САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ — ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

КАФЕДРА ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Чернышева Любовь Андреевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Матрица Ляпунова как решение уравнения Фредгольма

Направление 010400

Прикладная математика, фундаментальная информатика

и основы программирования

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Егоров А. В.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение

Предметом данной работы является построение матрицы Ляпунова для систем дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом. Подобные системы используются для описания многочисленных процессов, использующих передачу массы, энергии, информации и т. п. Существует множество факторов, таких как ограниченность скорости распространения взаимодействия, наличие инерционности отдельных элементов, ограниченность скорости протекания физических процессов, в связи с которыми появляется запаздывание в процессе. Иногда этим запаздыванием можно пренебречь и описать систему при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако неучитывание запаздывания зачастую может привести к результатам, несоответствующим реальности. Поэтому целесообразно использовать дифференциальные уравнения, в которых функция и ее производные входят при разных значениях аргумента.

Известно, что для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при выполнении условия Ляпунова существует единственная матрица Ляпунова [1]. В последние 10 лет проводились исследования матрицы Ляпунова, было дано новое определение [1], [3], а также найден ряд ее применений, таких как исследование устойчивости [2], построение экспоненциальных оценок решений [1], исследование робастной устойчивости [3], вычисление значения функционала качества [1], вычисление $\mathcal{H}_2$ [6] нормы и другие.

Однако до сих пор не был найден универсальный метод построения этой матрицы. Нахождение точного значения матрицы Ляпунова является непростой задачей, поэтому существуют различные методы вычисления матрицы, например, полуаналитический [1], полиномиальная аппроксимация [5], [6], кусочно-линейная аппроксимация [1].

Полуаналитический метод применим только для систем с кратными запаздываниями вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - kh), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Было показано, что вычисление матрицы Ляпунова может быть сведено к построению решения специальной краевой задачи для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. При выполнении условия Ляпунова такая задача имеет единственное решение [1]. Недостатком этого метода является отсутствие оценки погрешности вычислений, а также тот факт, что этот метод применим только для систем с кратными запздываниями. Как правило, необходимо вводить дополнительные запаздывания с нулевыми матрицами, чтобы запаздывания в системе стали кратными, что в свою очередь влечет значитльное увеличение времени работы метода, а также погрешности вычислений.

Полиномиальная аппроксимация матрицы Ляпунова осуществима также без оценки погрешности вычислений.

Численный метод построения кусочно-линейной аппроксимации матрицы Ляпунова состоит из двух этапов. На первом этапе вычисляется кусочно-линейная аппроксимация начальных условий для матрицы Ляпунова. Затем эти начальные условия используются при вычислении приближенного значения матрицы Ляпунова как решения уравнения

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=0}^{m} U(\tau - h_j) A_j, \quad \tau \geqslant 0.$$

Целью данной работы является построение матрицы Ляпунова для систем с некратными запаздываниями, а также получение оценки погрешности, применимой на практике.

Один из методов решения поставленной задачи это сведение задачи к системе, решение которой будет удовлетворять динамическому свойству, свойству симметрии и алгебраическому свойству из определения матрицы Ляпунова. Полученное интегральное уравнение будем решать численно при помощи метода последовательных приближений и квадратурного метода, используя квадратурную формулу трапеций. Для метода последовательных приближений будет найдена оценка погрешности.

Основные используемые понятия и теоремы

Определение 1 [11]. *Дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом называются дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные входят при различных значениях аргумента.*

Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений вида:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - h_j), \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь A_j, $j = 0, \ldots, m$, — матрицы размерности $n \times n$; h_j, $j = 0, \ldots, m$, — запаздывания, упорядоченные по возрастанию $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_m = H$. Запаздывания в поставленной задаче являются некратными, не зависят от времени.

Пусть $\varphi : [-H, 0] \to R^n$ — начальная функция, принадлежащая пространству $PC([-H, 0], R^n)$.

Определение 2 [1]. *Пусть $x(t, \varphi)$ — решение задачи Коши для системы (5) с начальными условиями:*

$$x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-H, 0].$$

Требуется построить матрицу Ляпунова для рассматриваемой системы дифференциально-разностных уравнений.

Определение 3 [1]. *Будем говорить, что $U(\tau)$ — матрица Ляпунова для системы (5), если она удовлетворяет следующим свойствам:*

1. Динамическое свойство:

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=0}^{m} U(\tau - h_j) A_j, \quad \tau \geqslant 0; \tag{2}$$

2. Свойство симметрии:

$$U(-\tau) = U^T(\tau); \tag{3}$$

3. Алгебраическое свойство:

$$\sum_{j=0}^{m} [U(-h_j)A_j + A_j^T U(h_j)] = -W. \tag{4}$$

Для построения матрицы Ляпунова необходимо убедиться в ее существовании и единственности. Для этого воспользуемся условием Ляпунова.

Определение 4 [1]. *Будем говорить, что система (5) удовлетворяет условию Ляпунова, если спектр системы,*

$$\Lambda = \left\{ s \mid \det \left(sI - \sum_{j=0}^{m} e^{-sh_j} A_j \right) = 0 \right\},$$

не содержит точки s_0, такой что $-s_0$ также принадлежит спектру.

Теорема 1 (О существовании и единственности матрицы Ляпунова) [1]. *Матрица Ляпунова для системы (5), ассоциированная с данной симметрической матрицей W, существует и единственна тогда и только тогда, когда система удовлетворяет условию Ляпунова.*

Определение 5 [1]. *Будем говорить, что матрица $K(t)$ размерности $n \times n$ — фундаментальная матрица системы (5), если выполнено:*

$$\frac{d}{dt} K(t) = \sum_{j=0}^{m} K(t - h_j) A_j, \quad t \geqslant 0,$$

$K(t) = 0_{n \times n}$ *для* $t < 0$, $K(0) = I$.

Определение 6 [1]. *Фундаментальная матрица системы (5) также удовлетворяет равенству:*

$$\frac{d}{dt} K(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j K(t - h_j), \quad t \geqslant 0.$$

Теорема 2 [1]. *Дана начальная функция $\varphi \in PC([-H,0],R^n)$. Выполнено следующее равенство, называемое формулой Коши:*

$$x(t,\varphi) = K(t)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{m} \int_{-h_j}^{0} K(t-\theta-h_j)A_j\varphi(\theta)d\theta, \quad t \geqslant 0.$$

Здесь $x(t,\varphi)$ — решение системы (5).

Поиск решения системы (5) осуществляется при помощи метода последовательного интегрирования [8].

Определение 7 [7]. *Системой интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода называется равенство:*

$$Y(s) = G(s) + \int_{0}^{H} F(s,x)Y(x)dx.$$

Здесь $Y(s)$ — искомая функция, а $F(s,x)$ и $G(s)$ — известные функции, заданные на отрезке $[0,H]$. Функцию $F(s,x)$ будем называть ядром интегрального уравнения.

Определение 8 [1]. *Функцией Хевисайда будем называть функцию*

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Будем использовать равномерную норму:

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[0,H]} \|\varphi(t)\|.$$

Определение 9 [5]. *Кронекеровым произведением матриц будем называть операцию:*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{21}A & \cdots & b_{n1}A \\ b_{12}A & b_{22}A & \cdots & b_{n2}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n}A & \cdots & b_{nn}A \end{pmatrix}; \tag{6}$$

$$C \overset{\scriptscriptstyle T}{\otimes} D = \begin{pmatrix} c_{11}d_1^T & c_{12}d_1^T & \cdots & c_{1p}d_1^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1}d_1^T & c_{q2}d_1^T & \cdots & c_{qp}d_1^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{11}d_m^T & c_{12}d_m^T & \cdots & c_{1p}d_m^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1}d_m^T & c_{q2}d_m^T & \cdots & c_{qp}d_m^T \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Определение 10 [1]. *Будем говорить, что* $\tilde{u} = \mathrm{vec}(U)$ *операция векторизации матрицы* U, *если* $\tilde{u}$ *получается путем размещения последовательно столбцов матрицы один под другим. Эта операция удовлетворяет равенству:*

$$\mathrm{vec}(AUB) = (A \otimes B)\tilde{u}$$

и равенству

$$\mathrm{vec}(CU^T D) = (C \overset{\scriptscriptstyle T}{\otimes} D)\tilde{u}.$$

Матрица Ляпунова как решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^{m} A_j x(t - h_j), \tag{8}$$

где A_j, $j = 0, \ldots, m$, — заданные матрицы размерности $n \times n$; h_j, $j = 0, \ldots, m$, — запаздывания, упорядоченные по возрастанию $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_m = H$.

Вычислим для $\xi \in (0, t)$ частную производную

$$\frac{\partial [U(\xi) K(t - \xi)]}{\partial \xi}.$$

Будем использовать динамическое свойство

$$\frac{dU(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=0}^{m} U(\tau - h_j) A_j, \quad \tau \geqslant 0.$$

Получим

$$\frac{\partial [U(\xi) K(t - \xi)]}{\partial \xi} = U(\xi) A_0 K(t - \xi) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} U(\xi - h_j) A_j K(t - \xi) - U(\xi) A_0 K(t - \xi) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} U(\xi) A_j K(t - \xi - h_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left[U(\xi - h_j A_j K(t - \xi) - U(\xi) A_j K(t - \xi - h_j) \right].$$

Проинтегрируем это равенство по ξ на отрезке $[0, t]$.

Получим, что интеграл левой части равен

$$\int\limits_0^t \left(\frac{\partial[U(\xi)K(t-\xi)]}{\partial\xi}\right) d\xi = U(t)K(t-t) - U(0)K(t) =$$

$$= U(t) - U(0)K(t).$$

Интеграл правой части записывается в виде

$$J(t) = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^m \left[K(t-\xi)U(t-h_j)A_j - K(t-\xi-h_j)A_jU(\xi)\right] d\xi.$$

Или

$$J = \sum_{j=1}^m \int\limits_0^t \left[U(\xi-h_j)A_jK(t-\xi) - U(\xi)A_jK(t-\xi-h_j)\right] d\xi =$$

$$= \langle\theta = \xi - h\rangle = \sum_{j=1}^m \int\limits_{-h_j}^{t-h_j} U(\theta)A_jK(t-\theta-h_j)d\theta - \sum_{j=1}^m \int\limits_0^t U(\xi)A_jK(t-\xi-h_j)d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int\limits_{-h_j}^0 U(\theta)A_jK(t-\theta-h_j)d\theta - \sum_{j=1}^m \int\limits_{t-h_j}^t U(\xi)A_jK(t-\xi-h_j)d\xi.$$

Так как $t-\xi-h_j < 0$ для $\xi \in (t-h_j, t]$, $K(t-\xi-h_j) = 0_{n\times n}$. Получаем равенство

$$J = \sum_{j=1}^m \int\limits_{-h_j}^0 U(\theta)A_jK(t-\theta-h_j)d\theta.$$

В результате заключаем, что

$$U(t) - U(0)K(t) = \sum_{j=1}^m \int\limits_{-h_j}^0 U(\theta)A_jK(t-\theta-h_j)d\theta.$$

Отсюда

$$U(t) = U(0)K(t) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{-h_j}^{0} U(\theta)A_j K(t-\theta-h_j)d\theta, \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

Далее применим к полученному выражению свойство симметрии

$$U(-\tau) = U^T(\tau).$$

Чтобы матрица Ляпунова вычислялась на положительной оси, необходимо сделать замену

$$\int\limits_{-h_j}^{0} U^T(-\theta)K(t-\theta-h_j)d\theta = \langle \eta = -\theta \rangle =$$

$$\int\limits_{0}^{h_j} U^T(\eta)A_j K(t+\eta-h_j)d\eta.$$

В итоге получим

$$U(t) = U(0)K(t) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{0}^{h_j} U^T(\eta)A_j K(t+\eta-h_j)d\eta, \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

Осталось применить третье свойство — алгебраическое:

$$\sum_{j=0}^{m} [U(-h_j)A_j + A_j^T U(h_j)] = -W, \tag{11}$$

где W — произвольная положительно определенная матрица соответствующей размерности.

Чтобы учесть алгебраическое свойство необходимо сначала векторизовать уравнения (10) и (11).

Равенство (10) примет вид:

$$\tilde{u}(t) = (I \otimes K(t))\tilde{u}(0) + \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{h_j} (I \overset{\tau}{\otimes} A_j K(t + \eta - h_j))\tilde{u}(\eta) d\eta, \quad t \geqslant 0. \tag{12}$$

Алгебраическое свойство (11) запишется в виде:

$$\sum_{j=1}^{m} [(I \overset{\tau}{\otimes} A_j)\tilde{u}(h_j) + (A_j^T \otimes I)\tilde{u}(h_j)] = -\tilde{w}. \tag{13}$$

В уравнении (13) неизвестными являются $\tilde{u}(h_j)$ и $\tilde{u}(0)$, где $\tilde{u}(h_j)$ можно получить по формуле (12), подставив h_j вместо t. Затем необходимо из алгебраического свойства выразить $\tilde{u}(0)$ и подставить в исходную формулу Коши (12).

В итоге получим систему интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода:

$$\tilde{u}(\tau) = G(\tau) + \int_{0}^{H} F(\tau, \eta)\tilde{u}(\eta) d\eta. \tag{14}$$

Опишем более подробно процесс получения ядра $F(\tau, \eta)$ и функции $G(\tau)$ на примере скалярного уравнения.

Формула Коши в скалярном случае с учетом динамического свойства и свойства симметрии будет выглядеть следующим образом:

$$u(t) = k(t)u(0) + \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{0}^{h_j} k(t + \eta - h_j)u(\eta) d\eta. \tag{15}$$

Алгебраическое свойство в скалярном случае примет вид:

$$\sum_{j=0}^{m} a_j u(h_i) = -w/2. \tag{16}$$

Здесь w — любое положительное число.

Найдем $u(h_i)$ по уже полученной формуле (15)

$$u(h_i) = k(h_i)u(0) + \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{0}^{h_j} k(h_i + \eta - h_j)u(\eta) d\eta.$$

Подставим получившееся выражение в алгебраическое свойство (16)

$$\sum_{i=0}^{m}\left[k(h_i)u(0)+\sum_{j=1}^{m}a_j\int\limits_0^{h_j}k(h_i+\eta-h_j)u(\eta)d\eta\right]=-w/2.$$

Или

$$a_0u(0)+\sum_{i=1}^{m}a_ik(h_i)u(0)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_ia_j\int\limits_0^{h_j}k(h_i+\eta-h_j)u(\eta)d\eta=-w/2.$$

Далее выразим $u(0)$:

$$u(0)(a_0+\sum_{i=1}^{m}a_ik(h_i))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_ia_j\int\limits_0^{h_j}k(h_i+\eta-h_j)u(\eta)d\eta=-w/2,$$

$$u(0)=-\frac{w/2+\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}a_ia_j\int\limits_0^{h_j}k(h_i+\eta-h_j)u(\eta)d\eta}{a_0+\sum\limits_{i=1}^{m}a_ik(h_i)}.$$

Полученное выражение для $u(0)$ подставим в исходную формулу Коши (15):

$$u(\tau)=-k(\tau)\frac{w/2+\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}a_ia_j\int\limits_0^{h_j}k(h_i+\eta-h_j)u(\eta)d\eta}{a_0+\sum\limits_{i=1}^{m}a_ik(h_i)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}a_j\int\limits_0^{h_j}k(t+\eta-h_j)u(\eta)d\eta.$$

Или

$$u(\tau)=-\frac{k(\tau)w/2}{a_0+\sum\limits_{i=1}^{m}a_ik(h_i)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m} a_j \int\limits_0^{h_j} \left(k(\tau+\eta-h_j) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i k(\tau) k(h_i+\eta-h_j)}{a_0+\sum\limits_{i=1}^{m} a_i k(h_i)} \right) u(\eta) d\eta, \quad \tau \geqslant 0.$$

Воспользуемся функцией Хевисайда $\chi(t)$ так, чтобы получить один интеграл с пределами от 0 до наибольшего из запаздываний H.

$$u(\tau) = -\frac{k(\tau)w/2}{a_0+\sum\limits_{i=1}^{m} a_i k(h_i)} +$$

$$+\int\limits_0^{h_j} \sum_{j=1}^{m} a_j \left(k(\tau+\eta-h_j) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i k(\tau) k(h_i+\eta-h_j)}{a_0+\sum\limits_{i=1}^{m} a_i k(h_i)} \right) \chi(h_j-\eta) u(\eta) d\eta, \quad \tau \geqslant 0.$$

Пусть

$$g(\tau) = -\frac{k(\tau)w/2}{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i k(h_i)};$$

$$f(\tau,\eta) = \sum_{j=1}^{m} \left(\left(a_j k(\tau+\eta-h_j) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i k(\tau) k(h_i+\eta-h_j)}{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i k(h_i)} \right) \chi(h_j-\eta) \right).$$

Тогда

$$u(\tau) = g(\tau) + \int\limits_0^{H} f(\tau,\eta) u(\eta) d\eta. \tag{17}$$

Полученное выражение является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

Методы решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений применяется для решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Каждое последующее приближение находится по формуле:

$$u_{n+1}(\tau) = g(\tau) + \int\limits_0^H f(\tau, \eta) u_n(\eta) d\eta.$$

Первое приближение u_0 выбирается произвольным образом.

Оценку погрешности можно получить при помощи принципа сжимающих отображений. Введем оператор:

$$A(u)(\tau) = g(\tau) + \int\limits_0^H f(\tau, \eta) u(\eta) d\eta.$$

Известно [10], что

$$\|A(u) - A(v)\| \leqslant q\|u - v\|,$$

где $0 \leqslant q < 1$.

Необходимо оценить q:

$$\|A(u)(\tau) - A(v)(\tau)\| = \left\| \int\limits_0^H f(\tau, \eta)(u(\eta) - v(\eta)) d\eta \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_0^H f(\tau, \eta) d\eta \right\| \max_{\eta \in [0,H]} \|u(\eta) - v(\eta)\|.$$

Отсюда
$$q = \left\| \int\limits_0^H f(\tau, \eta) d\eta \right\|.$$

Если $0 \leqslant q < 1$, то A — сжимающий оператор. В таком случае можно говорить о сходимости метода.

Пусть u — точное решение, u_n — приближенное решение, полученное на n-ом шаге.

Тогда
$$\|u_n - u\| \leqslant \|u_{n+1} - u_n\| + \|u_{n+1} - u\| \leqslant$$
$$\leqslant \|u_{n+1} - u_n\| + \|A(u_n) - A(u)\| \leqslant \|u_{n+1} - u_n\| + q\|u_n - u\|.$$

Отсюда
$$\|u_n - u\| \leqslant \frac{1}{1-q}\|u_{n+1} - u_n\|.$$

Также можно можно получить оценку погрешности для $n+1$ приближения:
$$\|u_{n+1} - u\| \leqslant q\|u_n - u\| \leqslant \frac{q}{1-q}\|u_{n=1} - u_n\|.$$

Таким образом, методом последовательных приближений можно построить приближенное значение матрицы Ляпунова с любой наперед заданной точностью. Существенным недостатком этого метода является жесткое условие сходимости, так как оно выполняется только при малых значения коэффициентов. Метод достаточно прост в практической реализации, но из-за того, что на каждой итерации, а так же при вычислении оценки погрешности необходимо вычислять значения нескольких интегралов, метод сходится довольно медленно.

Квадратурный метод

Численное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода можно также построить методом квадратур. Для этого необходимо взять на отрезке $[0, H]$ сетку с узлами $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Сетка равномерная с шагом h. Уравнение (17) в узлах сетки запишется следующим образом:

$$u(\tau_i) = g(\tau_i) + \int\limits_0^H f(\tau_i, \eta) u(\eta) d\eta, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{18}$$

Аппроксимируя интегралы в равенствах (18) конечными суммами при помощи квадратурной формулы, получим:

$$u_i = g_i + \sum_{k=1}^{n} B_k f_{ik} u_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{19}$$

Здесь $u_i = \tilde{u}(\tau_i), \tilde{u}$ — приближение к искомой функции u; B_k — веса квадратурной формулы; $f_{ik} = f(\tau_i, \tau_k)$.

При аппроксимации интегралов конечными суммами будет использоваться квадратурная формула трапеций:

$$u_i = g_i + h \sum_{k=1}^{n} w_k f_{ik} u_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{20}$$

$w_1 = w_n = 1/2, w_k = 1, k = 2, 3, \dots, n-1.$

Пусть Δ — определитель системы (19), а Δ_{ki} — алгебраическое дополнение элемента определителя Δ с индексами k, i.

Обозначим

$$p_f(\tau) = \int\limits_0^H f(\tau, \eta) g(\eta) d\eta - \sum_{k=1}^{n} B_k g(\tau_k),$$

$$p_k(\tau, v) = \int\limits_0^H f(\tau, \eta) f(\eta, v) d\eta - \sum_{k=1}^{n} B_k K(\tau_k, v).$$

$$p_f = \max_{\tau} |p_f(\tau)|,$$

$$p_k = \max_{\tau} \int\limits_0^H |p_k(\tau, v)|.$$

Погрешность ε вычислений квадратурного метода находится по формуле:

$$\varepsilon \leqslant M(p_f + p_k S). \tag{21}$$

Здесь

$$B \geqslant \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} |\Delta_{ki}|,$$

S — максимум точного решения.

Верхнюю оценку решения можно получить, например, из другого грубого метода.

Оценку квадратурного метода можно получить и без использования максимума решения [7]. Получение оценки погрешности без использования максимума точного решения является основным направлением дальнейших исследований.

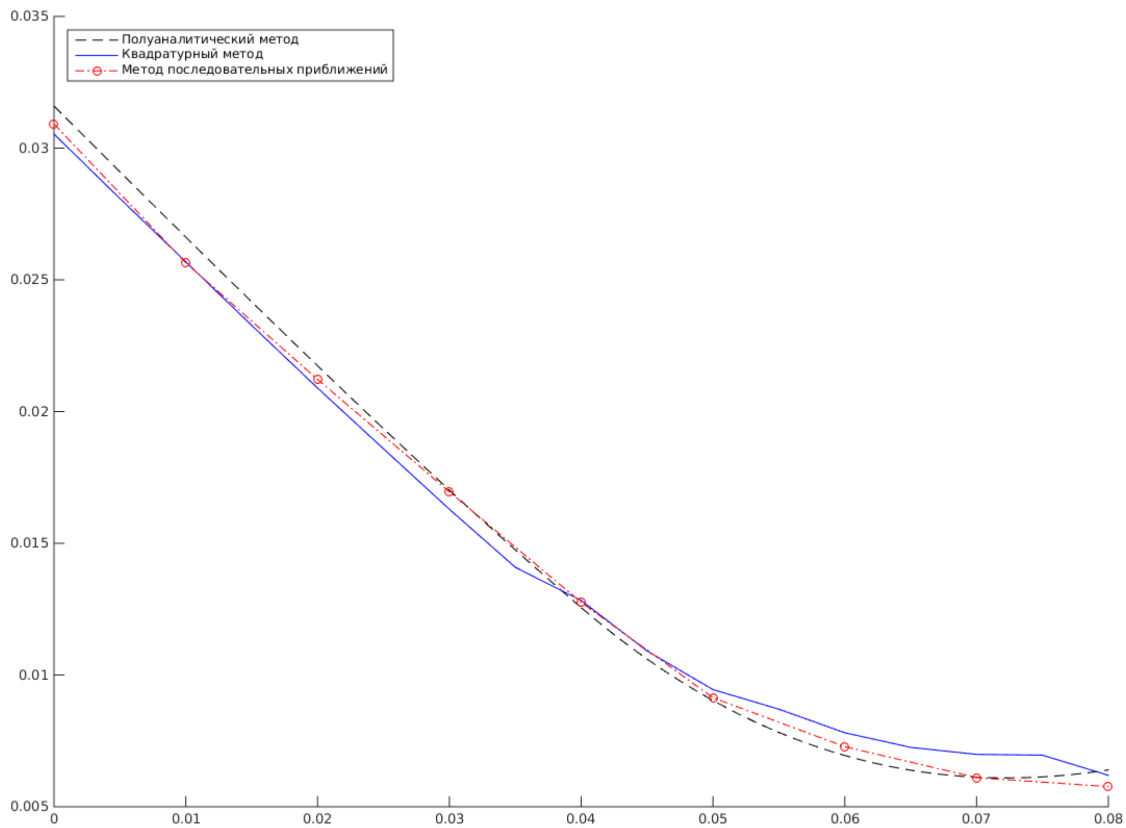
Практическая реализация

Пример 1

Рассмотрим уравнение:

$$\dot{x}(t) = -12.9x(t) - 12.45x(t-0.04) + 10x(t-0.08), \quad w = 1.$$

Для этого примера условие сходимости метода последовательных приближений выполняется. Зададим точность $\varepsilon = 0.001$.



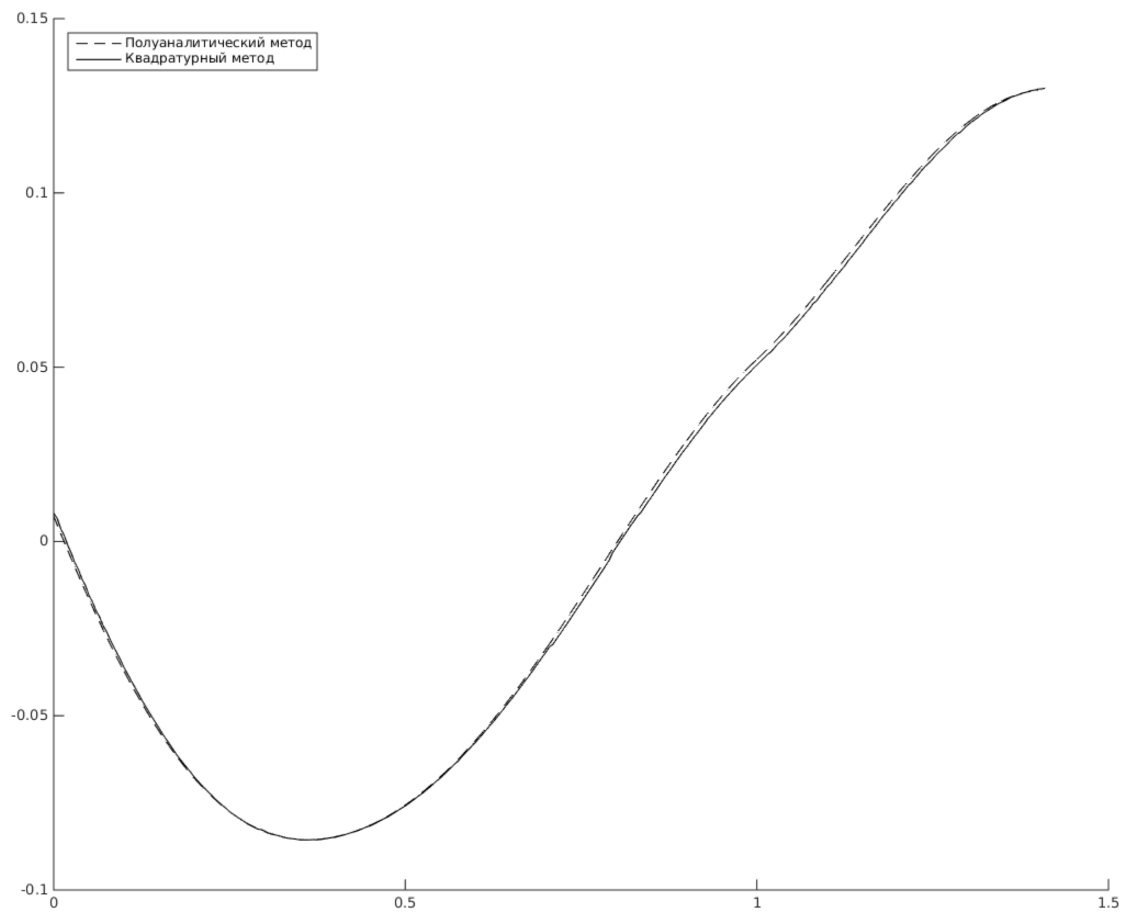
Методом последовательных приближений было сделано 2 итерации, значение q для данной системы равно 0.2969. Время работы программы 757 секунд или около 13 минут.

Пример 2

Рассмотрим теперь дифференциально-разностное уравнение с двумя некратными запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 2x(t-1) - 3x(t-\sqrt{2}), \quad w = 1.$$

Метод последовательных приближений на этом примере не сходится. Точность вычислений $\varepsilon = 0.005$.



Стоит отметить, что, так как полуаналитический метод не работает на некратных запаздываниях, то в данном примере вместо $\sqrt{2}$ было взято число 1.4, а запаздывания 0.1, 0.2,..., 1.4. Таким образом, уравнение для полуаналитического метода имело 14 запаздываний. При увеличении точности вычисления операции извлечения корня на каждый знак после запятой количество запаздываний в полуаналитическом методе будет увеличиваться в 10 раз. Так, например, взяв $\sqrt{2} = 1.4142$, количество запаздываний будет 14000, что существенно замедляет работу программы.

Время работы квадратурного метода составляет 47 секунд.

Заключение

В данной работе для систем дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом была построена матрица Ляпунова методом последовательных приближений и методом квадратур. Также в работе были приведены оценки погрешностей численных методов и рассмотрен численный пример.

В качестве направлений дальнейших исследований отметим нахождение более точной оценки погрешности для квадратурного метода, а также реализацию решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода для систем дифференциально-разностных уравнений.

Список литературы

1. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices // Birkhauser, Basel. 2013.

2. Egorov A.V., Mondie S. Necessary stability conditions for linear delay systems // Automatica. 2014. Vol. 50(12). 3204-3208.

3. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39(1). P. 15-20.

4. Infante, E.F., Castelan, W. V. A Lyapunov functional for a matrix difference-differential equation // J. Differ. Equat. 29, 439-451. 1978.

5. Huesca E., Mondie S., Santos O. Polynomial approximations of the Lyapunov matrix of a class of time delay systems // Sinaia, Romania. 2009.

6. Jarlebring E., Vanbiervliet J., Michiels W. Characterizing and computing $\mathcal{H}_2$ norm of time delay systems by solving the delay Lyapunov Equaion // Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. 2010.

7. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов // М., Мир. с. 215-223. 1983.

8. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения // М., Мир. 1967.

9. Чижова О. Н. Методы исследования дифференциальных уравнений с запздывающим аргументом // СПб, Соло. с. 5-11. 2011.

10. Колмогоров А. Н., Фомин. С. В. Элементы теории функций и функционального анализа // 4-е изд. М.: Наука. с. 544. 1976.

11. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы Том 2 // М., Наука. с. 267-273. 1977.