

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
СИСТЕМ

Поконечная Мария Павловна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НИЖНИХ
КОНЕЧНОСТЕЙ ПРИ ХОДЬБЕ**

Направление 010900

«Прикладные математика, информатика и физика»

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Трегубов В. П.

Рецензент:
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Королев В. С.

Санкт-Петербург

2016

Оглавление

Введение	3
1. Обзор литературы	5
1.1. Анатомия объекта исследования.....	5
1.2. Математические модели шагающих механизмов	9
2. Построение математической модели	12
2.1. Механическая модель	12
2.2. Уравнения движения конечности	13
3. Экспериментальное исследование движения	18
3.1. Методика исследования.....	18
3.2. Результаты измерений	20
4. Метод решения прямой задачи динамики	22
4.1. Аппроксимация обобщенных координат.....	22
4.2. Результаты аппроксимации	25
4.2. Вычисление моментов	27
4.3. Активность мышц	32
Заключение	35
Список литературы	36
Приложение	38

Введение

Ходьба, по общепринятому определению — это наиболее естественная из всех локомоций человека. Определение «естественная» подразумевает «привычная», однако нельзя полагать, что в столь знакомом всем явлении не может быть никаких секретов.

Движение человека сложно моделировать, поскольку даже стояние является неустойчивой позой с точки зрения механики. Ходьба же представляется чередой еще более неустойчивых динамических положений. Такой двигательный акт — результат сложной скоординированной работы скелетных мышц и нервной системы.

Двуногую ходьбу изучают специалисты в областях биологии, физиологии, медицины, математики, механики, и к настоящему моменту были опубликованы сотни работ по этой теме. Интерес обусловлен как возможностью понять организацию локомоционных процессов в живой природе, так и наличием чисто практических целей.

Одна из таких целей — разработка антропоморфных механизмов, которая является одним из важных направлений в робототехнике, протезировании, конструировании экзоскелетов и двуногих шагающих роботов [1].

Анализ ходьбы применяется и в медицинских целях, например, в корректирующей ортопедической хирургии, которая получила наибольшее развитие в 80-е гг. вместе с усовершенствованием компьютерных систем анализа. К настоящему моменту многие ведущие ортопедические больницы мира содержат соответствующие лаборатории [2].

Исследование движения человека используется при постановке таких диагнозов, как инсульт, церебральный паралич, болезнь Паркинсона, а также при выявлении некоторых нервно-мышечных и психических расстройств [3].

Таким образом, **актуальность данной работы** состоит в необходимости количественно оценивать характер движения человека и степень отклонения от нормы.

Целью данной исследовательской работы является разработка математической модели ходьбы человека на примере одноопорной фазы, которая бы позволила рассчитать моменты, развиваемые в суставах.

Для достижения поставленной цели нужно решить следующие **задачи**:

1. Провести анализ предшествующих работ.
2. Построить механическую модель ходьбы человека.
3. Построить математическую модель для одноопорной фазы движения.
4. С помощью видеоанализа определить экспериментально законы движения модели.
5. Произвести обработку полученных данных.
6. Получить решение прямой задачи динамики.
7. Соотнести с данными ЭМГ для какого-либо сустава.

1. Обзор литературы

В этой главе будут приведены некоторые сведения из анатомии нижней конечности человека [4], а также изложены некоторые предложенные разными авторами математические модели упрощенных антропоморфных систем. При составлении кратких характеристик таких моделей использовалась известная монография М. Вукобратовича [5], которая стала классическим трудом в области разработки шагающих автоматов.

1.1. Анатомия объекта исследования

Скелет нижней конечности делится на скелет **пояса нижней конечности** и скелет **свободной нижней конечности**. Пояс нижней конечности соединяет свободную нижнюю конечность с туловищем. К поясу нижней конечности относятся тазовая кость, крестцово-подвздошный сустав и соединения таза. Свободная нижняя конечность делится на бедро, голень и стопу. К ее скелету относятся бедренная, большеберцовая и малоберцовая кости, надколенник, тазобедренный, коленный, межберцовый, голеностопный суставы, кости и соединения стопы (рис. 1).

Скелет стопы состоит из множества мелких костей. Ее условно делят на предплюсну, плюсну и пальцы (рис. 2). Стопа несет опорную и рессорную (из-за наличия сводов) функции, благодаря чему возможно перераспределение нагрузки и смягчение ударов.

Тазобедренный сустав образован вертлужной впадиной тазовой кости и головкой бедренной кости. Он имеет три оси вращения, но не обеспечивает большой амплитуды движения, особенно в отведении. Этот сустав работает по типу *компрессии*, поскольку должен выдержать вес всего туловища.

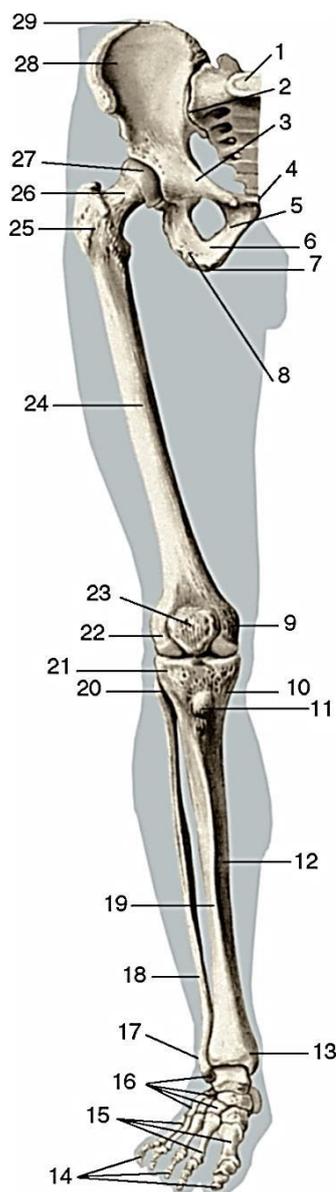


Рисунок 1. Кости нижней конечности, вид спереди.

- 1 — крестец;
- 2 — крестцово-подвздошный сустав;
- 3 — верхняя ветвь лобковой кости;
- 4 — симфизиальная поверхность лобковой кости;
- 5 — нижняя ветвь лобковой кости;
- 6 — ветвь седалищной кости;
- 7 — седалищный бугор;
- 8 — тело седалищной кости;
- 9 — медиальный надмыщелок бедренной кости;
- 10 — медиальный мыщелок большеберцовой кости;
- 11 — бугристость большеберцовой кости;
- 12 — тело большеберцовой кости;
- 13 — медиальная лодыжка;
- 14 — фаланги пальцев;
- 15 — кости плюсны;
- 16 — кости предплюсны;
- 17 — латеральная лодыжка;
- 18 — малоберцовая кость;
- 19 — передний край большеберцовой кости;
- 20 — головка малоберцовой кости;
- 21 — латеральный мыщелок большеберцовой кости;
- 22 — латеральный надмыщелок бедренной кости;
- 23 — надколенник;
- 24 — бедренная кость;
- 25 — большой вертел бедренной кости;
- 26 — шейка бедренной кости;
- 27 — головка бедренной кости;
- 28 — крыло подвздошной кости;
- 29 — подвздошный гребень.

Источник: http://vmede.org/sait/?page=4&id=Anatomija_sapin_1&menu=Anatomija_sapin_2007

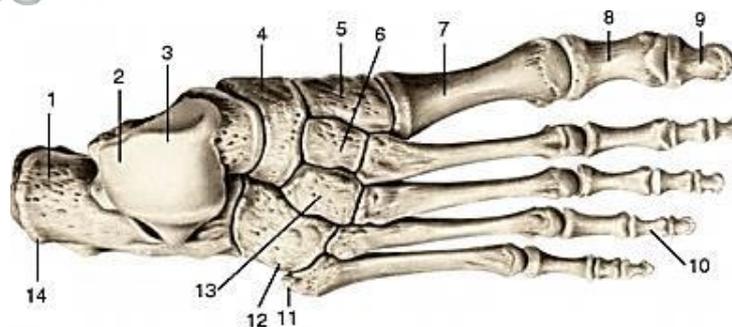


Рисунок 2. Кости стопы, правой, вид сверху.

- 1 — пяточная кость; 2 — блок таранной кости;
- 3 — таранная кость; 4 — ладьевидная кость;
- 5 — медиальная клиновидная кость; 6 — промежуточная клиновидная кость;
- 7 — I плюсневая кость; 8 — проксимальная фаланга;
- 9 — дистальная (ногтевая) фаланга; 10 — средняя фаланга;
- 11 — бугристость V плюсневой кости; 12 — кубовидная кость;
- 13 — латеральная клиновидная кость; 14 — бугор пяточной кости.

Источник: http://vmede.org/sait/?page=4&id=Anatomija_sapin_1&menu=Anatomija_sapin_2007

Коленный сустав образуется мышцами бедра, верхней суставной поверхностью большеберцовой кости и надколенником. Это соединение прочное и подвижное; основной тип движения в нем — сгибание / разгибание.

Голеностопный сустав образован костями голени и таранной костью. Он считается самым сложным в теле человека. Этот сустав отвечает за движения и устойчивость всего тела, несет наибольшую нагрузку при движении, поэтому крайне уязвим к травмам.

Данные о подвижности в суставах приведены в таблице 1.

Таблица 1. Подвижность в суставах нижней конечности человека.

сустав	сгибание/разгибание,	отведение/приведение,	супинация/пронация, °
крестцово-подвздошный	3–5		
тазобедренный	105/15; пассивное 150-160	40–60/15–30; при сгибе в коленном суставе 74-80	15–40, при согнутом в тазобедренном суставе бедре больше в 2 раза
коленный	170/–	—	—
голеностопный	45–50/15–25	12/12	13/13

Мышцы нижней конечности приводят в движение части скелета (рис. 3). Их работа эквивалентна работе одноплечных рычагов с точками опоры в области суставов. На каждый такой рычаг действует мышечная тяга и еще одна сила (например, сила тяжести) [6].

Работа мышц разнообразна: при сокращении они могут оказывать противоположное действие (так называемые мышцы-антагонисты) или однотипное (синергисты); для разных типов движения роли мышц могут меняться. Кроме того, существуют мышцы, вовлекающие в движение несколько суставов. Из-за этого эффекта подвижность в суставах определяется не только его строением, но и длиной мышц, вовлекающих его в движение.

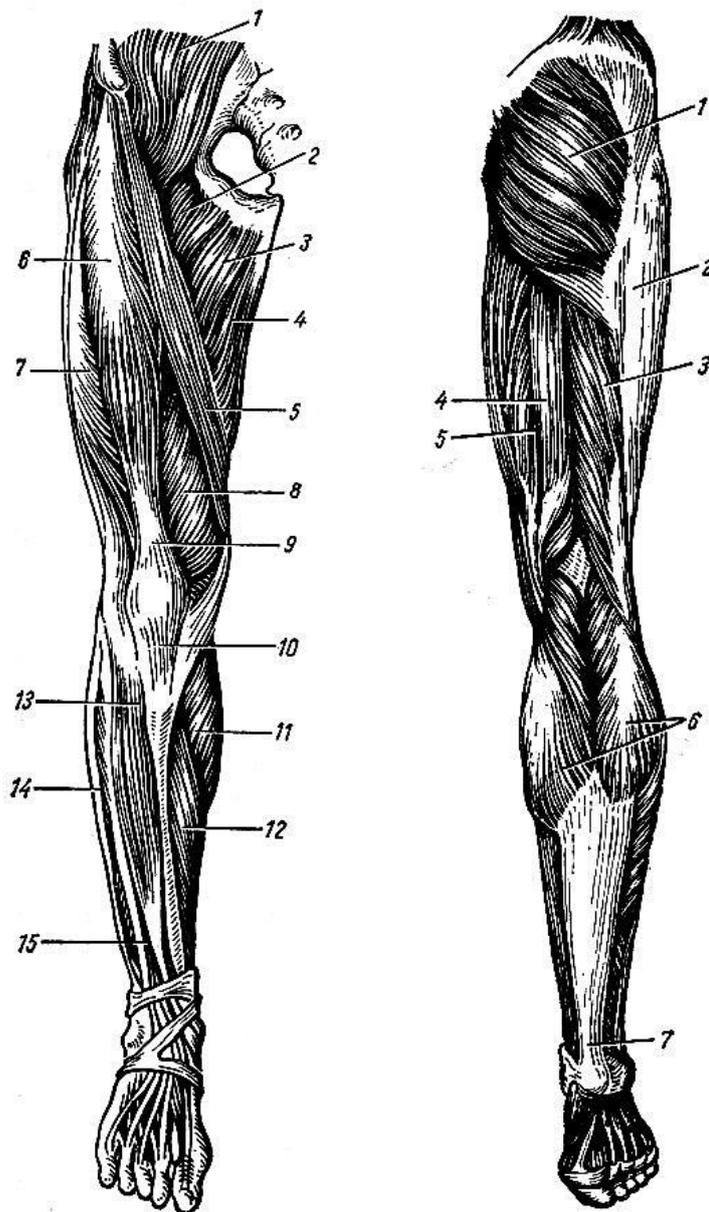


Рисунок 3. Мышцы нижней конечности (вид спереди):

- 1 — подвздошно-поясничная мышца; 2 — гребешковая мышца;
- 3 — длинная приводящая мышца; 4 — тонкая мышца;
- 5 — портняжная мышца; 6 — прямая мышца бедра;
- 7 — латеральная широкая мышца бедра; 8 — медиальная широкая мышца бедра;
- 9 — сухожилие четырехглавой мышцы бедра;
- 10 — связка надколенника; 11 — икроножная мышца;
- 12 — камбаловидная мышца; 13 — передняя большеберцовая мышца;
- 14 — длинная малоберцовая мышца; 15 — мышца — длинный разгибатель пальцев.

Наружные мышцы таза и нижней конечности (вид сзади):

- 1 — большая ягодичная мышца; 2 — подвздошно-большеберцовый тракт;
- 3 — двуглавая мышца бедра; 4 — полусухожильная мышца;
- 5 — полуперепончатая мышца; 6 — икроножная мышца;
- 7 — сухожилие трехглавой мышцы голени (ахиллово сухожилие).

Источник: <http://anfiz.ru/books/item/f00/s00/z0000013/st057.shtml>
<http://anfiz.ru/books/item/f00/s00/z0000013/st058.shtml>

1.2. Математические модели шагающих механизмов

Первым систематически изучать локомоцию человека и животных начал Майбридж в 1877 году. В первую очередь он интересовался чередованием фаз опоры и переноса ног при движении, и его модель включала только эти две фазы (такая теория носит название теории конечных состояний). Идеи Майбриджа получили развитие в последующих работах с описанием кинематических моделей четвероногих походок.

Чоу и Джекобсон [7] рассмотрели плоское движение двуногой локомоторной системы с пятью степенями свободы, в которой вся верхняя часть человеческого тела моделируется однозвенным перевернутым маятником, а нога — тремя звеньями. Сначала задается закон движения тазобедренного сустава, после чего осуществляется декомпозиция системы на три части, которые рассматриваются по отдельности. При этом движение описывается уравнениями Лагранжа второго рода. Для определения обобщенных сил, входящих в правые части уравнений, авторы пользовались оценкой, пренебрегая инерционными и гравитационными членами. Конечной целью являлось решение задачи оптимизации, а именно — минимизация функционала, характеризующего расход энергии, с помощью принципа максимума.

Похожую модель ходьбы в своей работе рассмотрели Морейнис и Гриценко, однако их система включала уже 11 степеней свободы. Туловище, шея, голова и руки так же, как и в предыдущем случае, моделировались одним звеном, но стопа уже состояла из двух звеньев. Движение тоже описывается уравнениями Лагранжа, но здесь уже представляет интерес способ определения обобщенных сил, которые являются моментами мышечных сил. Необходимые для вычисления суставных моментов данные, а именно характеристики масс, звеньев и инерций элементов, ускорения, обусловленные движением тазобедренного сустава, компоненты силы реакции опоры и координаты ее точки приложения, углы между звеньями

ищутся экспериментально. Результатом вычислений являлись мощности в суставах, по которым можно оценить энергетические затраты при ходьбе.

Гурфинкелю, Фомину и Штилькину принадлежит крупная работа по вычислению суставных моментов при двуногой ходьбе. Нога моделируется плоским трёхзвенным физическим маятником, точкой подвеса которого является тазобедренный сустав. Эта точка движется по некоторому известному закону. Авторы применяли уравнения Лагранжа, в которые входят угловые переменные, которые регистрировались с помощью специальных датчиков. Кроме того, для решения уравнений необходимы значения внешних сил, приложенных к звеньям и ускорения движения тазобедренного сустава, которые также находятся экспериментально.

В работе Белецкого [8] шагающее устройство моделируется твердым массивным телом, к одной точке которого подвешены две невесомые ноги, а движение задается кинематически. Динамика определяется траекторией точки подвеса и точками опоры ног на поверхности. Примечательно, что для вывода уравнений использовались основные теоремы механики твердого тела (например, теорема о движении центра масс и теорема об изменении момента количества движения). Решение системы уравнений при этом должно удовлетворять условиям периодичности. Управлениями служат относительная траектория и ускорение точки подвеса ног.

Вукобратовичу принадлежит много работ, посвященных разработке антропоморфных механизмов. В них описано множество локомоционных моделей; простейшая из них, например, состоит из сосредоточенной массы на жестком невесомом стержне (туловище) и двух ног, каждая из которых моделируется двумя жесткими стержнями (бедро и голень). Но главной заслугой Вукобратовича является разработка так называемого метода заданной частичной синергии. Идея этого метода заключается в том, что из набора координат, описывающих движение, выделяют часть, для которых закон движения задан. Оставшиеся координаты определяются из уравнений динамических связей, при этом начало системы координат находится в точке

нулевого момента. При этом уменьшается размерность задачи, но не за счет её динамической сложности. Обычно за заданные координаты принимают угловые координаты, описывающие положение ног механизма, и для них задается кинематический алгоритм. По мнению автора, исследовать законы изменения этих координат целесообразнее именно экспериментальным путем. Остальные координаты описывают некое периодическое компенсаторное движение торса.

Из современных публикаций стоит упомянуть, например, работу Чигарева и Борисова [9], в которой человек моделируется одиннадцатизвенным механизмом, при этом стержни полагаются деформируемыми. Для моделирования движения использовалась методика пиктографической визуализации.

Можно прийти к следующим выводам:

1. Обычно рассматривается плоское движение.
2. Модель состоит из трех и более жестких стержней, соединенных шарнирами.
3. Ноги принимаются невесомыми, либо масса в каждом стержне распределена равномерно; зачастую центр тяжести располагается на расстоянии половины длины элемента от его конца.
4. Верхняя часть туловища для простоты обычно моделируется одним массивным жестким телом или стержнем.
5. Для описания движения обычно используют уравнения Лагранжа второго рода, решения которых находятся численными методами. За обобщенные координаты принимаются угловые переменные.

2. Построение математической модели

2.1. Механическая модель

Данная часть работы посвящена построению базовой математической модели для описания движения человека. Прежде всего, примем некоторые допущения, которые на данном этапе работы облегчат такое построение.

Прежде всего, укажем, что ходьбу человека можно отнести к такому классу движений человека, который можно исследовать, смоделировав часть тела человека в виде совокупности абсолютно твёрдых тел, называемых звеньями, связанных между собой при помощи подвижных соединений. При этом геометрические параметры звеньев модели совпадают с соответствующими параметрами частей тела

Далее, при построении точной механической модели необходимо учесть алгебру движений в суставах. Известно, что соединение суставов допускает три рода движения: чистое скольжение, чистое качение и качение со скольжением. В предположении, что для суставов нижней конечности более характерен последний тип движения, будем их моделировать простым цилиндрическим шарниром [10].

Кроме того, в работе будут рассматриваться только плоские движения механической системы. В среднем, в случае нормальной ходьбы ось каждого отпечатка подошв при ходьбе образует угол лишь в 15° , открытый кнаружи по отношению к траектории [11], поэтому такое допущение вполне может иметь место.

В качестве механической модели примем систему, состоящую из семи абсолютно твердых стержней, соединённых шарнирами (рис. 4). Эти стержни моделируют две ноги и «туловище» соответственно.

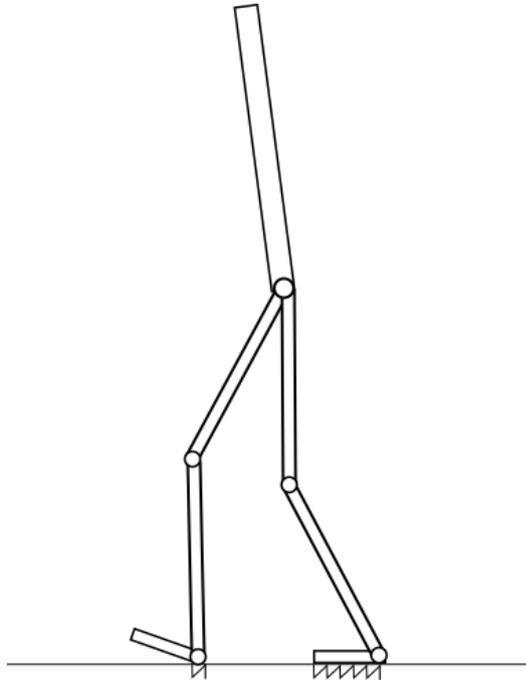


Рисунок 4. Базовая модель.

Каждый элемент обладает собственными характеристиками: длиной, массой и моментом инерции. Поворот одного стержня относительно другого происходит за счет вращающего момента, приложенного в соединяющем их шарнире.

2.2. Уравнения движения конечности

Движение модели можно описать уравнениями Лагранжа второго рода, которые в общем случае имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (1)$$

где T — кинетическая энергия, q_i — обобщённые координаты, \dot{q}_i — обобщённые скорости, Q_i — обобщённые силы, N — число степеней свободы.

В качестве обобщённых координат удобно использовать углы поворота стержней относительно заданной вертикальной оси (абсолютные углы). Обозначим их $\varphi_i, i = \overline{0, N-1}$.

Однако для снятия экспериментальных данных удобнее использовать относительные углы — углы поворота одного звена относительно другого.

Перед выводом уравнений приведём несколько предварительных замечаний. Каждый цикл движения отдельной ноги делится на две фазы: фаза опоры (*stance*) и фаза переноса (*swing*). Первая фаза характеризуется контактом с землей, вторая — отсутствием контакта, соответственно (рис. 5).

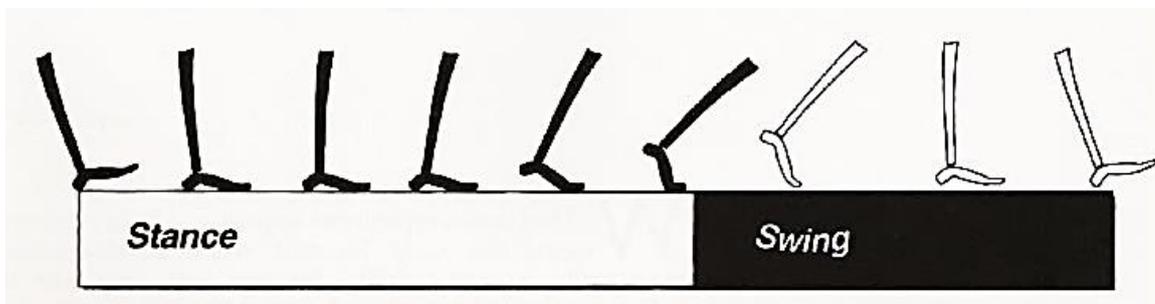


Рисунок 5. Цикл движения ноги [12].

Если рассматривать движение обеих ног, то можно выделить периоды опоры на обе ноги (*double limb stance*) и опоры на одну ногу, во время которой вторая находится в фазе переноса (*single limb stance*) (рис. 6).

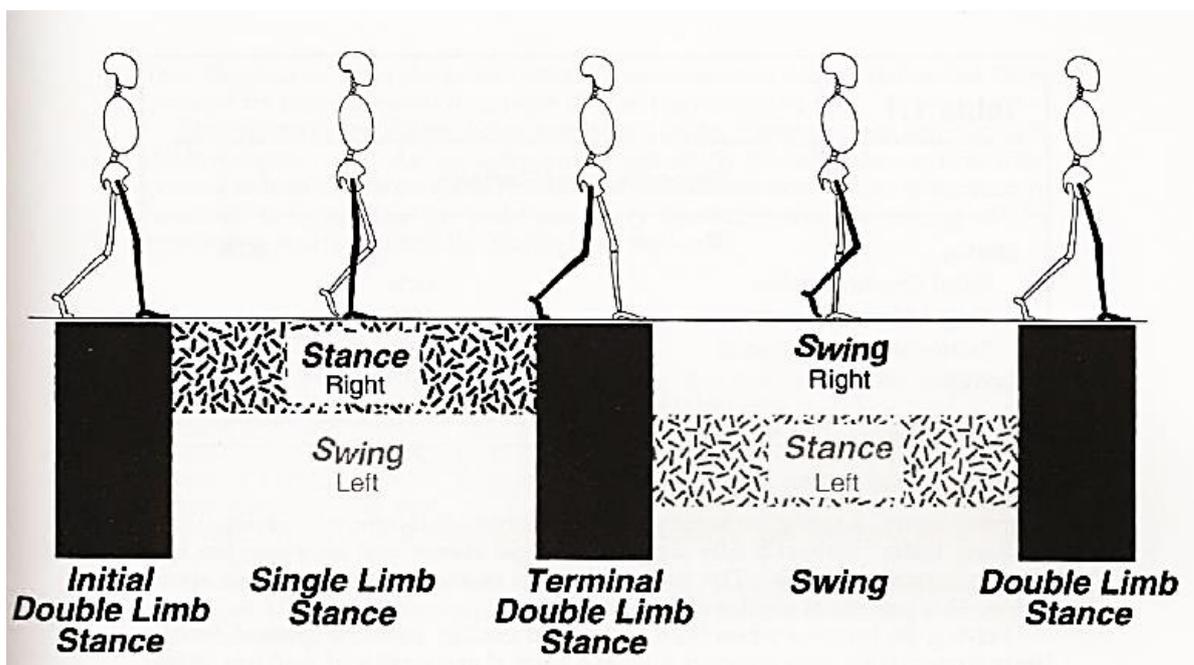


Рисунок 6. Цикл ходьбы человека [12].

Движение человека можно условно разбить на четыре фазы. В каждом случае модель имеет разное количество степеней свободы, поэтому каждая из фаз будет характеризоваться своим набором уравнений. Для удобства

систему координат каждый раз будем выбирать с центром в неподвижной точке движущейся модели.

Первая фаза. Характеризуется наличием точек контакта в обеих ногах, передняя нога опирается на пятку. Поместим начало системы координат так, как показано на рис. 7. Конструкция характеризуется четырьмя степенями свободы. Для стопы передней ноги выражение кинетической энергии следует записать отдельно, поскольку стопа обладает независимой степенью свободы.

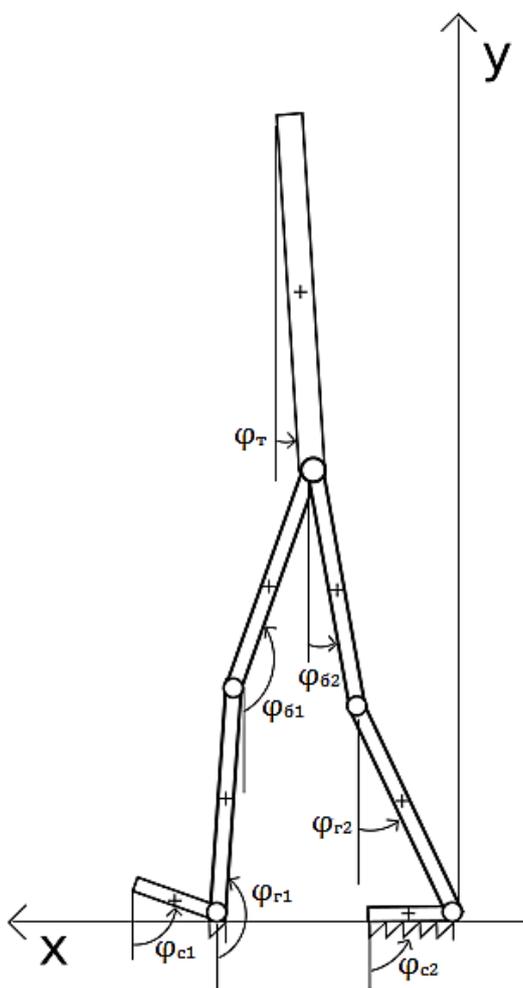


Рисунок 7. Первая фаза.

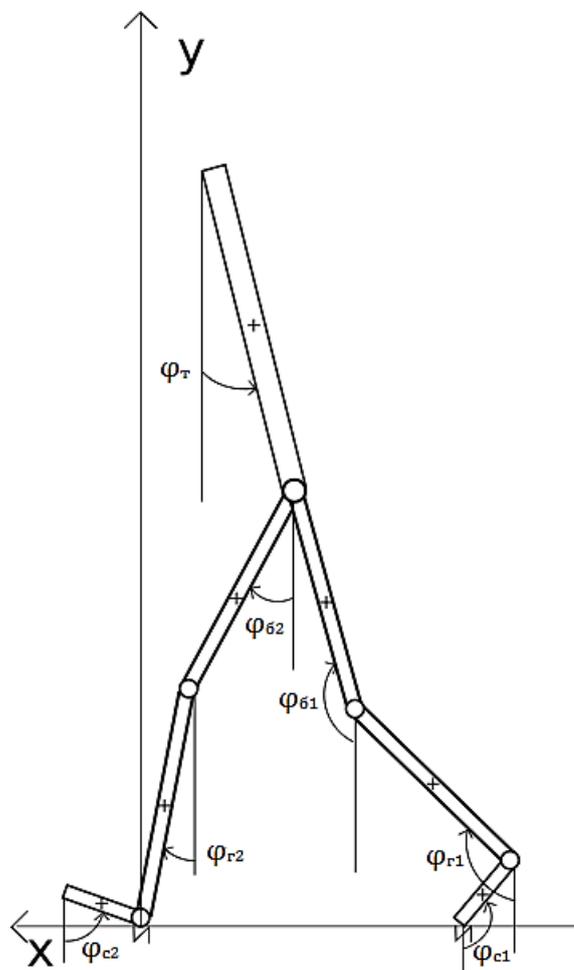


Рисунок 8. Вторая фаза.

Вторая фаза. Характеризуется наличием точки контакта в обеих ногах. Для удобства расположим начало координат так же, как и в предыдущем случае (рис. 8). Система характеризуется пятью степенями свободы.

Третья фаза. Стопа задней ноги имеет переднюю точку контакта (рис. 9). Система имеет четыре степени свободы.

Четвёртая фаза. Одна нога находится в фазе переноса, другая — в фазе опоры (рис. 10). У системы — шесть степеней свободы.

В первых трех фазах присутствует замкнутая кинематическая цепь.

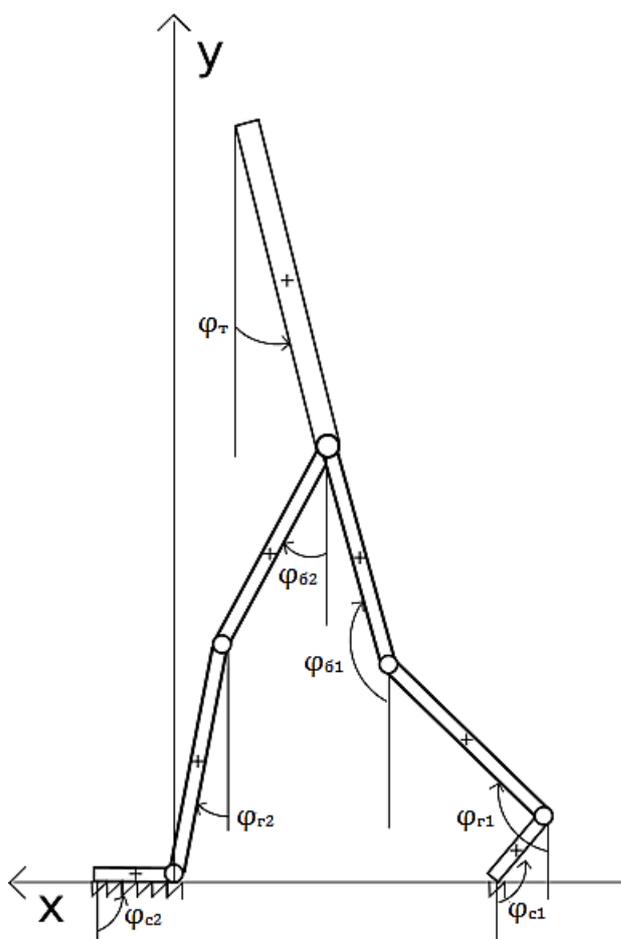


Рисунок 9. Третья фаза.

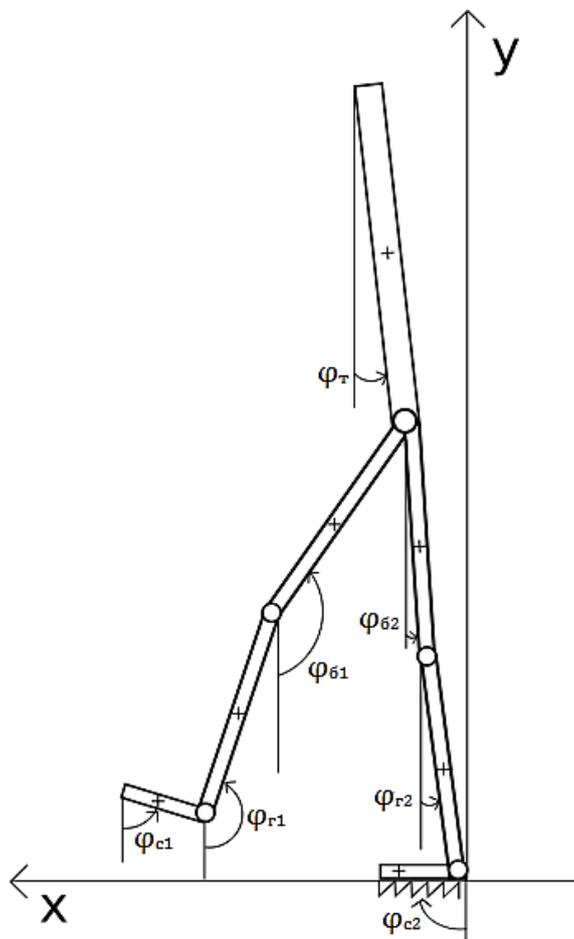


Рисунок 10. Четвёртая фаза.

В работе ограничимся рассмотрением только четвертой фазы, поскольку в этом случае удастся привести уравнения к достаточно простому и симметричному виду. Кроме того, эта фаза занимает около 60% от всего цикла ходьбы [12], и зачастую цикл моделируют как последовательность периодов опоры на одну ногу с мгновенной сменой ног [1].

Теперь выпишем уравнения Лагранжа. Выражение для кинетической энергии рассматриваемой механической системы имеет вид:

$$T = \sum_{i=0}^{N-1} T_i. \quad (2)$$

По теореме Кёнига:

$$T_i = \frac{m_i v_{C_i}^2}{2} + \frac{I_i \dot{\phi}_i^2}{2}, \quad (3)$$

где m_i и I_i — масса и момент инерции i -го стержня, $v_{C_i}^2 = x_{C_i}^2 + y_{C_i}^2$, x_{C_i} и y_{C_i} — координаты центра масс i -го стержня. Этот центр условно помещается на расстоянии половины длины стержня от точки шарнирного соединения.

Обозначим индексы: т — туловище, б1 — бедро первой ноги, г1 — голень первой ноги, с1 — стопа первой ноги, б2 — бедро второй ноги, г2 — голень второй ноги, с2 — стопа второй ноги.

В этом разделе не будут указаны выражения для координат центров масс звеньев, кинетической энергии и уравнения Лагранжа второго рода в стандартной записи, так как их вывод не представляет особой сложности, однако результаты имеют достаточно объемный вид.

Полученные уравнения в векторно-матричной форме будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{A}(\Phi)\ddot{\Phi} + \mathbf{B}(\Phi)\dot{\Phi}_2 = \mathbf{Q}(\Phi), \quad (4)$$

где $\Phi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1})^T$, $\dot{\Phi}_2 = (\dot{\varphi}_0^2, \dots, \dot{\varphi}_{N-1}^2)^T$, $\ddot{\Phi} = (\ddot{\varphi}_0, \dots, \ddot{\varphi}_{N-1})^T$, $\mathbf{Q} = (Q_0, \dots, Q_{N-1})^T$, $\dim(\mathbf{A}) = N \times N$.

С видом матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} можно ознакомиться в Приложении.

3. Экспериментальное исследование движения

3.1. Методика исследования

Для решения первой задачи динамики необходимо знать изменение обобщенных координат с течением времени, т. е. нужны некоторые экспериментальные данные. Логичной представляется идея взять для снятия измерений последовательность изображений человека, идущего по прямой.

Современным способом исследования кинематических характеристик ходьбы (и не только) является технология захвата движения (*motion capture*). Эта технология широко используется при создании видеоигр и современных фильмов со спецэффектами. При её реализации движения объекта регистрируются видеокамерами (обычно), затем данные отправляются в компьютер для дальнейшей обработки.

Различают маркерную и безмаркерную технологии. В случае маркерной системы захвата движений требуется специальное оборудование в виде набора датчиков-маркеров, которые могут быть оптическими пассивными (отражать свет) либо активными (светодиоды), а также магнитными и т. д. Эти датчики крепятся на костюме актера (испытуемого). Далее зарегистрированное изображение маркеров обрабатывается сложным программным обеспечением. Подобным дорогостоящим оборудованием обычно обладают крупные медицинские лаборатории или кинокомпании [13].

Специально для выполнения данной работы было найдено видео Walking Gait Analysis [14], из которого можно выделить необходимый фрагмент. В этом фрагменте человек с маркерами на суставах идет по беговой дорожке; съемка производится в сагиттальной плоскости (рис. 11).



Рисунок 11. Кадр из видеозаписи эксперимента [13].

Для снятия экспериментальных данных было необходимо использовать программу, реализующую функцию автотрекинга — возможность автоматического отслеживания некоторой точки видео (рис. 12).

The screenshot shows the Tracker 4.91 software interface. The main window displays a video frame of a person walking on a treadmill. A red dashed box highlights a point on the person's knee, labeled 'mass A'. The software interface includes a menu bar (File, Edit, Video, Track, Coordinate System, View, Help), a toolbar with various icons, and a status bar at the bottom showing the current file: 'Walking Gait Analysis (1) (online-video-cutter.com).trk'.

The 'Autotracker: mass A position' window is open, showing the following settings:

- Search: Search This, Search Next
- Frame 0: Template, Match
- Template: Evolution Rate 20%, Automark 4
- Search: X-axis Only, Look Ahead
- Target: Track mass A, Point position

The 'Plot' window shows a graph of mass A (t, x) with a red square marker at the current position. The 'Table' window shows the following data:

t	x	y
0	-51,226	7,04

Рисунок 12. Работа с программой Tracker 4.91.

3.2. Результаты измерений

Для снятия измерений была использована программа Tracker 4.91 — бесплатный инструмент для видеоанализа и моделирования, обладающий простым интерфейсом [15]. Возможности программы позволяют сразу измерять относительные углы с помощью инструмента Protractor (рис. 13).

Полученные данные экспортировались для дальнейшей обработки в математический пакет Matlab.

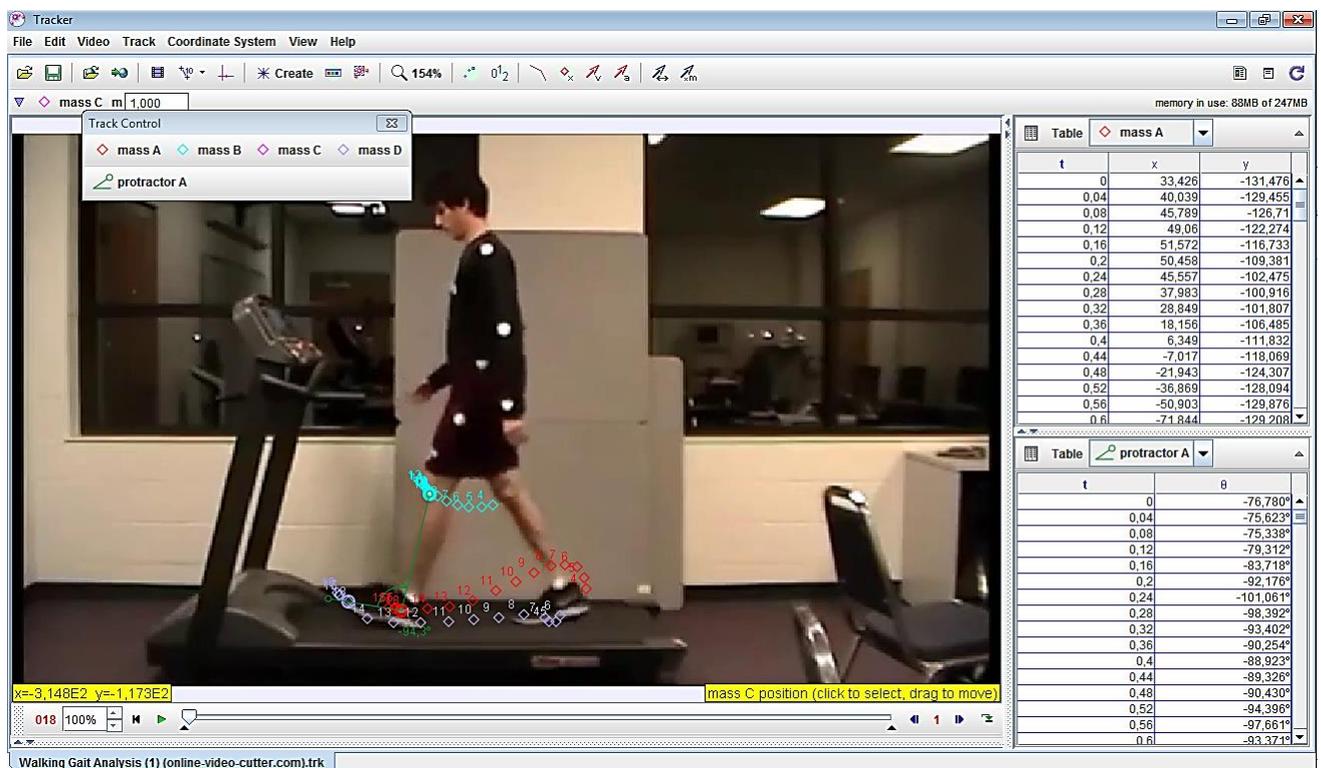


Рисунок 13. Работа с программой Tracker 4.91 — снятие данных.

Далее относительные углы были переведены в абсолютные (углы отклонения относительно вертикали), в единицах измерения радианы. Получившиеся зависимости будут представлены далее.

Для решения прямой задачи динамики необходимо из данных выделить периоды опоры на одну ногу. Кроме того, во время вычислений необходимо учесть смену индексов при смене опорной ноги.

Помимо угловых координат, в уравнениях фигурируют константы — параметры тела человека. Произведем их расчет.

Пусть антропометрические данные: рост — 175 см, масса — 80 кг. По формулам [16, стр. 463–464, 466–467] были рассчитаны необходимые значения — длины сегментов, массы и главные центральные моменты инерции в сагиттальной плоскости:

$$\begin{aligned}l_{\text{тела}} &= 87.50 \text{ см}, & m_{\text{тела}} &= 46.72 \text{ кг}, & I_{\text{тела}} &= 0.8943 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \\l_{\text{бедр}} &= 46.88 \text{ см}, & m_{\text{бедр}} &= 12.15 \text{ кг}, & I_{\text{бедр}} &= 0.2236 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \\l_{\text{голени}} &= 53.13 \text{ см}, & m_{\text{голени}} &= 3.42 \text{ кг}, & I_{\text{голени}} &= 0.0414 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \\l_{\text{стопы}} &= 25.00 \text{ см}, & m_{\text{стопы}} &= 1.06 \text{ кг}, & I_{\text{стопы}} &= 0.0048 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.\end{aligned}$$

4. Метод решения прямой задачи динамики

4.1. Аппроксимация обобщенных координат

Значения обобщенных координат необходимо аппроксимировать дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, вследствие чего находятся $q_i(t)$. При этом становится возможным получение непрерывных зависимостей для обобщенных скоростей и ускорений. Кроме того, необходимо устранить возможные погрешности.

Данную задачу можно решить, используя сглаживающие кубические сплайны. Такой сплайн дает более плавную кривую, чем интерполяционный, а алгоритм его построения достаточно прост в программной реализации [17].

Рассмотрим кратко процедуру построения сглаживающих кубических сплайнов [18].

Предположим, что рассматриваемый процесс происходит на заданном временном промежутке $[t_0, T]$, который имеет разбиение на n частей: $t_0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = T$. Пусть в каждом узле (точке стыковки) t_i заданы полученные из эксперимента значения функций. При этом считаем, что экспериментальные значения имеют с некоторую погрешность.

Поставим задачу о нахождении аппроксимирующей функции, значения которой в узлах t_i наиболее приближены к экспериментальным значениям, также её график должен иметь достаточно малую локальную кривизну на рассматриваемом временном промежутке $[t_0, T]$.

Сглаживающим кубическим сплайном называется функция $S(t)$, заданная на промежутке $[t_0, T]$, если:

а) на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ $S(t)$ является кубическим многочленом:

$$S(t) \equiv S_i(t) = a_{i,0} + a_{i,1}(t - t_i) + a_{i,2}(t - t_i)^2 + a_{i,3}(t - t_i)^3, \quad (5)$$

для $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$;

б) соседние многочлены гладко состыкованы друг с другом:

$$S_{i-1}^{(r)}(t_i - 0) = S_i^{(r)}(t_i + 0), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad r = \overline{0, 2}, \quad (6)$$

в) функция $S(t)$ доставляет минимум функционалу на классе дважды непрерывно дифференцируемых функций $\tilde{W}_2^2[t_0, T]$:

$$I_\alpha(f(t; \alpha, \mathbf{p})) = \alpha \int_{t_0}^T \dot{f}^2(\tau; \alpha, \mathbf{p}) d\tau + \sum_{i=0}^n p_i [f(t_i; \alpha, \mathbf{p}) - \varphi_i]^2, \quad (7)$$

где α и p_i — некие положительные числа, α — параметр сглаживания, $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ — весовые множители, выбор которых производится исследователем. Предполагается, что значения α и p_i фиксируются;

г) функция $S(t)$ удовлетворяет граничным условиям одного из трёх типов.

В нашем случае рассматриваемое движение является периодическим, поэтому поставим периодические краевые условия:

$$S^{(r)}(t_0) = S^{(r)}(T), r = \overline{0, 2}. \quad (8)$$

Приведенный далее алгоритм основан на использовании второй производной сплайна и достаточно прост в программной реализации.

На каждом из промежутков $[t_i, t_{i+1}]$ кубический сплайн ищется в виде:

$$S_i(t) = M_i \frac{(t_{i+1} - t)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(t - t_i)^3}{6h_i} + \left(\varphi_i - M_i \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{(t_{i+1} - t)}{h_i} + \left(\varphi_{i+1} - M_{i+1} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{(t - t_i)}{h_i}, \quad (9)$$

где $M_i = \ddot{S}_i(t_i)$, $M_{i+1} = \ddot{S}_i(t_{i+1})$, $h_i = t_{i+1} - t_i$. В силу граничных условий (8): $h_0 = h_n$, $M_0 = M_n$.

Для нахождения вектора \mathbf{M} выписывается система линейных алгебраических уравнений (система выводится из необходимого условия минимума функционала (7)), которая имеет вид:

$$\left(\frac{1}{6} \mathbf{A} + \alpha \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T \right) \mathbf{M} = \mathbf{H} \mathbf{F}. \quad (10)$$

Справедливы следующие представления:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & h_0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & h_{n-1} & 2(h_0 + h_{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -(h_0^{-1} + h_1^{-1}) & h_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & h_0^{-1} \\ h_1^{-1} & -(h_1^{-1} + h_2^{-1}) & h_2^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-1} & -(h_2^{-1} + h_3^{-1}) & h_3^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1}^{-1} & -(h_0^{-1} + h_{n-1}^{-1}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & p_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица системы (10) является неособой, поэтому решение системы существует и единственно. Кроме того, матрица системы — пятидиагональная, поэтому для решения системы можно использовать метод пятидиагональной прогонки (как альтернатива — метод отражений, который требует большего числа операций, однако является более устойчивым к вычислительным ошибкам).

После нахождения вектора \mathbf{M} следует найти вектор сглаженных исходных данных в узлах:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} - \alpha \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{M}, \quad (12)$$

где $\mathbf{F} = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)^T$.

При подстановке \mathbf{M} и $\tilde{\mathbf{F}}$ в (9) производим расчет значений сглаживающего кубического сплайна в точках промежутка $[t_0, T]$, расчет значений его первой производной производится по формуле (13):

$$\dot{S}(t) \equiv \dot{S}_i(t) = M_{i+1} \frac{(t - t_i)^2}{2h_i} - M_i \frac{(t_{i+1} - t)^2}{2h_i} - \frac{1}{h_i} \left(\tilde{\varphi}_i - M_i \frac{h_i^2}{6} \right) +$$

$$\frac{1}{h_i} \left(\tilde{\varphi}_{i+1} - M_{i+1} \frac{h_i^2}{6} \right), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (13)$$

а расчет второй производной производится по формуле (14):

$$\ddot{S}_\alpha(t) = M_i \frac{t_{i+1} - t}{h_i} + M_{i+1} \frac{t - t_i}{h_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (14)$$

где вместо \mathbf{F} ставится $\tilde{\mathbf{F}}$.

Теперь обратимся к вопросу выбора весовых коэффициентов и параметра сглаживания. Известно, что p_i характеризуют близость аппроксимирующей функции к значениям аппроксимируемой функции

в узлах. В связи с тем, что затруднительно установить, в какие именно моменты времени были сделаны наиболее точные наблюдения, то исходные данные на всех внутренних точках будем считать равноправными, при этом $p_i = p$, $i = \overline{1, n - 1}$, p_i — величина порядка 10^3 — 10^4 . Параметр α подбирается исследователем.

4.2. Результаты аппроксимации

Для подготовки данных использовался математический пакет Matlab. Типовые зависимости обобщенных координат после аппроксимации представлены на рис. 14–17.

В работе достаточно рассмотреть два периода одноопорной фазы.

Следующим шагом в решении прямой задачи динамики будет подстановка полученных зависимостей обобщенных координат в уравнения Лагранжа второго рода. В результате получим обобщённые силы $Q_i(t)$.

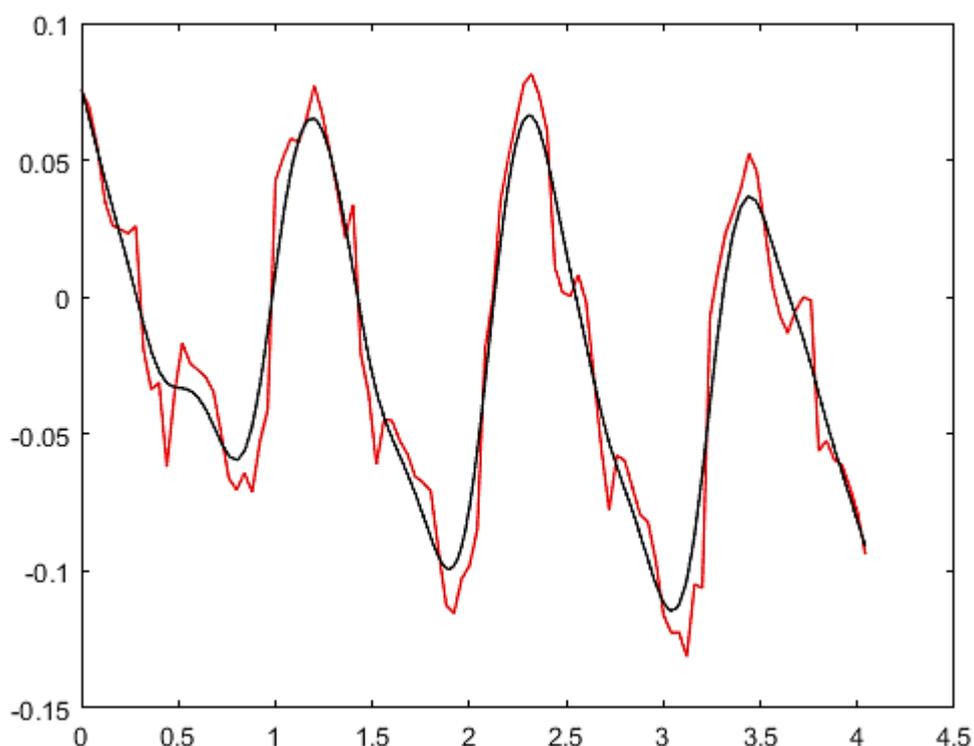


Рисунок 14. Результаты аппроксимации для зависимости угла отклонения туловища.

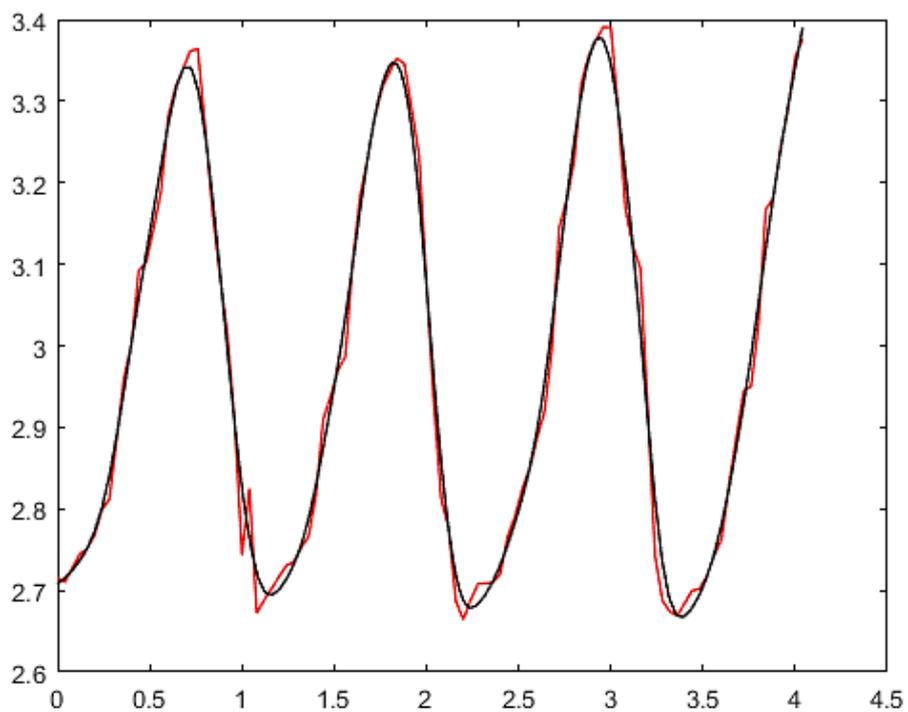


Рисунок 15. Результаты аппроксимации для зависимости угла отклонения для бедра правой ноги.

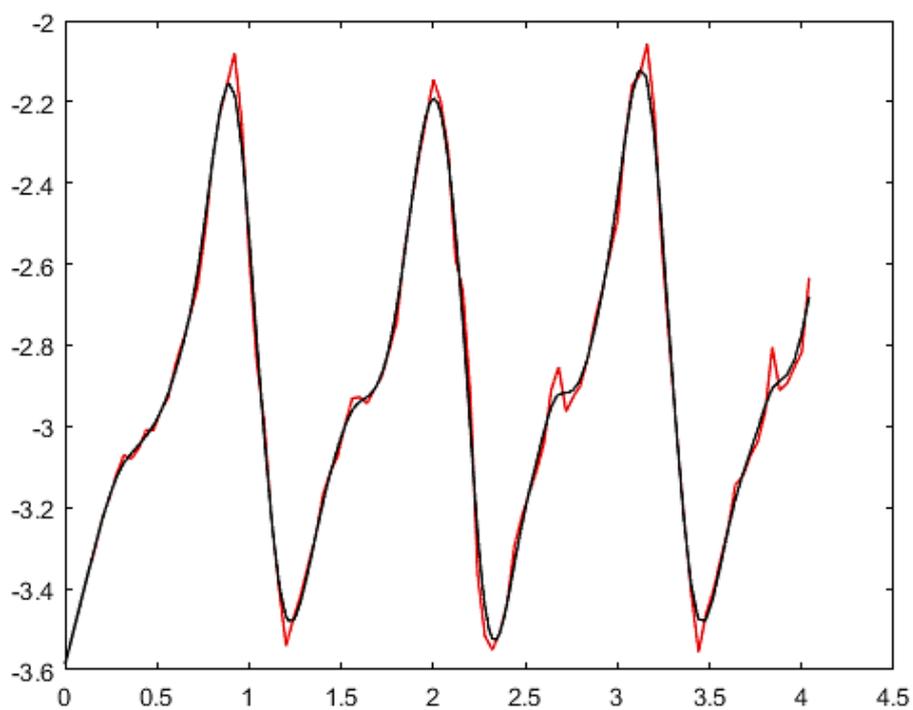


Рисунок 16. Результаты аппроксимации для зависимости угла отклонения для голени правой ноги.

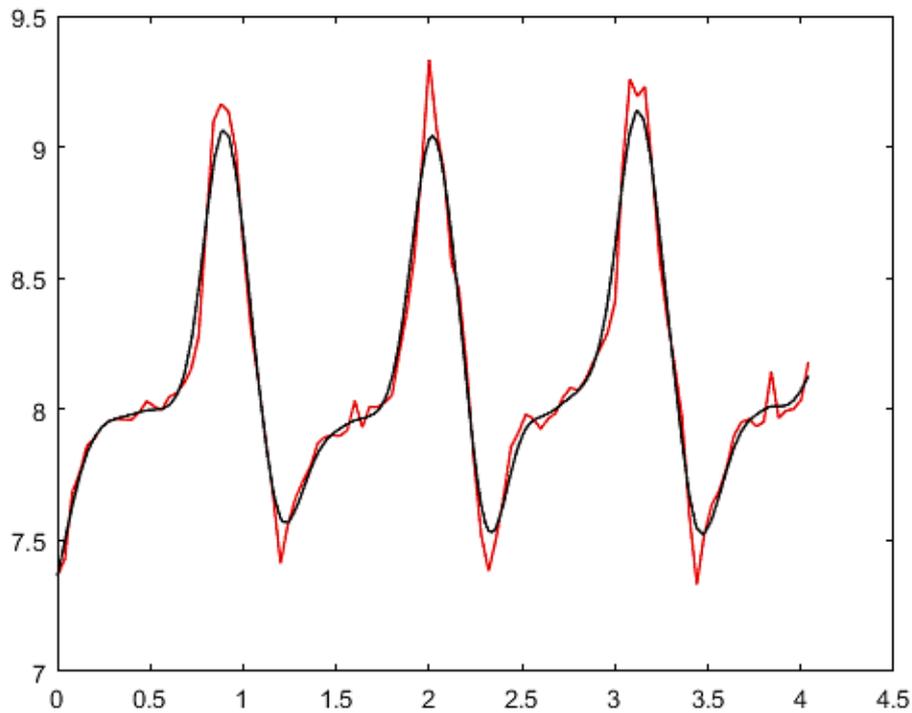


Рисунок 17. Результаты аппроксимации для зависимости угла отклонения для стопы правой ноги.

4.2. Вычисление моментов

Перейдем к вычислению суставных моментов [1, 9]. Моменты, действующие в системе, изображены на рис. 18.

Составим выражение для элементарной работы всех сил:

$$\begin{aligned} \delta W = & (q_1 + q_2)\delta\varphi_{\Gamma} + (q_1 - u_1)\delta\varphi_{\delta 1} + (q_2 - u_2)\delta\varphi_{\delta 2} + \\ & (u_1 - w_1)\delta\varphi_{\Gamma 1} + (u_2 - w_2)\delta\varphi_{\Gamma 2} + w_1\delta\varphi_{c1} + (w_2 - \tilde{w})\delta\varphi_{c2} \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, предполагается, что движение происходит в поле сил тяжести.

Выражение для потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{i=1}^N \Pi_i, \\ \Pi_i &= m_i g y_{C_i}, \end{aligned} \quad (16)$$

где g — ускорение свободного падения.

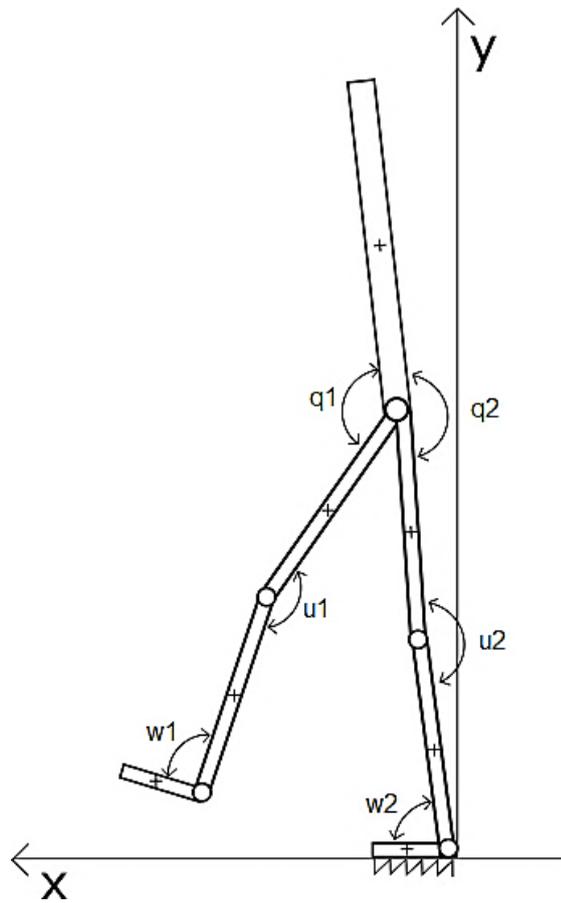


Рисунок 18. Моменты, действующие в системе.

Обобщенные силы запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Q_T &= q_1 + q_2 - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_T}, & Q_{r2} &= q_2 - w_2 - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{r2}}, \\
 Q_{\phi_{61}} &= q_1 - u_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{\phi_{61}}}, & Q_{c1} &= w_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{c1}}, \\
 Q_{\phi_{62}} &= q_2 - u_2 - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{\phi_{62}}}, & Q_{c2} &= 0. \\
 Q_{r1} &= q_1 - w_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{r1}}, & &
 \end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда получаем значения моментов (рис. 19–24). При вычислении следует обратить особое внимание на отсчет углов.

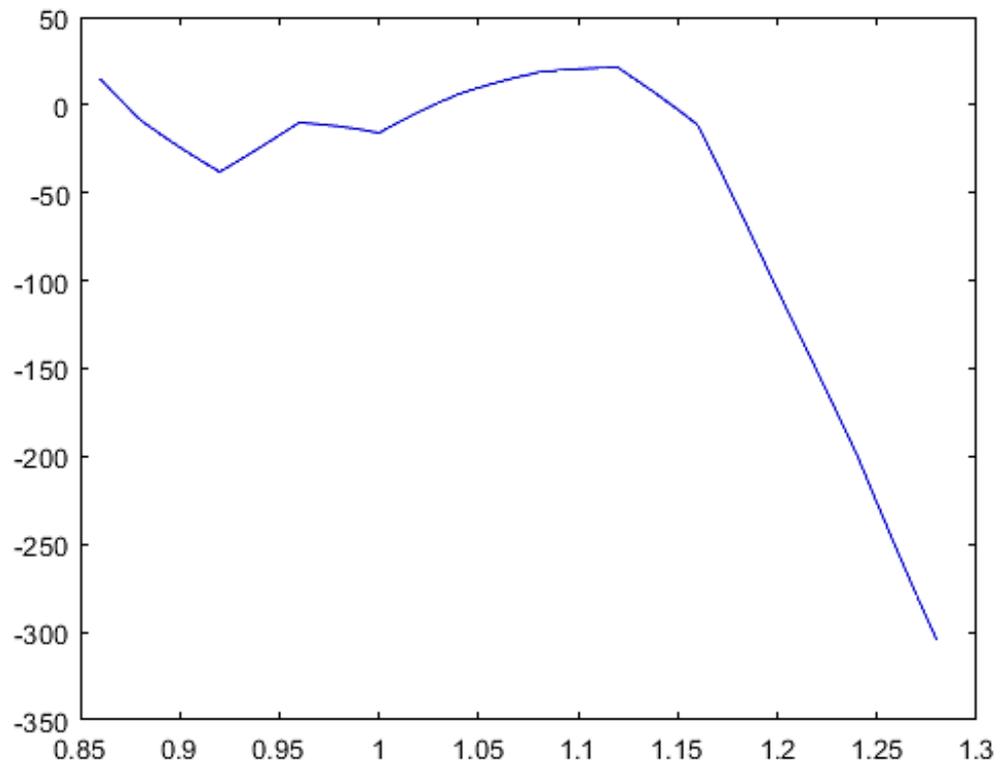


Рисунок 19. Момент в тазобедренном суставе для опорной ноги.

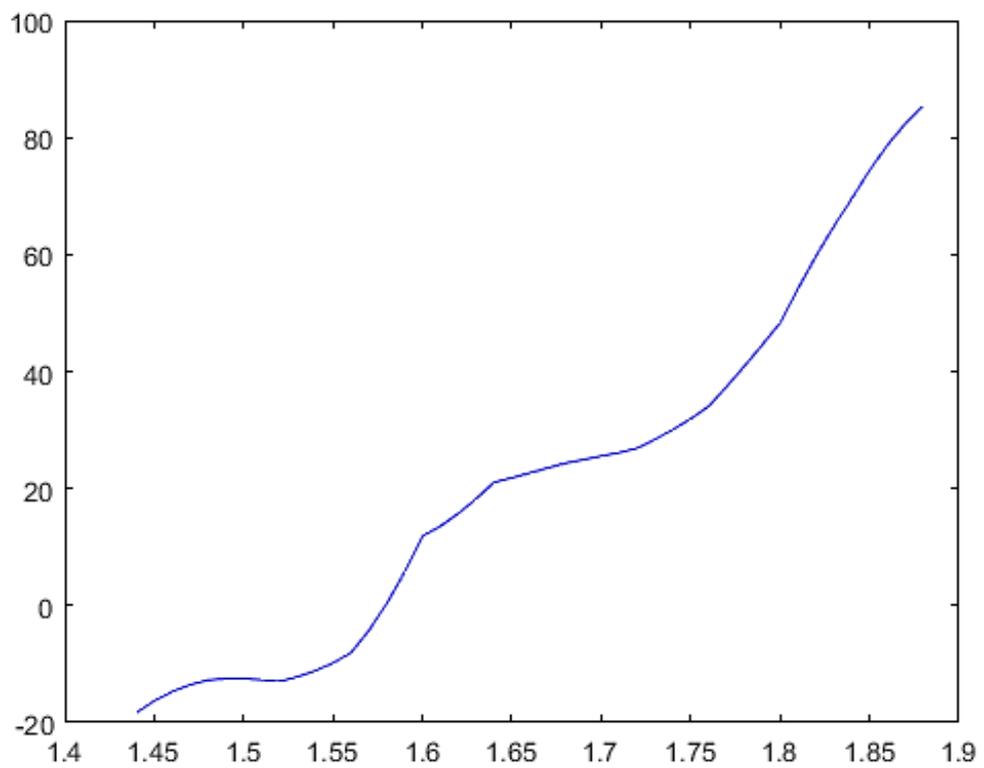


Рисунок 20. Момент в тазобедренном суставе для ноги, находящейся в фазе переноса.

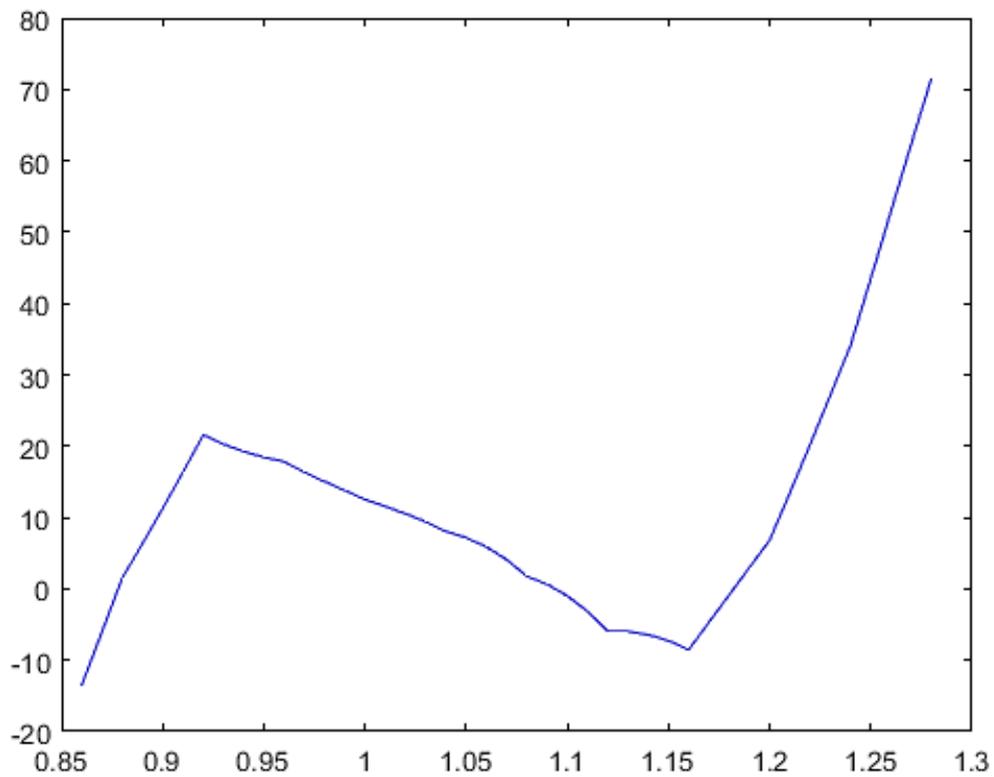


Рисунок 21. Момент в коленном суставе для опорной ноги.

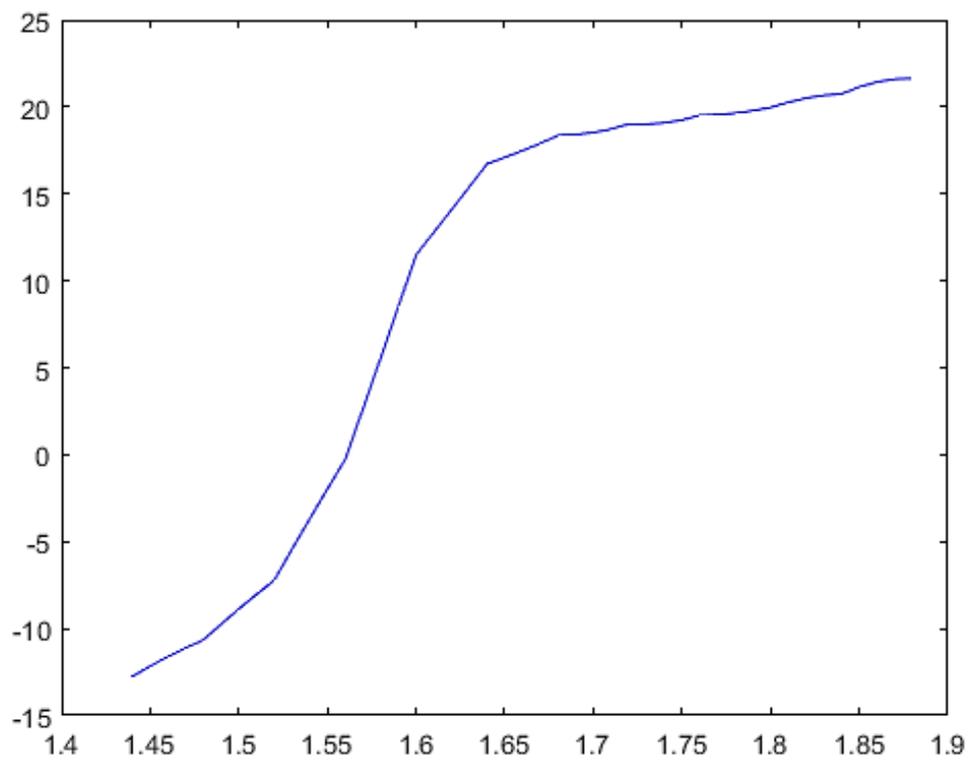


Рисунок 22. Момент в коленном суставе для ноги, находящейся в фазе переноса.

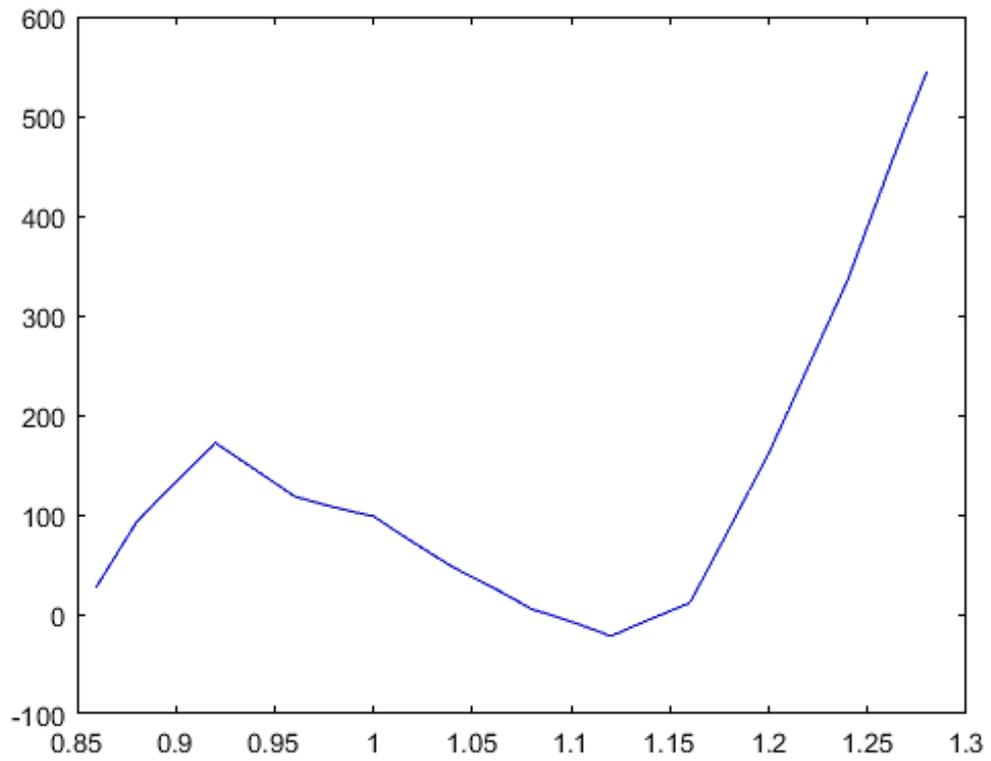


Рисунок 23. Момент в голеностопном суставе для опорной ноги.

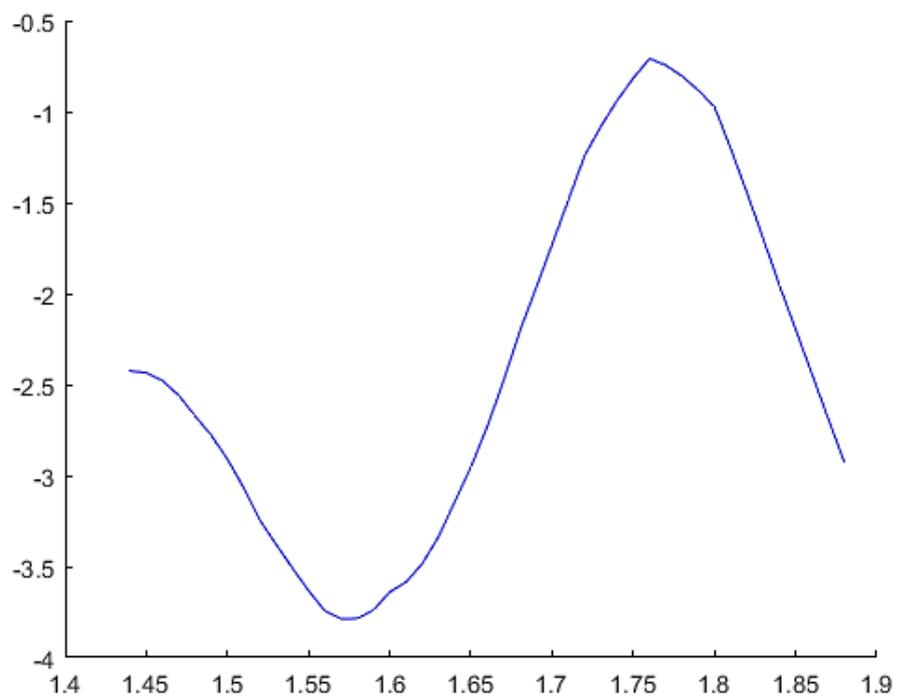


Рисунок 24. Момент в голеностопном суставе для ноги, находящейся в фазе переноса.

4.3. АКТИВНОСТЬ МЫШЦ

В работе [19] указано, что при достаточно подробной кинематической схеме и точно заданных антропометрических данных и значениях внешних сил решение прямой задачи динамики становится хорошим способом получить представление о мышечной активности.

Мышечную активность характеризует электромиограмма (ЭМГ) — электрический сигнал мышц, регистрируемых электродами (внутримышечными или поверхностными).

Назовем двигательной единицей мотонейрон, расположенный в спинном мозге, двигательный нерв и иннервируемые им мышечные волокна. Регистрируемый поверхностными электродами сигнал есть сумма сигналов отдельных двигательных единиц. Амплитуда электрического сигнала мышц будет зависеть от числа рекрутированных двигательных единиц и их синхронизации [20].

На рис. 25 выделены группы мышц, отвечающих за изменение момента в суставах нижней конечности.

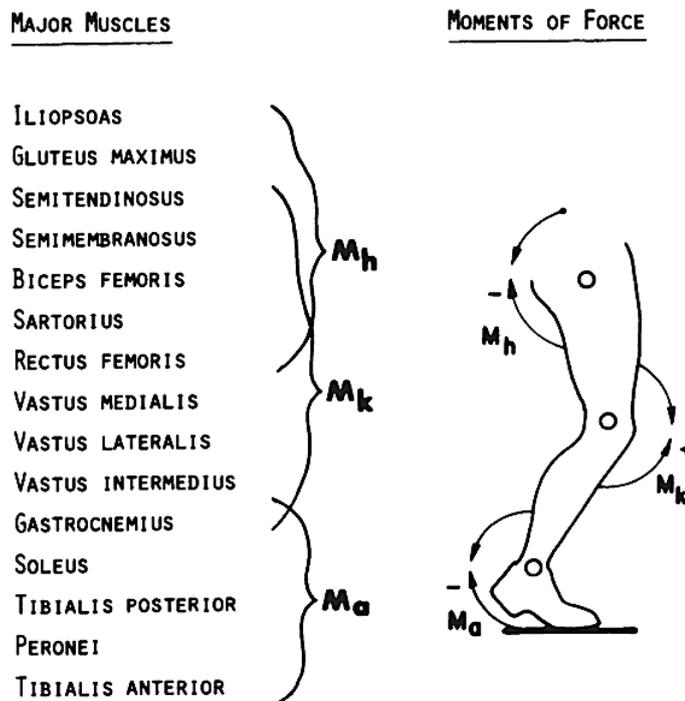


Рисунок 25. Основные мышцы, отвечающие за изменение момента в тазобедренном, коленном и голеностопном суставах [19].

Можно сопоставить данные о моментах с данными об электромиографической активности. Проще всего провести такое сравнение для голеностопного сустава, поскольку для мышц-сгибателей стопы можно четко выделить периоды активности и покоя [12].

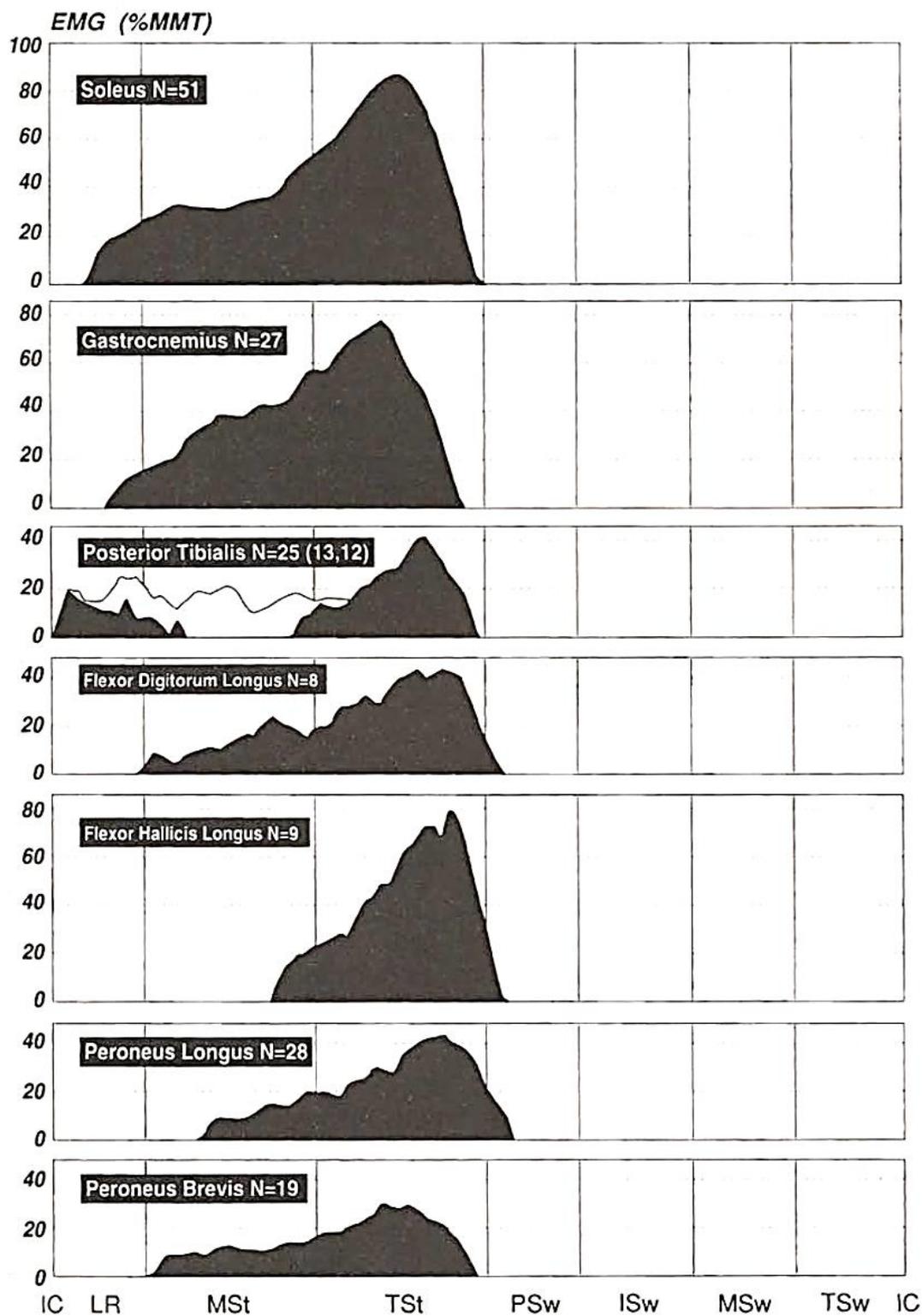


Рисунок 26. Данные ЭМГ для мышц-сгибателей стопы [12].

На рис. 26 на горизонтальной оси отмечены периоды ходьбы. MSt (*Mid Stance*) соответствует периоду опоры на всю стопу, Msw (*Mid Swing*) — фазе переноса.

Рис. 27 иллюстрирует вычисленный момент силы в голеностопном суставе; промежуток времени 0.8 — 1.3 с соответствует фазе опоры. Эта зависимость согласуется с данными ЭМГ, приведенными выше.

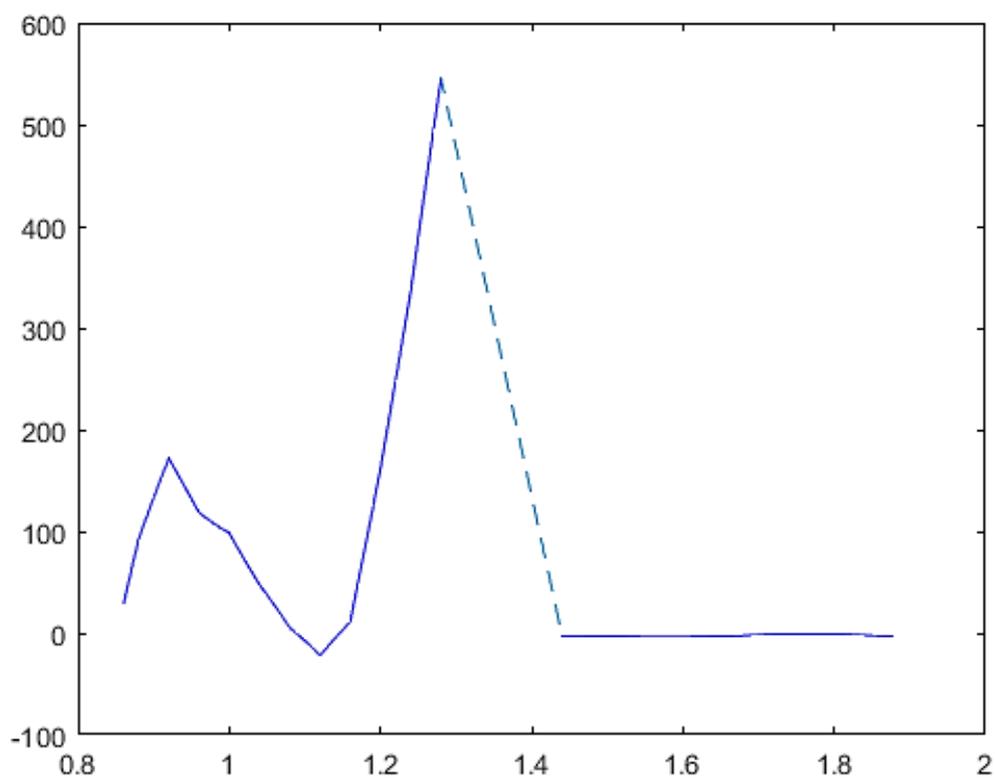


Рисунок 27. Момент, развиваемый в голеностопном суставе.

Заключение

Таким образом, были получены следующие результаты:

1. На основе анализа анатомии нижних конечностей человека построена механическая модель.
2. Получены уравнения движения модели для одноопорной фазы.
3. Разработан метод решения прямой задачи динамики и его реализация в математическом пакете Matlab.
4. Для одноопорной фазы вычислены моменты, развиваемые в суставах.
5. Дополнительно проведено сопоставление с данными ЭМГ для мышц-сгибателей стопы.

Результаты могут использоваться при решении задач управления, параметрической оптимизации, оценок затрат энергии и т. д., а также в диагностических оценках.

Список литературы

1. Формальский А. М., «Перемещение антропоморфных механизмов» — М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 368 с.
2. Клиническая оценка результатов хирургического лечения. Ошибки и осложнения. http://aupam.narod.ru/pages/deti/regul_pih_dzp/page_14.htm
3. Фломин Ю. В., «Нарушения ходьбы после инсульта и при других неврологических заболеваниях: современный междисциплинарный подход к диагностике, лечению и реабилитации». — Международный неврологический журнал №5 (59), 2013. <http://www.mif-ua.com/archive/article/36757>
4. Иваницкий М. Ф., «Анатомия человека (с основами динамической и спортивной морфологии)»: Учебник для институтов физической культуры. — Изд. 7-е. / Под ред. Б. А. Никитюка, А. А. Гладышевой, Ф. В. Судзиловского. — М.: Олимпия, 2008.— 624 с, ил.
5. Вукобратович М., «Шагающие роботы и антропоморфные механизмы», пер. с англ. А. Ю. Шнейдера под ред. В. С. Гурфинкеля. — М.: «Мир», 1976.— 543 с.
6. Зверев Ю. П. «Введение в биомеханику опорно-двигательного аппарата: учебное пособие для студентов» — Н. Новгород: ООО «Издательство «Пламя»», 2012. — 105 с.
7. Chow C. K., Jacobson D. H., Studies of Human Locomotion via Optimal Programming, Tech. Rep. № 617, Div. Eng a. Appl. Phys., Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1970.
8. Белецкий В. В., «Двуногая ходьба: модельные задачи динамики и управления». — М.: «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 288 с.

9. Чигарев А. В., Борисов А. В., «Моделирование управляемого движения двуногого антропоморфного механизма». — Российский журнал биомеханики. 2010 Т.15, №1 (51): стр. 74 — 88.
10. Коренев Г. В., «Введение в механику человека». — М.: «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1977. — 264 с.
11. Капанджи А. И., «Нижняя конечность. Функциональная анатомия.», 6 изд, 313 стр.
12. Perry J. Gait analysis. Normal and Pathological Function. — SLACK Incorporated, 6900 Grove Road, Thorofare, NJ 08086-9447, 1992.
13. История биомеханики в спорте и медицине. <http://biosoftvideo.ru/history/>
14. Walking Gait Analysis. www.youtube.com/watch?v=uO9c3DUUdzA
15. Tracker. Video Analysis and Modeling Tool. <http://physlets.org/tracker>
16. Дубровский В. И., Федорова В. Н. «Биомеханика: Учеб. для сред. и высш. учеб. заведений». — М.: Изд-во ВЛАДОС-ПРЕСС, 2003. — 672 с.
17. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И., Шикин Е. В., Заляпин В. И. «Вся высшая математика: Учебник». Т. 6. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 256 с.
18. Квасов Б. И. «Методы изометрической аппроксимации сплайнами». — М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2006. — 360 с.
19. Winter D. A. Biomechanics and Motor Control of Human Movement. 4-th ed. Waterloo, Ontario, Canada: John Wiley & Sons, Inc, 2009. 370 p.
20. ЭМГ — регистрация электрической активности мышц. <http://biosoftvideo.ru/myography/>

Приложение

Матрица А

$I_T + 0.25 m_T l_T^2$	0	$0.5 m_T l_T l_{\delta 2} \cos(\varphi_T - \varphi_{\delta 2})$	0	$0.5 m_T l_{r2} l_T \cos(\varphi_T - \varphi_{r2})$	0
0	$I_{\delta 1} + l_{\delta 1}^2 (m_{c1} + 0.25 m_{\delta 1} + m_{r1})$	$(m_{c1} + m_{r1} + 0.5 m_{\delta 1}) l_{\delta 1} l_{\delta 2} \cos(\varphi_{\delta 1} - \varphi_{\delta 2})$	$(m_{c1} + 0.5 m_{r1}) l_{r1} l_{\delta 1} \cos(\varphi_{\delta 1} - \varphi_{r1})$	$(m_{c1} + m_{r1} + 0.5 m_{\delta 1}) l_{r2} l_{\delta 1} \cos(\varphi_{\delta 1} - \varphi_{r2})$	$0.5 m_{c1} l_{c1} l_{\delta 1} \cos(\varphi_{\delta 1} - \varphi_{c1})$
$0.5 m_T l_T l_{\delta 2} \cos(\varphi_{\delta 2} - \varphi_T)$	$(m_{c1} + m_{r1} + 0.5 m_{\delta 1}) l_{\delta 1} l_{\delta 2} \cos(\varphi_{\delta 2} - \varphi_{\delta 1})$	$I_{\delta 2} + l_{\delta 2}^2 (m_{c1} + m_{r1} + m_{\delta 1} + m_T + 0.25 m_{\delta 2})$	$(m_{c1} + 0.5 m_{r1}) l_{r1} l_{\delta 2} \cos(\varphi_{\delta 2} - \varphi_{r1})$	$(m_{c1} + m_{r1} + m_{\delta 1} + m_T + 0.5 m_{\delta 2}) l_{r2} l_{\delta 2} \cos(\varphi_{\delta 2} - \varphi_{r2})$	$0.5 m_{c1} l_{c1} l_{\delta 2} \cos(\varphi_{\delta 2} - \varphi_{c1})$
0	$(m_{c1} + 0.5 m_{r1}) l_{r1} l_{\delta 1} \cos(\varphi_{r1} - \varphi_{\delta 1})$	$(m_{c1} + 0.5 m_{r1}) l_{r1} l_{\delta 2} \cos(\varphi_{r1} - \varphi_{\delta 2})$	$I_{r1} + l_{r1}^2 (m_{c1} + 0.25 m_{r1})$	$(m_{c1} + 0.5 m_{r1}) l_{r1} l_{r2} \cos(\varphi_{r1} - \varphi_{r2})$	$0.5 m_{c1} l_{c1} l_{r1} \cos(\varphi_{r1} - \varphi_{c1})$
$0.5 m_T l_T l_{r2} \cos(\varphi_{r2} - \varphi_T)$	$(m_{c1} + m_{r1} + 0.5 m_{\delta 1}) l_{r2} l_{\delta 1} \cos(\varphi_{r2} - \varphi_{\delta 1})$	$(m_{c1} + m_{r1} + m_{\delta 1} + m_T + 0.5 m_{\delta 2}) l_{r2} l_{\delta 2} \cos(\varphi_{r2} - \varphi_{\delta 2})$	$(m_{c1} + 0.5 m_{r1}) l_{r1} l_{r2} \cos(\varphi_{r2} - \varphi_{r1})$	$I_{r2} + l_{r2}^2 (m_{\delta 2} + m_T + m_{c1} + m_{\delta 1} + m_{r1} + 0.25 m_{r2})$	$0.5 m_{c1} l_{c1} l_{r2} \cos(\varphi_{r2} - \varphi_{c1})$
0	$0.5 m_{c1} l_{c1} l_{\delta 1} \cos(\varphi_{c1} - \varphi_{\delta 1})$	$0.5 m_{c1} l_{c1} l_{\delta 2} \cos(\varphi_{c1} - \varphi_{\delta 2})$	$0.5 m_{c1} l_{c1} l_{r1} \cos(\varphi_{c1} - \varphi_{r1})$	$0.5 m_{c1} l_{c1} l_{r2} \cos(\varphi_{c1} - \varphi_{r2})$	$I_{c1} + 0.25 m_{c1} l_{c1}^2$

Матрица В

0	0	$0.5m_T l_T l_{\delta 2} \sin(\varphi_T - \varphi_{\delta 2})$	0	$0.5m_T l_{r2} l_T \sin(\varphi_T - \varphi_{r2})$	0
0	0	$(m_{c1} + m_{r1} + 0.5m_{\delta 1}) l_{\delta 1} l_{\delta 2} \sin(\varphi_{\delta 1} - \varphi_{\delta 2})$	$(m_{c1} + 0.5m_{r1}) l_{r1} l_{\delta 1} \sin(\varphi_{\delta 1} - \varphi_{r1})$	$(m_{c1} + m_{r1} + 0.5m_{\delta 1}) l_{r2} l_{\delta 1} \sin(\varphi_{\delta 1} - \varphi_{r2})$	$0.5m_{c1} l_{c1} l_{\delta 1} \sin(\varphi_{\delta 1} - \varphi_{c1})$
$0.5m_T l_T l_{\delta 2} \sin(\varphi_{\delta 2} - \varphi_T)$	$(m_{c1} + m_{r1} + 0.5m_{\delta 1}) l_{\delta 1} l_{\delta 2} \sin(\varphi_{\delta 2} - \varphi_{\delta 1})$	0	$(m_{c1} + 0.5m_{r1}) l_{r1} l_{\delta 2} \sin(\varphi_{\delta 2} - \varphi_{r1})$	$(m_{c1} + m_{r1} + m_{\delta 1} + m_T + 0.5m_{\delta 2}) l_{r2} l_{\delta 2} \sin(\varphi_{\delta 2} - \varphi_{r2})$	$0.5m_{c1} l_{c1} l_{\delta 2} \sin(\varphi_{\delta 2} - \varphi_{c1})$
0	$(m_{c1} + 0.5m_{r1}) l_{r1} l_{\delta 1} \sin(\varphi_{r1} - \varphi_{\delta 1})$	$(m_{c1} + 0.5m_{r1}) l_{r1} l_{\delta 2} \sin(\varphi_{r1} - \varphi_{\delta 2})$	0	$(m_{c1} + 0.5m_{r1}) l_{r1} l_{r2} \sin(\varphi_{r1} - \varphi_{r2})$	$0.5m_{c1} l_{c1} l_{r1} \sin(\varphi_{r1} - \varphi_{c1})$
$0.5m_T l_T l_{r2} \sin(\varphi_{r2} - \varphi_T)$	$(m_{c1} + m_{r1} + 0.5m_{\delta 1}) l_{r2} l_{\delta 1} \sin(\varphi_{r2} - \varphi_{\delta 1})$	$(m_{c1} + m_{r1} + m_{\delta 1} + m_T + 0.5m_{\delta 2}) l_{r2} l_{\delta 2} \sin(\varphi_{r2} - \varphi_{\delta 2})$	$(m_{c1} + 0.5m_{r1}) l_{r1} l_{r2} \sin(\varphi_{r2} - \varphi_{r1})$	0	$0.5m_{c1} l_{c1} l_{r2} \sin(\varphi_{r2} - \varphi_{c1})$
0	$0.5m_{c1} l_{c1} l_{\delta 1} \sin(\varphi_{c1} - \varphi_{\delta 1})$	$0.5m_{c1} l_{c1} l_{\delta 2} \sin(\varphi_{c1} - \varphi_{\delta 2})$	$0.5m_{c1} l_{c1} l_{r1} \sin(\varphi_{c1} - \varphi_{r1})$	$0.5m_{c1} l_{c1} l_{r2} \sin(\varphi_{c1} - \varphi_{r2})$	0