Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра теоретической и прикладной механики

Ритенман Ольга Ильинична

# «Большие деформации неоднородных круглых пластин»

## Бакалаврская работа

Научный руководитель
д.ф.-м..н., профессор С.М. Бауэр

Рецензент
к.ф.-м..н.,доцент Е.Б. Воронкова

Санкт-Петербург
2016г.

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY
Mathematics and Mechanics Faculty
Theoretical and Applied Mechanics

Ritenman Olga Ilinichna

# «Large deformations of inhomogeneous circular plates»

## Bachelor's Thesis

Scientific supervisor
professor S.M. Bauer

Reviewer
E. B. Voronkova

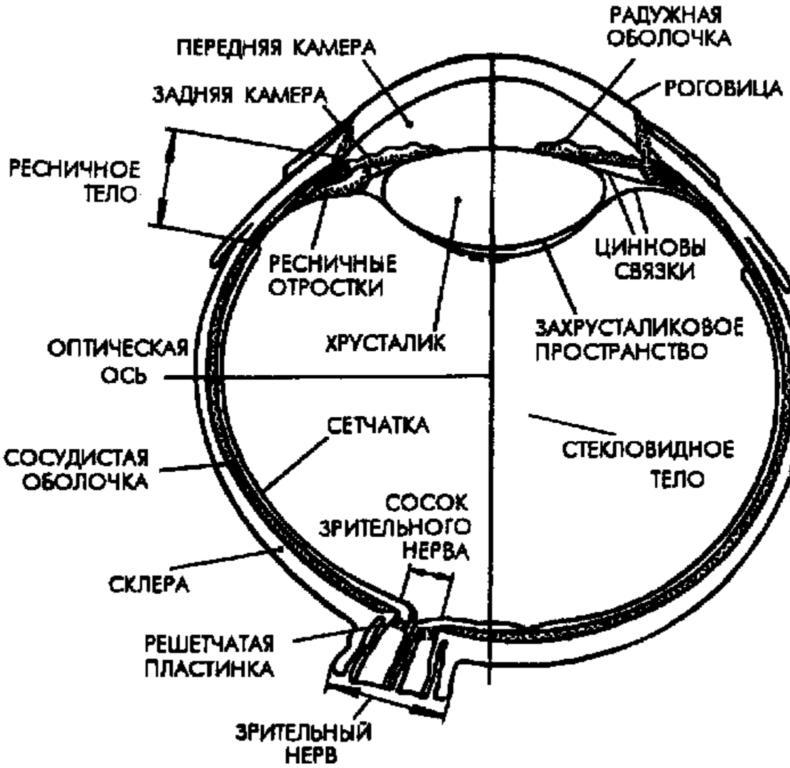
Saint-Petersburg
2016

# Содержание

# 1 Введение

Изучение биомеханики глаза важно для понимания механизма развития многих заболеваний, для разработки экспериментальных моделей и внедрения новых технологий. Новые знания в этой области позволят улучшить диагностику различных заболеваний и развить новые методы лечения.

Одной из таких болезней является глаукома. Это распространённое заболевание, приводящее в некоторых случаях к потере зрения. Известно, что при глаукоме атрофия нервных волокон происходит на уровне решётчатой пластины (далее РП) диска зрительного нерва глаза человека.




РП представляет собой участок склеры (внешняя оболочка глаза), находящийся напротив роговицы. представляет собой участок склеры Эти отверстия занимают примерно $\frac{2}{3}$ всей площади РП.

РП играет важную роль в балансе между внутриглазным и внутричерепным давлением. Когда баланс нарушается и внутриглазное давление превосходит внутричерепное, РП терпит деформации и развивается глаукома. Для офтальмологов важно уметь предсказывать, когда пациент находится в группе риска до того, как проявятся первые признаки болезни.

В связи с этим важной является задача о деформации РП. При больших прогибах РП может происходить потеря устойчивости осесимметричной формы, что соответствует отекам на краю РП, которые наблюдаются при глаукоме.

РП моделируется как трансверсально изотропная пластина с жестко закрепленными краями, загруженная нормальным давлением. У большинства людей плотность пор на РП возрастает к периферии, но иногда отверстия расположены равномерно. Исходя из этого, есть смысл моделировать пластину как неоднородную, то есть рассматривать модуль упругости (модуль Юнга) как функцию, зависящую от координат.

Вопрос о существовании несимметричных решений у симметрично загруженной круглой пластины был впервые рассмотрен в [1]. Исследуя большие прогибы пластины, загруженной постоянным давлением, авторы, с помощью метода Галеркина, приводят решение, соответствующее несимметричным формам равновесия. Однако, эта задача была решена неточно.

Строгое доказательство существования несимметричного решения было приведено в [2], а единственность доказана в работе [3]. В работах [4–5] для пологой сферической оболочки и круглой пластины при различных условия закрепления и нагружения определены значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной. Эти прогибы оказались гораздо больше, чем полученные в [1].

В связи с тем, что у РП присутствует сильная анизотропия $\dfrac{E_{tan}}{E_h} \ll 1$, и в связи с неоднородностью пластины интересно рассмотреть решение задачи о деформации РП с использованием неклассических теорий оболочек.

# 2 О влиянии неоднородности пластины на её прогиб

## 2.1 Форма прогиба

Как уже отмечалось ранее РП глаза представляет собой участок склеры, где она становится тоньше и появляется много пор. Если поры расположены равномерно по пластине, то её модуль упругости можно считать постоянным.

В большинстве случаев она неоднородна, то есть её модуль упругости не является константой. Чаще всего поры имеют большую плотность ближе к краю РП. Значит можно считать, что Модуль Юнга убывает при удалении от центра пластины к ее краю. Если принять все эти допущения и то, что увеличение численности пор невелико, то можно ввести модуль упругости следующим образом: $E_1(r) = E(1-\varepsilon_1 r)$, где $\varepsilon_1$ — малый параметр(его значение не может быть больше единицы), $r$ — радиальная координата.

Наглядно можно показать влияние неоднородности на величину прогиба:

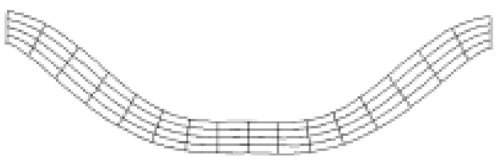


Рис. 1

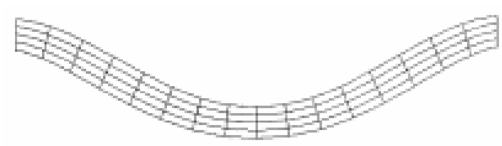


Рис. 2

Рисунок 1 соответствует неоднородной пластине, а второй — однородной. Можно заметить, что неоднородность влияет на форму деформации пластины. Такое строение РП ведет к большим деформациям на краях пластины, нежели в центре.

## 2.2 Величина прогиба

Если положить модуль упругости как функцию $E(r)$, что соответствую случаю осесимметричной трансверсально изотропной круглой пластины, то уравнения, описывающие её прогиб по теории Амбарцумяна [7], будут иметь следующий вид:

$$D(r)\left(\frac{d^3w}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right) + \frac{dD}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) - \frac{Pr}{2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{D}{G'}\right)\frac{3P}{5h}(1+\nu) = 0,$$

где $D(r) = \dfrac{E(r)}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость,

$\nu$ — коэффициент Пуассона,
$G'$ — параметр пластины,

$h$ — толщина пластины.

На рисунке 3 представлены прогиб однородной и эквивалентной в среднем по жесткости сильно неоднородной пластины, модуль упругости которой убывает по экспоненциальной функции.

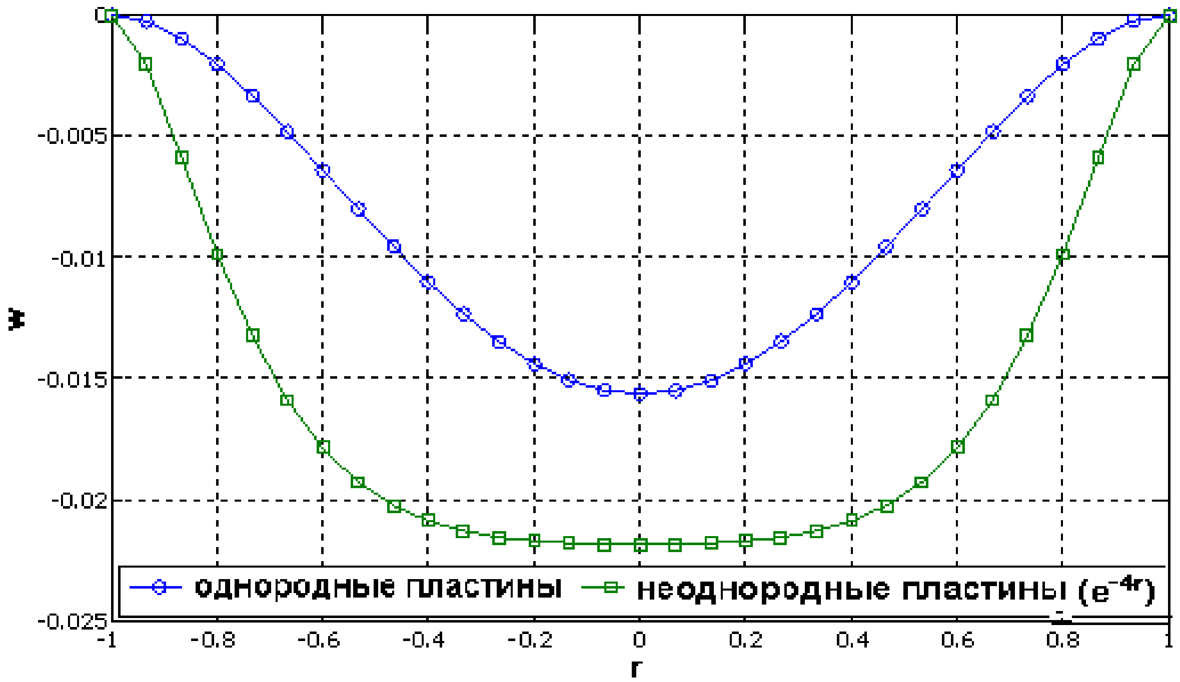



Рис. 3

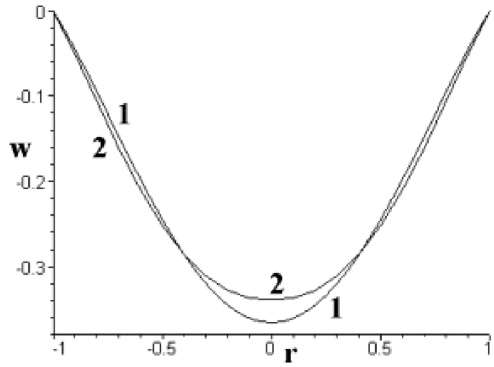
Если плотность пор возрастает стремительнее, чем в предыдущем параграфе, то модуль упругости можно задать так:

$$E = E_0 e^{-qr}.$$

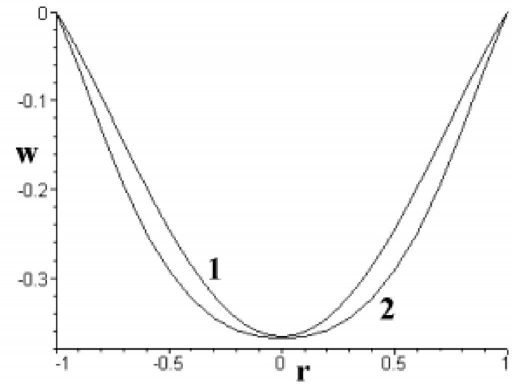
Здесь $E_0 = \dfrac{q^2 E_{cp}}{2(1 - e^{-q}(1+q))}$,

$q$ — параметр, причем из свойств РП человека $q < 4.31$

Расчеты показывают, что максимальное значение прогиба при малых $q$ становится меньше, чем максимальное значение прогиба такой же, но однородной пластины. Такой же результат получен и при линейном законе задания модуля упругости.




На первом графике представлены значения прогибов однородной (1) и неоднородной (2) пластины при $q = 2$. Можно заметить, что при малых прогибах у пластин всегда есть точки, где значения прогибов совпадают.

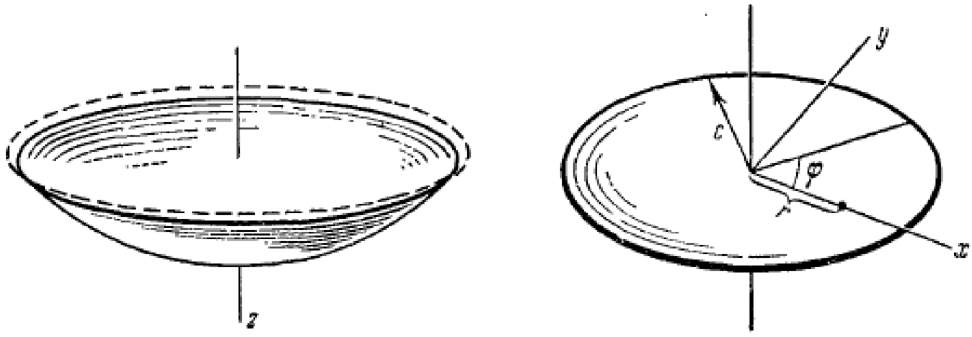



На втором графике значения прогибов при $q = 4$. Точно так же первая кривая соответствует однородной пластине, а вторая — неоднородной. Теперь кривые не пересекаются. Это значит, что прогиб неоднородной пластины при любом $r$ больше прогиба однородной.

# 3 Сравнение прогибов пластин, полученных по различным теориям

Как уже отмечалось ранее, решётчатая пластина глаза человека моделируется как круглая трансверсально изотропная пластина с жестко закрепленными краями, загруженная нормальным давлением.

Введем полярную систему координат, где $r$, $\varphi$ — координаты срединной поверхности пластины радиуса $R$, причём $0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Ось $z$ направим по нормали к срединной поверхности, как показано на рисунке:




## 3.1 Теория Кирхгофа – Лява

Теория Кирхгофа – Лява является классической теорией. В ней используются следующие гипотезы:

- Прямолинейный элемент перпендикулярный к срединной поверхности до деформации остается прямолинейным и перпендикулярным к срединной поверхности и после деформации.
- Нормальное к срединной плоскости пластинки перемещение не зависит от координаты $z$.

После вычислений, приведенных в [7] прогиб в безразмерной форме по теории Кирхгофа – Лява имеет вид:

$$w^{(KL)} = \frac{(1-\bar{r}^2)^2}{64},$$

где $\bar{r} = \dfrac{r}{a}$.

В данной теории рассматривается чистый изгиб, без учета влияния, которое оказывает нормальное касательное напряжение.

К сожалению, эта теория не может описывать больших прогибов пластин в линейной постановке. Классическая теория не учитывает анизотропию, то есть то, что модуль упругости в направлении толщины много меньше, чем тангенциальный . Поэтому нужно обращаться к неклассическим теориям.

## 3.2 Теория С.А. Амбарцумяна

Рассмотрим отличную от классических теорий — уточненную теорию Амбарцумяна. Если прогибы пластинки имеют порядок её толщины, то задачу нужно решать по геометрически нелинейной теории. У Амбарцумяна учитывается влияние углов поворота нормали на удлинения и сдвиги. Но вводится предположение о малости углов поворота по сравнению с единицей. Это допущение позволяет сохранять в исходных равенствах лишь нелинейные члены, связанные со значением нормального перемещения $w$ и значением производных от этой функции.

Вводятся следующие гипотезы:

- Нормальное к срединной поверхности перемещение не изменяется по толщине.
- Касательные напряжения в плоскости, перпендикулярной поверхности пластины, изменяются по толщине пластины по квадратичному закону.

После вычислений, приведенных в [7] прогиб в безразмерной форме имеет вид:

$$w^{(Am)} = \frac{(1-\bar{r}^2)^2}{64} + \frac{E(1-\bar{r}^2)}{32G(1-\nu^2)}\frac{h^2}{a^2},$$

где $h$ — толщина пластинки,
$\nu$ — коэффициент Пуассона,
$G$ — параметр трансверсально изотропной пластины,
$\bar{r} = \dfrac{r}{a}$.

Однако, в работах В.А. Родионовой , Б.Ф.Титаева, К.Ф. Черныха подчеркнуты следующие недостатки этой теории:

- Эта теория имеет различный поряок производных по пяти функциям, что затрудняет использование для ее решения численных методов.
- В этой теории отсутствует условие сплошности.
- Недостаточно исследован вопрос о граничных условиях.
- Отсутствует выражение для потенциальной энергии деформации оболочек.

## 3.3 Теория Родионовой – Титаева – Черныха

Рассмотрим отличную от классических теорий — теорию Родионовой – Титаева – Черныха. Предложенная авторами теория вводит следующие дополнительные гипотезы:

- Поперечные касательные и нормальные напряжения распределены по толщине оболочки по закону квадратичной и кубической параболы соответственно.

- Тангенциальные и нормальные составляющие вектора перемещения распределены по толщине оболочки по закону полинома соответственно третьей и второй степени.

Новая итерационная теория позволяет построить деформацию пластины, учитывающую повороты волокон, их искривление, а также изменение их длины.

Получаемая модель деформирования пластины, без учета поперечной деформации $\varepsilon_{33}$, совпадает с моделью С.А. Амбарцумяна, который использовал квадратичный закон распределения касательных напряжений. Гипотезы Амбарцумяна автоматически выполняются в теории Родионовой – Титаева – Черныха [12].

# 4 Заключение

В заключение можно сказать, что нельзя игнорировать неоднородность пластины, поскольку она существенно влияет на форму и величину прогиба. Особенно это заметно, если закон, по которому задается неоднородность — экспоненциальный. При линейном законе существуют точки, в которых однородная и эквивалентная ей неоднородная пластины ведут себя одинаково, но в общем случае неоднородность оказывает большое влияние на деформации, особенно вблизи края пластины.

Что касается выбора теорий, то при больших прогибах важно рассматривать не только срединную плоскость пластины, поскольку при больших деформациях волокна зрительного нерва подвергаются сдавливанию и сдвигу.

Неклассические теории, учитывающие свойства пластины в направлении её толщины, позволяют получить больший по величине прогиб.

# 5 Список литературы


**Литература**

1. *Панов Д.Ю., Феодосьев В.И.* О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах, 1948.

2. *Морозов Н.Ф.* К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, загруженной симметричной нагрузкой, 1961.

3. *Piechocki W.* On the non-linear theory of thin elastic spherical shells, 1969.

4. *Huang N.C.* Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells, 1964.

5. *Cheo L.S., Reiss E.L.* Unsymmetric wrinkling of circular plates, 1973.

6. *А.С. Вольмир.* Устойчивость деформируемых систем, 1967.

7. *С.А. Амбарцумян* Общая теория анизотропных оболочек, 1974.

8. *С.М. Бауэр, Е.Б. Воронкова, А.А. Романова.* О потере устойчивости симметричных форм равновесия круглых пластин под действием нормального давления, 2012.

9. *S. Bauer, E. Voronkova.* Nonclassical theories for bending analyis of orthotropic circular plate, 2014.

10. *S. Bauer.* Deformation of the Lamina Cribrosa. Features of the LC, which increase the susceptibilitty of eyes to glaucomatous damage, 2001.

11. *Э.И. Григолюк, В.И. Мамай* Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций, 1997.

12. *В.А. Родионова, Б.Ф. Титаев, К.Ф. Черных* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек, 1996.