

Санкт-Петербургский государственный университет

Механика и математическое моделирование

Теоретическая механика

Никитин Данил Юрьевич

**Электромагнитные аспекты динамики вращательного движения  
экранированного искусственного спутника Земли относительно  
центра масс**

Бакалаврская работа

Научный руководитель:

профессор, д.ф.-м.н. Тихонов Алексей Александрович

Рецензент:

профессор, д.ф.-м.н. Александров Александр Юрьевич

Санкт-Петербург

2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mechanics and mathematical modeling

Theoretical Mechanics

Nikitin Danil Yurievich

**Electromagnetic aspects in attitude dynamics of a shielded Earth  
artificial satellite with respect to the centre of masses**

Bachelor's Thesis

Scientific supervisor:

Professor, Dr.Sci.(Phys.-Math.) A.A. Tikhonov

Reviewer:

Professor, Dr.Sci.(Phys.-Math.) A.Yu. Aleksandrov

Saint-Petersburg

2016

# Оглавление

	Страница
Введение	4
1. Основные понятия и обозначения	7
2. Вычисление компонент тензора заряда	10
3. Расчёт момента сил Лоренца	13
4. Первый интеграл движения ИСЗ в случае круговой экваториальной орбиты	17
5. Прямое положение равновесия ИСЗ и его устойчивость	19
6. Стационарные вращения ИСЗ и их устойчивость	23
Заключение	30
Список литературы	31

## Введение

Запуск первых искусственных спутников Земли (ИСЗ) ознаменовал собой бурное развитие космодинамики и возникновение в связи с этим новых направлений в науке и технике, в частности, возникли задачи, тесно связанные с задачей механики о вращении твёрдого тела относительно точки. Одной из таких задач является управление угловым движением ИСЗ, т.е. вращательным движением ИСЗ относительно центра масс. Данная задача и по сей день является важной и актуальной проблемой космодинамики. При решении этой задачи исследователь неизбежно сталкивается с необходимостью рассмотрения и учёта разного рода сил и моментов, действующих на ИСЗ. Решению данной задачи посвящено множество работ отечественных и зарубежных авторов, таких как В.В. Белецкий, М.Ю. Овчинников, В.И. Попов, В.А. Сарычев, А.А. Тихонов, А.А. Хентов, J.V. Breakwell, T.R. Kane, R. Pringle Jr. и многих других исследователей.

Искусственные спутники Земли широко используются для научных исследований и прикладных задач (военные спутники, метеорологические спутники, навигационные спутники, спутники связи и т.д.). Для успешного выполнения поставленных перед ИСЗ задач, одну из ключевых ролей играет система ориентации и стабилизации ИСЗ. В настоящее время системы ориентации и стабилизации ИСЗ можно разделить на три основные группы: пассивные, активные и комбинированные [7].

Активная система ориентации и стабилизации – это система, требующая на борту ИСЗ источника энергии, которая расходуется на создание управляющих моментов, а также различных активных устройств для создания этих моментов. Основными преимуществами активных систем управления являются высокая точность ориентации, возможность создавать большие по величине управляющие моменты,

высокое быстродействие. Недостатками данных систем несомненно являются высокая стоимость, сложность, ограниченный срок службы, низкая надёжность.

Пассивная система ориентации и стабилизации – это система, осуществляющая управление путем взаимодействия с окружающей средой ИСЗ (гравитационное поле, магнитное поле, солнечное давление, аэродинамическое сопротивление), или же за счёт свойства свободно вращающегося твердого тела сохранять неподвижной в инерциальном пространстве ось вращения. Ориентация и стабилизация осуществляются без использования активных управляющих устройств, кроме того, данный тип управления не требует для своей работы запасенных источников энергии, что несомненно является одним из главных преимуществ пассивных систем. К преимуществам также следует отнести высокую надежность, относительную простоту конструкции, практически неограниченный срок службы, сравнительно малую стоимость, что является немаловажным фактором в настоящее время. Основными недостатками являются низкая точность, низкое быстродействие, малые по величине управляющие моменты, вследствие чего возникает требование точного математического моделирования движения ИСЗ. Среди пассивных систем ориентации и стабилизации в настоящее время преимущественно распространены системы, основанные на использовании гравитационного и магнитного полей Земли для создания управляющих моментов. В данной работе будут использованы именно такие системы стабилизации и ориентации.

Комбинированные системы строят из элементов пассивных и активных систем, по возможности вбирая в себя лучшие качества тех и других и уменьшая влияния их недостатков в отдельности. В большинстве случаев активные элементы используются либо единожды, либо в определенные отрезки времени, в остальное время комбинированные и пассивные

системы управления ИСЗ аналогичны.

Благодаря накопленным знаниям стали возможны запуски ИСЗ с живым объектом на борту. В наше время такие проекты уже не редкость, в связи с чем остро стоит вопрос о защите ИСЗ (в частности живого объекта на борту) от космического излучения. Длительное воздействие космической радиации способно крайне негативно отразиться на здоровье человека (живого объекта). Для дальнейшего продвижения человечества к иным планетам Солнечной системы следует разработать надёжную защиту от подобных опасностей – учёные из разных уголков нашей планеты уже ищут способы решения этой проблемы. Одним из способов решения данной проблемы является создание систем электростатической защиты (ЭСЗ), основанной на использовании электростатически заряженного экрана, покрывающего защищаемый объём, обладающего определённым потенциалом относительно окружающей его среды и отклоняющего падающие потоки заряженных частиц от своей поверхности. Интересные модели ЭСЗ были предложены и исследованы с точки зрения защиты ИСЗ в работах [11], [12], [13], [14].

При движении ИСЗ, снабжённого экраном ЭСЗ, по околоземной орбите, в результате взаимодействия электрического заряда экрана с магнитным полем Земли (МПЗ) возникают дополнительно действующие на ИСЗ силы Лоренца [6]. В связи с этим возникает задача, посвящённая влиянию главного момента сил Лоренца на вращательное движение заряженного ИСЗ относительно его центра масс. Данная задача получила своё развитие в работах В.В. Белецкого, Л.И. Кузнецова, А.А. Тихонова, В.В. Лулева, Г.В. Ляховки, Н.В. Чиковой, К.Г. Петрова, К.А. Антипова, А.А. Хентова, D.K. Giri, M. Sinha, K.D. Kumar и ряда других авторов. Полученные ими результаты позволили взглянуть на данную задачу с точки зрения управления ИСЗ. В частности было показано, что лоренцевы силы могут оказывать стабилизирующее воздействие на ИСЗ [2], [4], [5], [9].

# 1. Основные понятия и обозначения

Целью данной работы является исследование возможности использования лоренцевых сил для пассивной и полупассивной стабилизации ИСЗ с экранами в виде трёх торов. Рассмотрим твёрдое тело с ЭСЗ. Основным элементом ЭСЗ является электростатически заряженный экран, который при движении системы в МПЗ становится источником сил Лоренца, действующих на ИСЗ. Заряженные торы жёстко соединены с твёрдым телом стержнями из диэлектрического материала. На поверхности каждого тора находится заряд. Каждый тор будем характеризовать тремя величинами  $(R_i, r_i, Q_i)$   $i = 1, 2, 3$ , где  $R_i$  – расстояние от центра образующей окружности до оси вращения  $i$ -го тора,  $r_i$  – радиус образующей окружности  $i$ -го тора,  $Q_i$  – заряд на поверхности  $i$ -го тора. Данная модель ЭСЗ была предложена в работе [14] и показана эффективность данной модели при защите ИСЗ от космического излучения.

В работе вводятся в рассмотрение следующие системы координат:  $O_3X_*Y_*Z_*$  (Рис.1) – инерциальная система координат (ось  $O_3Z_*$  направлена по оси собственного вращения Земли, ось  $O_3X_*$  – на точку весеннего равноденствия, начало координат  $O_3$  совпадает с центром Земли, а плоскость  $X_*Y_*$  совпадает с плоскостью земного экватора);  $C\xi\eta\zeta$  (Рис.2) – орбитальная система координат с началом в центре масс ИСЗ (ось  $C\xi$  ( $\vec{\xi}_0$ ) направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось  $C\eta$  ( $\vec{\eta}_0$ ) – по нормали к плоскости орбиты, ось  $C\zeta$  ( $\vec{\zeta}_0$ ) – по радиус-вектору  $\vec{R}$  центра масс ИСЗ относительно центра Земли);  $Cxyz$  (Рис.2) – жестко связанная с ИСЗ и с осями, направленными вдоль его главных центральных осей инерции (орты  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ).

Взаимную ориентацию осей систем координат  $C\xi\eta\zeta$  и  $Cxyz$  описывает матрица направляющих косинусов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

ТАК, ЧТО

$$\vec{\xi}_0 = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}, \quad \vec{\eta}_0 = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}, \quad \vec{\zeta}_0 = \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}.$$

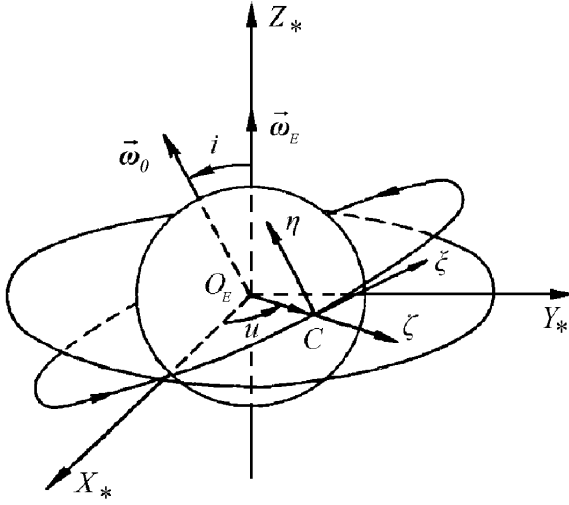


Рис. 1: Орбитальная и инерциальная системы координат.

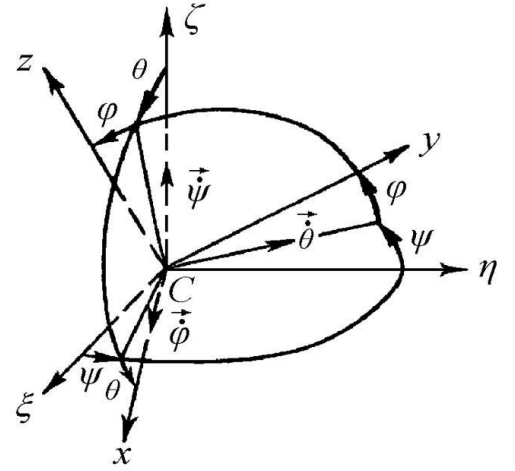


Рис. 2: Орбитальная система координат и главные центральные оси инерции.

Инерционные свойства ИСЗ характеризуются тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$  в системе его главных центральных осей инерции  $Cxyz$ . Электростатические свойства ИСЗ будем характеризовать тензором заряда  $\Sigma = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$  [10] в главных центральных осях заряда  $Ox_1^0x_2^0x_3^0$  с ортами  $\vec{i}_1^0, \vec{i}_2^0, \vec{i}_3^0$ . Начало системы  $Ox_1^0x_2^0x_3^0$  взято в центре заряда, определяемом следующим радиус-вектором относительно центра масс ИСЗ:

$$\vec{CO} = \vec{\rho}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} = Q^{-1} \int_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \vec{\rho}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) dV.$$



Здесь  $\vec{\rho}$  – радиус-вектор элемента  $dV$  относительно центра масс ИСЗ, интегрирование производится по объёму, в котором распределён заряд. В частности, заряд ИСЗ может быть распределён по некоторой его поверхности. В этом случае интегрирование следует производить по этой поверхности, понимая под  $\sigma$  поверхностную плотность распределения заряда. Элементы тензора  $\Sigma$  определяются равенствами:

$$a_1 = \int_V \sigma x_1^2 dV, \quad a_2 = \int_V \sigma x_2^2 dV, \quad a_3 = \int_V \sigma x_3^2 dV. \quad (1)$$

Удобной для использования является также система координат  $Oq_1q_2q_3$ , оси которой  $Oq_1$ ,  $Oq_2$  и  $Oq_3$  параллельны осям  $Cx$ ,  $Cy$  и  $Cz$  соответственно. Ориентация осей  $Ox_1^0x_2^0x_3^0$  относительно осей  $Oq_1q_2q_3$  определяется матрицей направляющих косинусов  $\mathbf{A}^0$ :

$$\mathbf{A}^0 = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \alpha_3^0 \\ \beta_1^0 & \beta_2^0 & \beta_3^0 \\ \gamma_1^0 & \gamma_2^0 & \gamma_3^0 \end{pmatrix}$$

так, что

$$(q_1, q_2, q_3)^T = \mathbf{A}^0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T.$$

Статические моменты заряда первого и второго порядка в системе координат  $Oq_1q_2q_3$  – тензорные величины  $Q^{(1)}$ ,  $Q^{(2)}$  с элементами:

$$Q_i^{(1)} = \int_V \sigma q_i dV, \quad Q_{ij}^{(2)} = \int_V \sigma q_i q_j dV, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В силу выбора системы координат  $Oq_1q_2q_3$  имеют место равенства:

$$Q^{(1)} = 0, \quad Q^{(2)} = \mathbf{A}^0 \Sigma \mathbf{A}^{0T} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}.$$

## 2. Вычисление компонент тензора заряда

Посчитаем  $a_1, a_2, a_3$  для трёх торов, рассматриваемых в данной работе.

Запишем уравнение тора в параметрическом виде:

$$\begin{cases} X = \cos \varphi (R + r \cos \psi), & \varphi \in [0, 2\pi) \\ Y = \sin \varphi (R + r \cos \psi), & \psi \in [-\pi, \pi) \\ Z = r \sin \psi \end{cases} \quad (2)$$

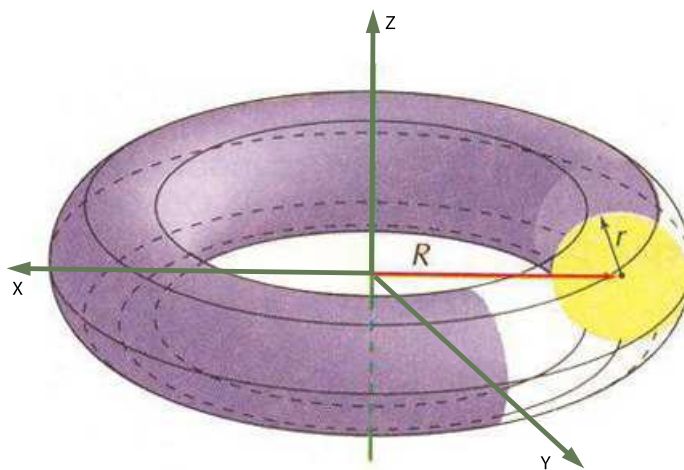


Рис. 3: Тор, с осью вращения Z

Тор, показанный на рисунке 3, являющийся телом вращения с осью Z, будем называть первым и при вычислении  $a_1, a_2, a_3$  будем обозначать индексом  $i = 1$ , а далее - аналогично: тор с осью вращения X, будем называть вторым и обозначать индексом  $i = 2$ ; тор с осью вращения Y, будем называть третьим и обозначать  $i = 3$ .

Для вычисления  $a_1, a_2, a_3$  нам понадобится плотность распределения заряда на поверхности тора. Воспользуемся формулой для плотности распределения заряда на поверхности трёхмерных двусвязных проводников при условии взаимной ортогональности величин  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$  и  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi}$  [3]:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi^2 \left| \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \varphi} \right| \cdot \left| \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \psi} \right|},$$

где  $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\varphi, \psi)$  – векторно-параметрическое уравнение поверхности заряженного двусвязного проводника,  $Q$  – заряд на поверхности заряженного двусвязного проводника.

В соответствии с (2), имеем:

$$\left| \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \varphi} \right| = R + r \cos \psi; \quad \left| \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \psi} \right| = r.$$

Таким образом, выражение для плотности распределения заряда на поверхности тора имеет вид:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi^2 r (R + r \cos \psi)}, \quad (3)$$

где  $R$  – расстояние от центра образующей окружности до оси вращения,  $r$  – радиус образующей окружности. На рис. 4 дана эюра  $\sigma$ -функции проводящего заряженного тора.



Рис. 4: Эюра плотности распределения электрического заряда на поверхности тора.

Посчитаем  $a_1, a_2, a_3$  в соответствии с формулой (1) и с учётом (3) для каждого тора в отдельности:

$$a_1^1 = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q}{4\pi^2 r (R + r \cos \psi)} \cos^2 \varphi (R + r \cos \psi)^2 r (R + r \cos \psi) d\varphi d\psi =$$

$$= \frac{Q_1}{2} \left( R_1^2 + \frac{r_1^2}{2} \right).$$

$$a_1^2 = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q}{4\pi^2 r (R + r \cos \psi)} r^2 \sin^2 \psi r (R + r \cos \psi) d\varphi d\psi = \frac{Q_2 r_2^2}{2}.$$

$$a_1^3 = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q}{4\pi^2 r (R + r \cos \psi)} \sin^2 \varphi (R + r \cos \psi)^2 r (R + r \cos \psi) d\varphi d\psi =$$

$$= \frac{Q_3}{2} \left( R_3^2 + \frac{r_3^2}{2} \right).$$

Аналогично получаем  $a_2$  и  $a_3$ :

$$a_2^1 = \frac{Q_1}{2} \left( R_1^2 + \frac{r_1^2}{2} \right), \quad a_2^2 = \frac{Q_2}{2} \left( R_2^2 + \frac{r_2^2}{2} \right), \quad a_2^3 = \frac{Q_3 r_3^2}{2},$$

$$a_3^1 = \frac{Q_1 r_1^2}{2}, \quad a_3^2 = \frac{Q_2}{2} \left( R_2^2 + \frac{r_2^2}{2} \right), \quad a_3^3 = \frac{Q_3}{2} \left( R_3^2 + \frac{r_3^2}{2} \right).$$

Для всей системы имеем:

$$a_1 = \frac{Q_1}{2} \left( R_1^2 + \frac{r_1^2}{2} \right) + \frac{Q_2 r_2^2}{2} + \frac{Q_3}{2} \left( R_3^2 + \frac{r_3^2}{2} \right),$$

$$a_2 = \frac{Q_1}{2} \left( R_1^2 + \frac{r_1^2}{2} \right) + \frac{Q_2}{2} \left( R_2^2 + \frac{r_2^2}{2} \right) + \frac{Q_3 r_3^2}{2},$$

$$a_3 = \frac{Q_1 r_1^2}{2} + \frac{Q_2}{2} \left( R_2^2 + \frac{r_2^2}{2} \right) + \frac{Q_3}{2} \left( R_3^2 + \frac{r_3^2}{2} \right).$$

### 3. Расчёт момента сил Лоренца

Далее используются следующие обозначения:  $\vec{B}_C$  – магнитная индукция МПЗ;  $\vec{\omega}' = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$  – угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат;  $\vec{\omega}_* = \omega_*\vec{\eta}_0$  – угловая скорость орбитальной системы координат относительно инерциальной системы координат;  $\vec{\omega}_3 = \omega_3 \left( \sin i \cos u \vec{\xi}_0 + \cos i \vec{\eta}_0 + \sin i \sin u \vec{\zeta}_0 \right) = (\omega_{31}, \omega_{32}, \omega_{33})^T$  (где  $i$  – угол наклона орбиты,  $u$  – аргумент широты) – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси;  $D_C$  – тензор 2-го ранга с компонентами  $D_{ij}$   $i, j = 1, 2, 3$ , называемый градиентом векторного поля, появляющийся вследствие неоднородности МПЗ;  $\vec{v}_C$  – скорость центра масс тела относительно МПЗ, в орбитальной системе координат имеющая следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C = p_* (1 + e \cos \nu)^{-1} \left[ \sqrt{\mu p_*^{-3}} (1 + e \cos \nu)^2 - \omega_3 \cos i \right] \vec{\xi}_0 + \\ + p_* (1 + e \cos \nu)^{-1} \omega_3 \sin i \cos u \vec{\eta}_0 + p_* e \sqrt{\mu p_*^{-3}} \sin \nu \vec{\zeta}_0 = \begin{pmatrix} v_{c\xi} \\ v_{c\eta} \\ v_{c\zeta} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $p_*$  – фокальный параметр орбиты,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $\nu$  – истинная аномалия,  $\mu$  – гравитационная постоянная Земли.

В принятых обозначениях выражение для главного момента  $\vec{M}_L$  сил Лоренца относительно центра масс ИСЗ, в случае совпадения центра заряда и центра масс ИСЗ, имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} \vec{M}_L = \vec{\omega}' \times \left( Q^{(2)} \mathbf{A}^T \vec{B}_C \right) + \left( \mathbf{A}^T \vec{\omega}_* - \mathbf{A}^T \vec{\omega}_3 \right) \times \left( Q^{(2)} \mathbf{A}^T \vec{B}_C \right) + \\ + \left( \mathbf{A}^T D_C \mathbf{A} \cdot \cdot Q^{(2)} \right) \mathbf{A}^T \vec{v}_C - \mathbf{A}^T D_C \mathbf{A} Q^{(2)} \mathbf{A}^T \vec{v}_C. \end{aligned} \quad (4)$$

Операцию  $\cdot\cdot$  назовём двойным скалярным произведением. Для тензоров второго ранга данная операция определяется следующим образом:

$$A \cdot\cdot B = \sum_{i_1} \sum_{i_2} A_{i_2 i_1} B_{i_1 i_2}.$$

В проекциях на оси главных центральных осей инерции выражение  $\vec{M}_L$  приобретает вид:

$$\begin{aligned} M_{Lx} = & \sum_{i=1}^3 [\alpha_i (q_{3i} B_{C\xi} q - q_{2i} B_{C\xi} r) + \beta_i (q_{3i} B_{C\eta} q - q_{2i} B_{C\eta} r) + \gamma_i (q_{3i} B_{C\zeta} q - \\ & - q_{2i} B_{C\zeta} r)] + (\omega_* - \omega_{32}) \left( B_{C\xi} G_{31}^{(2)} + B_{C\eta} G_{32}^{(2)} + B_{C\zeta} G_{33}^{(2)} \right) - \omega_{31} \left( B_{C\xi} G_{31}^{(1)} + \right. \\ & \left. + B_{C\eta} G_{32}^{(1)} + B_{C\zeta} G_{33}^{(1)} \right) - \omega_{33} \left( B_{C\xi} G_{31}^{(3)} + B_{C\eta} G_{32}^{(3)} + B_{C\zeta} G_{33}^{(3)} \right) + v_{c\xi} (D_{22} m_1 + \\ & + D_{33} m_2 + D_{12} m_3 + D_{13} m_4 + D_{23} m_5) + v_{c\eta} (D_{11} m_3 + D_{33} m_6 + D_{12} m_1 + \\ & + D_{13} m_7 + D_{23} m_8) + v_{c\zeta} (D_{11} m_4 + D_{22} m_8 + D_{12} m_9 + D_{13} m_2 + D_{23} m_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Ly} = & \sum_{i=1}^3 [\alpha_i (q_{1i} B_{C\xi} r - q_{3i} B_{C\xi} p) + \beta_i (q_{1i} B_{C\eta} r - q_{3i} B_{C\eta} p) + \gamma_i (q_{1i} B_{C\zeta} r - \\ & - q_{3i} B_{C\zeta} p)] + (\omega_* - \omega_{32}) \left( B_{C\xi} G_{11}^{(2)} + B_{C\eta} G_{12}^{(2)} + B_{C\zeta} G_{13}^{(2)} \right) - \omega_{31} \left( B_{C\xi} G_{11}^{(1)} + \right. \\ & \left. + B_{C\eta} G_{12}^{(1)} + B_{C\zeta} G_{13}^{(1)} \right) - \omega_{33} \left( B_{C\xi} G_{11}^{(3)} + B_{C\eta} G_{12}^{(3)} + B_{C\zeta} G_{13}^{(3)} \right) + v_{c\xi} (D_{22} n_1 + \\ & + D_{33} n_2 + D_{12} n_3 + D_{13} n_4 + D_{23} n_5) + v_{c\eta} (D_{11} n_3 + D_{33} n_6 + D_{12} n_1 + \\ & + D_{13} n_7 + D_{23} n_8) + v_{c\zeta} (+D_{11} n_4 + D_{22} n_8 + D_{12} n_9 + D_{13} n_2 + D_{23} n_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Lz} = & \sum_{i=1}^3 [\alpha_i (q_{2i} B_{C\xi} p - q_{1i} B_{C\xi} q) + \beta_i (q_{2i} B_{C\eta} p - q_{1i} B_{C\eta} q) + \gamma_i (q_{2i} B_{C\zeta} p - \\ & - q_{1i} B_{C\zeta} q)] + (\omega_* - \omega_{32}) \left( B_{C\xi} G_{21}^{(2)} + B_{C\eta} G_{22}^{(2)} + B_{C\zeta} G_{23}^{(2)} \right) - \omega_{31} \left( B_{C\xi} G_{21}^{(1)} + \right. \\ & \left. + B_{C\eta} G_{22}^{(1)} + B_{C\zeta} G_{23}^{(1)} \right) - \omega_{33} \left( B_{C\xi} G_{21}^{(3)} + B_{C\eta} G_{22}^{(3)} + B_{C\zeta} G_{23}^{(3)} \right) + v_{c\xi} (D_{22} k_1 + \\ & + D_{33} k_2 + D_{12} k_3 + D_{13} k_4 + D_{23} k_5) + v_{c\eta} (D_{11} k_3 + D_{33} k_6 + D_{12} k_1 + \\ & + D_{13} k_7 + D_{23} k_8) + v_{c\zeta} (D_{11} k_4 + D_{22} k_8 + D_{12} k_9 + D_{13} k_2 + D_{23} k_6) \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$G_{ij}^{(k)} = \sum_{s=1}^3 q_{is} A_{js} A_{ki-1} - \sum_{l=1}^3 q_{i-1l} A_{jl} A_{ki}, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} m_1 &= q_{22}\beta_2\gamma_3 - q_{33}\beta_3\gamma_2 + q_{12}\beta_1\gamma_3 - q_{13}\beta_1\gamma_2 + q_{23}(\beta_3\gamma_3 - \beta_2\gamma_2), \\ m_2 &= -q_{22}\gamma_2\beta_3 + q_{33}\gamma_3\beta_2 - q_{12}\gamma_1\beta_3 + q_{13}\gamma_1\beta_2 + q_{23}(\gamma_2\beta_2 - \gamma_3\beta_3), \\ m_3 &= q_{22}\alpha_2\gamma_3 - q_{33}\alpha_3\gamma_2 + q_{12}\alpha_1\gamma_3 - q_{13}\alpha_1\gamma_2 + q_{23}(\alpha_3\gamma_3 - \alpha_2\gamma_2), \\ m_4 &= -q_{22}\alpha_2\beta_3 + q_{33}\alpha_3\beta_2 - q_{12}\alpha_1\beta_3 + q_{13}\alpha_1\beta_2 + q_{23}(\alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3), \\ m_5 &= q_{22}(\gamma_2\gamma_3 - \beta_2\beta_3) + q_{33}(\beta_3\beta_2 - \gamma_3\gamma_2) + q_{12}(\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3) + \\ &+ q_{13}(\beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2) + q_{23}(\gamma_3^2 - \gamma_2^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2), \\ m_6 &= q_{22}\gamma_2\alpha_3 - q_{33}\gamma_3\alpha_2 + q_{12}\gamma_1\alpha_3 - q_{13}\gamma_1\alpha_2 + q_{23}(\gamma_3\alpha_3 - \gamma_2\alpha_2), \\ m_7 &= q_{22}(\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3) + q_{33}(\alpha_3\alpha_2 - \gamma_3\gamma_2) + q_{12}(\alpha_1\alpha_3 - \gamma_1\gamma_3) + \\ &+ q_{13}(\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\alpha_2) + q_{23}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2 + \gamma_2^2 - \gamma_3^2), \\ m_8 &= q_{22}\beta_2\alpha_3 - q_{33}\beta_3\alpha_2 + q_{12}\beta_1\alpha_3 - q_{13}\beta_1\alpha_2 - q_{23}(\beta_3\alpha_3 - \beta_2\alpha_2), \\ m_9 &= q_{22}(\beta_2\beta_3 - \alpha_2\alpha_3) + q_{33}(\alpha_3\alpha_2 - \beta_3\beta_2) + q_{12}(\beta_1\beta_3 - \alpha_1\alpha_3) + \\ &+ q_{13}(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + q_{23}(\beta_3^2 - \beta_2^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2), \\ n_1 &= -q_{11}\beta_1\gamma_3 + q_{33}\beta_3\gamma_1 - q_{12}\beta_2\gamma_3 + q_{13}(\beta_1\gamma_1 - \beta_3\gamma_3) + q_{23}\beta_2\gamma_1, \\ n_2 &= q_{11}\gamma_1\beta_3 - q_{33}\gamma_3\beta_1 + q_{12}\gamma_2\beta_3 + q_{13}(\gamma_3\beta_3 - \gamma_1\beta_1) - q_{23}\gamma_2\beta_1, \\ n_3 &= -q_{11}\alpha_1\gamma_3 + q_{33}\alpha_3\gamma_1 - q_{12}\alpha_2\gamma_3 + q_{13}(\alpha_1\gamma_1 - \alpha_3\gamma_3) + q_{23}\alpha_2\gamma_1, \\ n_4 &= q_{11}\alpha_1\beta_3 - q_{33}\alpha_3\beta_1 + q_{12}\alpha_2\beta_3 + q_{13}(\alpha_3\beta_3 - \alpha_1\beta_1) - q_{23}\alpha_2\beta_1, \\ n_5 &= q_{11}(\beta_1\beta_3 - \gamma_1\gamma_3) + q_{33}(\gamma_3\gamma_1 - \beta_3\beta_1) + q_{12}(\beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3) + \\ &+ q_{13}(\beta_3^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2 - \gamma_3^2) + q_{23}(\gamma_2\gamma_1 - \beta_2\beta_1), \\ n_6 &= -q_{11}\gamma_1\alpha_3 + q_{33}\gamma_3\alpha_1 - q_{12}\gamma_2\alpha_3 + q_{13}(\gamma_1\alpha_1 - \gamma_3\alpha_3) + q_{23}\gamma_2\alpha_1, \\ n_7 &= q_{11}(\gamma_1\gamma_3 - \alpha_1\alpha_3) + q_{33}(\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1) + q_{12}(\gamma_2\gamma_3 - \alpha_2\alpha_3) + \\ &+ q_{13}(\gamma_3^2 - \gamma_1^2 + \alpha_1^2 - \alpha_3^2) + q_{23}(\alpha_2\alpha_1 - \gamma_2\gamma_1), \\ n_8 &= -q_{11}\beta_1\alpha_3 + q_{33}\beta_3\alpha_1 - q_{12}\beta_2\alpha_3 + q_{13}(\beta_1\alpha_1 - \beta_3\alpha_3) + q_{23}\beta_2\alpha_1, \\ n_9 &= q_{11}(\alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3) + q_{33}(\beta_3\beta_1 - \alpha_3\alpha_1) + q_{12}(\alpha_2\alpha_3 - \beta_2\beta_3) + \\ &+ q_{13}(\alpha_3^2 - \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \beta_3^2) + q_{23}(\beta_2\beta_1 - \alpha_2\alpha_1), \\ k_1 &= q_{11}\beta_1\gamma_2 - q_{22}\beta_2\gamma_1 + q_{12}(\beta_2\gamma_2 - \beta_1\gamma_1) + q_{13}\beta_3\gamma_2 - q_{23}\beta_3\gamma_1, \\ k_2 &= -q_{11}\gamma_1\beta_2 + q_{22}\gamma_2\beta_1 + q_{12}(\gamma_1\beta_1 - \gamma_2\beta_2) - q_{13}\gamma_3\beta_2 + q_{23}\gamma_3\beta_1, \\ k_3 &= q_{11}\alpha_1\gamma_2 - q_{22}\alpha_2\gamma_1 + q_{12}(\alpha_2\gamma_2 - \alpha_1\gamma_1) + q_{13}\alpha_3\gamma_2 - q_{23}\alpha_3\gamma_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= -q_{11}\alpha_1\beta_2 + q_{22}\alpha_2\beta_1 + q_{12}(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) - q_{13}\alpha_3\beta_2 + q_{23}\alpha_3\beta_1, \\
k_5 &= q_{11}(\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\beta_2) + q_{22}(\beta_2\beta_1 - \gamma_2\gamma_1) + q_{12}(\beta_1^2 - \beta_2^2 + \gamma_2^2 - \gamma_1^2) + \\
&+ q_{13}(\gamma_3\gamma_2 - \beta_3\beta_2) + q_{23}(\beta_3\beta_1 - \gamma_3\gamma_1), \\
k_6 &= q_{11}\gamma_1\alpha_2 - q_{22}\gamma_2\alpha_1 + q_{12}(\gamma_2\alpha_2 - \gamma_1\alpha_1) + q_{13}\gamma_3\alpha_2 - q_{23}\gamma_3\alpha_1, \\
k_7 &= q_{11}(\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2) + q_{22}(\gamma_2\gamma_1 - \alpha_2\alpha_1) + q_{12}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \alpha_2^2 - \alpha_1^2) + \\
&+ q_{13}(\alpha_3\alpha_2 - \gamma_3\gamma_2) + q_{23}(\gamma_3\gamma_1 - \alpha_3\alpha_1), \\
k_8 &= -q_{11}\beta_1\alpha_2 + q_{22}\beta_2\alpha_1 + q_{12}(\beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2) - q_{13}\beta_3\alpha_2 + q_{23}\beta_3\alpha_1, \\
k_9 &= q_{11}(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2) + q_{22}(\alpha_2\alpha_1 - \beta_2\beta_1) + q_{12}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2) + \\
&+ q_{13}(\beta_3\beta_2 - \alpha_3\alpha_2) + q_{23}(\alpha_3\alpha_1 - \beta_3\beta_1).
\end{aligned}$$



## 4. Первый интеграл движения ИСЗ в случае круговой экваториальной орбиты.

Рассмотрим ИСЗ, центр масс которого движется по круговой околоземной экваториальной орбите. В качестве расчётной модели МПЗ принимается модель прямого диполя. Таким образом, имеем следующее:

-Круговая орбита:  $e = 0$ ;  $\omega_* = \sqrt{\frac{\mu}{p_*^3}} = \omega_0$ ;  $p_* = R$ .

-Экваториальная орбита: угол  $i = 0$ ;  $\omega_{31} = \omega_{33} = 0$ ;  $\omega_{32} = \omega_3$ .

-Прямой диполь:  $B_1 = B_3 = 0$ ,  $B_2 = -g_1^0 \left(\frac{R_3}{R}\right)^3$ ;  $D_{11} = D_{12} = D_{13} = D_{22} = D_{33} = 0$ ,  $D_{23} = \frac{3g_1^0}{R} \left(\frac{R_3}{R}\right)^3$ .

Кроме того, будем рассматривать взаимную ориентацию эллипсоида заряда и эллипсоида инерции, при котором их главные оси коллинеарны. Поскольку центры заряда и центры масс ИСЗ совпадают, то и главные оси совпадают. А значит:  $q_{11} = a_1$ ,  $q_{22} = a_2$ ,  $q_{33} = a_3$ ;  $q_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

Выражение для  $\vec{v}_C$ , с учётом введённых выше предположений, принимает вид:

$$\vec{v}_C = R(\omega_0 - \omega_3)\vec{\xi}_0.$$

С учётом введённых выше предположений, выражение для момента сил Лоренца в проекциях на оси главных центральный осей инерции, примет вид:

$$M_{Лx} = g_1^0 \left(\frac{R_3}{R}\right)^3 [a_2\beta_2r - a_3\beta_3q + (\omega_0 - \omega_3)(a_2 - a_3)(3\gamma_2\gamma_3 - 2\beta_2\beta_3)],$$

$$M_{Лy} = g_1^0 \left(\frac{R_3}{R}\right)^3 [a_3\beta_3p - a_1\beta_1r + (\omega_0 - \omega_3)(a_3 - a_1)(3\gamma_3\gamma_1 - 2\beta_3\beta_1)],$$

$$M_{Lz} = g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 [a_1\beta_1q - a_2\beta_2p + (\omega_0 - \omega_3)(a_1 - a_2)(3\gamma_1\gamma_2 - 2\beta_1\beta_2)].$$

Значение  $M_\Gamma$  в проекциях на оси  $x, y, z$  имеет вид [1]:

$$M_{\Gamma x} = \frac{3\mu}{R^3}(C-B)\gamma_2\gamma_3, \quad M_{\Gamma y} = \frac{3\mu}{R^3}(A-C)\gamma_3\gamma_1, \quad M_{\Gamma z} = \frac{3\mu}{R^3}(B-A)\gamma_1\gamma_2.$$

Подставляя выражения для проекций  $M_L$  и  $M_\Gamma$  в правые части динамических уравнений Эйлера, получим дифференциальные уравнения вращательного вокруг центра масс движения ИСЗ под действием лоренцевых и гравитационных сил:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z = M_{Lx} + M_{\Gamma x} \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x = M_{Ly} + M_{\Gamma y} \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = M_{Lz} + M_{\Gamma z} \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5) совместно с кинематическими уравнениями Пуассона

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 + \omega_y\alpha_3 - \omega_z\alpha_2 = -\omega_0\gamma_1, \quad \dot{\beta}_1 + \omega_y\beta_3 - \omega_z\beta_2 = 0, \quad \dot{\gamma}_1 + \omega_y\gamma_3 - \omega_z\gamma_2 = \omega_0\alpha_1 \\ \dot{\alpha}_2 + \omega_z\alpha_1 - \omega_x\alpha_3 = -\omega_0\gamma_2, \quad \dot{\beta}_2 + \omega_z\beta_1 - \omega_x\beta_3 = 0, \quad \dot{\gamma}_2 + \omega_z\gamma_1 - \omega_x\gamma_3 = \omega_0\alpha_2 \\ \dot{\alpha}_3 + \omega_x\alpha_2 - \omega_y\alpha_1 = -\omega_0\gamma_3, \quad \dot{\beta}_3 + \omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1 = 0, \quad \dot{\gamma}_3 + \omega_x\gamma_2 - \omega_y\gamma_1 = \omega_0\alpha_3 \end{cases}$$

образуют замкнутую дифференциальную систему, допускающую первый интеграл:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - \omega_0^2 (A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2) + 3\omega_0^2 (A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) + g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (3a_1\gamma_1^2 + 3a_2\gamma_2^2 + 3a_3\gamma_3^2 - 2a_1\beta_1^2 - 2a_2\beta_2^2 - 2a_3\beta_3^2) = \text{const}$$

## 5. Прямое положение равновесия ИСЗ и его устойчивость.

Рассмотрим случай, когда  $A = B = C$  (т.е.  $M_\Gamma = 0$ ). Положим  $\beta_2^2 = 1 - \beta_1^2 - \beta_3^2$ ,  $\gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2$ . Тогда первый интеграл приобретает следующий вид:

$$p^2 + q^2 + r^2 + \left(-\frac{g_1^0}{A}\right) \left(\frac{R_3}{R}\right)^3 (\omega_0 - \omega_3) (2\beta_1^2 (a_2 - a_1) + 2\beta_3^2 (a_2 - a_3) + 3\gamma_1^2 (a_1 - a_3) + 3\gamma_2^2 (a_2 - a_3)) = \text{const}$$

Назовём прямым положением равновесия (ППР) ИСЗ в орбитальной системе координат такое его положение, при котором оси  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  ориентированы по осям  $\xi, \eta, \zeta$ , а оси  $x, y, z$  совпадают с осями  $\xi, \eta, \zeta$ . Для ППР имеем:  $p = q = r = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\gamma_3 = 1$ . Таким образом, под действием лишь Лоренцевых сил имеем прямое положение равновесия, которое по теореме Ляпунова будет устойчивым, если:

$$a_2 > a_1 > a_3. \tag{6}$$

Подставив выражения для  $a_1, a_2, a_3$  в (6) получаем:

$$\begin{cases} Q_1 \left(R_1^2 - \frac{r_1^2}{2}\right) + Q_2 \left(R_2^2 - \frac{r_2^2}{2}\right) > Q_1 \left(R_1^2 - \frac{r_1^2}{2}\right) + Q_3 \left(R_3^2 - \frac{r_3^2}{2}\right) \\ Q_1 \left(R_1^2 - \frac{r_1^2}{2}\right) + Q_3 \left(R_3^2 - \frac{r_3^2}{2}\right) > Q_2 \left(R_2^2 - \frac{r_2^2}{2}\right) + Q_3 \left(R_3^2 - \frac{r_3^2}{2}\right) \end{cases}$$

откуда следует :

$$Q_1 \left(R_1^2 - \frac{r_1^2}{2}\right) > Q_2 \left(R_2^2 - \frac{r_2^2}{2}\right) > Q_3 \left(R_3^2 - \frac{r_3^2}{2}\right).$$

Рассмотрим случай, когда  $A \neq B \neq C$ . Прodelывая аналогичные операции, что и в случае  $M_\Gamma = 0$ , получаем следующее выражение для первого интеграла:

$$\begin{aligned}
& Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + (-g_1^0) \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_0 - \omega_3) [2\beta_1^2 (a_2 - a_1) + (2\beta_3^2 + 3\gamma_2^2) \cdot \\
& \cdot (a_2 - a_3) + 3\gamma_1^2 (a_1 - a_3)] + \omega_0^2 [\beta_1^2 (B - A) + (\beta_3^2 + 3\gamma_2^2) (B - C) + \\
& + 3\gamma_1^2 (A - C)] = \text{const}
\end{aligned}$$

Достаточным условием устойчивости в данном случае будет выполнение системы неравенств:

$$\begin{cases}
\omega_0^2 (B - A) + 2(-g_1^0) \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_0 - \omega_3) (a_2 - a_1) > 0 \\
\omega_0^2 (B - C) + 2(-g_1^0) \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_0 - \omega_3) (a_2 - a_3) > 0 \\
\omega_0^2 (A - C) + (-g_1^0) \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_0 - \omega_3) (a_1 - a_3) > 0 \\
\omega_0^2 (B - A) + (-g_1^0) \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_0 - \omega_3) (a_2 - a_3) > 0
\end{cases}$$

Для упрощения анализа полученных неравенств, введём обозначение:

$$\delta = \frac{B}{C}, \quad \varepsilon = \frac{C}{A}, \quad b_2 = \frac{a_2}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_3}{a_1}, \quad c = \frac{-g_1^0 a_1 (\omega_0 - \omega_3)}{A \omega_0^2} \left( \frac{R_3}{R} \right)^3.$$

Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases}
b_2 > 1 + \frac{1 - \delta}{2c} & ; & b_3 < 1 + \frac{1 - \varepsilon}{c} \\
b_3 < b_2 + \frac{\delta - \varepsilon}{2c} & ; & b_3 < b_2 + \frac{\delta - \varepsilon}{c}
\end{cases}$$

В данной работе предполагается, что параметры входящие в выражение для  $c$  такие, что выполняется неравенство  $c < 1$ . Область устойчивости, в зависимости от параметров  $\delta$  и  $\varepsilon$ , представлена на рисунках 5-16.

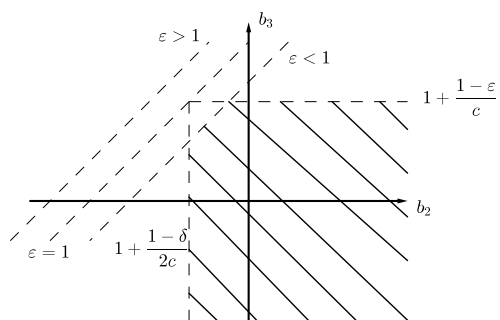


Рис. 5: Случай  $\epsilon < 1 + c$ ,  
 $\delta > 1 + 2c$ .

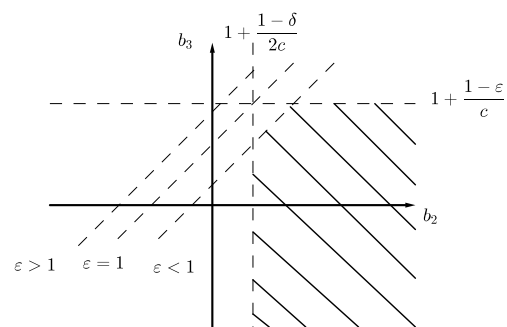


Рис. 6: Случай  $\epsilon < 1 + c$ ,  
 $1 + c < \delta < 1 + 2c$ .

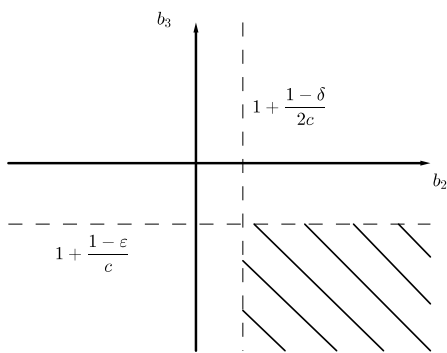


Рис. 7: Случай  $1 + c < \epsilon < \delta$ ,  
 $\delta < 1 + 2c$ .

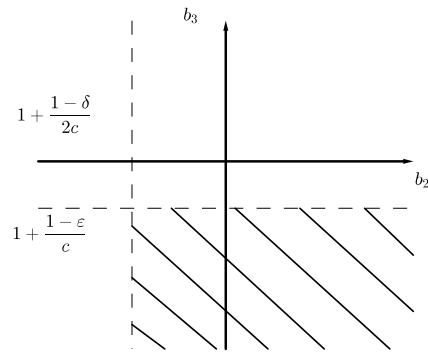


Рис. 8: Случай  $1 + c < \epsilon < \delta$ ,  
 $\delta > 1 + 2c$ .

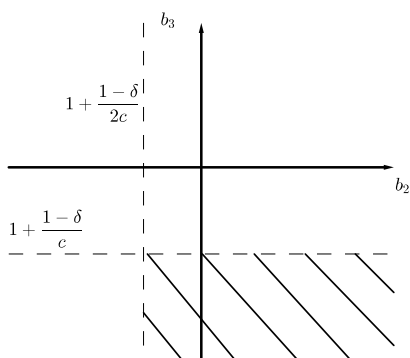


Рис. 9: Случай  $\epsilon = \delta$ ,  
 $\delta > 1 + 2c$ .

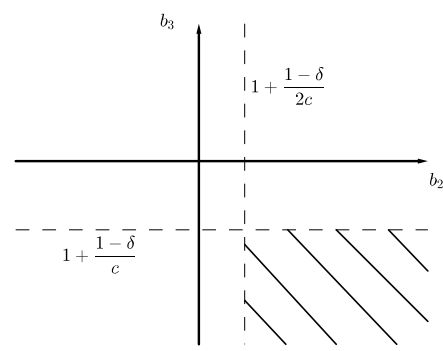


Рис. 10: Случай  $\epsilon = \delta$ ,  
 $1 + c < \delta < 1 + 2c$ .

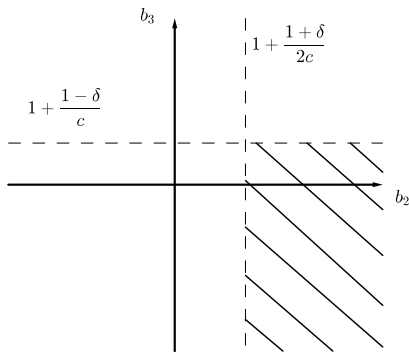


Рис. 11: Случай  $\varepsilon = \delta$ ,  
 $1 < \delta < 1 + c$ .

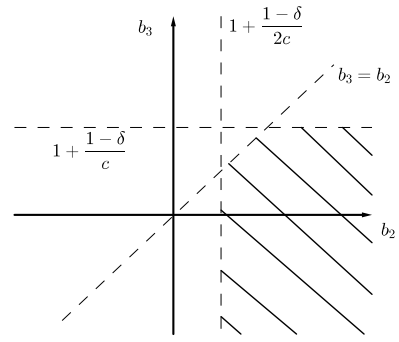


Рис. 12: Случай  $\varepsilon = \delta$ ,  
 $\delta < 1$ .

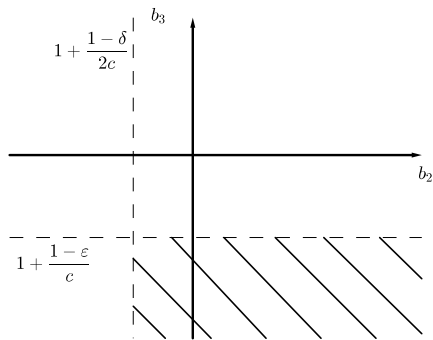


Рис. 13: Случай  $\delta < \varepsilon$ ,  
 $1 + 2c < \delta$ .

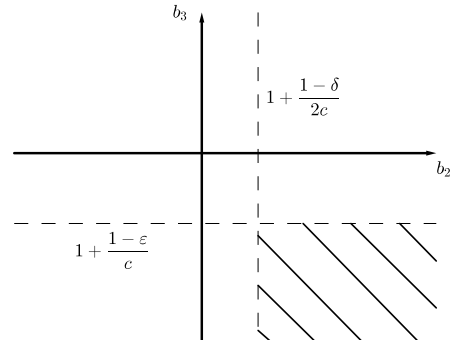


Рис. 14: Случай  $\delta < \varepsilon$ ,  
 $1 + c < \delta < 1 + 2c$ .

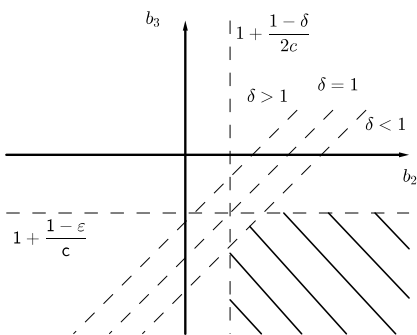


Рис. 15: Случай  $\delta < 1 + c$ ,  
 $1 + c < \varepsilon$ .

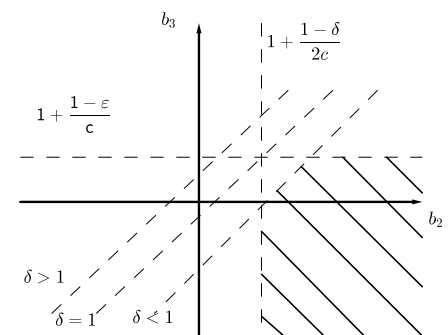


Рис. 16: Случай  $\delta < \varepsilon$ ,  
 $\varepsilon < 1 + c$ .

## 6. Стационарные вращения ИСЗ и их устойчивость.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что уравнения Эйлера (5) совместно с кинематическими уравнениями Пуассона допускают стационарные режимы вращения ИСЗ следующего типа:

- 1) Вращение ИСЗ вокруг местной вертикали:  $p = q = 0$ ,  $r = r_0$ ,  $\gamma_3 = 1$ , реализуется при  $A = B$  ( $M_{\Gamma_z} = 0$ ),  $a_1 = a_2 = \frac{\omega_0 R^3 C}{g_1^0 R_3^3}$ ;
- 2) Вращение ИСЗ вокруг нормали к плоскости орбиты:  $p = r = 0$ ,  $q = q_0$ ,  $\beta_2 = 1$ , реализуется при  $A = C$  ( $M_{\Gamma_y} = 0$ ),  $a_1 = a_3$ ;
- 3) Вращение ИСЗ вокруг трансверсали к орбите:  $q = r = 0$ ,  $p = p_0$ ,  $\alpha_1 = 1$ , реализуется при  $B = C$  ( $M_{\Gamma_x} = 0$ ),  $a_2 = a_3 = \frac{\omega_0 R^3 A}{g_1^0 R_3^3}$ ;

Рассмотрим первый режим стационарного вращения и исследуем его на устойчивость. Так как  $\gamma_3 = 1$ , то матрица направляющих косинусов  $\mathbf{A}$ , описывающая взаимную ориентацию орбитальной системы координат  $(C\xi\eta\zeta)$  и главных центральных осей инерции  $(Cxyz)$ , будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим выражение  $V = V_1 + \lambda r^2$ , где  $V_1$ —первый интеграл, полученный в главе 4:

$$\begin{aligned} V = & Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - \omega_0^2 (A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2) + 3\omega_0^2 (A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) + \\ & + g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (3a_1\gamma_1^2 + 3a_2\gamma_2^2 + 3a_3\gamma_3^2 - 2a_1\beta_1^2 - 2a_2\beta_2^2 - 2a_3\beta_3^2) + \\ & + \lambda r^2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Возьмём  $\lambda = -C$  и воспользуемся соотношениями  $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$ ,  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ . Принимая во внимание, что  $A = B$ ,  $a_1 = a_2$ , получим:

$$V = A(p^2 + q^2) + \beta_3^2 \left( \omega_0^2 (A - C) + 2g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (a_1 - a_3) \right) + \\ + 3(\gamma_2^2 + \gamma_1^2) \left( \omega_0^2 (A - C) + g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (a_1 - a_3) \right) = \text{const.}$$

Возьмём в качестве функции Ляпунова выражение  $V$  и получим достаточное условие устойчивости по переменным  $p, q, \gamma_1, \gamma_2, \beta_3$ :

$$\begin{cases} \omega_0^2 (A - C) + 2g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (a_1 - a_3) > 0 \\ \omega_0^2 (A - C) + g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (a_1 - a_3) > 0 \end{cases}$$

Если известно какой имеет знак выражение  $A - C$ , то можно из двух неравенств оставить одно, а именно: если  $A - C < 0$ , то достаточно рассмотреть первое неравенство, если  $A - C > 0$ , то второе неравенство, если же  $A = C$ , то мы можем рассматривать любое из двух неравенств. В общем случае, подставив в систему выражение для  $a_1$ , достаточное условие устойчивости по переменным  $p, q, \gamma_1, \gamma_2, \beta_3$  примет вид:

$$\begin{cases} a_3 < \frac{\omega_0}{2g_1^0 (\omega_3 - \omega_0)} \left( \frac{R}{R_3} \right)^3 (\omega_0 (A - 3C) + 2\omega_3 C) \\ a_3 < \frac{\omega_0}{g_1^0 (\omega_3 - \omega_0)} \left( \frac{R}{R_3} \right)^3 (\omega_0 (A - 2C) + \omega_3 C) \end{cases} \quad (7)$$

Введём следующие обозначения:

$$k_1 = \frac{A\omega_0}{2g_1^0 (\omega_3 - \omega_0)} \left( \frac{R}{R_3} \right)^3 (2\omega_3 - 3\omega_0), \quad b_1 = \frac{A\omega_0^2}{2g_1^0 (\omega_3 - \omega_0)} \left( \frac{R}{R_3} \right)^3$$



$$k_2 = \frac{A\omega_0}{g_1^0(\omega_3 - \omega_0)} \left( \frac{R}{R_3} \right)^3 (\omega_3 - 2\omega_0), \quad b_2 = \frac{A\omega_0^2}{g_1^0(\omega_3 - \omega_0)} \left( \frac{R}{R_3} \right)^3$$

С учётом введённых обозначений, система (7) примет вид:

$$\begin{cases} a_3 < k_1\varepsilon + b_1 \\ a_3 < k_2\varepsilon + b_2 \end{cases}$$

где как и в 5 главе  $\varepsilon = \frac{C}{A}$ . Т.к.  $\delta = \frac{B}{A} = 1$ , то  $0 < \varepsilon \leq 2$ . Область устойчивости по переменным  $p, q, \gamma_1, \gamma_2, \beta_3$  представлена на рисунке 17.

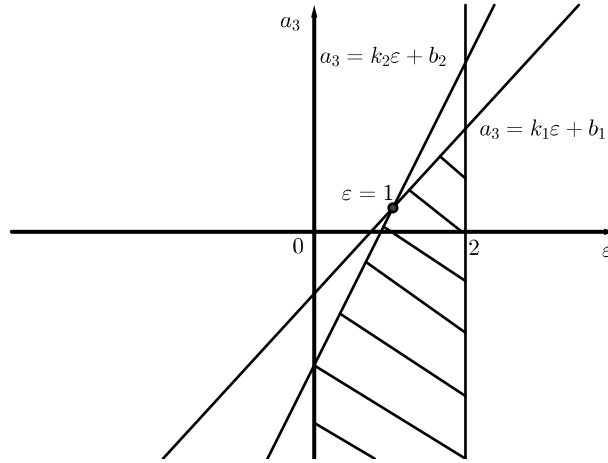


Рис. 17: Область устойчивости в первом стационарном режиме вращения.

Перейдём к рассмотрению второго режима стационарного вращения. Из условия  $\beta_2 = 1$  следует, что матрица направляющих косинусов  $\mathbf{A}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Подставим  $A = C$ ,  $a_1 = a_3$  во второе уравнение системы (5), получим выражение:

$$B\dot{\omega}_y = g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 a_1 (\beta_3 p - \beta_1 r).$$

Воспользовавшись соотношением  $\dot{\beta}_2 + \omega_z \beta_1 - \omega_x \beta_3 = 0$ , где  $\omega_x = p + \omega_0 \beta_1$ ,  $\omega_y = q + \omega_0 \beta_2$ , получаем:

$$B\dot{\omega}_y = g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 a_1 \dot{\beta}_2,$$

откуда находим первый интеграл:

$$V_2 = B\omega_y - g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 a_1 \beta_2 = \text{const.}$$

Подставив в первый интеграл  $\omega_y = q + \omega_0 \beta_2$ , получим:

$$V_2 = Bq + \beta_2 \left( B\omega_0 - \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 g_1^0 a_1 \right) = \text{const}$$

Рассмотрим выражение  $V = V_1 + \lambda V_2^2$ :

$$\begin{aligned} V = & Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - \omega_0^2 (A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2) + 3\omega_0^2 (A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) + \\ & + g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (3a_1\gamma_1^2 + 3a_2\gamma_2^2 + 3a_3\gamma_3^2 - 2a_1\beta_1^2 - 2a_2\beta_2^2 - 2a_3\beta_3^2) + \\ & + \lambda \left( Bq + \beta_2 \left( B\omega_0 - \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 g_1^0 a_1 \right) \right)^2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Для получение квадратичной формы возьмём  $\lambda = -\frac{1}{B}$ , а также потребуем выполнение равенства  $a_1 = \frac{\omega_0 R^3 B}{g_1^0 R_3^3}$ . Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} V = & A(p^2 + r^2) + 3\gamma_2^2 \left( \omega_0^2 (B - A) + g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) \left( a_2 - \frac{\omega_0 R^3 B}{g_1^0 R_3^3} \right) \right) + \\ & + (\beta_1^2 + \beta_3^2) \left( \omega_0^2 (B - A) + 2g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) \left( a_2 - \frac{\omega_0 R^3 B}{g_1^0 R_3^3} \right) \right) = \text{const.} \end{aligned}$$

Возьмём выражение  $V$  в качестве функции Ляпунова и получим достаточное условие устойчивости по переменным  $p, r, \beta_1, \beta_3, \gamma_2$ :

$$\begin{cases} \omega_0^2 (B - A) + 2g_1^0 \left(\frac{R_3}{R}\right)^3 (\omega_3 - \omega_0) \left(a_2 - \frac{\omega_0 R^3 B}{g_1^0 R_3^3}\right) > 0 \\ \omega_0^2 (B - A) + g_1^0 \left(\frac{R_3}{R}\right)^3 (\omega_3 - \omega_0) \left(a_2 - \frac{\omega_0 R^3 B}{g_1^0 R_3^3}\right) > 0 \end{cases}$$

Аналогично первому случаю мы можем оставить лишь одно неравенство, но для этого нам потребуется знать знак выражения  $B - A$ : если  $B - A < 0$ , то достаточно рассмотреть первое неравенство, если  $B - A > 0$ , то второе неравенство, если  $A = B$ , то неравенства совпадают. В общем случае, имеем:

$$\begin{cases} a_2 > \frac{\omega_0}{2g_1^0 (\omega_3 - \omega_0)} \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 (\omega_0 (A - 3B) + 2\omega_3 B) \\ a_2 > \frac{\omega_0}{g_1^0 (\omega_3 - \omega_0)} \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 (\omega_0 (A - 2B) + \omega_3 B) \\ a_1 = a_3 = \frac{\omega_0 R^3 B}{g_1^0 R_3^3} \end{cases} \quad (8)$$

С учётом введённых выше обозначений, система (8) примет вид:

$$\begin{cases} a_2 > k_1 \delta + b_1 \\ a_2 > k_2 \delta + b_2 \\ a_1 = a_3 = \frac{\omega_0 R^3 B}{g_1^0 R_3^3} \end{cases}$$

Область устойчивости по переменным  $p, r, \beta_1, \beta_3, \gamma_2$  представлена на рисунке 18.

Исследуем третий случай. Матрица направляющих косинусов в случае  $\alpha_1 = 1$  имеет вид:

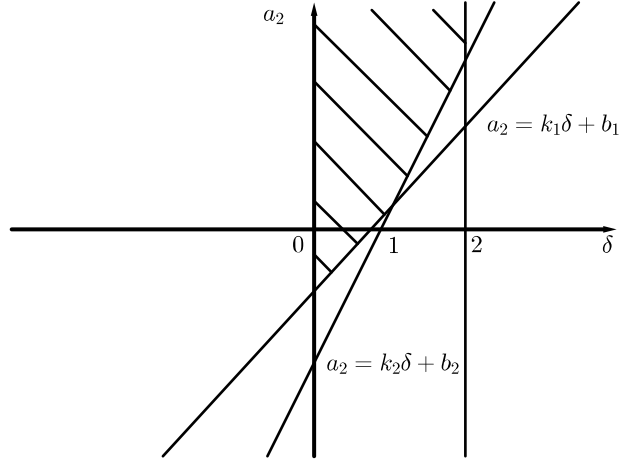


Рис. 18: Область устойчивости во втором стационарном режиме вращения.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

В качестве функции Ляпунова примем выражение  $V = V_1 + \lambda p^2$ , где возьмём  $\lambda = -A$ , получим:

$$V = B(q^2 + r^2) + \beta_1^2 \left( \omega_0^2 (B - A) + 2g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (a_2 - a_1) \right) + \\ + 3\gamma_1^2 \left( \omega_0^2 (A - B) + g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (a_1 - a_2) \right) = \text{const.}$$

Достаточное условие устойчивости по переменным  $q, r, \beta_1, \gamma_1$  примет вид:

$$\begin{cases} \omega_0^2 (B - A) + 2g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (a_2 - a_1) > 0 \\ \omega_0^2 (A - B) + g_1^0 \left( \frac{R_3}{R} \right)^3 (\omega_3 - \omega_0) (a_1 - a_2) > 0 \end{cases}$$

Заметим, что для устойчивости данного режима нужно дополнительно потребовать, чтобы  $B > A$ . Подставим в систему выражение для  $a_2$ :

$$\begin{cases} a_1 < \frac{\omega_0}{2g_1^0(\omega_3 - \omega_0)} \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 (\omega_0(B - 3A) + 2\omega_3A) \\ a_1 > \frac{\omega_0}{g_1^0(\omega_3 - \omega_0)} \left(\frac{R}{R_3}\right)^3 (\omega_0(B - 2A) + \omega_3A) \\ B > A \end{cases}$$

С учётом введённых выше обозначений:

$$\begin{cases} a_1 < b_1\delta + k_1 \\ a_1 > b_2\delta + k_2 \\ B > A \end{cases}$$

Так как  $B > A$ , то  $\delta > 1$ . Область устойчивости по переменным  $q, r, \beta_1, \gamma_1$  представлена на рисунке 19.

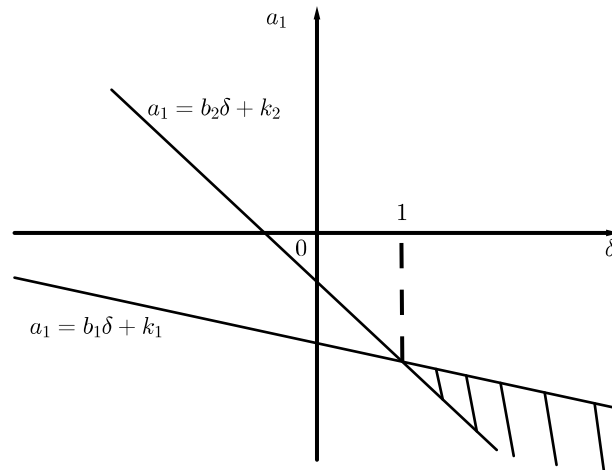


Рис. 19: Область устойчивости в третьем стационарном режиме вращения.

## Заключение

На основе известного технического решения поставлена задача изучения динамики вращательного движения ИСЗ с системой трех заряженных экранов, представляющих собой тороидальные поверхности. Найдена плотность распределения заряда на поверхности тора. Вычислены компоненты тензора, характеризующего распределение зарядов системы трех заряженных тороидальных экранов. Для случая круговой околоземной орбиты ИСЗ и дипольной аппроксимации МПЗ получено выражение для момента сил Лоренца, действующих на ИСЗ с системой экранов в магнитном поле Земли. Построена математическая модель, описывающая динамику вращательного движения ИСЗ в МПЗ и построен ее первый интеграл. Найдены возможные прямые положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат. Получены достаточные условия устойчивости ППР с использованием построенного первого интеграла с учётом влияния гравитационного момента и в предположении об его отсутствии. Построена область устойчивости для ППР с учётом гравитационного момента при различных параметрах системы. Найдены стационарные режимы вращения ИСЗ в орбитальной системе координат. Получены достаточные условия устойчивости найденных стационарных режимов вращения ИСЗ.

Полученные результаты могут быть использованы исследователями в области космодинамики, а также инженерами, которые занимаются созданием ЭСЗ, для подбора требуемых параметров при создании системы ЭСЗ, чтобы ЭСЗ выполняла не только свою главную задачу по защите ИСЗ, но и помогала в осуществлении пассивного и полупассивного управления ИСЗ. Кроме того, данная работа может помочь инженерам и исследователям в понимании степени влияния параметров системы на движение ИСЗ.

## Список литературы

- [1] *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс, Москва, 1965
- [2] *Белецкий В.В., Хентов А.А.* Вращательное движение намагниченного спутника, Москва, 1985.
- [3] *Дружкин Л.А.* Задачи теории поля, Москва, 1964.
- [4] *Кузнецов Л.И., Тихонов А.А.* К вопросу о влиянии электрического заряда на вращательное движение спутника Земли // Вестн. Ленингр. ун-та. I. 1985. Вып. II.
- [5] *Кузнецов Л.И., Чикова Н.В.* О прямых положениях равновесия, их устойчивость и колебаниях спутника с электростатической защитой // Колебания и устойчивость механических систем. Л., 1981.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля, Москва, 1973.
- [7] *Попов В.И.* Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов, Москва, 1986.
- [8] *Сарычев В.А., Гутник С.А.* Исследование устойчивости положений равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Общий случай, Москва, 2015.
- [9] *Тихонов А.А.* О влиянии неоднородности геомагнитного поля на динамику экранированного спутника // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. I. 1987. Вып. 2.
- [10] *Тихонов А.А., Петров К.Г.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли, Вестник СПбГУ, 1999.

- [11] *Joseph G. Smith, Jr., Trent Smith, Martha Williams, Robert Youngquist, Wendell Mendell* Potential Polymeric Sphere Construction Materials for a Spacecraft Electrostatic Shield, 2006
  
- [12] *P. Spillantini, M. Casolino, M. Durante, R. Mueller-Mellin, G. Reitz, L. Rossi, V. Shurshakov, M. Sorbi* Shielding from cosmic radiation for interplanetary missions: Active and passive methods, ScienceDirect, 2005.
  
- [13] *Ram K. Tripathi, John W. Wilson, Robert C. Youngquist* Electrostatic space radiation shielding, ScienceDirect, 2006.
  
- [14] *Ravindra P. Joshi, Hao Qiu, Ram K. Tripathi* Configuration studies for active electrostatic space radiation shielding, Acta Astronautica, 2012.