выражения (16) и (17) в скалярном виде

$$\begin{aligned} P_{x_0} &= Q [k_L (\alpha_{10} v_{C\eta} B_\zeta - \beta_{10} v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_{10} (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) + \\ &\quad + h_L (q (\alpha_3 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_3 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_3 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - \\ &\quad - r (\alpha_2 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_2 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_2 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)))] , \\ P_{y_0} &= Q [k_L (\alpha_{20} v_{C\eta} B_\zeta - \beta_{20} v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_{20} (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) + \\ &\quad + h_L (r (\alpha_1 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_1 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_1 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - \\ &\quad - p (\alpha_3 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_3 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_3 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)))] , \quad (35) \end{aligned}$$

$$P_{z_0} = Q[k_{\text{Л}}(\alpha_{30}v_{C\eta}B_{\zeta} - \beta_{30}v_{C\xi}B_{\zeta} + \gamma_{30}(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi})) + \\ + h_{\text{Л}}(p(\alpha_2v_{C\eta}B_{\zeta} - \beta_2v_{C\xi}B_{\zeta} + \gamma_2(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi})) - \\ - q(\alpha_1v_{C\eta}B_{\zeta} - \beta_1v_{C\xi}B_{\zeta} + \gamma_1(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi})))] ,$$

$$I_{x_0} = k_{\text{М}}(\alpha_{10}B_{\xi} + \beta_{10}B_{\eta} + \gamma_{10}B_{\zeta}) + \\ + h_{\text{М}}(q(\alpha_3B_{\xi} + \beta_3B_{\eta} + \gamma_3B_{\zeta}) - r(\alpha_2B_{\xi} + \beta_2B_{\eta} + \gamma_2B_{\zeta})) ,$$

$$I_{y_0} = k_{\text{М}}(\alpha_{20}B_{\xi} + \beta_{20}B_{\eta} + \gamma_{20}B_{\zeta}) + \\ + h_{\text{М}}(r(\alpha_1B_{\xi} + \beta_1B_{\eta} + \gamma_1B_{\zeta}) - p(\alpha_3B_{\xi} + \beta_3B_{\eta} + \gamma_3B_{\zeta})) , \quad (36)$$

$$I_{z_0} = k_{\text{М}}(\alpha_{30}B_{\xi} + \beta_{30}B_{\eta} + \gamma_{30}B_{\zeta}) + \\ + h_{\text{М}}(p(\alpha_2B_{\xi} + \beta_2B_{\eta} + \gamma_2B_{\zeta}) - q(\alpha_1B_{\xi} + \beta_1B_{\eta} + \gamma_1B_{\zeta})) .$$

Подставляя (31) в (35) и (36) получаем

$$P_{x_0} = Q[k_{\text{Л}}v_{C\eta}B_{\zeta} + h_{\text{Л}}(q(\alpha_3v_{C\eta}B_{\zeta} - \beta_3v_{C\xi}B_{\zeta} + \gamma_3(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi})) - \\ - r(\alpha_2v_{C\eta}B_{\zeta} - \beta_2v_{C\xi}B_{\zeta} + \gamma_2(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi})))] ,$$

$$P_{y_0} = Q[-k_{\text{Л}}v_{C\xi}B_{\zeta} + h_{\text{Л}}(r(\alpha_1v_{C\eta}B_{\zeta} - \beta_1v_{C\xi}B_{\zeta} + \gamma_1(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi})) - \\ - p(\alpha_3v_{C\eta}B_{\zeta} - \beta_3v_{C\xi}B_{\zeta} + \gamma_3(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi})))] , \quad (37)$$

$$P_{z_0} = Q[k_{\text{Л}}(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi}) + \\ + h_{\text{Л}}(p(\alpha_2v_{C\eta}B_{\zeta} - \beta_2v_{C\xi}B_{\zeta} + \gamma_2(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi})) - \\ - q(\alpha_1v_{C\eta}B_{\zeta} - \beta_1v_{C\xi}B_{\zeta} + \gamma_1(v_{C\xi}B_{\eta} - v_{C\eta}B_{\xi})))] ,$$

$$I_{x_0} = k_{\text{М}}B_{\xi} + h_{\text{М}}(q(\alpha_3B_{\xi} + \beta_3B_{\eta} + \gamma_3B_{\zeta}) - r(\alpha_2B_{\xi} + \beta_2B_{\eta} + \gamma_2B_{\zeta})) , \\ I_{y_0} = k_{\text{М}}B_{\eta} + h_{\text{М}}(r(\alpha_1B_{\xi} + \beta_1B_{\eta} + \gamma_1B_{\zeta}) - p(\alpha_3B_{\xi} + \beta_3B_{\eta} + \gamma_3B_{\zeta})) , \quad (38) \\ I_{z_0} = k_{\text{М}}B_{\zeta} + h_{\text{М}}(p(\alpha_2B_{\xi} + \beta_2B_{\eta} + \gamma_2B_{\zeta}) - q(\alpha_1B_{\xi} + \beta_1B_{\eta} + \gamma_1B_{\zeta})) .$$

С учетом (37) и (38) проекции управляющих моментов \vec{M}_Π и \vec{M}_M имеют вид

$$\begin{aligned}
M_{\Pi x} &= Q [(-k_\Pi v_{C\xi} B_\zeta + h_\Pi (r (\alpha_1 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_1 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_1 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi))) - \\
&\quad - p (\alpha_3 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_3 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_3 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi))) \times \\
&\quad \times (\alpha_3 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_3 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_3 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - \\
&\quad - (k_\Pi (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi) + h_\Pi (p (\alpha_2 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_2 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_2 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - \\
&\quad - q (\alpha_1 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_1 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_1 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)))) \times \\
&\quad \times (\alpha_2 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_2 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_2 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi))], \\
M_{\Pi y} &= Q [(k_\Pi (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi) + h_\Pi (p (\alpha_2 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_2 v_{C\xi} B_\zeta + \\
&\quad + \gamma_2 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - q (\alpha_1 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_1 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_1 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)))) \times \\
&\quad \times (\alpha_1 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_1 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_1 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - \\
&\quad - (k_\Pi v_{C\eta} B_\zeta + h_\Pi (q (\alpha_3 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_3 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_3 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - \\
&\quad - r (\alpha_2 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_2 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_2 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)))) \times \\
&\quad \times (\alpha_3 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_3 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_3 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi))], \\
M_{\Pi z} &= Q [(k_\Pi v_{C\eta} B_\zeta + h_\Pi (q (\alpha_3 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_3 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_3 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - \\
&\quad - r (\alpha_2 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_2 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_2 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)))) \times \\
&\quad \times (\alpha_2 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_2 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_2 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - \\
&\quad - (-k_\Pi v_{C\xi} B_\zeta + h_\Pi (r (\alpha_1 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_1 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_1 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)) - \\
&\quad - p (\alpha_3 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_3 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_3 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)))) \times \\
&\quad \times (\alpha_1 v_{C\eta} B_\zeta - \beta_1 v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_1 (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi))], \\
M_{Mx} &= (k_M B_\eta + h_M (r (\alpha_1 B_\xi + \beta_1 B_\eta + \gamma_1 B_\zeta) - p (\alpha_3 B_\xi + \beta_3 B_\eta + \gamma_3 B_\zeta))) \times \\
&\quad \times (\alpha_3 B_\xi + \beta_3 B_\eta + \gamma_3 B_\zeta) - (k_M B_\zeta + h_M (p (\alpha_2 B_\xi + \beta_2 B_\eta + \gamma_2 B_\zeta) - \\
&\quad - q (\alpha_1 B_\xi + \beta_1 B_\eta + \gamma_1 B_\zeta))) (\alpha_2 B_\xi + \beta_2 B_\eta + \gamma_2 B_\zeta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{My} &= (k_M B_\zeta + h_M (p (\alpha_2 B_\xi + \beta_2 B_\eta + \gamma_2 B_\zeta) - q (\alpha_1 B_\xi + \beta_1 B_\eta + \gamma_1 B_\zeta))) \times \\
&\quad \times (\alpha_1 B_\xi + \beta_1 B_\eta + \gamma_1 B_\zeta) - (k_M B_\xi + h_M (q (\alpha_3 B_\xi + \beta_3 B_\eta + \gamma_3 B_\zeta) - \\
&\quad - r (\alpha_2 B_\xi + \beta_2 B_\eta + \gamma_2 B_\zeta))) (\alpha_3 B_\xi + \beta_3 B_\eta + \gamma_3 B_\zeta), \\
M_{Mz} &= (k_M B_\xi + h_M (q (\alpha_3 B_\xi + \beta_3 B_\eta + \gamma_3 B_\zeta) - r (\alpha_2 B_\xi + \beta_2 B_\eta + \gamma_2 B_\zeta))) \times \\
&\quad \times (\alpha_2 B_\xi + \beta_2 B_\eta + \gamma_2 B_\zeta) - (k_M B_\eta + h_M (r (\alpha_1 B_\xi + \beta_1 B_\eta + \gamma_1 B_\zeta) - \\
&\quad - p (\alpha_3 B_\xi + \beta_3 B_\eta + \gamma_3 B_\zeta))) (\alpha_1 B_\xi + \beta_1 B_\eta + \gamma_1 B_\zeta).
\end{aligned}$$

При рассмотрении малых колебаний КА, в окрестности прямого положения равновесия справедливо предположение о малости углов φ , ψ , θ и их производных по времени. Разложим моменты \vec{M}_L и \vec{M}_M по степеням этих малых величин с точностью до членов второго порядка малости. В результате получим

$$\begin{aligned}
M_{Lx} &= l_{11}(t)(k_L \varphi + h_L \dot{\varphi}) + l_{12}(t)(k_L \theta + h_L \dot{\theta}) + l_{13}(t)(k_L \psi + h_L \dot{\psi}), \\
M_{Ly} &= l_{21}(t)(k_L \varphi + h_L \dot{\varphi}) + l_{22}(t)(k_L \theta + h_L \dot{\theta}) + l_{23}(t)(k_L \psi + h_L \dot{\psi}), \\
M_{Lz} &= l_{31}(t)(k_L \varphi + h_L \dot{\varphi}) + l_{32}(t)(k_L \theta + h_L \dot{\theta}) + l_{33}(t)(k_L \psi + h_L \dot{\psi}),
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
M_{Mx} &= b_{11}(t)(k_M \varphi + h_M \dot{\varphi}) + b_{12}(t)(k_M \theta + h_M \dot{\theta}) + b_{13}(t)(k_M \psi + h_M \dot{\psi}), \\
M_{My} &= b_{21}(t)(k_M \varphi + h_M \dot{\varphi}) + b_{22}(t)(k_M \theta + h_M \dot{\theta}) + b_{23}(t)(k_M \psi + h_M \dot{\psi}), \\
M_{Mz} &= b_{31}(t)(k_M \varphi + h_M \dot{\varphi}) + b_{32}(t)(k_M \theta + h_M \dot{\theta}) + b_{33}(t)(k_M \psi + h_M \dot{\psi}),
\end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned}
l_{11}(t) &= -Q [(v_{C\eta} B_\xi - v_{C\xi} B_\eta)^2 + v_{C\xi}^2 B_\zeta^2], & b_{11}(t) &= -(B_\eta^2 + B_\zeta^2), \\
l_{12}(t) &= l_{21}(t) = -Q v_{C\xi} v_{C\eta} B_\zeta^2, & b_{12}(t) &= b_{21}(t) = B_\xi B_\eta, \\
l_{13}(t) &= l_{31}(t) = Q v_{C\eta} B_\zeta (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi), & b_{13}(t) &= b_{31}(t) = B_\xi B_\zeta, \\
l_{22}(t) &= -Q [(v_{C\eta} B_\xi - v_{C\xi} B_\eta)^2 + v_{C\eta}^2 B_\zeta^2], & b_{22}(t) &= -(B_\xi^2 + B_\zeta^2), \\
l_{23}(t) &= l_{32}(t) = -Q v_{C\xi} B_\zeta (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi), & b_{23}(t) &= b_{32}(t) = B_\eta B_\zeta, \\
l_{33}(t) &= -Q (v_{C\xi}^2 + v_{C\eta}^2) B_\zeta^2, & b_{33}(t) &= -(B_\xi^2 + B_\eta^2).
\end{aligned} \tag{41}$$

Аналогично поступим с выражением для гравитационного момента (см. 2.3) \vec{M}_Γ . Получим

$$M_{\Gamma x} = G_1(t) + g_{11}(t)\varphi + g_{12}(t)\theta + g_{13}(t)\psi,$$

$$M_{\Gamma y} = G_2(t) + g_{12}(t)\varphi + g_{22}(t)\theta + g_{23}(t)\psi,$$

$$M_{\Gamma z} = G_3(t) + g_{31}(t)\varphi + g_{32}(t)\theta + g_{33}(t)\psi,$$

где

$$g_{11}(t) = (C - B)(\omega_0 + k_\omega)^2 \left[3 - \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\vartheta}{R} \right)^2 (12 - 19 \cos^2 i - 17 \sin^2 i \cos^2 u) \right],$$

$$g_{12}(t) = 2(B - C)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\vartheta}{R} \right)^2 \sin i \cos i \cos u,$$

$$g_{13}(t) = 8(B - C)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\vartheta}{R} \right)^2 \sin^2 i \sin u \cos u,$$

$$g_{21}(t) = 2(A - C)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\vartheta}{R} \right)^2 \sin i \cos i \cos u,$$

$$g_{22}(t) = (C - A)(\omega_0 + k_\omega)^2 \left[3 - \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\vartheta}{R} \right)^2 (12 - 17 \cos^2 i - 19 \sin^2 i \cos^2 u) \right],$$

$$g_{23}(t) = 8(A - C)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\vartheta}{R} \right)^2 \sin i \cos i \sin u,$$

$$g_{31}(t) = 8(B - A)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\vartheta}{R} \right)^2 \sin^2 i \sin u \cos u,$$

$$g_{32}(t) = 8(A - B)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\vartheta}{R} \right)^2 \sin i \cos i \sin u,$$

$$g_{33}(t) = 2(A - B)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\vartheta}{R} \right)^2 (\cos^2 i - \sin^2 i \cos^2 u),$$

$$\begin{aligned}
G_1(t) &= 8(C - B)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 \sin i \cos i \sin u, \\
G_2(t) &= 8(A - C)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 \sin^2 i \sin u \cos u, \\
G_3(t) &= 2(A - B)(\omega_0 + k_\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_\Theta}{R} \right)^2 \sin i \cos i \cos u.
\end{aligned}$$

Слагаемые $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$ есть главное отличие данной постановки задачи от постановки без учета эффекта сжатия Земли. Упомянутые выше слагаемые способствуют исчезновению прямого положения равновесия КА. Продемонстрируем, что подбором управляющих моментов \vec{M}_L и \vec{M}_M удастся скомпенсировать влияние этих слагаемых и обеспечить существование ППР КА в орбитальной системе координат на регрессирующей орбите.

В соответствии с методикой, предложенной в разделе 3. 2, введем в выражения для векторов \vec{P} и \vec{I} (16), (17) дополнительные слагаемые \vec{P}_Γ и \vec{I}_Γ

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= Qk_L \vec{T}_0 + Qh_L \vec{\omega}' \times \vec{T} + k_1 \vec{P}_\Gamma, \\
\vec{I} &= k_M \vec{B}_0 + h \vec{\omega}' \times A^\top \vec{B} + k_2 \vec{I}_\Gamma,
\end{aligned}$$

которые будут отвечать за компенсацию момента $\vec{G} = G_1(t) \vec{i}_1 + G_2(t) \vec{i}_2 + G_3(t) \vec{i}_3$, где \vec{i}_1 , \vec{i}_2 , \vec{i}_3 - временное обозначение ортов системы $Cxyz$.

Введем в рассмотрение матрицу направляющих косинусов

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

так, что

$$\vec{b} = v_{11} \vec{i}_1 + v_{12} \vec{i}_2 + v_{13} \vec{i}_3, \quad \vec{t} = v_{21} \vec{i}_1 + v_{22} \vec{i}_2 + v_{23} \vec{i}_3, \quad \vec{s} = v_{31} \vec{i}_1 + v_{32} \vec{i}_2 + v_{33} \vec{i}_3.$$

Элементы матрицы V таковы:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{B_x}{|\vec{B}|} & \frac{B_y}{|\vec{B}|} & \frac{B_z}{|\vec{B}|} \\ \frac{T_x}{|\vec{T}|} & \frac{T_y}{|\vec{T}|} & \frac{T_z}{|\vec{T}|} \\ \frac{B_y T_z - B_z T_y}{|\vec{B}||\vec{T}|} & \frac{B_z T_x - B_x T_z}{|\vec{B}||\vec{T}|} & \frac{B_x T_y - B_y T_x}{|\vec{B}||\vec{T}|} \end{pmatrix},$$

где B_x, B_y, B_z – проекции вектора \vec{B} на оси системы координат $Cxyz$, (т. е. координаты вектора $A^\top \vec{B}$), а T_x, T_y, T_z – проекции вектора \vec{T} на оси системы координат $Cxyz$ (т. е. координаты вектора $\vec{T} = A^\top(\vec{v}_C \times \vec{B})$). Тогда следуя (29), (30)

$$\vec{P}_\Gamma = V^\top \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{I}_\Gamma = V^\top \begin{pmatrix} 0 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо выбрать параметры $p_1, p_3 \neq 0, i_2, i_3 \neq 0$ так, чтобы они удовлетворяли условию (26), которое в рассматриваемом случае примет вид

$$\frac{\vec{G}(A^\top \vec{B})}{|\vec{B}|} p_1 i_3 + \frac{\vec{G}\vec{T}}{|\vec{T}|} p_3 i_2 + \frac{\vec{G}((A^\top \vec{B}) \times \vec{T})}{|\vec{B}||\vec{T}|} p_3 i_3 = 0. \quad (42)$$

Поскольку в выборе этих параметров существует определенный произвол, для простоты выберем

$$p_1 = 0, \quad p_3 = 1, \quad i_2 = 1.$$

Из равенства (42) получаем

$$i_3 = -\frac{\vec{G}\vec{T}|\vec{B}|}{\vec{G}((A^\top \vec{B}) \times \vec{T})}.$$

Управляемые векторы \vec{P} и \vec{I} принимают вид

$$\vec{P} = Qk_{\text{Л}}\vec{T}_0 + Qh_{\text{Л}}\vec{\omega}' \times \vec{T} + k_1 V^\top (0, 0, 1)^\top,$$

$$\vec{I} = k_M \vec{B}_0 + h_M \vec{\omega}' \times A^\top \vec{B} + k_2 V^\top \left(0, 1, -\frac{\vec{G} \vec{T} |\vec{B}|}{\vec{G}((A^\top \vec{B}) \times \vec{T})} \right)^\top,$$

где $\vec{T}_0 = A_0^\top (\vec{v}_C \times \vec{B})$, $\vec{B}_0 = A_0^\top \vec{B}$. Коэффициенты k_1 и k_2 , определяемые формулами (28), принимают вид:

$$k_1 = \frac{\vec{G}(A^\top \vec{B})}{|\vec{T}| |\vec{B}|}, \quad k_2 = \frac{\vec{G}((A^\top \vec{B}) \times \vec{T})}{|\vec{T}| |\vec{B}|^2}.$$

Итого, управляющие моменты \vec{M}_L и \vec{M}_M имеют вид

$$\vec{M}_M = Q k_L \vec{T}_0 \times \vec{T} + Q h_L (\vec{\omega}' \times \vec{T}) \times \vec{T} + \frac{\vec{G}(A^\top \vec{B})}{|\vec{T}| |\vec{B}|} \left(V^\top (0, 0, 1)^\top \right) \times \vec{T},$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_M = & k_M \vec{B}_0 \times A^\top \vec{B} + h_M (\vec{\omega}' \times A^\top \vec{B}) \times A^\top \vec{B} + \\ & + \frac{\vec{G}((A^\top \vec{B}) \times \vec{T})}{|\vec{T}| |\vec{B}|^2} \left(V^\top \left(0, 1, -\frac{\vec{G} \vec{T} |\vec{B}|}{\vec{G}((A^\top \vec{B}) \times \vec{T})} \right)^\top \right) \times A^\top \vec{B}. \end{aligned}$$

Динамические уравнения Эйлера (в «самолетных» углах) в матричной форме имеют вид

$$J \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + H \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} + \vec{X} = 0, \quad \text{где} \quad (43)$$

$$J = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & (C - A - B)* & (A + C - B)* \\ & k_{\Omega} \sin i \sin u & (\omega_0 + k_{\omega} + k_{\Omega} \cos i) \\ -(C - A - B)* & 0 & (A - C - B)* \\ k_{\Omega} \sin i \sin u & & k_{\Omega} \sin i \cos u \\ -(A + C - B)* & -(A - C - B)* & \\ (\omega_0 + k_{\omega} + k_{\Omega} \cos i) & k_{\Omega} \sin i \cos u & 0 \end{pmatrix} -$$

$$- h_{\Pi}(l_{ij}(t)) - h_{\text{M}}(b_{ij}(t)),$$

$$M = (m_{ij}),$$

$$m_{11} = (B - C) \left((k_{\omega} + \omega_0 + k_{\Omega} \cos i)^2 - k_{\Omega}^2 \sin^2 i \sin^2 u \right) -$$

$$- k_{\Pi} l_{11}(t) - k_{\text{M}} b_{11}(t) - g_{11}(t),$$

$$m_{12} = (C - B) k_{\Omega} (k_{\omega} + \omega_0 + k_{\Omega} \cos i) \sin i \cos u - k_{\Pi} l_{12}(t) - k_{\text{M}} b_{12}(t) - g_{12}(t),$$

$$m_{13} = (B - C) k_{\Omega}^2 \sin^2 i \sin u \cos u - k_{\Pi} l_{13}(t) - k_{\text{M}} b_{13}(t) - g_{13}(t),$$

$$m_{21} = (C - A) k_{\Omega} (k_{\omega} + \omega_0 + k_{\Omega} \cos i) \sin i \cos u - k_{\Pi} l_{21}(t) - k_{\text{M}} b_{21}(t) - g_{21}(t),$$

$$m_{22} = (A - C) k_{\Omega}^2 \sin^2 i \cos(2u) - k_{\Pi} l_{22}(t) - k_{\text{M}} b_{22}(t) - g_{22}(t),$$

$$m_{23} = (A - C) k_{\Omega} (k_{\omega} + \omega_0 + k_{\Omega} \cos i) \sin i \sin u - k_{\Pi} l_{23}(t) - k_{\text{M}} b_{23}(t) - g_{23}(t),$$

$$m_{31} = (B - A) k_{\Omega}^2 \sin^2 i \sin u \cos u - k_{\Pi} l_{31}(t) - k_{\text{M}} b_{31}(t) - g_{31}(t),$$

$$m_{32} = (A - B) k_{\Omega} \sin i \sin u (k_{\omega} + \omega_0 + k_{\Omega} \cos i) - k_{\Pi} l_{32}(t) - k_{\text{M}} b_{32}(t) - g_{32}(t),$$

$$m_{33} = (B - A) \left((k_{\omega} + \omega_0 + k_{\Omega} \cos i)^2 - k_{\Omega}^2 \cos^2 u \sin^2 i \right) -$$

$$- k_{\Pi} l_{33}(t) - k_{\text{M}} b_{33}(t) - g_{33}(t),$$

\vec{X} — вектор с компонентами $X_j(t, \varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ ($j = \overline{1, 3}$), которые нелинейным образом зависят от $\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$.

Рассмотрим систему (43) в линейном приближении

$$J \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + H \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = 0. \quad (44)$$

Представим матрицы H и M в виде $H = H_{cp} + \tilde{H}(t)$, $M = M_{cp} + \tilde{M}(t)$ соответственно. Здесь матрицы H_{cp} и M_{cp} получены покомпонентным усреднением матриц H и M по времени, т.е.

$$H_{cp} = \begin{pmatrix} & & (\omega_0 + k_\omega + k_\Omega \cos i)* \\ -h_{\text{Л}}l_{11cp} - h_{\text{М}}b_{11cp} & -h_{\text{Л}}l_{12cp} - h_{\text{М}}b_{12cp} & (A - B + C)- \\ & & -h_{\text{Л}}l_{13cp} - h_{\text{М}}b_{13cp} \\ -h_{\text{Л}}l_{12cp} - h_{\text{М}}b_{12cp} & -h_{\text{Л}}l_{22cp} - h_{\text{М}}b_{22cp} & -h_{\text{Л}}l_{23cp} - h_{\text{М}}b_{23cp} \\ -(\omega_0 + k_\omega + k_\Omega \cos i)* & & \\ (A - B + C)- & -h_{\text{Л}}l_{23cp} - h_{\text{М}}b_{23cp} & -h_{\text{Л}}l_{33cp} - h_{\text{М}}b_{33cp} \\ -h_{\text{Л}}l_{13cp} - h_{\text{М}}b_{13cp} & & \end{pmatrix},$$

$$M_{cp} = (\mu_{ij}),$$

$$\begin{aligned} \mu_{11} = & ((\omega_0 + k_\omega)^2 + 0.5k_\Omega(4 \cos i(\omega_0 + k_\omega) + k_\Omega(3 \cos^2 i - 1)))(B - C) - \\ & -k_{\text{Л}}l_{11cp} - k_{\text{М}}b_{11cp} - g_{11cp}, \end{aligned}$$

$$\mu_{12} = -k_{\text{Л}}l_{12cp} - k_{\text{М}}b_{12cp} - g_{12cp},$$

$$\mu_{13} = -k_{\text{Л}}l_{13cp} - k_{\text{М}}b_{13cp} - g_{13cp},$$

$$\mu_{21} = -k_{\text{Л}}l_{21cp} - k_{\text{М}}b_{21cp} - g_{21cp},$$

$$\mu_{22} = -k_{\text{Л}}l_{22cp} - k_{\text{М}}b_{22cp} - g_{22cp},$$

$$\mu_{23} = -k_{\text{Л}}l_{23cp} - k_{\text{М}}b_{23cp} - g_{23cp},$$

$$\mu_{31} = -k_{\text{Л}}l_{31cp} - k_{\text{М}}b_{31cp} - g_{31cp},$$

$$\mu_{32} = -k_{\text{Л}}l_{32cp} - k_{\text{М}}b_{32cp} - g_{32cp},$$

$$\mu_{33} = ((\omega_0 + k\omega)^2 5 + 0.5k\Omega(4 \cos i(\omega_0 + k\omega) + k\Omega(3 \cos^2 i - 1)))(B - A) - \\ - k_{\text{Л}}l_{33cp} - k_{\text{М}}b_{33cp} - g_{33cp},$$

где

$$g_{11cp} = \frac{1}{2}(C - B)(\omega_0 + k\omega)^2 \left(6 - 7\tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_{\text{Э}}}{R} \right)^2 (1 - 3 \cos^2 i) \right),$$

$$g_{22cp} = \frac{1}{2}(C - A)(\omega_0 + k\omega)^2 \left(6 + 5\tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_{\text{Э}}}{R} \right)^2 (2 - 3 \sin^2 i) \right),$$

$$g_{33cp} = (B - A)(\omega_0 + k\omega)^2 \tilde{\varepsilon} \left(\frac{R_{\text{Э}}}{R} \right)^2 (1 - 3 \cos^2 i),$$

$$g_{12cp} = g_{13cp} = g_{21cp} = g_{23cp} = g_{31cp} = g_{32cp} = 0,$$

$$l_{11cp} = -Q[\langle v_{C\eta}^2 B_{\xi}^2 \rangle_t - 2v_{C\xi} \langle v_{C\eta} B_{\xi} B_{\eta} \rangle_t + v_{C\xi}^2 (\langle B_{\eta}^2 \rangle_t + \langle B_{\zeta}^2 \rangle_t)], \quad (45)$$

$$l_{12cp} = l_{21cp} = -Qv_{C\xi} \langle v_{C\eta} B_{\zeta}^2 \rangle_t, \quad (46)$$

$$l_{13cp} = l_{31cp} = Q(v_{C\xi} \langle v_{C\eta} B_{\eta} B_{\zeta} \rangle_t - \langle v_{C\eta}^2 B_{\xi} B_{\zeta} \rangle_t), \quad (47)$$

$$l_{22cp} = -Q[\langle v_{C\eta}^2 B_{\xi}^2 \rangle_t - 2v_{C\xi} \langle v_{C\eta} B_{\xi} B_{\eta} \rangle_t + v_{C\xi}^2 \langle B_{\eta}^2 \rangle_t + \langle v_{C\eta}^2 B_{\zeta}^2 \rangle_t], \quad (48)$$

$$l_{23cp} = l_{32cp} = -Qv_{C\xi} (v_{C\xi} \langle B_{\eta} B_{\zeta} \rangle_t - \langle v_{C\eta} B_{\xi} B_{\zeta} \rangle_t), \quad (49)$$

$$l_{33cp} = -Q(v_{C\xi}^2 \langle B_{\zeta}^2 \rangle_t + \langle v_{C\eta}^2 B_{\zeta}^2 \rangle_t), \quad (50)$$

$$b_{11cp} = -(\langle B_{\eta}^2 \rangle_t + \langle B_{\zeta}^2 \rangle_t), \quad b_{12cp} = b_{21cp} = \langle B_{\xi} B_{\eta} \rangle_t, \\ b_{13cp} = b_{31cp} = \langle B_{\xi} B_{\zeta} \rangle_t, \quad b_{22cp} = -(\langle B_{\xi}^2 \rangle_t + \langle B_{\zeta}^2 \rangle_t), \quad (51) \\ b_{23cp} = b_{32cp} = \langle B_{\eta} B_{\zeta} \rangle_t, \quad b_{33cp} = -(\langle B_{\xi}^2 \rangle_t + \langle B_{\eta}^2 \rangle_t).$$

Средние величины $\langle \dots \rangle_t$ получены, но по причине громоздкой структуры в данной работе не приводятся.

В системе уравнений (44) заменим матрицы H и M их средними значениями H_{cp} и M_{cp} :

$$J \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + H_{cp} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + M_{cp} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = 0. \quad (52)$$

С помощью замены

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{d\varphi}{du}, & x_2 &= \frac{d\theta}{du}, & x_3 &= \frac{d\psi_1}{du}, \\ x_4 &= \varphi, & x_5 &= \theta, & x_6 &= \psi_1 \end{aligned}$$

систему (44) можно привести к безразмерному виду:

$$\frac{dx}{du} = (N + \tilde{N}(u))x, \quad (53)$$

где матрица N имеет блочную структуру:

$$\mathbf{N} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{J^{-1}H_{cp}}{\omega_0 + k_\omega} & & & \frac{J^{-1}M_{cp}}{(\omega_0 + k_\omega)^2} & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (54)$$

Все решения системы $\frac{dx}{du} = Nx$ являются асимптотически устойчивыми тогда и только тогда, когда действительные части корней λ_k характеристического уравнения $\det(\lambda I - N) = 0$ отрицательны. Пусть α - наибольший из вещественных частей всех корней λ_k , $k = 1..6$, ($\alpha < 0$), $M = \|S\| \cdot \|S^{-1}\|$, где S - матрица преобразования матрицы N к жордановой форме. В этих условиях, в соответствии с теоремой 6.3, сформулированной в [11], из выполнения равенства

$$\|\tilde{\mathbf{N}}\| < \frac{-\alpha}{M} \quad (55)$$

следует, что нулевое решение системы (53) асимптотически устойчиво. Значит нулевое решение исходной нелинейной системы (34) будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях [12].

3.4 Заключение

Проведенный с помощью ЭВМ численный анализ показал, что существует большая область параметров ИСЗ и орбиты (с учетом физических параметров СЭСЗ, описанной в разделе 1), при которых выполнено условие (55).

Литература

1. *Белецкий В.В., Хентов А.А.* Вращательное движение намагниченного спутника М., Наука, 1985. 288 с.
2. *Попов В. И.* Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1986. - 184 с.
3. *Joseph G. Smith, Jr., Trent Smith, Martha Williams, Robert Youngquist, Wendell Mendell.* Potential Polymeric Sphere Construction Materials for a Spacecraft Electrostatic Shield. NASA/TM-2006-214302.
4. *R.P. Joshi, Hao Qiu, R.K. Tripathi* «Evaluation of a combined electrostatic and magnetostatic configuration for active spaceradiation shielding» 2012 [Department of Electrical Computer Engineering, Old Dominion University, Norfolk, VA 23681, USA].
5. *А. М. Гальпер.* Радиационный пояс Земли. Соросовский образовательный журнал, №6, 1999.
6. Galactic Cosmic Rays. NASA. 6 June 2012.
(<http://helios.gsfc.nasa.gov/gcr.html>).
7. *Петров К. Г., Тихонов А. А.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.2: Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестник СПбГУб Сер.1, 1999, вып.3(№15), с. 81 - 91.
8. *Дубошин Г. Н.* Справочное руководство по небесной механике и астеродинамике. Изд. 2-е. -М., Наука, 1976. 864 с.

9. *Антипов К. А., Тихонов А. А.* Автоматика и Телемеханика, 2007, №8, с. 44 - 56.
10. *Сарычев В. А.* Влияние сжатия Земли на вращательное движение искусственного спутника // Искусственные спутники Земли. - М.: Изд. АН СССР, 1961, №6, с. 3 - 10.
11. *Каленова В. И., Морозов В. М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.-208с.
12. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966.