

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет

Кафедра теоретической и прикладной механики

Бунин Георгий Васильевич

Применение вариационного принципа
конформных отображений в задачах
потенциального обтекания

Дипломная работа

Допущена к защите.

Зав. кафедрой:

д. ф.-м. н., профессор Товстик П. Е.

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент Кутеева Г. А.

Рецензент:

к. ф.-м. н., д. т. н., профессор Полякова Е. В.

Санкт-Петербург
2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Theoretical and applied mechanics

Georgii Bunin

Application of variational principle for
conformal mappings in problems of potential
flow

Graduation Thesis

Admitted for defence.

Head of the chair:
professor Petr Tovstik

Scientific supervisor:
assistant professor Galina Kuteeva

Reviewer:
professor Ekaterina Polyakova

Saint-Petersburg
2016

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 4 |
| 1. Постановка и решение задачи в общем виде | 5 |
| 1.1. Вычисление конформного отображения | 5 |
| 1.2. Вычисление комплексного потенциала и давления на контуре | 6 |
| 2. Вычисление давления на контурах, построение линий тока | 8 |
| 2.1. вычисление давления на контуре $r = 1 + a \cos 2\theta$ | 8 |
| 2.2. Обтекание контура вида $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$ | 10 |
| 3. Обтекание контура вида $r = 1 + a \cos \theta$. | 12 |
| 4. Циркуляционное обтекание контура вида $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$, вычисление главного вектора сил. | 13 |
| 4.1. Вычисление циркуляции | 13 |
| 4.2. Главный вектор сил, парадокс Д'Аламбера | 14 |
| Заключение | 16 |
| Список литературы | 17 |

Введение

Вопрос обтекания твёрдых тел изучается долгое время. Интерес к этим исследованиям вызван необходимостью анализировать характеристики потока возле частей корабля и цилиндрических частей корабельных доков, шлюзов и платформ, а также выяснить влияние формы обтекаемых тел на параметры потока.

Большой вклад в этой области внесли такие ученые, как Исаак Ньютон с его работами о сопротивлении среды [1], Даниил Бернулли с фундаментальной работой по гидродинамике [2], а также Д'Аламбер, Стокс, Навье, Рейнольдс [1].

Применение метода конформных отображений изучали Седов, Жуковский, Лойцянский. Существенный вклад в разработку математического аппарата внёс М. А. Лаврентьев.

Вариационный принцип конформных отображений обсуждается в различной литературе, включая современную ([3],[4],[5]).

Обтекание тел плоским течением хорошо изучено для некоторых канонических тел, например, для кругового и эллиптического цилиндра. Используя метод конформных отображений и вариационный принцип, сформулированный Линделёфом ([6], стр. 582), можно перенести эти результаты на деформированные тела, близкие к каноническим. Это даёт также возможность рассмотреть вопрос потенциального обтекания деформируемой оболочки.

В работе изучается обтекание твердого тела, по форме близкого к круговому цилиндру радиуса $R = 1$, потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданными давлением и скоростью на бесконечности (p_∞ и V_∞ соответственно) и плотностью ρ .

При помощи вариационного принципа конформных отображений в общем случае получен комплексный потенциал обтекания контуров, близких к круговым. Построены линии тока при различных параметрах системы. С помощью интеграла Бернулли выражена зависимость давления на контуре от угла в полярной системе координат. Проведено сравнение результатов с решением задачи обтекания кругового цилиндра, приведенным в классических учебниках ([7],[8],[9]). Проведено сравнение результатов с частным случаем поставленной задачи ([10]), где найдено решение уравнения Лапласа для потенциала скоростей методом малого параметра. Вычислен главный вектор сил, действующий на тело, и главный момент в случае, когда главный вектор сил равен нулю.

1. Постановка и решение задачи в общем виде

Рассмотрим бесконечно длинное твердое тело, близкое по форме к цилиндрическому, обтекаемое идеальной несжимаемой жидкостью. Цель работы — выяснить характер обтекания тела жидкостью; вычислить давление на тело; вычислить главный вектор сил и главный момент, действующий на тело. Подробнее постановка этой задачи обсуждается в [11].

1.1. Вычисление конформного отображения

Рассматривается плоская задача обтекания произвольного контура, близкого к круговому, идеальной несжимаемой жидкостью. Примем круговой контур за недеформированную область D с границей C в комплексной плоскости $z = x + iy$. Уравнение границы деформированного контура \tilde{C} в плоскости в полярных координатах (r, ϑ) будет иметь вид

$$\tilde{r}(\vartheta) = 1 + \delta(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi, \quad (1)$$

где $\delta(\vartheta)$ — дважды дифференцируемая гладкая функция, такая, что $|\delta(\vartheta)| < \varepsilon$, $|\delta'(\vartheta)| < \varepsilon$, $|\delta''(\vartheta)| < \varepsilon$, ε — малое число.

Конформное отображение деформированной области на единичный круг вычисляется в [12] исходя из вариационного принципа конформных отображений, известного также как принцип Линделёфа. Этот принцип утверждает, что, если рассматривать отображения на единичный круг областей, содержащих фиксированную точку z_0 , то при вдавливании внутрь границы области: 1) все линии уровня сжимаются; 2) растяжение в точке z_0 увеличивается; 3) растяжение в точках границы, оставшихся неподвижными, уменьшается; 4) в точках наибольшей деформации растяжение увеличивается более чем в $1/\lambda$ раз, где λ — наибольшая деформация контура.

Конформное отображение деформированной области на единичный круг имеет вид [12]:

$$f(z, \tilde{C}) = z \left(1 + \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right). \quad (2)$$

Предполагается, что отклонение границы контура от окружности $\delta(\vartheta)$ задано с помощью тригонометрического ряда:

$$\delta(\vartheta) = \varepsilon (a_0 + a_1 \cos \vartheta + b_1 \sin \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + b_2 \sin 2\vartheta + \dots), \quad (3)$$

Если считать, что контур симметричен как относительно оси OX , так и относительно оси OY , то в разложении (3) останутся только слагаемые при косинусах четных дуг.

Вычисление интеграла в формуле (2) при подстановке слагаемых из $\delta(t)$ в виде (3) в пакете Maple 2016 показало, что

$$\int_0^{2\pi} \cos nt \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = z^n$$

для $|z| < 1$. Полученная формула подтверждается вычислениями в [12].

Выражение для конформного отображения деформированной области на единичный круг преобразуется к виду

$$f(z, \tilde{C}) \approx \varepsilon z (1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots). \quad (4)$$

В [12] также указано, что выкладки верны и для отображения внешности деформированной области на внешность круга, которое определяется по формуле

$$F(z) = \frac{1}{f(1/z)}. \quad (5)$$

Подставим (4) в (5), раскладывая в ряд Тейлора по ε и оставляя линейные члены по ε члены:

$$F(z, \tilde{C}) = z - \varepsilon \left(\frac{a_2}{z} + \frac{a_4}{z^3} + \dots \right). \quad (6)$$

Получили простое выражение для конформного отображения внешности деформированного контура на внешность круга.

1.2. Вычисление комплексного потенциала и давления на контуре

Комплексный потенциал — функция комплексной переменной вида $w(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$. Это одна из основных характеристик потока, с помощью которой определяются потенциал скоростей $\varphi(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y)$ и функция тока $\psi(x, y) = \operatorname{Im} w(x, y)$. Линиями тока называются кривые $\psi(x, y) = \operatorname{const}$, вдоль которых движутся частицы жидкости.

Пусть известно конформное отображение области вне данного контура на внешность круга $F(z)$. Тогда комплексный потенциал обтекания контура $w(z)$ будет равен [7],[8],[9]

$$w(z) = K \bar{V}_\infty F(z) + \frac{KV_\infty R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln F(z), \quad (7)$$

где $K = \frac{1}{F'(z)_\infty}$, V_∞ — скорость потока на бесконечности, R — радиус кругового цилиндра, Γ — циркуляция.

Используя формулу (7) и конформное отображение (6), можем записать комплекс-

ный потенциал обтекания контура с границей в форме (3) (раскладывая в ряд Тейлора по малому параметру ε и оставив линейные члены), приняв во внимание, что $\lim_{z \rightarrow \infty} F'(z) = 1$:

$$w(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{V_\infty}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \left[\bar{V}_\infty \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_{2n}}{z^{2n-1}} \right) - V_\infty \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_{2n}}{z^{2n+1}} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_{2n}}{z^{2n}} \right) \right] \varepsilon. \quad (8)$$

Для контура $r(\vartheta) = 1 + a \cos 2\vartheta$ комплексный потенциал запишется в следующем виде:

$$w(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{V_\infty}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \left(-\frac{\bar{V}_\infty}{z} + \frac{V_\infty}{z^3} - \frac{\Gamma}{2\pi i z^2} \right) a. \quad (9)$$

Далее считаем, что $V_\infty = \bar{V}_\infty$ (т.е. поток направлен вдоль оси OX), и $\Gamma = 0$.

Тогда комплексный потенциал (9) примет вид:

$$w(z) = V_\infty \left(z + \frac{1}{z} \right) + V_\infty a \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \right). \quad (10)$$

Для вычисления возмущенного давления $\tilde{p}(r, \vartheta)$ будем пользоваться интегралом Бернулли, который можно записать в такой форме:

$$\tilde{p}(r, \vartheta) = p_\infty + \frac{\rho}{2} \left(V_\infty^2 - \left(\tilde{V}(r, \vartheta) \right)^2 \right). \quad (11)$$

Квадрат скорости возмущенного потока $\left(\tilde{V}(r, \vartheta) \right)^2$ найдем с помощью формулы [7]

$$\left(\tilde{V}(r, \vartheta) \right)^2 = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \vartheta} \right)^2, \quad (12)$$

где $\tilde{\varphi}$ – потенциал скоростей потока.

2. Вычисление давления на контурах, построение линий тока

В этой главе вычисляется давление и безразмерный коэффициент давления на контурах вида $\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a \cos 2\vartheta$ и $\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a(\cos 2\vartheta + k \cos 4\vartheta)$.

2.1. вычисление давления на контуре $r = 1 + a \cos 2\vartheta$.

Рассмотрим частный случай формы обтекаемого контура в виде $\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a \cos 2\vartheta$, где $a = \varepsilon a_2$, a_2 - коэффициент из формулы (3).

Учитывая комплексный потенциал обтекания данного контура (9), можем записать потенциал скоростей в следующем виде:

$$\tilde{\varphi}(r, \vartheta) = \operatorname{Re} w = \frac{V_\infty (r^4 + 4a \cos^2 \vartheta - ar^2 + r^2 - 3a) \cos \vartheta}{r^3}. \quad (13)$$

Далее, вычисляем квадрат скорости возмущенного потока на контуре с помощью формул (12),(13), упрощаем, раскладываем в ряд Тейлора по малому параметру a и отбрасываем нелинейную часть. Полагаем $r = 1 + a \cos 2\vartheta$, вследствие чего получаем следующее выражение для квадрата скорости на границе тела:

$$\left(\tilde{V}(\vartheta)\right)^2 = 4V_\infty^2 \sin^2 \vartheta (8a \cos^2 \vartheta - 2a + 1). \quad (14)$$

Отсюда можно получить формулу для вычисления давления на контуре:

$$\tilde{p}(\vartheta) = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \vartheta (8a \cos^2 \vartheta - 2a + 1)). \quad (15)$$

Для удобства исследования перейдём к безразмерному давлению (введём безразмерный коэффициент давления):

$$p = \frac{\tilde{p} - p_\infty}{\rho V_\infty^2 / 2}. \quad (16)$$

Понизив степень тригонометрических функций, придём к следующему выражению для безразмерного коэффициента давления:

$$p_1(\vartheta) = -1 + 4a \cos(4\vartheta) - 4a \cos(2\vartheta) + 2 \cos(2\vartheta). \quad (17)$$

Выражение безразмерного коэффициента давления для кругового цилиндра получено в классических учебниках ([9]), и может быть представлено в виде:

$$p_0(\vartheta) = 2 \cos 2\vartheta - 1, \quad (18)$$

что соответствует формуле (17) при $a = 0$.

По формулам (17) ($a=0.1$) и (18) строим графики безразмерного коэффициента давления на контуре $r(\theta) = 1+0.1 \cos 2\theta$ и на круговом цилиндре. (**рис. 1а**). Вычисляя функцию тока по формулам (8),(10), $\psi = \text{Im } w$, $\psi(x, y) = \text{const}$, строим картину обтекания нашего контура в пакете MATLAB (**рис. 2б**).

В [9] приведены экспериментально полученные кривые безразмерного коэффициента давления на круговом контуре в двух случаях (в зависимости от условий эксперимента) - см. **рис. 2б**. Здесь теоретическая кривая построена по формуле (18).

Интересно отметить, что в диапазоне $\theta = [0.. \pi/2]$ мы видим качественное совпадение кривых коэффициента давления при обтекании контура $r = 1+0.1 \cos 2\theta$ (см. **рис. 2а**) и кривой II, полученной экспериментально при обтекании кругового контура [9] (см. **рис 2б**).

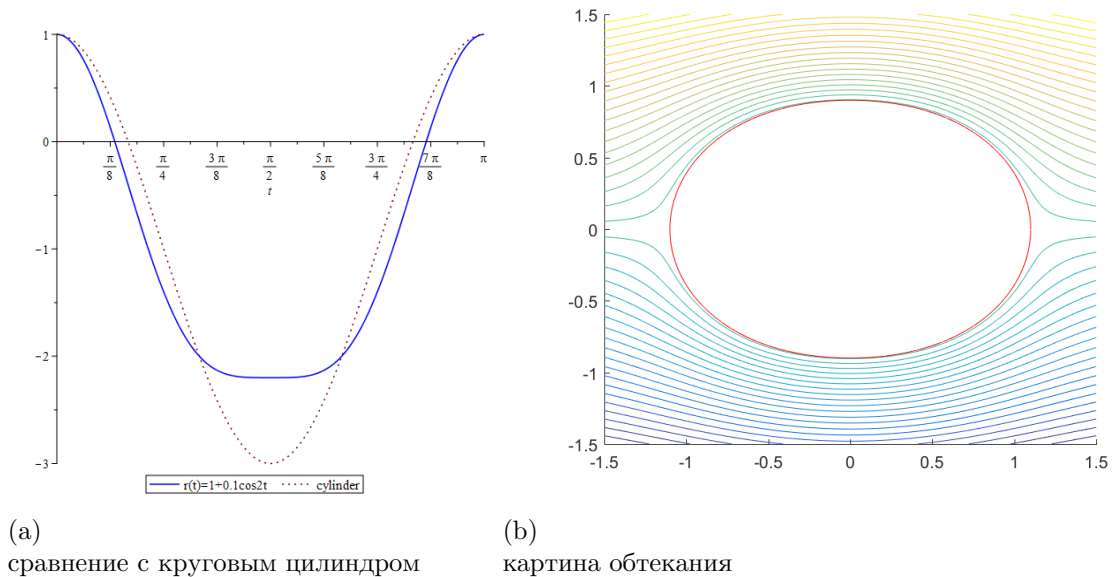
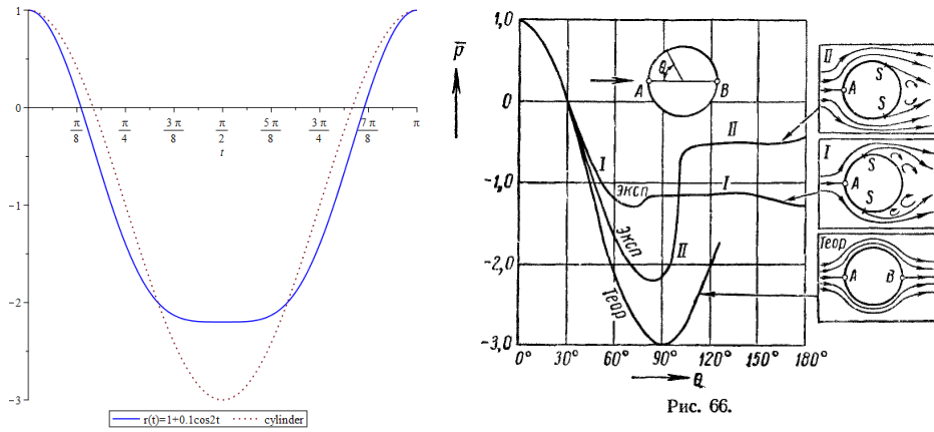


Рис. 1: контур $r(\vartheta) = 1 + 0.1 \cos 2\vartheta$



(a) сравнение с круговым цилиндром (b) экспериментальные данные

Рис. 2: контур $r(\vartheta) = 1 + 0.1 \cos 2\vartheta$, сравнение с экспериментальными данными [9]

2.2. Обтекание контура вида $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$.

Рассмотрим уравнение границы в виде

$$\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a(\cos 2\vartheta + k \cos 4\vartheta), \quad (19)$$

где $a = \varepsilon a_2$, $k = a_4/a_2$, ε ; a_2, a_4 , - коэффициенты из формулы (3).

Для такой границы выражение (6) для конформного отображения внешности деформированного контура на внешность круга будет выглядеть так:

$$F_2(z, \tilde{C}) \approx z - \left(\frac{1}{z} + \frac{k}{z^3} \right) a. \quad (20)$$

По формулам (8), $\varphi(x, y) = \text{Re } w(x, y)$, вычисляем потенциал скоростей потока, далее по формуле (12) - зависимость квадрата скорости потока на контуре от угла и, наконец, можно вычислить безразмерный коэффициент давления по формуле (16):

$$\tilde{p}_2 = ak(8 \cos 6\vartheta - 12 \cos 4\vartheta + 4 \cos 2\vartheta) + 4a(\cos 4\vartheta - \cos 2\vartheta) + 2 \cos 2\vartheta - 1 \quad (21)$$

По формуле (21) построили безразмерный коэффициент давления в двух случаях формы обтекаемого тела: первый случай (C1) $a=0.1, k=0$; второй случай (C2) $a=0.1, k=0.5$. Графики приведены на **рис. 3**.

Для первого случая (C1) приведена картина обтекания на **рис. 4b**, полученная с помощью пакета MATLAB. На **рис. 4a** приведено распределение коэффициента давления в диапазоне угла $\theta = [0..\pi]$.

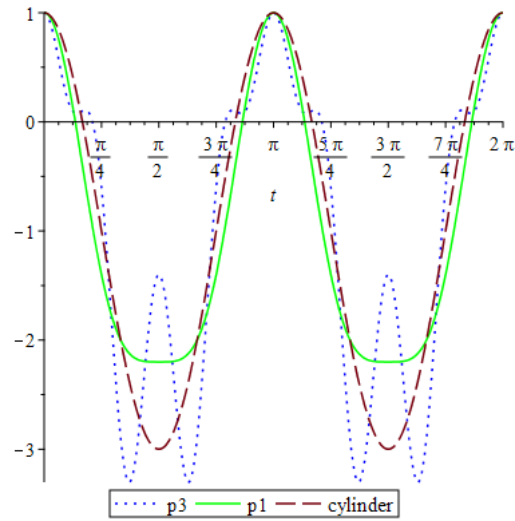
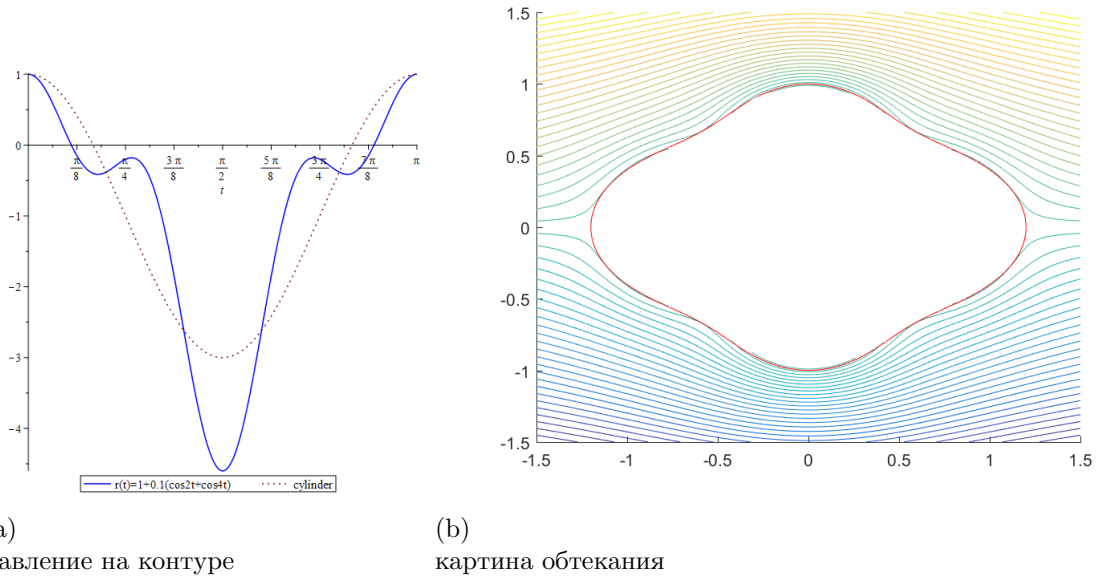


Рис. 3: графики давления. Красным пунктиром — круговой цилиндр; зеленым — $a = 0.1, k = 0$; синими точками — $a = 0.1, k = 0.5$



(a) давление на контуре

(b) картина обтекания

Рис. 4: контур $r(\vartheta) = 1 + 0.1(\cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta)$, картина обтекания.

3. Обтекание контура вида $r = 1 + a \cos \theta$.

Рассмотрим ещё один частный случай этой задачи, который был решен в [10] путём решения краевой задачи уравнения Лапласа для потенциала скоростей.

Постановка задачи: требуется рассчитать двумерное потенциальное течение вокруг цилиндра с границей, уравнение которой в полярной системе координат записывается как

$$r = a(1 + \varepsilon \cos \vartheta).$$

Скорость на бесконечности равна V_∞ .

Потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad r > a(1 + \varepsilon \cos \vartheta) \quad (22)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathbf{n} \nabla \varphi = 0, \quad r = a(1 + \varepsilon \cos \vartheta), \quad \varphi \sim V_\infty r \cos \vartheta + o(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Потенциал скоростей получен в ходе решения краевой задачи уравнения Лапласа путём сдвига краевых условий на недеформированный контур (с использованием метода малого параметра) в [10].

С учётом наших обозначений, потенциал скоростей имеет вид:

$$\varphi(r, \vartheta) = V_\infty \left(r \cos \vartheta + \frac{\cos \vartheta}{r} \right) + \varepsilon V_\infty \frac{\cos 2\vartheta}{r^2} + O(\varepsilon^2) \quad (24)$$

С помощью вариационного принципа конформных отображений получаем

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{V_\infty (r^3 \cos \vartheta + r \cos \vartheta)}{r^2} + \frac{V_\infty (2 \cos^2 \vartheta - r^2 - 1)}{r^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (25)$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\varphi(r, \vartheta) = V_\infty \left(r \cos \vartheta + \frac{\cos \vartheta}{r} \right) + \varepsilon V_\infty \left(\frac{\cos 2\vartheta}{r^2} - 1 \right) + O(\varepsilon^2) \quad (26)$$

Как можно увидеть, решения идентичны, за исключением члена εV_∞ . Известно, что потенциал скоростей определяется с точностью до константы, следовательно, можно считать, что решения совпадают.

4. Циркуляционное обтекание контура вида $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$, вычисление главного вектора сил.

4.1. Вычисление циркуляции

Рассмотрим обтекание контура

$$\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a(\cos 2\vartheta + k \cos 4\vartheta), \quad k = 0.5, \quad a = 0.1. \quad (27)$$

с циркуляцией Γ .

Комплексный потенциал обтекания такого контура вычисляется по формуле (8):

$$w_2(z) = -\frac{V(-z^6 + (a-1)z^4 + a(k-1)z^2 - ak)}{z^5}. \quad (28)$$

Линии тока, представленные на **рис. 5**, соответствуют кривым $\psi(x, y) = const$.

Конформное отображение внешности этого контура на внешность круга будет записываться в виде:

$$F_2(z, \tilde{C}) = z - a\left(\frac{1}{z} + \frac{k}{z^3}\right). \quad (29)$$

Для получения циркуляции Γ пользовались следующими соображениями.

1) Чтобы изучать задачу циркуляционного обтекания, необходимо задать либо значение циркуляции, либо точку схода [12]. Формула, связывающая циркуляцию и точку схода, приведена в [12] и имеет вид

$$\Gamma = 4\pi R V_\infty \sin \phi'_1. \quad (30)$$

ϕ'_1 - аргумент точки схода $\zeta^* = F_2(z^*, \tilde{C})$.

2) При циркуляционном обтекании произвольного контура точка схода находится как образ точки схода на круговом цилиндре [12].

Зададим на круговом контуре точку схода $z^* = e^{i\phi_1}$ с аргументом $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$. Эта точка при конформном отображении (29) перейдет в точку $\zeta^* = F_2(z^*, \tilde{C})$ с аргументом ϕ'_1 , которую и будем использовать для определения циркуляции (см. **рис.5b**).

Можно заметить, что при отображении аргумент точки схода на рассматриваемом контуре немного увеличивается по сравнению с аргументом точки схода на круговом контуре, то есть при циркуляционном обтекании контура (27) точка схода потока ближе к $\pi/2$, чем при обтекании кругового контура.

Вычислив ϕ'_1 , можем вычислить и циркуляцию:

$$\phi'_1 = 0.89 \text{ rad}, \quad \Gamma = 9.767 \text{ m}^2/\text{c}$$

4.2. Главный вектор сил, парадокс Д'Аламбера

Для того, чтобы выяснить, какая подъемная сила действует на наше тело в процессе обтекания, необходимо вычислить главный вектор сил, действующих на тело.

Сделать это можно двумя эквивалентными способами [7]. Первый — это посчитать контурный интеграл произведения давления на нормаль:

$$\mathbf{F} = \oint_C p \mathbf{n} dC. \quad (31)$$

Второй — вычислить контурный интеграл от квадрата производной комплексного потенциала:

$$\bar{P} = P_x - iP_y = \frac{\rho i}{2} \oint_C (w'(z))^2 dz. \quad (32)$$

Формула (32) известна как первая формула Чаплыгина — Блазиуса.

Воспользуемся вторым способом.

Для вычисления контурного интеграла воспользуемся известной теоремой Коши о вычетах:

$$\oint_C f(t) dt = 2\pi i \sum \text{res}(f(t), a_k)$$

Например, для комплексного потенциала обтекания контура

$$\tilde{r}(\vartheta) = 1 + a(\cos 2\vartheta + k \cos 4\vartheta)$$

Подынтегральная функция будет выглядеть следующим образом:

$$(w'(z))^2 = \frac{R(z)}{z^3(-z^4 + az^2 + ak)\pi}, \quad (33)$$

где $R(z)$ - некоторая функция, не имеющая особенностей. Заметим, что подынтегральная функция имеет особые точки только внутри контура (это верно для всех контуров, рассматриваемых нами). Следовательно, нужно посчитать вычет в бесконечности:

$$\text{res}((w'(z))^2, \infty) = -\frac{i\Gamma V_\infty}{\pi} \quad (34)$$

Стоит отметить, что и пакет Mathematica 10.3, и Maple 2016 такой вычет считают с ошибкой. Это было точно установлено, когда в качестве комплексного потенциала подставили комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра, для которого подъемная сила точно известна. Чтобы получить верный ответ, необходимо разложить функцию в ряд Лорана и найти коэффициент при z^{-1} .

В итоге, подставляя найденный вычет в исходное выражение для давления, и переходя к комплексно-сопряженному, получаем:

$$P = -i\rho V_\infty \Gamma, \quad (35)$$

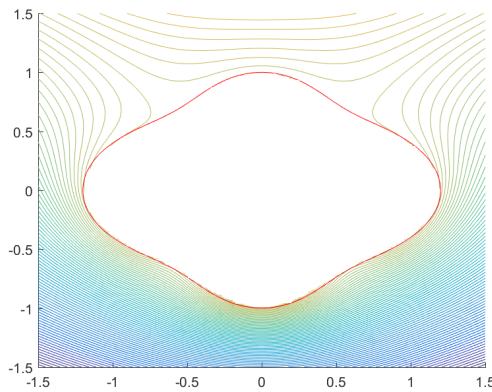
Что соответствует известной теореме Жуковского.

Как следствие, получаем подтверждение парадокса Д'Аламбера для исследуемых контуров: при бесциркуляционном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью тело не испытывает сопротивления и подъемной силы.

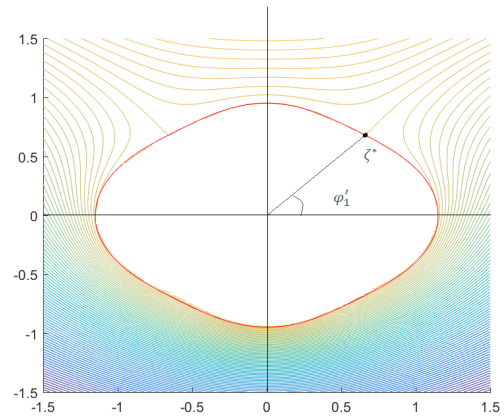
С помощью второй формулы Чаплыгина — Блазиуса можно вычислить момент, действующий на тело в случае бесциркуляционного обтекания относительно начала координат:

$$L = \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \oint_C z (w'(z))^2 dz \right].$$

Для контуров, симметричных относительно мнимой оси, момент равен нулю.



(a)
 $a = 0.1, k = 1, \Gamma = 9.767$



(b)
 $a = 0.1, k = 0.5, \Gamma = 9.767$

Рис. 5: контур $r(\vartheta) = 1 + 0.1(\cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta)$, картина обтекания с циркуляцией. "Подъемная сила" будет направлена вниз (против мнимой оси): $|P| = 9767$ Н.

Заключение

С помощью вариационного принципа конформных отображений (метода М.А. Лаврентьева) найдены приближенные аналитические выражения комплексного потенциала скоростей при потенциальном поперечном обтекании бесконечных цилиндров произвольного поперечного сечения, мало отличающихся от кругового. Описано как на основе комплексного потенциала строится потенциал скоростей и функция тока, линии тока, давление в потоке и на контуре (на основе интеграла Бернулли).

Для нескольких конкретных сечений (например, вида $r = 1 + \varepsilon a_2 \cos 2\theta$, $r = 1 + \varepsilon a_1 \cos \theta$, $r = 1 + \varepsilon(a_2 \cos 2\theta + a_4 \cos 4\theta)$, здесь a_i — постоянные, ε — малый параметр) проведены вычисления, построены графики давления на контуре, вычислен главный вектор и главный момент относительно центра тела.

В основном, решения задач приведены для бесциркуляционного потока; в последней части работы для заданного контура приведены графики обтекания для потока с циркуляцией.

Правильность полученных результатов подтверждается следующими соображениями.

1. При уменьшении малого параметра в выражении для формы контура приходим к предельному случаю — обтеканию кругового бесконечного цилиндра. Формулы для вычисления потенциала скоростей, функций тока, давления на круговом контуре даны во многих учебниках, например [7],[8],[9]. Выражения, полученные в предельном случае нашей работы (например, в формулах (8),(14)), совпадают с выражениями из учебников для кругового контура.

2. В работе представлен случай для формы контура в виде $r = 1 + a \cos \theta$. Для этого случая приведено выражение для потенциала скоростей двумя разными методами. Первый метод представлен в [10], второй метод — метод, разбираемый в нашей работе, т.е. метод М.А. Лаврентьева (вариационный принцип конформных отображений). Эти два выражения для потенциала скоростей совпадают с точностью до постоянной.

3. В работе вычислен главный вектор сил при циркуляционном обтекании цилиндра с сечением вида $r = 1 + a(\cos 2\theta + k \cos 4\theta)$, (a — малый параметр, k — постоянная) — формула (30). Это выражение соответствует известной формуле Жуковского. Для бесциркуляционного обтекания получаем главный вектор сил, равный нулю (парадокс Д'Аламбера).

Список литературы

- [1] M. Eckert. *The Dawn of Fluid Dynamics: A Discipline Between Science and Technology*. Wiley, 2006.
- [2] D. Bernoulli. *Hydrodynamica*. 1738.
- [3] Peter J. Oliver. *Complex Analysis and Conformal Mapping*. University of Minnesota, 2015.
- [4] Kühnau R. *Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory Volume 2*. Elsevier, 2005.
- [5] Tyurin Y.V. Rabinovich B.I. *Numerical Conformal Mapping in Two-Dimensional Hydrodynamics*. Space Research Institute Russian Academy of Science, Moscow, 2000.
- [6] M. Hazewinkel. *Encyclopaedia of Mathematics: Volume 3 Heaps and Semi-Heaps — Moments, Method of (in Probability Theory)*. Encyclopaedia of Mathematics. Springer US, 2013.
- [7] Валландер С. В. *Лекции по гидроаэромеханике*. Издательство Ленинградского университета, Л., 1978.
- [8] Кочин Н.Е. Розе Н.В., Кибель И.А. *Теоретическая гидромеханика. Часть первая*. Физматгиз, М., 1963.
- [9] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Л., 1950.
- [10] Howison S. *Practical Applied Mathematics: Modelling, Analysis, Approximation*. Oxford University, OSIAM, 2004.
- [11] Кутеева Г.А. Ершов Б.А. *применение вариационного принципа конформных отображений в решении одной плоской динамической задачи гидроупругости*. Вестник Санкт-Петербургского Государственного Университета, СПб., 1999.
- [12] Шабат Б.В. Лаврентьев М.А. *Методы теории функций комплексного переменного*. Наука, Л., 1973.