САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Белоусова Мария Владимировна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Анализ функционирования региональной экономики на основе модели межотраслевого баланса

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Смирнов Н. В.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение

Одной из существенных задач современной науки является совершенствование математических моделей, способных определять структуру национального хозяйства и прогнозировать основные макроэкономические тенденции. Такие модели должны обеспечивать планирование и регулирование экономических показателей. Однако, со временем экономическая система становится сложнее, что связано как с возрастанием разновидностей товаров и услуг, так и с постоянным изменением самой структуры (эволюция технологии производства, трансформация производственных связей и общественных отношений). В связи с этим возникают трудности с выбором адекватных моделей и инструментов для анализа и описания экономических процессов.

Наиболее известной является модель межотраслевого баланса (МОБ), описанная В. В. Леонтьевым [1]. Она представляет собой систему взаимосвязей между различными секторами экономики либо экономическими системами. За ее разрабку Василий Леонтьев получил Нобелевскую премию в 1973 году. Модель отображает межотраслевые отношения, в которых произведенный товар или услуга одной индустрии является продуктом для другой. Конечно, сбалансированность в процессе хозяйственной деятельности нечасто осуществляется, так как неизбежно влияние различных непредсказуемых факторов (политических, стихийных, экологических и т.д.). Тем не менее, балансовый метод оказывается довольно эффективным.

Модель «затраты-выпуск» примечательна еще и тем, что почти целиком описывает процесс воспроизводства. По этой причине данная модель представляет особый интерес для анализа конечного потребления, выпусков, промежуточного потребления, экспорта и импорта, добавленной стоимости, национального дохода, различных видов налогов и т.д.

Для использования модели межотраслевого баланса создаются специальные таблицы. Они составляются для многих стран мира, так как они предоставляют довольно подробное отображение структуры промышленной деятельности. Также таблицы «затраты-выпуск» дают возможность оценить последствия от изменений в определенных отраслях экономики, влияния роста или падения цен на различные товары. Кроме того, важным достоинством данных таблиц является то, что они позволяют выделить основополагающие экономические отрасли.

Также эта модель - одна из тех, что позволяет находить специфические состояния экономической системы (например, состояния равновесия).

В данной работе основное внимание уделено динамической модели межотраслевого баланса. Она обобщает статическую модель и строится на тех же предположениях.

В анализе, проведенном в исследовании, используются таблицы «затраты-выпуск» для экономики Германии, являющейся одной из самых больших экономик мира и крупнейшей в Европе. Данный выбор обусловлен тем, что экономическая деятельность этой страны примечательна тем, что обладает высокоэффективными производствами разных направлений, основными из которых являются машиностроение, химическая промышленность, электротехническая промышленность и многие другие.

Обзор литературы

Модель Леонтьева была изложена во многих источниках, представляется рациональным использовать информацию из первоисточника [1].

Было разработано несколько переходов к динамической модели. Один из них осуществлен Н. И. Ведутой [2] методами экономической кибернетики. Переход к разностной и дифференциальной системам, суть которого заключается в использовании межотраслевых потоков капитальных вложений, описан в монографии [3]. Алгоритм построения расширенной модели, когда общественное потребление рассматривается как фазовая переменная, предложен в [4, 5].

В настоящее время существует значительное количество ресурсов, публикующих информацию по экономике отдельных регионов в виде ежегодных таблиц «затраты-выпуск». Например, «Федеральная служба государственной статистики» (Росстат) [6], статистическая служба Евросоюза (Евростат) [7]. Особый интерес представляет «Мировая база данных «затраты-выпуск» (World Input-Output Database, WIOD) [8], которая предоставляет доступ как к всемирным таблицам, так и к таблицам по отдельным странам в различных модификациях, например, «National Input-Output Tables» (NIOT). Этот ресурс является основным источником статистической информации в данной дипломной работе.

Постановка задачи

Процесс исследования можно условно разделить на решение двух задач.

Первой из них является конкретизация основных балансовых соотношений и построение статической модели межотраслевого баланса для таблиц NIOT экономики Германии для каждого года с 1995 по 2011. Иными словами, составление матрицы относительных цен R_k [4], вектора выпуска I_k и вектора потребления Y_k, таких что:

$$I_k = R_k I_k + Y_k, \quad k = \overline{1995, 2011},$$

и последующее получение системы

$$\widetilde{I}_k = \widetilde{R}_k \widetilde{I}_k$$

путем добавления ВВП в число фазовых переменных. Соответственно $\widetilde{R}_k$ — расширенная матрица модели.

Второй (и главной) задачей работы является получение динамических модели МОБ в виде системы дифференциальных (разностных) уравнений относительно выпусков и ВВП [4, 5]

$$\dot{I}(t) = DI(t) \quad (I_{k+1} = D_1 I_k)$$

с целью получения прогноза макроэкономических тенденций на будущий год. За счет варьирования таких параметров, как фондоемкости отраслей, входящих в матрицу D (D_1), необходимо выбрать наилучшую модель с точки зрения функционала

$$\min_D ||I(1) - \widehat{I}(1)|| \quad (\min_{D_1} ||I_1 - \widehat{I}_1||),$$

где $I(1)$ — реальный будущий выпуск, $\widehat{I}(1)$ — прогнозный выпуск, $\widehat{I}(1) = e^D I(0)$ $(\widehat{I}_1 = D_1 I_0)$.

На последнем этапе провести анализ региональной экономики на основе построенной модели.

Глава 1. Построение статической модели

В данной главе будет описана структура базы данных, на основе статистических данных которой, впоследствии проводится исследование. Также будут охарактеризованы используемые таблицы, а затем произведен вывод основных балансовых соотношений для статической модели «затраты-выпуск».

§ 1.1. База данных WIOD

Ввиду ускоряющейся глобализации происходит переплетение экономик различных стран, перераспределение доходов между ними. С одной стороны, этот процесс способствует возрастанию числа рабочих мест и экономическому росту. С другой стороны, изменение структуры международной торговли может вызвать проблемы в распределении ресурсов. Для проведения качественного анализа этих процессов, необходимо работать с большим объемом статистических данных, обновляемых каждый год. Именно таким источником информации является «Мировая база данных «затраты-выпуск»» (World Input-Output Database, WIOD) [8].

Данный ресурс был впервые запущен в апреле 2012 года и финансируется Европейской комиссией. Он создавался в сотрудничестве с учеными из Гронингенского университета, Нидерланды.

WIOD состоит из мировых таблиц различных модификаций. Эти таблицы содержатся в четырех крупных частях данного ресурса:

- мировые таблицы (World Tables),
- национальные таблицы (National Tables),
- социально-экономические счета (Socio-Economic Accounts),
- экологические счета (Environmental Accounts).

Первый раздел «World Tables» включает в себя:

1. Международные таблицы ресурсов и использования товаров и услуг с потреблением внутренних и импортных товаров;
2. Мировые таблицы «затраты-выпуск»;
3. Межрегиональные таблицы «затраты-выпуск» для шести крупных регионов.

Особенностью мировых таблиц является тот факт, что по ним можно узнать из какого зарубежного промышленного сектора производится импорт для какой-либо страны, а также, как экспортная продукция данной страны используется в других странах.

Далее идет совокупность таблиц «National Tables», в которую входят:

1. Национальные таблицы использования товаров и услуг;
2. Национальные таблицы «затраты-выпуск».

Национальные таблицы позволяют провести анализ экономики отдельной страны в период с 1995 по 2011 годы. Они были построены для экономик 27 стран Евросоюза и 13 экономик других стран, в сумме производящих около 90% мировой продукции.

Следующий раздел «Socio-Economic Accounts» предоставляет детальные данные об использовании капитала и труда:

1. Промышленный выпуск, добавленная стоимость;
2. Основной капитал, инвестиции;
3. Заработная плата и занятость людей трех видов квалификации: низкой, средней и высокой.

Последней составляющей базы WIOD является «Environmental Accounts». Здесь содержатся такие разновидности информации:

1. Объем используемой секторами энергии;
2. Выбросы углекислого газа по секторам экономики;

3. Выбросы в атмосферу;

4. Использование земли и других природных материалов.

В данном исследовании основным источником статистической информации являются именно национальные таблицы — National Input-output tables (NIOT), а вспомогательным — таблицы из раздела «Socio-Economic Accounts». Рассмотрим структуру NIOT подробнее.

§ 1.2. Описание NIOT

В ежегодных таблицах NIOT представлены взаимоотношения 35-ти экономических секторов, все значения представлены в текущих ценах в американских долларах (рис. 1).

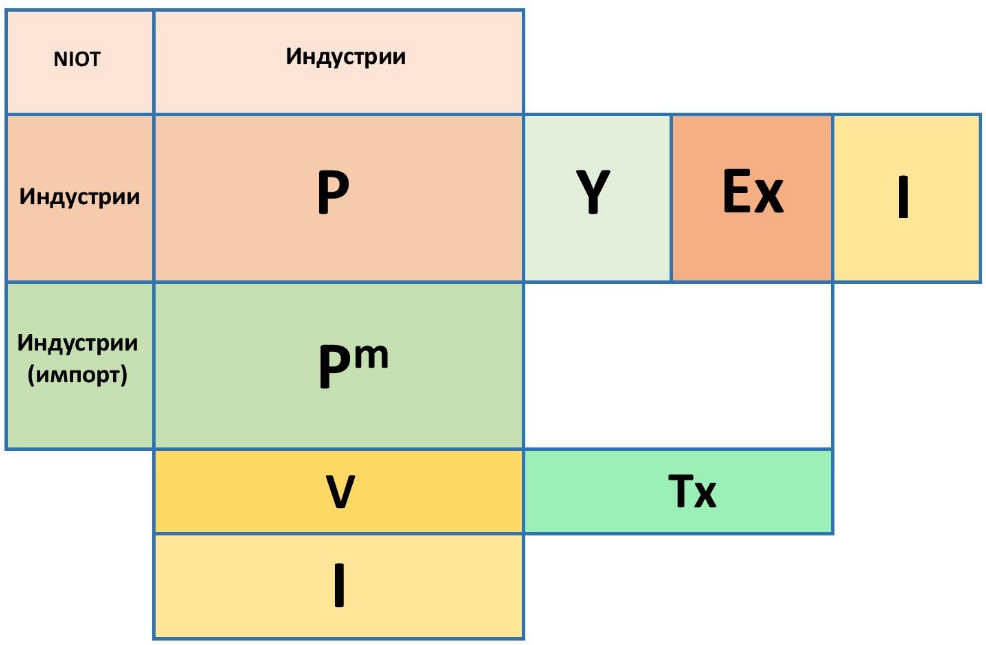

Рис. 1. Схематическое представление таблицы NIOT

Таблицы «затраты-выпуск» являются симметричными в том смысле, что в строках и столбцах представляются одинаковые названия экономических отраслей, только секторы, представленные в строках — производители, а в столбцах — потребители продукции других секторов.

Элемент p_{ij} матрицы P размерности 35×35 представляет собой промежуточное потребление j-ым сектором услуг и товаров i-го сектора и задаются соотношением $p_{ij} = P_i a_{ij} In_j$, где P_i — цена потребленной продукции, a_{ij} — технологический коэффициент, а In_j — объем годового выпуска j-ого сектора в натуральном выражении.

Матрица $P^m = \{p^m_{ij}\}^{35}_{i,j=1}$ показывает промежуточное потребление импортных товаров. Вектор-строка $V = (V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_{35})$ характеризует добавленную стоимость, полученную каждым сектором. Вектор-столбец $Y = (Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_{35})^T$ показывает конечное потребление продукции индустрий, он также включает в себя валовое накопление основного капитала Cf и изменения товарно-материальных запасов. Далее идет столбец экспорта $Ex = (Ex_1,\ Ex_2,\ \ldots,\ Ex_{35})^T$. Через Tx обозначен налог на потребление (сумма всех налогов, полученных не из добавленной стоимости секторов). Элемент I_j 35-мерного вектора I обозначает выпуск продукции j-го сектора.

§ 1.3. Вывод статической модели

Согласно таблицам NIOT, выпуск продукции j-го сектора I_j может быть вычислен как

$$I_j = \sum_{i=1}^{n} (p_{ij} + p^m_{ij}) + V_j, \quad \forall j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

а ежегодные продажи i-ой отрасли

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} + Y_i + Ex_i, \quad \forall i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Исходя из того, что в рассматриваемых таблицах выпуски совпадают с продажами $I_i = X_i$ (ситуация динамического равновесия), просуммировав данные равенства по $i = \overline{1, n}$, из (1) и (2) получим

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} (p_{ij} + p^m_{ij}) + V_j \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + Y_i + Ex_i \Big).$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n} V_j = \sum_{i=1}^{n} (Y_i + Ex_i - Im_i),$$

где $Im_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^m$.

Далее введем понятие ВВП:

$$GDP = \sum_{j=1}^{n} V_j + Tx = \sum_{i=1}^{n} (Y_i + Ex_i - Im_i) + Tx. \tag{3}$$

Введём теперь новые обозначения для дальнейшего вывода модели:

$$\widetilde{I}_i = I_i - Im_i,$$

$$\widetilde{Y}_i = Y_i + Ex_i - Im_i,$$

и перейдем к относительным ценам [5, 4]

$$r_{ij} = \frac{p_{ij}}{\widetilde{I}_j}.$$

Тогда из (2) получим формулу для вычисления выпусков:

$$\widetilde{I}_i = I_i - Im_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} + Y_i + Ex_i - Im_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\widetilde{I}_j + \widetilde{Y}_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

или в матричном виде

$$\widetilde{I} = R\widetilde{I} + \widetilde{Y}, \tag{5}$$

где $\widetilde{I} = (\widetilde{I}_1,\ \widetilde{I}_2,\ \ldots,\ \widetilde{I}_n)^T, \quad \widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_1,\ \widetilde{Y}_2,\ \ldots,\ \widetilde{Y}_n)^T,$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь модель, в которой ВВП является $(n+1)$-ым компонентом фазового вектора:

$$\widetilde{I} = (I_1 - Im_1,\ I_2 - Im_2,\ \ldots,\ I_n - Im_n,\ GDP)^T, \quad \widetilde{I}_{n+1} = GDP.$$

Будем использовать ряд относительных величин [5, 4]

$$\widetilde{Y}r_i = \frac{\widetilde{Y}_i}{\widetilde{I}_{n+1}}, i = \overline{1, n},$$

$$Vr_j = \frac{V_j}{\widetilde{I}_j}, i = \overline{1, n},$$
$$Txr = \frac{Tx}{\widetilde{I}_{n+1}}.$$

Тогда (4) примет вид:

$$\widetilde{I}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\widetilde{I}_j + \widetilde{Y}r_i\widetilde{I}_{n+1}, \quad i = \overline{1, n},$$

Таким образом, имеем n уравнений с $n+1$ неизвестной. Последнее уравнение получим из формулы (3):

$$\widetilde{I}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} V_j + Tx = \sum_{j=1}^{n} Vr_j\widetilde{I}_j + Txr\widetilde{I}_{n+1}.$$

В матричном виде полученная система из $n+1$ уравнения относительно n выпусков и ВВП будет выглядеть как

$$\widetilde{I} = \widetilde{R}\widetilde{I}, \quad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} R & \widetilde{Y}r \\ Vr & Txr \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $Vr = (Vr_1,\ Vr_2,\ \ldots,\ Vr_n)$, $Yr = (\widetilde{Y}r_1,\ \widetilde{Y}r_2,\ \ldots,\ \widetilde{Y}r_n)^T$.

Модель (6), включающая ВВП как элемент фазового вектора, является аналогом классической модели (5), не содержащей в себе ВВП.

Матрица $\widetilde{R}$ обладает нижеперечисленными свойствами:

1. Она является неотрицательной: $\widetilde{r}_{ij} \geqslant 0,\ i = \overline{1, n+1},\ j = \overline{1, n+1}$;
2. Суммы по столбцам дают единицу: $\sum_{i=1}^{n+1} \widetilde{r}_{ij} = 1,\ j = \overline{1, n+1}$;
3. Всегда существует собственное число $\lambda = 1$. Оно же является максимальным по модулю.

Для удобства в дальнейшем переобозначим $I = \widetilde{I}$.

§ 1.4. Агрегирование и редуцирование

В данном параграфе приведены два подхода к уменьшению размерности системы (6) [1]. Их использование является оправданным и уместным в зависимости от цели исследования.

Агрегирование. При анализе макроэкономических трендов может быть нецелесообразно оперировать со значениями конкретных отраслей. Поэтому логично объединять некоторые секторы в обобщенные агрегированные отрасли.

Рассмотрим построение агрегированной системы на примере с двумя секторами:

$$I^a = \left(\sum_{i=1}^{s} I_i, \ \sum_{i=s+1}^{n+1} I_i \right)^T.$$

Из (6) получим

$$\begin{cases} I_1^a = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{r}_{ij} I_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \widetilde{r}_{ij} I_j}{I_1^a} I_1^a + \dfrac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=s+1}^{n+1} \widetilde{r}_{ij} I_j}{I_2^a} I_2^a, \\ I_2^a = \sum_{i=s+1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{r}_{ij} I_j = \dfrac{\sum_{i=s+1}^{n+1} \sum_{j=1}^{s} \widetilde{r}_{ij} I_j}{I_1^a} I_1^a + \dfrac{\sum_{i=s+1}^{n+1} \sum_{j=s+1}^{n+1} \widetilde{r}_{ij} I_j}{I_2^a} I_2^a. \end{cases}$$

В матричном виде

$$I^a = \widetilde{R}^a I^a, \quad \widetilde{R}^a = \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \widetilde{r}_{ij} I_j}{I_1^a} & \dfrac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=s+1}^{n+1} \widetilde{r}_{ij} I_j}{I_2^a} \\ \dfrac{\sum_{i=s+1}^{n+1} \sum_{j=1}^{s} \widetilde{r}_{ij} I_j}{I_1^a} & \dfrac{\sum_{i=s+1}^{n+1} \sum_{j=s+1}^{n+1} \widetilde{r}_{ij} I_j}{I_2^a} \end{pmatrix}.$$

Редуцирование. Предположим теперь, что интерес представляют только n_1 компонент вектора I, объединим их в I^{r_1}, тогда I^{r_2} — n_2-мерный вектор выпусков оставшихся секторов ($n_1 + n_2 = n + 1$). Систему (6) можно переписать в виде

$$\begin{cases} I^{r_1} = \widetilde{R}_{11} I^{r_1} + \widetilde{R}_{12} I^{r_2}, \\ I^{r_1} = \widetilde{R}_{21} I^{r_1} + \widetilde{R}_{22} I^{r_2}. \end{cases}$$

Если матрица $(E_{n_2} - \widetilde{R}_{22})$, где E_{n_2} — единичная матрица размерности $n_2 \times n_2$, является невырожденной, из второго уравнения сможем найти $I^{r_2} = (E - \widetilde{R}_{22})^{-1} \widetilde{R}_{21} I^{r_1}$. Подставив в первое уравнение, получим замкнутую относительно выпусков I^{r_1} систему

$$I^{r_1} = \widetilde{R}^r I^{r_1}, \quad \widetilde{R}^r = \widetilde{R}_{11} + \widetilde{R}_{12}(E - \widetilde{R}_{22})^{-1} \widetilde{R}_{21}.$$

Пример. Рассмотрим систему $I = \widetilde{R}I$, построенную по таблице NIOT для Германии за 2000 год.

Построим агрегированную систему, объединив в первую отрасль все секторы с 1 до 35 (всё производство): $I_1^a = \sum_{i=1}^{35} I_i$, во второй отрасли останется сфера потребления $I_2^a = I_{36}$. Тогда получим

$$I^a = \begin{pmatrix} 2,876 \cdot 10^{12} \\ 1,830 \cdot 10^{12} \end{pmatrix}, \widetilde{R}^a = \begin{pmatrix} 0,4146 & 0,9200 \\ 0,5854 & 0,0800 \end{pmatrix}.$$

Проиллюстрируем результат редуцирования для той же системы, оставив отрасль «Renting of M&Eq and Other Business Activities» и сферу потребления:

$$I^{r_1} = \begin{pmatrix} 2,863 \cdot 10^{11} \\ 1,830 \cdot 10^{12} \end{pmatrix}, \widetilde{R}^r = \begin{pmatrix} 0,1798 & 0,1283 \\ 0,8202 & 0,8717 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\widetilde{R}^a$ и $\widetilde{R}^r$ обладают свойствами матрицы $\widetilde{R}$, описанными в предыдущем параграфе.

Глава 2. Динамическая модель

На основе модели межотраслевого баланса, описанной в главе 1, может быть осуществлен переход к динамической модели. Её рассмотрение выглядит целесообразным ввиду того, что экономика представляет собой динамическую структуру, показатели которой прямым образом зависят от действий в прошлом. Кроме того, использование такой модели позволяет прогнозировать развитие экономики, что несомненно является актуальной задачей.

В § 2.1–2.2 представлены два подхода к построению динамической модели. В первом подходе изложен классический подход к построению разностной и дифференциальной системы, во втором — метод построения расширенной динамической модели.

В зависимости от задачи и методов её решения удобнее анализировать дифференциальную, либо разностную систему. Они являются в некотором смысле эквивалентными, от одной можно переходить к другой и обратно. В § 2.3 описан метод преобразования дифференциальной системы в разностную.

§ 2.1. Классическая динамическая модель

Данная модель основывается на статической модели (5), рассмотренной в прошлой главе:

$$I = R\widetilde{I} + Y,$$

Ключевой идеей является выделение коэффициентов капиталовложений i-го сектора в j-ую отрасль $\Delta\Phi_{ij}$ из вектора потребления [3]:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_{ij} + Y_i'.$$

Параметр $\Delta\Phi_{ij}$ характеризует количество продукции i-ой отрасли, направленной в j-ую в качестве производственных капитальных вложений в её основные фонды за рассматриваемый интервал времени.

Далее предполагается, что капиталовложения в j-ую отрасль пропорциональны приросту выпуска продукции предыдущего периода $k-1$ до текущего периода k, $\Delta I_j = I_{j,k} - I_{j,k-1}$, с коэффициентом пропорциональности fe_{ij}, называемым коэффициентом приростной фондоемкости:

$$\Delta\Phi_{ij} = fe_{ij}\Delta I_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Подставив это соотношение в (4), получим

$$I_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} I_j + \sum_{j=1}^{n} fe_{ij}\Delta I_j + Y_i'.$$

Иным образом это выражение можно переписать так:

$$I_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} I_{j,k} + \sum_{j=1}^{n} fe_{ij}(I_{j,k} - I_{j,k-1}) + Y_{i,k}'. \qquad (7)$$

Введя обозначение $F = \{fe\}_{i,j=1}^{n}$, можно переписать систему (7) в матричном виде:

$$I_k = RI_k + F(I_k - I_{k-1}) + Y_k'. \qquad (8)$$

Система (8) — динамическая модель МОБ в виде разностных уравнений. Заменяя дискретные моменты времени k на непрерывное время t, а величину δI_k на производную $\dot{I}(t)$, получим динамическую систему МОБ в виде дифференциальных уравнений:

$$I(t) = RI(t) + F\dot{I}(t) + Y'(t), \tag{9}$$

или

$$F\dot{I}(t) = (E - RI)(t) - Y'(t).$$

§ 2.2. Расширенная динамическая модель МОБ

Согласно [4, 5], предположим, что изменение объема выпуска i-го сектора $\dot{I}_i(t)$ пропорционально инвестициям в эту отрасль $Cp_i(t)$, роль коэффициента пропорциональности играет фондоемкость сектора $Fe_i(t)$:

$$Fe_i(t)\dot{I}_i(t) = Cp_i(t), \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Будем считать, что на инвестиции идет вся добавленная стоимость отрасли, за исключением оплаты труда работников, т.е. $Cp_i = V_i - W_i$, где W_i — фонды зарплаты, или что то же $Cp_i = (Vr_i - Wr_i)I_i$, $W_i = W_i I_i$. Пусть для сферы потребления $Cp_{n+1} = (Txr + Cfr)I_{n+1}$, где Txr и Cfr являются нормированными по ВВП значениями налога на потребление и валового накопления основного капитала соответственно.

Тогда с учетом модели (6) получим систему

$$\dot{I}(t) = DI(t), \quad D = M\widetilde{R}, \tag{10}$$

где матрица

$$M = \begin{pmatrix} \frac{Vr_1 - Wr_1}{Fe_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{Vr_n - Wr_n}{Fe_n} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{Txr + Cfr}{Fe_{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Ввиду того, что таблицы NIOT ежегодно пересчитываются, представляется целесообразным ежегодно пересчитывать и матрицу D. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dot{I}(t) = D_k I(t), \quad t = [k, k+1), \\ I(k) = I_k, \\ k = \overline{1995, 2011}, \end{cases} \tag{11}$$

где матрица D_k и вектор I_k представляют собой матрицу D и вектор I, построенные по таблицам за k-ый год.

§ 2.3. Переход от разностной системы к дифференциальной

В § 2.1 был совершен переход от дискретной модели (8) к непрерывной системе (9). С математической точки зрения, данный переход является не совсем корректным. Изложим в данном параграфе метод перехода от разностной линейной системы уравнений к дифференциальной системе, при котором решения обоих систем будут совпадать при $t = k$ [10, 11].

Рассмотрим разностное уравнение:

$$x_{k+1} = Ax_k + b. \tag{12}$$

Если матрица A не имеет собственных чисел, абсолютное значение которых равняется единице, $|\lambda_j| \neq 1,\ j = \overline{1, n}$, то его решение в общем виде:

$$x_k = A^k x_0 + (A - E)^{-1}(A^k - E)b, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Теперь введем в рассмотрение непрерывную систему уравнений:

$$\dot{z}(t) = Cz(t) + d. \tag{13}$$

При невырожденной матрице C её решением будет:

$$z(t) = e^{Ct} z_0 + C^{-1}(e^{Ct} - E)d.$$

В случае одинаковых начальных данных $x_0 = z_0$, решения систем (12) и (13) будут совпадать при целочисленных значениях аргумента, если их коэффициенты связаны соотношениями:

1) $e^C = A$,

2) $C^{-1}d = (A - E)^{-1}b$,

откуда

1) $C = \ln A$,

2) $d = (A - E)^{-1} \ln A \cdot b$.

Глава 3. Прогноз основных экономических показателей

В данной главе вычисляется прогноз выпусков секторов и ВВП на следующий год на основе динамической модели (11). Особое внимание уделено нахождению фондоемкостей $Fe_i(t),\ i = \overline{1, n+1}$. Помимо способа вычисления этого параметра по определению, рассмотрен ряд регрессионных моделей. Высчитываются оценки отклонения прогноза.

§ 3.1. Регрессионный подход к нахождению фондоемкостей

В расширенной модели МОБ, описанной в § 2.2, фондоемкости являются коэффициентами пропорциональности между ростом выпуска и объемом инвестиций и по определению равны [5]

$$Fe_i(k) = \frac{Cp_i(k)}{I_i(k) - I_i(k-1)}, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad k = \overline{1995, 2011}. \tag{14}$$

Однако в данной работе с целью достижения лучшей точности прогноза рассмотрим регрессионные способы определения этих параметров. Для поиска взаимосвязей с различными показателями и составления уравнений зависимости от них, необходимо иметь значения фондоемкостей за прошлые временные отрезки. Поэтому в следующем параграфе приведен способ определения их значений в прошлом по историческим данным.

§ 3.2. Идентификация фондоемкостей

Согласно (11) с учетом формулы Коши, прогноз расширенного вектора выпусков на год вперед может быть вычислен как

$$\widehat{I}_{k+1} = e^{D_k} I_k, \quad k = \overline{1995, 2011},$$

здесь $D_k,\ I_k$ определены по информации из таблицы NIOT за k-ый год. В идеальном случае данный прогноз должен совпадать со значением I_{k+1}, полученным из таблиц за следующий год. Поэтому на исторических данных может быть поставлена задача определения матрицы D_k таким образом, чтобы $\widehat{I}_{k+1}$ и I_{k+1} совпадали, либо были в какой-то мере близки. В данной работе варьирование D_k осуществляется за счет вектора фондоемкостей. Тогда получаем задачу из $(n+1)$-го уравнения с $(n+1)$-ой неизвестной для каждого доступного года:

$$I_{k+1} = e^{D(Fe_1^k,\dots,Fe_{n+1}^k)} I_k, \quad k = \overline{1995, 2010}. \tag{15}$$

Эта система была решена в среде Matlab с использованием функции fsolve. Таким образом, был найден временной многомерный ряд $\{Fe^k\}_{k=1995}^{2010}$, который в дальнейшем используется в качестве учебной выборки для составления регрессионных моделей.

В таблице 2 приведены идентифицированные значения фондоемкостей для секторов № 3 «Food, Beverages and Tobacco», № 11 «Other Non-Metallic Mineral», №18 «Construction», №27 «Post and Telecommunications».

год / № индустрии	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
3	-0,6472	-1,1523	0,0678	-0,7762	-0,6215	-0,3664	-0,1805	0,6145
11	-0,6538	-0,9889	-0,1606	-0,1417	-0,8977	-0,6102	0,0362	0,7272
18	-0,5175	-1,1232	-0,3250	-0,2370	-1,0917	-0,5319	-0,1349	0,7350
27	-0,2014	-0,2831	0,1211	0,0790	-0,2751	0,1053	0,3386	0,5629
год / № индустрии	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
3	0,1809	-0,2591	0,0140	0,3360	0,0416	-1,1540	0,0315	0,2539
11	0,6110	-0,1398	0,4030	0,5597	0,2117	-1,2822	-0,0054	0,5957
18	0,1511	-0,2118	0,2775	0,4785	0,4691	-0,2088	-0,2166	0,3090
27	0,2350	-0,0688	-0,0381	0,0385	0,2379	-0,4549	-0,0273	0,1842

Таблица 1. Таблица фондоемкостей

§ 3.3. Обзор регрессионных моделей

Исследуем функциональную зависимость фондоемкостей от ряда параметров. Будем использовать модель линейной регрессии, где параметры высчитываются методом наименьших квадратов. В качестве объясняемых переменных рассмотрим обратные величины $\dfrac{1}{Fe_i}$, $i = \overline{1, n+1}$, т.к. именно в таком виде они входят в матрицу M системы (10).

Среди всех моделей выделим следующие три:

$$\frac{1}{Fe_i^k} = a_i^{(1)}k + b_i^{(1)}, \quad i = \overline{1, n+1}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{Fe_i^k} = a_i^{(2)}infl_k + b_i^{(2)}, \quad i = \overline{1, n+1}, \tag{17}$$

где $infl_k$ обозначает уровень инфляции в год k,

$$\frac{1}{Fe_i^k} = a_i^{(3)}(I_i(k) - I_i(k-1)) + b_i^{(3)}, \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{18}$$

§ 3.4. Вычисление прогноза. Оценка погрешности

Предположим, что имеется информация в виде таблиц NIOT за 11 последних лет: с $(s-10)$-го по s-ый. Тогда прогноз вектора выпусков и ВВП на год вперед $\widehat{I}_{s+1}$ может быть вычислен по следующей схеме:

1. Идентификация вектора фондоемкостей за предыдущие 10 лет $\{Fe^k\}_{k=s-10}^{s-1}$ (см. § 3.2).

2. Нахождение текущего значения $\widehat{Fe}^s$ из уравнения регрессии (см. § 3.3), либо по определению по формуле (14).

3. Вычисление прогноза по формуле $\widehat{I}_{s+1} = e^{D_s(\widehat{Fe}^s)}I_s$.

4. Оценка погрешности $r_{s+1} = \dfrac{||I_{s+1} - \widehat{I}_{s+1}||}{||I_{s+1}||}100\%$.

Данный алгоритм был реализован в виде программного комплекса в среде Matlab.

Замечание 1. Учитывая объем имеющейся информации, данный процесс может быть проделан для $s = \overline{2005, 2010}$.

Замечание 2. Глубина учебной выборки, равная 10, была определена эмпирически по историческим данным.

Обозначим за r_{s+1}^1 относительное отклонение годового прогноза от исторических данных при вычислении фондоемкостей по определению, за r_{s+1}^l, где $l = 2, 3, 4$ — погрешности при вычислении фондоемкостей по формулам (16), (17), (18) соответственно.

Найдем относительные ошибки аппроксимации по формуле

$$A_l = \frac{1}{6} \sum_{s=2005}^{2010} r_{s+1}^l.$$

Полученные результаты проиллюстрированы в таблице 2.

A_1	A_2	A_3	A_4
$8,25\%$	$8,31\%$	$6,21\%$	$6,46\%$

Таблица 2. Относительные ошибки аппроксимации

В таблице 3 продемонстрированы результаты прогноза на 2010 год для некоторых секторов. I_{2009}, I_{2010} — реальные выпуски за 2009 и 2010 годы, $\widehat{I}^i_{2010}$, $i = \overline{1,4}$ — прогнозы при вычислении фондоемкостей по формулам (14), (16)–(18) соответственно.

№ индустрии	I_{2009}	I_{2010}	$\widehat{I}^1_{2010}$	$\widehat{I}^2_{2010}$	$\widehat{I}^3_{2010}$	$\widehat{I}^4_{2010}$
1	$4,86 \cdot 10^4$	$4,81 \cdot 10^4$	$4,17 \cdot 10^4$	$5,03 \cdot 10^4$	$4,49 \cdot 10^4$	$4,47 \cdot 10^4$
6	$1,70 \cdot 10^4$	$1,74 \cdot 10^4$	$1,25 \cdot 10^4$	$1,95 \cdot 10^4$	$1,53 \cdot 10^4$	$1,43 \cdot 10^4$
11	$3,22 \cdot 10^4$	$3,22 \cdot 10^4$	$2,42 \cdot 10^4$	$3,52 \cdot 10^4$	$2,97 \cdot 10^4$	$2,66 \cdot 10^4$
16	$3,31 \cdot 10^4$	$3,28 \cdot 10^4$	$2,43 \cdot 10^4$	$3,71 \cdot 10^4$	$3,11 \cdot 10^4$	$2,47 \cdot 10^4$
21	$1,51 \cdot 10^5$	$1,50 \cdot 10^5$	$1,32 \cdot 10^5$	$1,63 \cdot 10^5$	$1,49 \cdot 10^5$	$1,47 \cdot 10^5$
26	$9,68 \cdot 10^4$	$10,11 \cdot 10^4$	$8,31 \cdot 10^4$	$11,1 \cdot 10^4$	$9,60 \cdot 10^4$	$9,07 \cdot 10^4$
31	$2,09 \cdot 10^5$	$2,01 \cdot 10^5$	$2,07 \cdot 10^5$	$2,33 \cdot 10^5$	$2,01 \cdot 10^5$	$2,05 \cdot 10^5$
36	$2,79 \cdot 10^6$	$2,75 \cdot 10^6$	$2,53 \cdot 10^6$	$3,09 \cdot 10^6$	$2,72 \cdot 10^6$	$2,72 \cdot 10^6$

Таблица 3. Результаты прогнозирования

На рис. 2 представлен годовой прогноз ВВП Германии с 2007 по 2011 года. Реальное значение в ценах 1995 года сравнивается прогнозом, полученным путем интегрирования системы (11), где фондоемкости высчитываются по определению (модель 1), либо по формулам (16)–(18) (модели 2–4 соответственно).

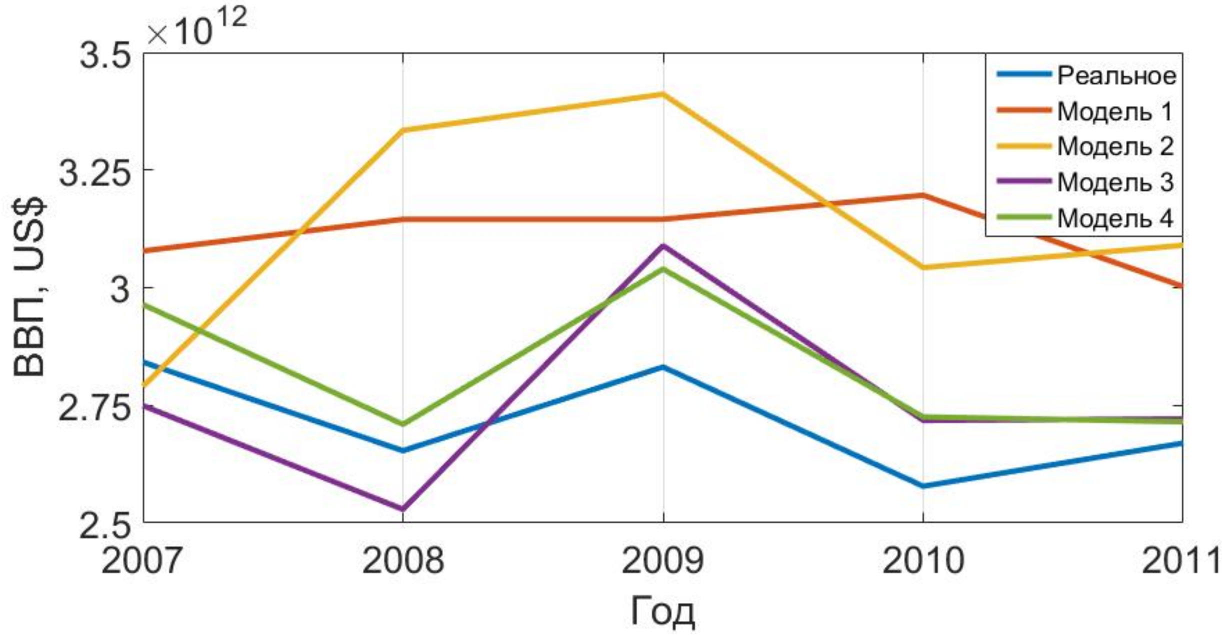

Рис. 2. Прогноз ВВП

По полученным результатам можно сделать вывод, что среди рассмотренных регрессионных моделей на данной выборке лучший результат показала модель, предполагающая зависимость от уровня инфляции.

Выводы. Заключение

К результатам работы можно отнести следующее:

1. Анализ базы данных WIOD.
2. Модификация статической и динамической модели МОБ под таблицы NIOT.
3. Исследование методов сведения линейной разностной системы к системе дифференциальных уравнений.
4. Построение регрессионных моделей зависимости фондоемкостей от различных показателей.
5. Вычисление прогноза выпусков и ВВП, оценка погрешности.
6. Реализация приведенных алгоритмов в среде Matlab.

Результаты проделанной работы были изложены на нескольких научных конференциях с последующей публикацией:

- *Белоусова М. В., Дорофеев Б. В.* «Оценка корректности перехода от линейных разностных уравнений к дифференциальным». Конференция «Процессы управления и устойчивость — 2015».
- *M. V. Belousova, B. V. Dorofeev.* «The method of finding the coefficients of a dynamic input-output model». «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov (SCP), 2015 International Conference.
- *Белоусова М.В., Попков А.С.* «Построение динамической модели МОБ на основе WIOD». Конференция «Процессы управления и устойчивость — 2016».

В работе был изложен способ построения динамической модели межотраслевого баланса. Это удобный инструмент для анализа функционирования экономики региона и получения прогноза различных показателей. Метод был проиллюстрирован на примере экономики Германии в 1995–2011 гг. С целью уменьшения ошибки прогноза были рассмотрены различные варианты определения фондоемкостей.

Продолжение данной работы может быть осуществлено засчет поиска экономических показателей, наиболее коррелирующих с фондоемкостями, и построения уравнений, предполагающих зависимость от этих показателей.

Список литературы

1. Леонтьев В. В. Межотраслевая экономика / пер. с англ., автор предисл. и науч. ред. А. Г. Гранберг. М.: Экономика, 1997. 479 с.

2. Ведута Н. И. Социально эффективная экономика. Под общей ред. докт. экон. наук. Ведута Е. Н. — М.: РЭА, 1999. — 254 с.

3. Федосеев В. В., Гармаш Д. М. Экономико-математические методы и прикладные модели / под ред. В. В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999. 391 с.

4. Пересада В. П. Управление динамикой развития экономики на базе межотраслевого баланса. СПб.: Политехника-сервис. 2010. 169 с.

5. Пересада В. П., Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е. Управление развитием многопродуктовой экономики на основе динамической модели «затраты-выпуск»// Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления, 2014. — № 4. — Р. 121–134.

6. Росстат [Электронный ресурс]: `URL:http://www.gks.ru/` (дата обращения: 18.03.16)

7. Евростат [Электронный ресурс]: `URL:http://ec.europa.eu/eurostat/` (дата обращения: 18.03.16)

8. WIOD [Электронный ресурс]: `URL:http://www.wiod.org/` (дата обращения: 18.03.16)

9. Попков А. С. Идентификация динамической модели межотраслевого баланса для экономики России и оптимальное распределение инвестиций на ее основе // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2 (18). С. 696–701.

10. Белоусова М. В., Дорофеев Б. В. Оценка корректности перехода от линейных разностных уравнений к дифференциальным // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 541–544.

11. Belousova M. V, Dorofeev B. V. The method of finding the coeffcients of a dynamic input-output model // 2015 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov, SCP 2015 – Proceedings, 2015. P. 455–456.

Приложение

Здесь приведем коды скриптов и функций, написанных в процессе выполнения данной работы. Все они выполнены в среде Matlab на встроенном языке.

Скрипт mob.m

Программа записывающая матрицы M_k, $\widetilde{R}_k$ и вектор I_k, $k = \overline{1995, 2011}$ в переменную tb типа cell. В процессе выполнения скрипта подгружаются Excel-таблицы Deu.xlsx, W.xlsx, Exr.xlsx, содержащие таблицы NIOT, информацию по зарплатам в отрасли за год, курс евро/доллар к концу каждого года (требуется для пересчета зарплат из евро в доллары) соответственно.

```
ls = xlsread('Deu.xlsx');
Comp = xlsread('W.xlsx','DATA','E8211:U8245');
Exr = xlsread('EXR.xlsx','EXR','C14:S14');
for i = 1:length(ls)
    tb1 = xlsread('Deu.xlsx',num2str(ls(i)));
    tb{1,i} = tb1(5:end,5:end);
    tb{2,i} = Exr(i);
    tb{3,i} = Comp(:,i)*Exr(i);
    tb{3,i}(end) = tb1(82,39);
end
for j = 1:length(ls)
    Tb = tb{1,j};
    I1 = Tb(78,1:35)';
    A = Tb(1:35,1:35);
    Im1 = Tb(36:70,1:35);
    Im = sum(Im1,1)';
    V1 = Tb(72:77,1:35);
    V = sum(V1,1);
    Y1 = Tb(1:35,36:40);
    Y = sum(Y1,2);
    Ex = Tb(1:35,41);
    Tx1 = Tb(72:77,36:40);
    Tx = sum(sum(Tx1));
    Gdp1 = sum(V)+Tx;
    Gdp1 = sum(Y+Ex-Im)+Tx;
    A0 = [A,Y+Ex-Im;V,Tx];
    I = I1-Im;
    I0 = [I;Gdp1];
    n = length(I);
    for i = 1:n+1
        R0(:,i) = A0(:,i)/I0(i);
    end
    tb{4,j} = R0;
    Rs = sum(R0(1:n,1:n),1)'+tb{3,j}./I;
    tb{5,j} = 1-Rs;
```

```
    tb{5,j}(36,1) = (Tx + sum(Tb(1:35,39)))/Gdp1;
    tb{6,j} = diag(tb{5,j});
    tb{7,j} = I0;
end
save('tb.mat','tb');
```

Функция reduction.m

Редукция матриц M_k, $\widetilde{R}_k$ и вектора I_k (см. § 1.4). Входным параметром является вектор, состоящий из номеров отраслей, которые должны быть оставлены в процессе редукции.

```
function tb1 = reduction(n1)
load('tb.mat')
N = length(tb);
n = length(tb{4,1});
n2 = setdiff(1:n,n1);
for i = 1:N
    R = tb{4,i};
    M = tb{6,i};
    I = tb{8,i};
    Iv = I(n1,1);
    Rv = R(n1,n1) + R(n1,n2)*((eye(length(n2))-R(n2,n2))\R(n2,n1));
    Mv = M(n1,n1);
    tb1{1,i} = Rv;
    tb1{2,i} = Mv;
    tb1{3,i} = Iv;
end
```

Скрипт ident.m

Идентификация вектора фондоемкостей Fe^k путем решения нелинейной системы (15) с помощью функции fsolve.

```
clear all;
load('tb1.mat')
F1 = @(Fe)[Fe(1) 0; 0 Fe(2)];
M1 = tb1{2,1};
R1 = tb1{1,1};
I0 = tb1{3,1};
I1 = tb1{3,2};
F = @(Fe)I1-expm(F1(Fe)*M1)*I0;
F10 = ones(length(n1),1);
Fe = fsolve(F,F10);
```

Функция mnk.m

Функция, реализующая метод наименьших квадратов. На вход поступают вектор наблюдений независимой переменных x, вектор наблюдений объясняемой y, вектор $x1$, для которого будет высчитываться соответствующие значения зависимой переменной. Далее вычисляются коэффициенты a_1, a_2, после чего находится выходное значение $y1 = a_1 x1 + a_2$.

```
function y1 = mnk(x,y,x1)
A = [sum(x.^2) sum(x); sum(x) length(x)];
b = [sum(x.*y); sum(y)];
a = A\b;
y1 = [x1 ones(length(x1),1)]*a;
```

Скрипт prognoz.m

Вычисление прогноза вектора I на год вперед. Здесь представлен код нахождения прогноза и его отклонения от реальных цифр при определении фондоемкостей по формуле (17).

```
clear all;
load('tb.mat');
load('infl.mat');
load('Inf.mat');
l1 = 10;
for j = 1:17-l1-1
    m1 = j;
    [T,Y,tb1] = ident0(n1,m1,l1);
    for i = 1:length(n1)
        Y1(i) = mnk(infl(T),Y(:,i),(infl(T(end)+1)));
    end
    I1 = expm(diag(Y1)*tb1{2,m1+l1}*tb1{1,m1+l1})*tb1{3,m1+l1};
    r3(j) = norm(I1-tb1{3,m1+l1+1})/norm(tb1{3,m1+l1+1});
    I1_3(:,j)=I1;
end
R3 = mean(r3);
```