

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Прикладная математика и информатика
Нелинейная динамика, информатика и управление

Романов Андрей Олегович

Эффект Зоммерфельда в электромеханических системах

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
к. ф.-м. н. Киселева М. А.

Рецензент:
к. ф.-м. н. Юлдашев Р. В.

Санкт-Петербург
2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Department of Applied Cybernetics
Nonlinear Dynamics, Computer Science and Control

Andrey Romanov

Sommerfeld effect in electromechanical systems

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
PhD M. Kiseleva

Reviewer:
PhD R. Yuldashev

Saint-Petersburg
2016

Оглавление

Введение	4
1. Вибрационная установка с одним неуравновешенным ротором	6
1.1. Описание модели	6
1.2. Моделирование системы	7
1.3. Результаты моделирования	8
2. Вибрационная установка с двумя неуравновешенными роторами	11
2.1. Описание модели	11
2.2. Моделирование системы	12
2.3. Результаты моделирования	14
Заключение	17
Список литературы	18
Приложение	20
2.4. Приложение 1	21
2.5. Приложение 2	23

Введение

Вибрационные установки с неуравновешенными роторами широко используются в различных отраслях промышленности: горной промышленности, машино- и судостроении. Одной из основных характеристик таких установок является максимальная мощность электродвигателя. При работе установки, максимальная мощность необходима на этапе запуска и разгона двигателя. При снижении максимальной мощности, а, как следствие, и номинальной, в системе может возникнуть так называемый эффект Зоммерфельда.

Эффект Зоммерфельда назван в честь немецкого физика Арнольда Зоммерфельда, который первым наблюдал его на экспериментальной установке в 1902 г. [1, 10]. Эффект представляет собой “застывание” угловой скорости вращения ротора. В случаях, когда двигатель обладает небольшой мощностью, колебания основания влияют на ротор, в следствии чего двигатель не может выйти на нормальный режим работы и угловая скорость начинает колебаться около некоторого значения.

Такие колебания могут навредить системе. К примеру, в железнодорожном транспорте мотор представляет собой установку, располагающуюся на упругом основании. Известны случаи, когда машинист локомотива не мог увеличить скорость движения машины, несмотря на соответствующие действия с его стороны, и лишь при сильном увеличении подводимой мощности скорость скачкообразно увеличилась [9].

Стоит отметить, что при рассмотрении разных типов двигателей (синхронных и асинхронных) получаются различные результаты в проявления эффекта Зоммерфельда, вплоть до его отсутствия, что стимулирует их дальнейшее изучение.

В работе [4] рассмотрен синхронный электродвигатель с асинхронным запуском и доказано, что эффект Зоммерфельда не проявляется. В данном случае, стабилизирующие свойства двигателя препятствуют возникновению эффекта.

Для борьбы с эффектом и его влиянием разрабатываются различные методы управления двигателем, такие как “метод двойного пуска”

[11], метод скоростного градиента [7] и другие методы [2, 5, 6].

В работе рассмотрены следующие электромеханические системы с асинхронным двигателем: вибрационные установки с одним и двумя неуравновешенными роторами. Проведено численное моделирование систем, в ходе которого был выявлен эффект Зоммерфельда при различных управляющих воздействиях (вращающих моментов двигателей).

1. Вибрационная установка с одним неуравновешенным ротором

1.1. Описание модели

Рассмотрим вибрационную установку, описанную в [2].

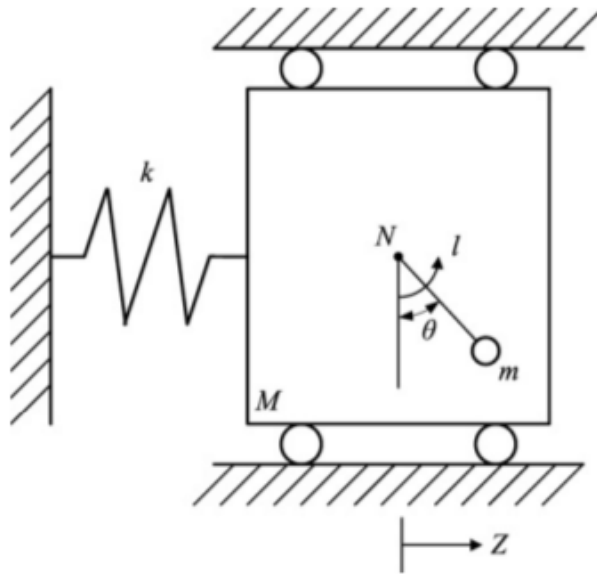


Рис. 1: Схема вибрационной установки с неуравновешенным ротором.

Ротор массы m , приводимый в движение электрическим двигателем, установлен на платформе массы M , скрепленной с неподвижным основанием пружиной. Платформа может совершать горизонтальное движение. Силу тяжести на ротор в этом случае учитывать не будем.

Опишем математическую модель этой системы.

Переменными системы являются z — смещение платформы относительно положения равновесия и θ — угол поворота ротора.

Для того чтобы описать динамику системы составим уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

где T — кинетическая энергия системы, а q_i — обобщенные координаты, Q_i — обобщенные силы. Обобщенными координатами q_1, q_2 являются z, θ соответственно.

Выпишем кинетическую энергию системы:

Для ротора:

$$T_0 = \frac{J\dot{\theta}^2}{2},$$

где J — момент инерции ротора.

Для массы m :

$$T_1 = \frac{m}{2} \left((\dot{z} - l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right) = \frac{m}{2} \left(\dot{z}^2 + 2l\dot{z}\dot{\theta} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2 \right),$$

где l — эксцентриситет ротора.

Для массы M :

$$T_2 = \frac{M\dot{z}^2}{2}$$

Общая кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2 + T_3$

Обобщенные силы имеют вид:

$Q_z = -kz - k_1\dot{z}$, где k — жесткость пружины, k_1 — демпфирующий фактор.

Согласно [10], обобщенная сила Q_θ принимает следующий вид $Q_\theta = L(\dot{\theta}) - R(\dot{\theta})$, где L — момент, передаваемый на ротор от электродвигателя, а R — момент сопротивления вращению ротора.

Можно принять [12, 14], что $Q_\theta = L(\dot{\theta}) - R(\dot{\theta}) = u - k_\theta\dot{\theta}$, где k_θ — сопротивление ротора, u — вращающий момент двигателя.

Выполняя операции дифференцирования, в конечном итоге приходим к следующим уравнениям системы:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{z} + k_1\dot{z} + ml \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) + kz &= 0, \\ J\ddot{\theta} + k_\theta\dot{\theta} + ml\ddot{z} \cos \theta &= u \end{aligned} \tag{1}$$

1.2. Моделирование системы

Введя новые обозначения:

$$y = \dot{z}, \eta = \dot{\theta},$$

приведем систему (1) к нормальной форме:

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= y, \\
 \dot{\theta} &= \eta, \\
 \dot{\eta} &= \frac{1}{D} (K + u), \\
 \dot{y} &= -\frac{1}{\mathcal{M}} \left(k_1 y + kz + ml \left(\frac{(K + u)}{D} \cos \theta - \eta^2 \sin \theta \right) \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{M} = M + m$, $K = -k_\theta \eta + \frac{ml}{\mathcal{M}}(k_1 y + kz + ml \eta^2 \sin \theta) \cos \theta$, $D = J - \frac{(ml)^2}{\mathcal{M}} \cos^2 \theta$

Численное моделирование системы проводилось на языке программирования Python2.7 с использованием библиотек Numpy и Scipy. Программный код представлен в Приложении 1.

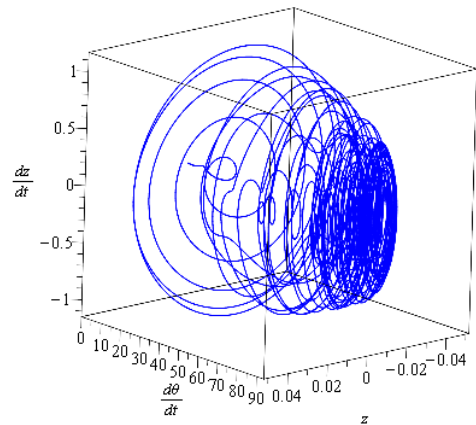
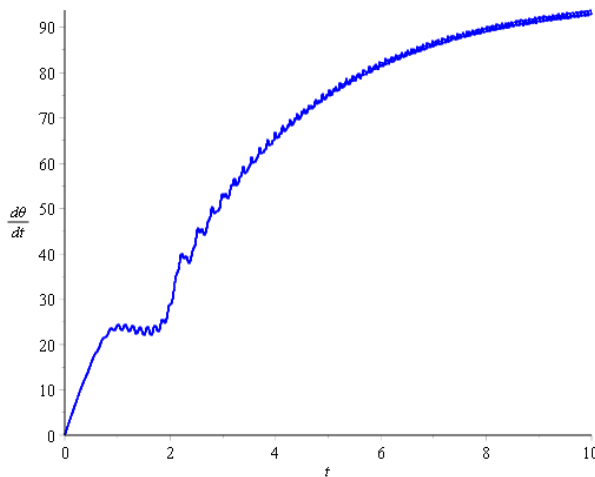


Рис. 2: Нормальный режим работы вибрационной установки. $u = 0.49$ Рис. 3: Нормальный режим работы вибрационной установки. $u = 0.49$

1.3. Результаты моделирования

При моделировании были взяты следующие параметры системы: $J = 0.014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $M = 10.5 \text{ кг}$, $m = 1.5 \text{ кг}$, $l = 0.04 \text{ м}$, $k_\theta = 0.005 \text{ м}$, $k = 5300 \text{ Н/м}$, $k_1 = 5 \text{ кг/с}$.

На рис. 2, рис. 3 приведены результаты моделирования системы (1) для нулевых начальных данных и для управляющего момента $u = 0.49$. Этот результат соответствует выходу двигателя на нормальный режим работы.

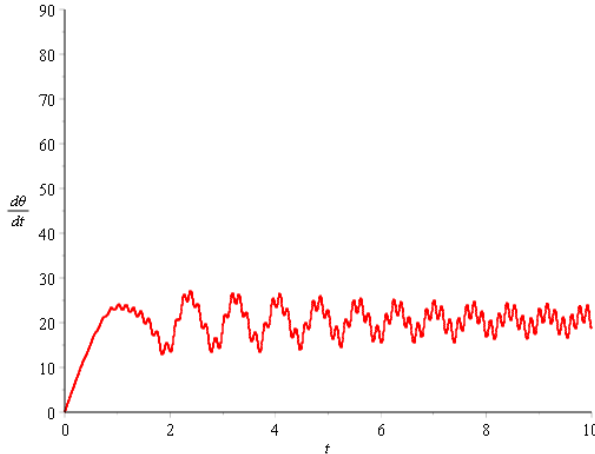


Рис. 4: Возникновение эффекта Зоммерфельда. $u = 0.48$

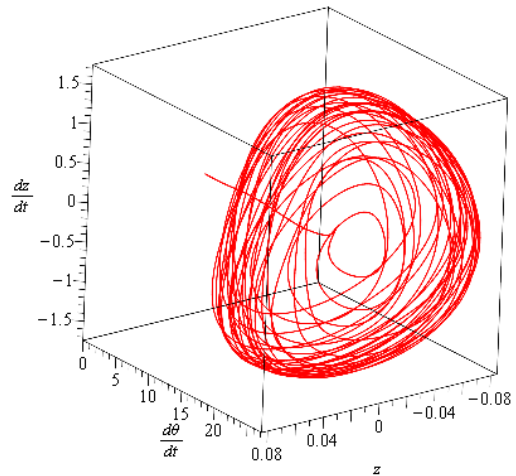


Рис. 5: Возникновение эффекта Зоммерфельда. $u = 0.48$

При меньшем параметре u в системе (1) происходит “захват” угловой скорости. На рис. 4, рис. 5 результаты моделирования системы (1) для нулевых начальных данных и для управляющего момента $u = 0.48$.

Однако, в системе (1) при управляющем моменте $u = 0.48$, наряду с эффектом Зоммерфельда, присутствует и нормальный режим работы. Это отображено на рис. 6, где застревание происходит при нулевых начальных данных, а при $(z(0), \theta(0), \dot{\theta}(0), \dot{z}(0)) = (0, 0, 15, 0)$ происходит выход на нормальный режим.

На рис. 7 приведена бифуркационная диаграмма зависимости угловой скорости от параметра управления u . Синие маркеры — выход двигателя на нормальный режим работы, красные маркеры — минимальные и максимальные значения установившихся колебаний при “захвате” угловой скорости. Как видно из диаграммы, начиная со значения $u = 0.12$, в системе проявляется эффект Зоммерфельда. Также заметно, что с увеличением параметра управления увеличивается амплитуда

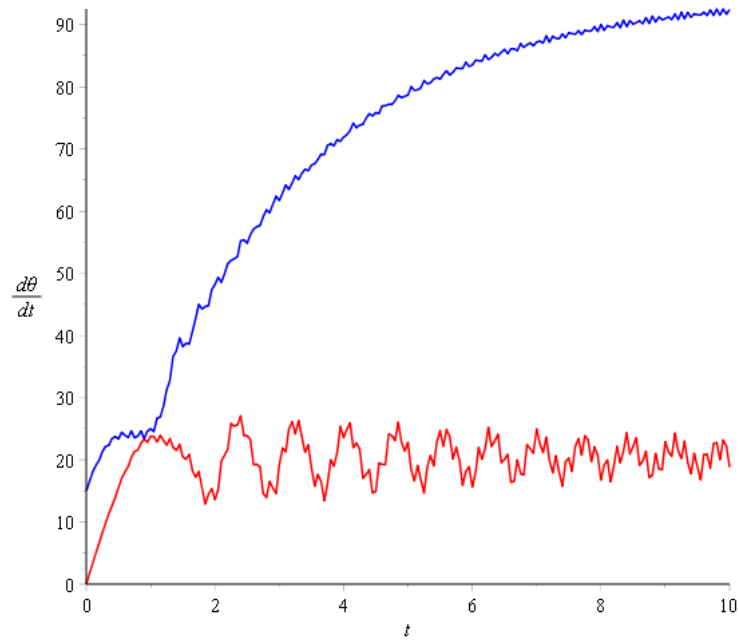


Рис. 6: Состояния системы при $u = 0.48$. Синяя траектория — выход на нормальный режим работы. Красная — “захват” угловой скорости.

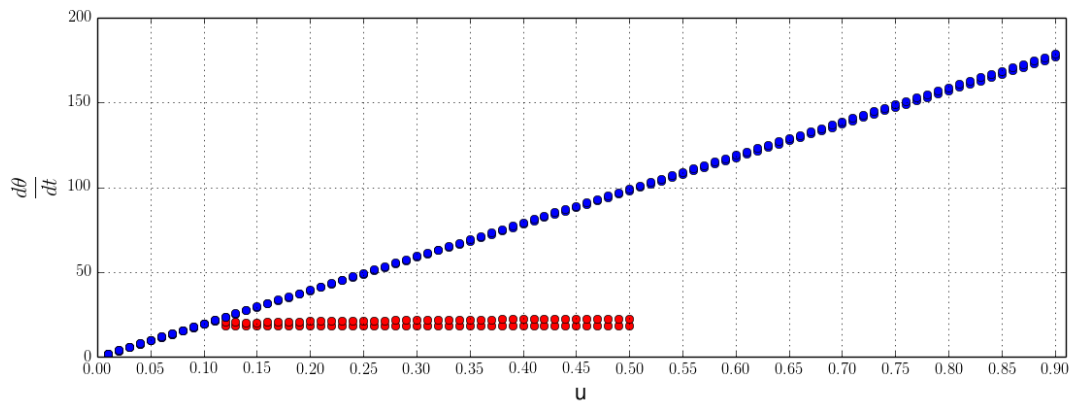


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма

колебания. При параметрах $u > 0.48$ эффект не наблюдается.

2. Вибрационная установка с двумя неуравновешенными роторами

2.1. Описание модели

Рассмотрим установку, описанную в [6].

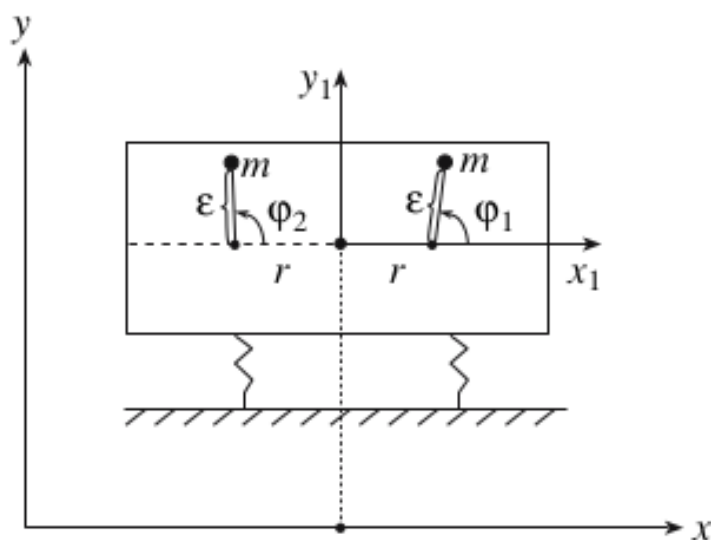


Рис. 8: Схема вибрационной установки с двумя неуравновешенными роторами.

На рис. 8 представлена вибрационная установка состоящая из двух роторов массы m , закрепленных на платформе, которая связана пружинами с неподвижным основанием. Роторы приводятся в движение электрическими моторами.

Опишем математическую модель этой системы.

Переменными системы являются x, y — смещение платформы относительно положения равновесия и φ_1, φ_2 — углы поворотов ротора.

Составим уравнения Лагранжа для вывода математической модели:

Обобщенными координатами $q_i, i = 1, \dots, 4$ являются $x, y, \varphi_1, \varphi_2$ соответственно.

Выпишем кинетическую энергию системы:

Для роторов:

$$T_{0,i} = \frac{J\dot{\varphi}_i^2}{2},$$

где J — момент инерции роторов, $i = 1, 2$

Для масс m :

$$T_{1,i} = \frac{m}{2} \left((\dot{x} - \varepsilon \dot{\varphi}_i \sin \varphi_i)^2 + (\dot{y} + \varepsilon \dot{\varphi}_i \cos \varphi_i)^2 \right),$$

где ε — эксцентриситет роторов, $i = 1, 2$

Для массы M : $T_2 = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

Общая кинетическая энергия системы примет вид:

$$T = T_{0,1} + T_{0,2} + T_{1,1} + T_{1,2} + T_2 = \left(\frac{M}{2} + m \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - m\varepsilon \dot{\varphi}_1 (\dot{x} \sin \varphi_1 - \dot{y} \cos \varphi_1) - m\varepsilon \dot{\varphi}_2 (\dot{x} \sin \varphi_2 - \dot{y} \cos \varphi_2)$$

Обобщенные силы имеют вид:

$$Q_x = -c_x x - k_x \dot{x},$$

$Q_y = -cy - k_y \dot{y} - (2m + M)g$, где c, c_x — жесткости пружин по вертикальной и горизонтальной осям, k_x, k_y — демпфирующие факторы.

$$Q_{\varphi_1} = M_0 - k_\varphi \dot{\varphi}_1 - m\varepsilon g \cos \varphi_1,$$

$Q_{\varphi_2} = -M_0 - k_\varphi \dot{\varphi}_2 - m\varepsilon g \cos \varphi_2$, где k_φ — коэффициент сопротивления, M_0 — характеристика двигателя.

В результате, приходим к следующей автономной системе, описывающее динамику вибрационной установки:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + k_\varphi \dot{\varphi}_1 + m\varepsilon g \cos \varphi_1 &= m\varepsilon(\ddot{x} \sin \varphi_1 - \ddot{y} \cos \varphi_1) + M_0, \\ J\ddot{\varphi}_2 + k_\varphi \dot{\varphi}_2 + m\varepsilon g \cos \varphi_2 &= m\varepsilon(\ddot{x} \sin \varphi_2 - \ddot{y} \cos \varphi_2) - M_0, \\ (2m + M)\ddot{x} + k_x \dot{x} + c_x x &= m\varepsilon(\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2), \\ (2m + M)\ddot{y} + k_y \dot{y} + cy + (2m + M)g &= m\varepsilon(-\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2) \end{aligned} \quad (3)$$

2.2. Моделирование системы

Для приведения системы (3) к нормальной форме, введем следующие обозначения: $\theta_1 = \dot{\varphi}_1, \theta_2 = \dot{\varphi}_2, p = \dot{x}, q = \dot{y}$.

После чего получаем следующую нормальную форму:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 &= \theta_1, \\
\dot{\varphi}_2 &= \theta_2, \\
\dot{x} &= p, \\
\dot{y} &= q, \\
\dot{\theta}_1 &= C(P \sin \varphi_1 - Q \cos \varphi_1) + B_1, \\
\dot{\theta}_2 &= C(P \sin \varphi_2 - Q \cos \varphi_2) + B_2, \\
\dot{p} &= P, \\
\dot{q} &= Q.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{\mathcal{M}_2 - \frac{(CEm\varepsilon)^2}{\mathcal{M}_1}} \left(\frac{-CEm\varepsilon}{\mathcal{M}_1} (D_1 m \varepsilon - k_x p - c_x x) + m \varepsilon D_2 - k_y q - c_y - \mathcal{M} g \right), \\
P &= \frac{1}{\mathcal{M}_1} (m \varepsilon (-CEQ + D_1) - k_x p - c_x x), \\
\mathcal{M} &= 2m + M, \\
C &= \frac{m \varepsilon}{J}, \\
\mathcal{M}_1 &= \mathcal{M} - m \varepsilon C (\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2), \\
\mathcal{M}_2 &= \mathcal{M} - m \varepsilon C (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2), \\
E &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_2, \\
A_1 &= k_\varphi \theta_1 + m \varepsilon g \cos \varphi_1, \\
A_2 &= k_\varphi \theta_2 + m \varepsilon g \cos \varphi_2, \\
B_1 &= \frac{-M_0 - A_1}{J}, \\
B_2 &= \frac{-M_0 - A_2}{J}, \\
D_1 &= B_1 \sin \varphi_1 + B_2 \sin \varphi_2 + \theta_1^2 \cos \varphi_1 + \theta_2^2 \cos \varphi_2, \\
D_2 &= B_1 \cos \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_2 + \theta_1^2 \sin \varphi_1 + \theta_2^2 \sin \varphi_2.
\end{aligned}$$

Численное моделирование системы также проводилось на языке программирования Python2.7 (Numpy, Scipy). Код представлен в Приложе-

нии 2.

2.3. Результаты моделирования

При моделировании были взяты следующие параметры системы: $J = 0.014$ кг·м², $M = 9$ кг, $m = 1.5$ кг, $\varepsilon = 0.04$ м, $k_\varphi = 0.01$ м, $c_x = 1300$ Н/м, $c = 5300$ Н/м, $k_x = k_y = 5$ кг/с.

На рис. 9 приведены результаты моделирования системы (3) для нулевых начальных данных и для управляющего момента $M_0 = 0.64$. Этот результат соответствует выходу двигателей на нормальный режим работы.

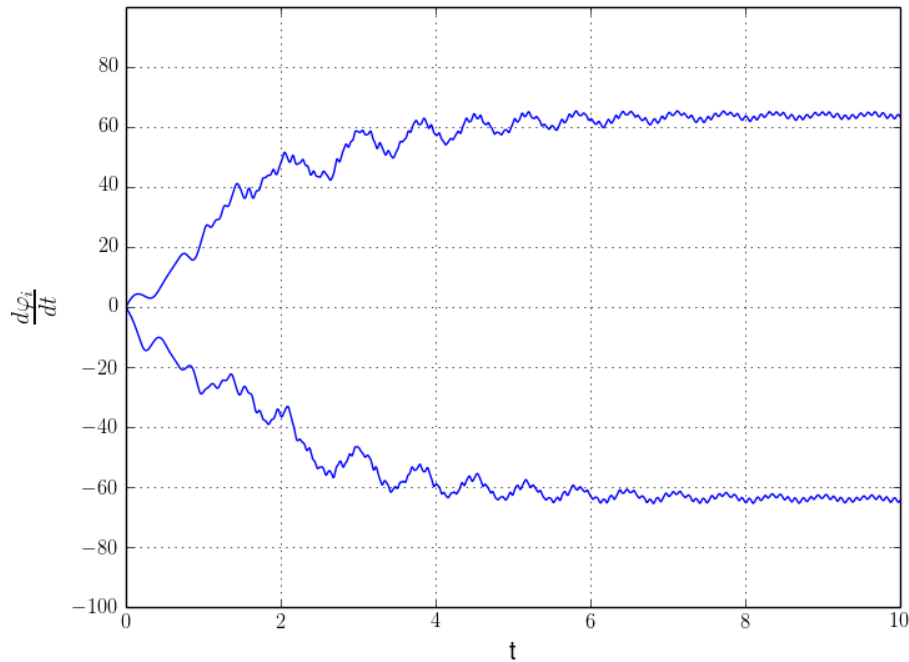


Рис. 9: Нормальный режим работы вибрационной установки. $M_0 = 0.64$

При меньшем параметре M_0 в системе (3) происходит “захват” угловой скорости. На рис. 10 результаты моделирования системы (3) для нулевых начальных данных и для управляющего момента $u = 0.63$.

В системе (3) при управляющем моменте $M_0 = 0.63$, наряду с эффектом Зоммерфельда, присутствует и нормальный режим работы. На

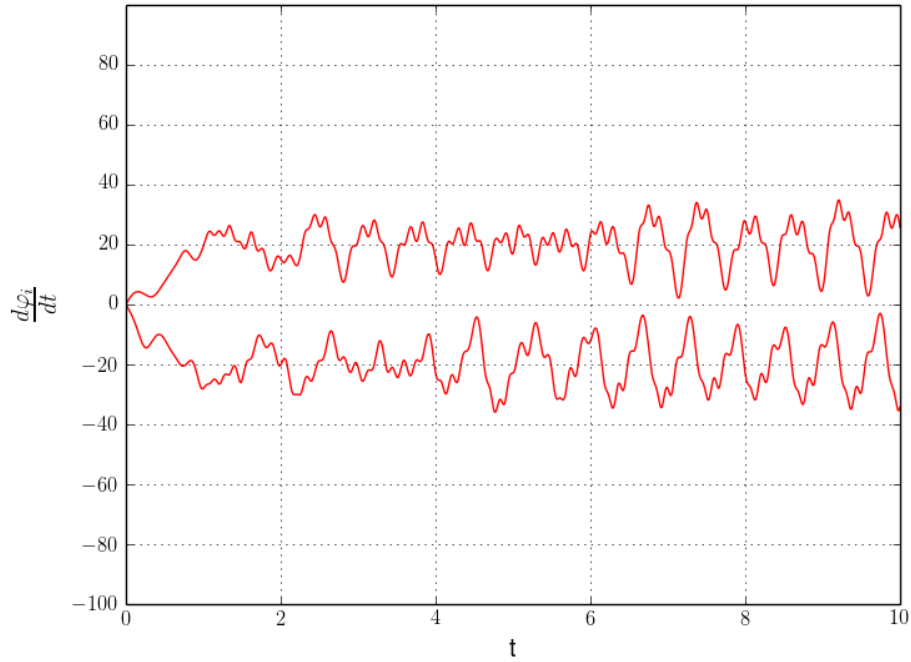


Рис. 10: Возникновение эффекта Зоммерфельда. $M_0 = 0.63$

рис. 11 показаны состояния системы при нулевых начальных данных (возникновение эффекта) и $(\varphi_1(0), \varphi_2(0), x(0), y(0), \dot{\varphi}_1(0), \dot{\varphi}_2(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0))^T = (0, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0)^T$ (преодоление застревания и выход на нормальный режим работы).

Построена бифуркационная диаграмма зависимости угловых скоростей роторов от параметра управления M_0 . Внешние маркеры — выход двигателей на нормальный режим работы, внутренние маркеры показывают максимальные и минимальные значения угловой скорости установившихся колебаний при возникновении эффекта Зоммерфельда. На диаграмме отчетливо видно, что начиная с параметра $M_0 = 0.17$, в системе (3) проявляется эффект Зоммерфельда и с увеличением параметра управления увеличиваются и амплитуды колебаний угловой скорости вращения. После преодоления параметра $M_0 = 0.63$, эффект перестает наблюдаться.

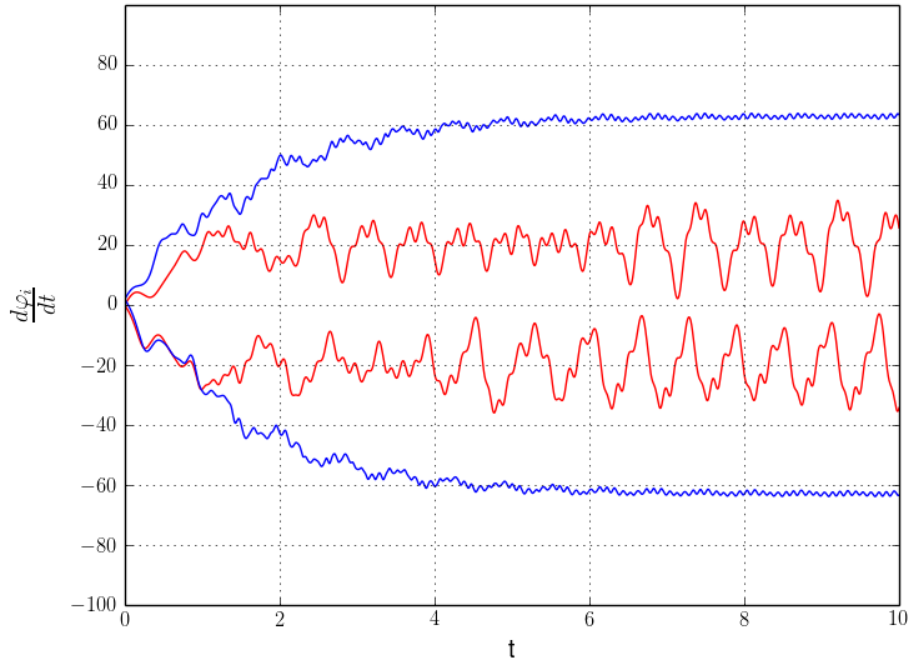


Рис. 11: Угловые скорости роторов при $M_0 = 0.63$ Синие траектории — выход на нормальный режим работы. Красные — “захват” угловой скорости.

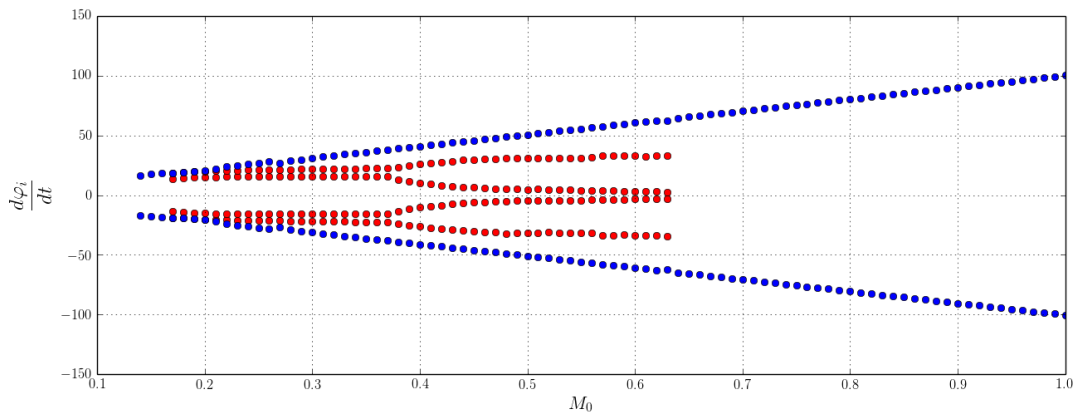


Рис. 12: Бифуркационная диаграмма

Заключение

В работе были промоделированы вибрационные установки с одним неуравновешенным ротором, и с двумя неуравновешенными роторами, описанные в [2, 6].

При рассмотрении вибрационной установки с одним неуравновешенным ротором была построена математическая модель и ее нормальная форма.

С помощью компьютерного моделирования было установлено, что эффект Зоммерфельда проявляется. Следует отметить, что для одного и того же параметра управления и различных начальных данных, в системе могут возникать различные режимы работы установки.

Дальнейшее исследование показало, что эффект проявляется для достаточно широкого интервала управляющего момента, получены концы этого интервала и построена бифуркационная диаграмма. Проведено уточнение границы параметра преодоления застревания частоты для параметра из [2].

Для моделирования системы был написан программный код на языке Python2.7.

Также была получена математическая модель для вибрационной установки с двумя неуравновешенными роторами и ее нормальная форма.

В ходе численного анализа установлено, что в системе, наряду с нормальным режимом работы, может возникать эффект Зоммерфельда. Выявлено что в системе имеются два режима работы установки для одного и того же параметра управления и различных начальных данных.

Дальнейшее моделирование с различными начальными данными показало, что эффект Зоммерфельда проявляется внутри интервала. Также для системы была построена бифуркационная диаграмма.

Реализован код численного моделирования системы на языке программирования Python2.7.

Список литературы

- [1] Eckert M., Märker K. Arnold Sommerfeld. — Springer, 2004. — Vol. 2. — P. 1919–1951.
- [2] Fradkov A., Tomchina O., Tomchin A. Controlled passage through resonance in mechanical systems // Journal of Sound and Vibration. — 2011. — Vol. 330. — P. 1065–1073.
- [3] Landau Rubin H., Páez Manuel J., Bordeianu Cristian C. Computational Physics: Problem Solving with Python. — John Wiley & Sons, 2015.
- [4] Leonov G.A. The passing through resonance of synchronous machine on elastic platform // Proceedings of the 6th EUROMECH nonlinear dynamics conference. — 2008. — P. 1–6.
- [5] Tomchin D. Switching speed-gradient control of passage through resonance for the two-rotor vibration unit. — 2011.
- [6] Tomchin D.A., Fradkov A.L. Control of passage through a resonance area during the start of a two-rotor vibration machine // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2007. — Vol. 36, no. 4. — P. 380–385.
- [7] Tomchina O.P., Tomchin D.A., Fradkov A.L. Speedgradient control of passing through resonance in one-and two-dimensional motion // 16th IFAC World Congress Autom. Control / Citeseer. — 2005.
- [8] Айзерман М. А. Классическая механика. — Изд-во Физико-математической литературы М., 2005.
- [9] Блехман И.И. Что может вибрация // О «вибрационной механике» и вибрационной технике. М. — 1988.
- [10] Блехман И.И. Вибрационная механика. — Наука. Физматлит М, 1994.

- [11] Гортинский В.В., Хвалов Б.Г. Об одном способе управления запуском колебательной системы с инерционным возбудителем. *Механика машин.* — 1981.
- [12] Гуськов А.М., Пановко Г.Я. Расчет периодических движений в задаче Зоммерфельда о взаимодействии механических систем с двигателем ограниченной мощности // *Вестник научно-технического развития.* — 2012. — Vol. 6.
- [13] Иванов-Смоленский А.В. *Электрические машины.* — Б. м., 2004.
- [14] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки.* — "Наука", Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1987.

Приложение

- В Приложении 1 представлен код для моделирования системы (1) вибрационной установки с одним неуравновешенным ротором.
- В Приложении 2 представлен код для моделирования системы (3) вибрационной установки с двумя неуравновешенными роторами.

2.4. Приложение 1

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2
3 # Импортирование библиотек Numpy, Scipy
4 import numpy as np
5 from scipy import integrate
6 from matplotlib.pyplot import *
7
8
9 # Базовые параметры системы
10 g0 = 0.49
11
12 J = 0.014
13 M = 10.5
14 m = 1.5
15 l = 0.04
16 k0 = 0.005
17 k = 5300
18 k1 = 5
19
20 # Правая часть системы
21 def f(t, x):
22     z = x[0]
23     theta = x[1]
24     eta = x[2]
25     y = x[3]
26
27     n = len(x)
28
29     D = (J - (m * l)**2 * np.cos(theta)**2 / (m + M))
30     K = -k0 * eta + m * l * (k1 * y + k * z + m * l * eta**2 * np.sin(theta)) * \
31         np.cos(theta) / (m + M)
32
33     dxdt = np.zeros((n, 1))
34
35     dxdt[0] = y
36     dxdt[1] = eta
37     dxdt[2] = (K + g0) / D
38     dxdt[3] = -(k1 * y + k * z + m * l * ((K + g0) / D * np.cos(theta) - eta**2 * \
39         np.sin(theta))) / (m + M);
40
41     return dxdt
42
43
44 # Интервал моделирования
45 t_start = 0
46 t_final = 100
```

```

47 delta_t = 0.001
48
49 num_steps = np.floor((t_final - t_start) / delta_t) + 1
50
51 r = integrate.ode(f).set_integrator('dopri5')
52
53
54 # Начальные данные
55 initial_values = (z0, theta0, eta0, y0) = (0, 0, 0, 0)
56 r.set_initial_value(initial_values, t_start)
57
58 t      = np.zeros(num_steps)
59 z      = np.zeros(num_steps)
60 theta  = np.zeros(num_steps)
61 eta    = np.zeros(num_steps)
62 y      = np.zeros(num_steps)
63
64 t[0]    = t_start
65 z[0], theta[0], eta[0], y[0] = initial_values
66
67 # Получение численного решения
68 cur_step = 1
69 while r.successful() and cur_step < num_steps:
70     r.integrate(r.t + delta_t)
71
72     t[cur_step] = r.t
73     z[cur_step], theta[cur_step], eta[cur_step], y[cur_step] = r.y
74
75     cur_step += 1
76
77 # Отрисовка результата
78 fig = figure()
79 ax1 = subplot(111)
80 ax1.plot(t, eta)
81 ax1.set_xlim(t_start, t_final)
82 ax1.set_xlabel('t')
83 ax1.set_ylabel('d theta / dt')
84 ax1.grid('on')
85
86 fig.savefig('result.png')

```

2.5. Приложение 2

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2
3 # Импортирование библиотек Numpy, Scipy
4 import numpy as np
5 from scipy import integrate
6 from matplotlib.pyplot import *
7
8
9 # Базовые параметры системы
10 g = 9.81
11
12 J = 0.014
13 M = 9
14 m = 1.5
15 eps = 0.04
16 k_phi = 0.01
17 c = 1300
18 c_x = 5300
19 k_x = 5
20 k_y = 5
21
22 M_0 = 0.63
23
24 # Правая часть системы
25 def f(t, X):
26     phi_1 = X[0]
27     phi_2 = X[1]
28     x = X[2]
29     y = X[3]
30     theta_1 = X[4]
31     theta_2 = X[5]
32     p = X[6]
33     q = X[7]
34
35     n = len(X)
36
37     dxdt = np.zeros((n, 1))
38
39     #####
40     MM = 2 * m + M
41
42     C = m * eps / J
43
44     MM_1 = MM - m * eps * C * (np.sin(phi_1)**2 + np.sin(phi_2)**2)
45
46     MM_2 = MM - m * eps * C * (np.cos(phi_1)**2 + np.cos(phi_2)**2)
```

```

47
48 E = np.sin(phi_1) * np.cos(phi_1) + np.sin(phi_2) * np.cos(phi_2)
49
50 A_1 = k_phi * theta_1 + m * eps * g * np.cos(phi_1)
51
52 A_2 = k_phi * theta_2 + m * eps * g * np.cos(phi_2)
53
54 B_1 = (-M_0 - A_1) / J
55
56 B_2 = (M_0 - A_2) / J
57
58 D_1 = B_1 * np.sin(phi_1) + B_2 * np.sin(phi_2) + theta_1**2 * np.cos(phi_1) \
59       + theta_2**2 * np.cos(phi_2)
60
61 D_2 = - B_1 * np.cos(phi_1) - B_2 * np.cos(phi_2) + theta_1**2 * np.sin(phi_1) \
62       + theta_2**2 * np.sin(phi_2)
63 #####
64
65 q_dot = 1.0 / (MM_2 - (C * E * m * eps)**2 / MM_1) * ((m * eps) / MM_1 * \
66              (D_1 * m * eps - k_x * p - c_x * x) - k_y * q - c * y - MM * g)
67 p_dot = 1.0 / MM_1 * (m * eps * (-C * E * (q_dot) + D_1) - k_x * p - c_x * x)
68
69 dxdt[0] = theta_1
70 dxdt[1] = theta_2
71 dxdt[2] = p
72 dxdt[3] = q
73 dxdt[4] = C * ((p_dot) * np.sin(phi_1) - (q_dot) * np.cos(phi_1)) + B_1
74 dxdt[5] = C * ((p_dot) * np.sin(phi_2) - (q_dot) * np.cos(phi_2)) + B_2
75 dxdt[6] = p_dot
76 dxdt[7] = q_dot
77
78
79
80
81 return dxdt
82
83
84 # Интервал моделирования
85 t_start = 0
86 t_final = 100
87 delta_t = 0.001
88
89 num_steps = np.floor((t_final - t_start) / delta_t) + 1
90
91 r = integrate.ode(f).set_integrator('dopri5')
92
93 t      = np.zeros(num_steps)
94

```



```

95 phi_1 = np.zeros(num_steps)
96 phi_2 = np.zeros(num_steps)
97 x     = np.zeros(num_steps)
98 y     = np.zeros(num_steps)
99 theta_1 = np.zeros(num_steps)
100 theta_2 = np.zeros(num_steps)
101 p      = np.zeros(num_steps)
102 q      = np.zeros(num_steps)
103
104
105 # Начальные данные
106 initial_values = (phi_1_0, phi_2_0, x_0, y_0, theta_1_0, theta_2_0, p_0, q_0) \
107                 = (0, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0)
108
109 r.set_initial_value(initial_values, t_start)
110
111 t[0] = t_start
112 phi_1[0], phi_2[0], x[0], y[0], theta_1[0], theta_2[0], p[0], q[0] = initial_values
113
114
115 # Получение численного решения
116 k = 1
117 while r.successful() and k < num_steps:
118     r.integrate(r.t + delta_t)
119
120     t[k] = r.t
121     phi_1[k], phi_2[k], x[k], y[k], theta_1[k], theta_2[k], p[k], q[k] = r.y
122
123     k += 1
124
125
126 # Отрисовка результата
127 fig = figure()
128 ax1 = subplot(111)
129 ax1.plot(t, theta_1)
130 ax1.plot(t, theta_2)
131 ax1.set_xlim(t_start, t_final)
132 ax1.set_yticks(np.arange(-100,100,step=20))
133 ax1.set_xlabel('t', fontsize=14)
134 ax1.set_ylabel(r' $\frac{d\varphi_{i}}{dt}$ ', fontsize=20)
135 ax1.grid('on')
136
137 fig.savefig('figure-2.png')

```
