

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

**Богуславская Елена Олеговна**

**Дипломная работа**

**Ориентация осей, связанных с телом, с учётом  
транспортного запаздывания в управляющем моменте**

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Чижова О. Н.

Санкт-Петербург

2016

# Содержание

Введение.....	3
Обзор литературы.....	5
Глава 1. Ориентация осей, связанных с телом, с учетом транспортного запаздывания в управляющем моменте.....	7
1.1 Постановка задачи.....	7
1.2 Положения равновесия.....	14
Глава 2. Устойчивость.....	18
2.1 Метод Линейного приближения.....	18
2.2 Исследование корней характеристического квазиполинома.....	30
2.2.1 Критерии устойчивости.....	31
Выводы.....	36
Заключение.....	39
Список литературы.....	40
Приложение А1.....	42

## Введение

На настоящий момент существует очень много задач управления различными процессами и объектами. Множество таких задач решается для различных тепловых, электрических, технологических и экономических процессов. Одной из крупных областей, где задачи управления давно являются актуальными, которая будет представлять для нас особый интерес – это механические системы, где рассматривается, среди прочих, управление твердым телом.

Управление подразумевает под собой некоторое влияние, воздействие на управляемый объект с целью изменения его состояния, характеристик или положения в пространстве. В реальных практических системах не существует мгновенного управления, так как всегда присутствует некоторая задержка при передаче управляющего воздействия от управляющего центра к управляемому объекту или задержка при получении управляющим центром информации от датчиков системы (например, гироскопических, датчиков скорости, давления и др.). Одним из примеров таких процессов может служить технологическая процедура проката металлического листа, где управление присутствует при регулировании толщины листа на прокатном станке. Запаздывание появляется при получении регулирующим объектом данных о настоящей толщине с целью ее коррекции – лист продолжает движение, пока датчики передают начальные данные в управляющий центр, который должен принять решение об изменении толщины и передать управляющее воздействие на исполнительные органы для ее коррекции. Еще одним примером может служить процесс перемещения каких-либо материалов, объектов, тел на ленточных транспортерах. Также, запаздывание возникает и при передаче сигналов на расстояния в электрических, гидравлических и механических системах.

Такие системы называют системами с запаздыванием или системами с последствием. Запаздывание может быть различным, как постоянным, так и описываемым некоторыми функциями. Использование систем с запаздыванием позволяет более точно и адекватно описать реальные динамические процессы.

Для механических систем, на которых мы сосредоточим наше внимание, задачи управления включают в себя задачи ориентации, стабилизации, изменения и оптимизации траекторий движения тел и другое. Нам будет интересна задача ориентации твердого тела с учетом транспортного запаздывания, которое проявляется в управляющем моменте.

По сути, данная задача заключается в нахождении такого управляющего воздействия, которое при приложении его в управляемому твердому телу ориентирует и стабилизирует его в определенном заданном направлении. Задача усложняется наличием в управлении транспортного запаздывания – временной задержки при передаче сигнала управления. На практике такие задачи вполне актуальны и могут применяться при управлении самолетами, космическими кораблями, морскими судами и прочими телами. При решении такой задачи встает вопрос не только о фактическом нахождении подходящего управляющего момента для ориентации твердого тела, но и вопрос об устойчивости полученного твердым телом положения.

## Обзор литературы

Системы с запаздыванием рассматривались в свое время еще Л.Эйлером, но для механических систем подобные исследования начал В.Вольтерра в прошлом веке. Пик популярности уравнений с запаздыванием пришелся на середину XX столетия с работами таких авторов как Р.Беллман и К.Л. Кук [3], Л.Э.Эльсгольц и С.Б.Норкин [18], Н.Н.Красовский [7], В.И.Зубов [5, 6], Б.С.Разумихин, А.Д.Мышкис [9], И.Г.Малкин [8] и другие.

Одним из важнейших предметов исследования для механических систем является устойчивость (линейных и нелинейных систем). Данному вопросу посвящали свои работы такие авторы как Н.Н.Красовский, А.А.Като, А.М.Ляпунов, В.И.Зубов, а современные исследования проводили С.В.Павликов [10], А.В.Прасолов [11, 12, 13, 14], А.П.Жабко [1, 4], А.Ю.Александров [1], В.Л.Харитонов [4], О.Н.Чижова [16, 17], С.П.Безгласный и О.А.Мысина [2] и другие. При исследовании на устойчивость используются как алгебраические, так и прямые методы. Популярностью пользуется метод функций Ляпунова [5, 6, 13] с различными модификациями и дополнительными условиями (функционалы Ляпунова-Красовского, теоремы Разумихина, Четаева). Также используются методы исследования, основанные на алгебраических и частотных критериях устойчивости [15], достаточно популярен метод Д-разбиений - применяется для исследования положения корней характеристического квазиполинома (аналог характеристического полинома для систем с запаздыванием) для дальнейшего вывода об устойчивости системы.

Одноосная ориентация твердого тела, то есть задача, в которой ищется такое управление, что при воздействии им на тело некоторый неподвижный в связанной с телом системе координат вектор поворачивается в направлении некоторого неподвижного в абсолютной системе координат вектора,

рассматривалась в работах В.И.Зубова [5] без учета запаздывания в управлении, А.П.Жабко [4], А.В.Прасолова [12, 13] с учетом постоянного запаздывания, О.Н.Чижовой [16, 17] с учетом линейного запаздывания.

Задача трехосной ориентации, которая представляет для нас большой интерес, без учета запаздывания в управлении была рассмотрена в [2, 5]. У С.В. Павликова в [10] рассмотрен случай постоянного запаздывания с упрощением в структуре системы.

В данной работе мы ставим задачу трехосной ориентации твердого тела с учетом транспортного запаздывания в управляющем моменте. Мы возьмем за основу работу В.И.Зубова [5] и введем в предложенный автором управляющий момент постоянное положительное запаздывание. Такое запаздывание вполне обосновано механически: управляемый объект находится от управляющего центра на некотором фиксированном расстоянии, вследствие чего возникает запаздывание прохождения сигнала управления. Линейное запаздывание мы рассматривать не будем, так как в работе [16] уже было доказано, что линейное запаздывание в управляющем моменте для одноосной ориентации не сохраняет устойчивости системы, а данный результат можно распространить и на трехосный случай.

Построив систему, замкнутую управляющим моментом с постоянным запаздыванием, и решив ее, мы займемся вопросом устойчивости. Исследование будем проводить по линейному приближению и далее на основании частотных критериев [15]. Возможно, для исследования устойчивости метод функций Ляпунова более популярен у математиков [1, 4, 5, 11, 12], но для нас это только добавляет интереса к рассмотрению другого способа исследования.

# Глава 1. Ориентация осей, связанных с телом, с учетом транспортного запаздывания в управляющем моменте

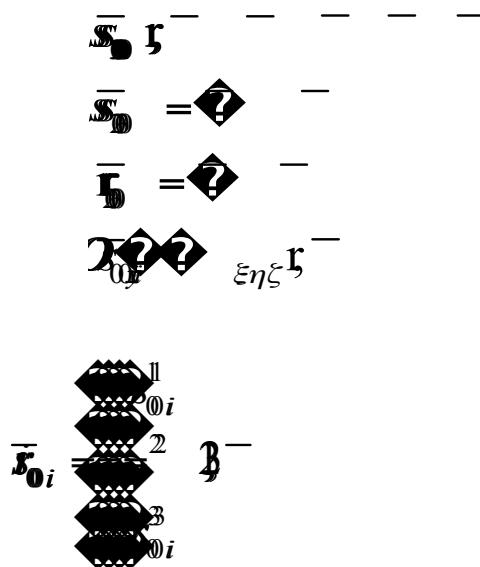
## 1.1 Постановка задачи

Будем рассматривать твердое тело, которое имеет неподвижную точку  $O$ . Пусть эта точка совпадает с центром инерции тела. С точкой  $O$  связаны две системы координат:

$O_{\xi\eta\zeta}$  - абсолютная система координат;

$O_{x}$  - жестко связанная с телом система координат, осями которой являются главные центральные оси твердого тела.

Для трехосной ориентации мы будем рассматривать шесть векторов – три в абсолютной системе координат и три в связанной, каждые из которых неподвижны в своей системе, то есть поворачиваются вместе с ней.



$$\vec{s}_{0i} = \dots \text{Оси}$$



Задача трехосной ориентации состоит в нахождении управляющего момента такого, чтобы векторы  $\vec{r}_{0i}$  стабилизировались в направлениях векторов  $\vec{s}_{0i}$ . Уравнения, описывающие вращательные движения твердого тела вокруг центра инерции под действием управляющего момента, имеют вид [5]

$$\Theta \dot{\vec{\omega}} = -\vec{M}$$

где

$\vec{\omega}$  - угловая скорость твердого тела

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - проекции вектора угловой скорости на оси системы координат  $O_x$ ,  $O_y, O_z$

$\Theta$  - тензор инерции (имеет диагональный вид, так как осями системы координат выступают главные центральные оси твердого тела)

$\vec{M}$  - главный момент сил (управляющий момент)

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

В скалярной форме уравнения вращения примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{M}_x &= \dots & x \\ \dot{M}_y &= \dots & y \\ \dot{M}_z &= \dots & z \end{aligned}$$

где  $B_i$  - главные центральные моменты инерции

Вектор  $\bar{s}_{0i}$  вращается вокруг  $O_x$  с угловой скоростью  $-\bar{\omega}$ , поэтому, по [5], мы можем написать, что

$$\dot{\bar{s}}_{0i} = -\bar{\omega} \times \bar{s}_{0i}$$

Вид управляющего момента мы возьмем как в работе [5], где он представлен в виде

$$\bar{M} = \bar{u} \sum_{i=1}^3 \bar{s}_{0i}$$

где  $\bar{u}$  - некоторый момент, который в данной работе мы будем рассматривать как  $\bar{u} \times \bar{s}_{0i}$

$u$  - некоторая силовая функция, от нее будем брать градиент по компонентам вектора  $\bar{s}_{0i}$ ; представление этой функции также возьмем из [5]:

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \bar{s}_{0i} \right]^2$$

Распишем, как будет выглядеть вектор градиента от этой силовой функции, взятый по компонентам вектора  $\bar{s}_{0i}$ .

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{s}_{0i}} = \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{s}_{0i}$$

Полученное выражение, подставим в представление для управляющего момента и распишем слагаемое под знаком суммы:

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{0i} &= \bar{M}_{0i} = \bar{M}_{0i} = \bar{M}_{0i} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{r}_{0i} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \\
 &= \bar{M}_{0i} \begin{pmatrix} 2 \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \\
 &= \bar{M}_{0i} \begin{pmatrix} 3 & -\bar{r}_{0i} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \\
 &= \bar{M}_{0i} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \bar{M}_{0i} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ r_{0i}^1 \\ \\ \end{pmatrix} \\
 &= \bar{M}_{0i} \begin{pmatrix} - & - \\ 0 & \end{pmatrix} \mathbb{B}
 \end{aligned}$$

Таким образом, управляющий момент примет вид

$$\bar{M} = -\bar{M}_{0i} \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} - & - \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Такой управляющий момент предложен В.И.Зубовым в [5] и является стабилизирующим для задачи ориентации твердого тела. Но данная задача поставлена без учета транспортного запаздывания в управляющем моменте.

Появление запаздывания обусловлено тем, что в реальных задачах для передачи от управляющего центра управляемому объекту некоторого управляющего воздействия требуется время, так как сигнал не может прийти до объекта моментально. Предположим, что эта временная задержка фиксирована и постоянна. Тогда для учета этого времени введем в управляющий момент постоянное транспортное запаздывание  $\theta$ .

$$\bar{M}_\theta = -\bar{\chi} \quad \theta$$

$$\theta > 0$$

Запаздывание проявится в векторах  $\bar{S}_{0i}$  и векторе угловой скорости  $\bar{\omega}$ . Тогда компоненты этих векторов будут представляться в виде:

$$\bar{S}_{0i} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{0i\theta\theta}^1 \\ \bar{S}_{0i\theta\theta}^2 \\ \bar{S}_{0i\theta\theta}^3 \end{pmatrix} \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \\ \bar{\omega}_3 \end{pmatrix}$$

где индекс « $\theta$ » будет означать, что конкретная компонента рассматривается в момент времени  $(t - \theta)$ .

Введение транспортного запаздывания подобного вида преобразует управляющий момент, теперь он выглядит так:

$$\bar{M} = -\bar{\chi} \bar{\omega} = - \sum_{i=1}^3 \bar{S}_{0i\theta\theta} \bar{\omega}_i = - \sum_{i=1}^3 \bar{S}_{0i\theta\theta} \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \\ \bar{\omega}_3 \end{pmatrix} + \bar{S}_{0i\theta\theta} \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \\ \bar{\omega}_3 \end{pmatrix}$$

Целью нашего исследования будет выяснить, сохраняет ли свои стабилизирующие свойства управляющий момент в данном виде в задаче трехосной стабилизации твердого тела.

Распишем проекции управляющего момента на оси системы  $O^{xyz}$

$$\begin{aligned}
 & \bar{M}_x = \bar{M}_x \cos^2 \theta + \bar{M}_y \sin^2 \theta + \bar{M}_z \sin \theta \cos \theta \\
 & \bar{M}_y = \bar{M}_x \sin^2 \theta + \bar{M}_y \cos^2 \theta - \bar{M}_z \sin \theta \cos \theta \\
 & \bar{M}_z = \bar{M}_x \sin \theta \cos \theta - \bar{M}_y \sin \theta \cos \theta + \bar{M}_z (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
 \end{aligned}$$

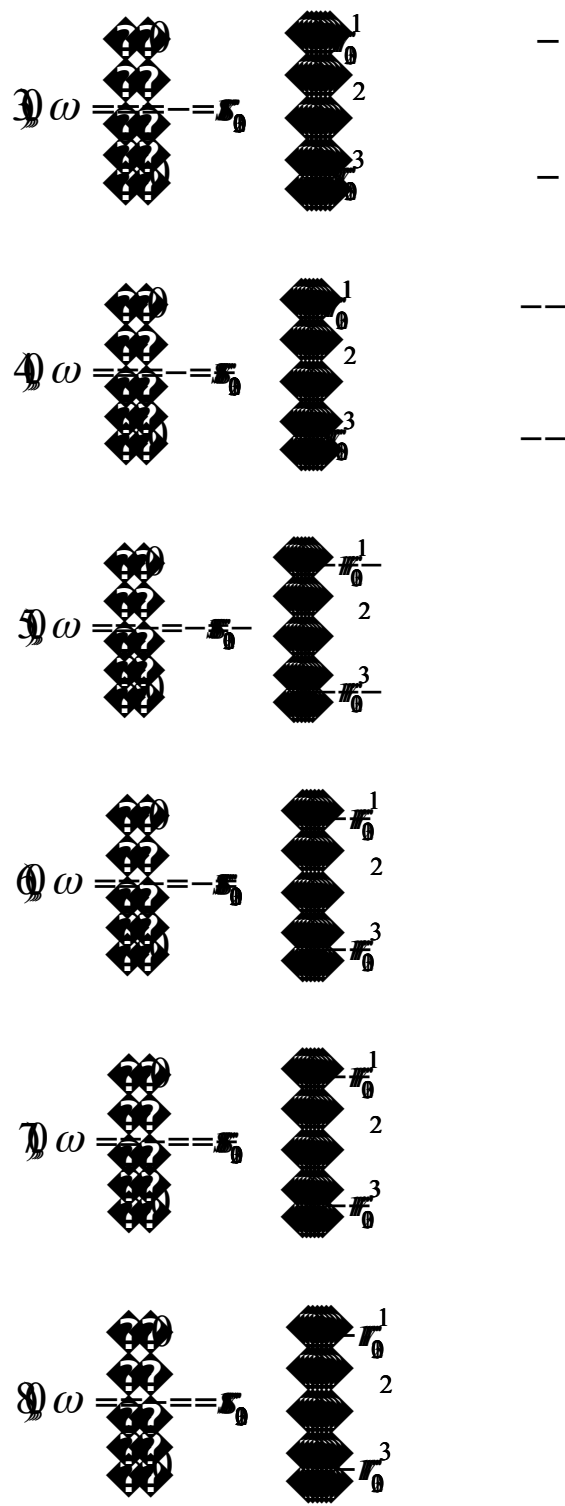
Подставив данное представление в систему уравнений вращения твердого тела в скалярной форме, мы получим систему, описывающую вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной точки под действием управляющего момента с постоянным транспортным запаздыванием. Эта система двенадцатого порядка будет иметь вид (1.1):











Отметим, что полученные положения равновесия точно такие же, как в случае без запаздывания в работе [5].

Обратимся теперь к существованию первых интегралов.

Система (1.1) допускает три первых интеграла.

$$\sum_{i=1}^3 (a_{10}^i)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^3 (a_{20}^i)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^3 (a_{30}^i)^2 =$$

Так как нас интересует только ориентация осей, связанных с телом, в заданном направлении, то мы можем рассматривать  $\|\bar{s}_{0i}\| = 1$ . Тогда и интересны нам будут только частные интегралы

$$\sum_{i=1}^3 (s_{10}^i)^2 = 1 \quad \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right)$$

$$\sum_{i=1}^3 (s_{20}^i)^2 = 1 \quad \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right)$$

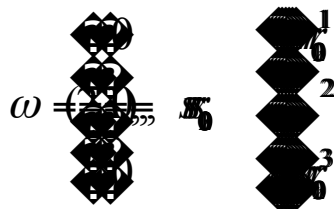
$$\sum_{i=1}^3 (s_{30}^i)^2 = 1 \quad \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right)$$

## Глава 2. Устойчивость

Рассмотрим вопрос устойчивости полученных положений равновесия системы (1.1). Методы исследования могут быть различными, но мы остановимся на методе линейного приближения.

### 2.1 Метод Линейного приближения

Для начала рассмотрим первое из восьми положений равновесия.



В работе [5], в случае без запаздывания, данное положение равновесия асимптотически устойчиво. Именно поэтому оно представляет для нас особый интерес. Посмотрим, что получится в случае использования управляющего момента с ненулевым запаздыванием.

Построим для положения равновесия (2.1) систему в отклонениях. Для этого вводим замену:

$$x_{jj}^i = -\bar{\theta} = \mathfrak{B}$$

После подстановки в (1.1) данной замены система примет вид





$$\|\bar{s}_{0i}\| = 1$$

$$\left( \frac{z^3}{z^2} \right)^2 + \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \left( \frac{z^3}{z^2} \right) = 1$$

$$\left( \frac{z^3}{z^2} \right)^2 \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \left( \frac{z^3}{z^2} \right) = 1, 2, 3,$$

Наличие первых интегралов, позволяет нам понизить порядок системы с двенадцати до девяти. Для этого нам нужно установить, какие из уравнений в системе (2.2) выполняются тождественно.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{z^3}{z^2} = \frac{z^3}{z^2} +$$

$$\frac{z^3}{z^2} = \frac{z^3}{z^2} + \frac{z^3}{z^2} -$$

$$\frac{z^3}{z^2} = -\frac{z^3}{z^2} - \sqrt{1 - \left( \frac{z^3}{z^2} \right)^2} \left( \frac{z^3}{z^2} \right)$$

$$\frac{z^3}{z^2} = \frac{-z^3 \left( \frac{z^3}{z^2} \right)}{2\sqrt{-\left( \frac{z^3}{z^2} \right)^2} \left( \frac{z^3}{z^2} \right)} \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \left( \frac{z^3}{z^2} \right)$$

$$+ \sqrt{1 - \left( \frac{z^3}{z^2} \right)^2} \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \frac{-z^3 \left( \frac{z^3}{z^2} \right)}{2\sqrt{-\left( \frac{z^3}{z^2} \right)^2} \left( \frac{z^3}{z^2} + \right)^2}$$

$$\left( \frac{z^3}{z^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{z^3}{z^2} \right)^2} \right)^2 \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \left( \frac{z^3}{z^2} \right)$$

$$= \frac{-\left( \frac{z^3}{z^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{z^3}{z^2} \right)^2} \right) \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \sqrt{\dots} \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}}$$

$$+ \left( \frac{z^3}{z^2} \right) \left( \frac{z^3}{z^2} \right) = \frac{z^3}{z^2} \text{ и т.д.}$$



Для переменных, которым соответствуют исключенные уравнения, будут верны выражения, которые получаются из представлений первых интегралов

$$\begin{aligned}
 L_0^3 &= - + - + - \sqrt{1 - \left( \quad \right)^2 - \left( \quad \right)} \\
 L_0^2 &= - + - + - \sqrt{1 - \left( \quad \right)^2 - \left( \quad \right)} \\
 L_0^1 &= - + - + - \sqrt{1 - \left( \quad \right)^2 - \left( \quad \right)}
 \end{aligned}$$

Теперь, следуя идее метода линейного приближения, нужно выделить линейную часть системы (2.3), то есть исключить все нелинейные слагаемые

относительно  $\left\{ \begin{matrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z} \end{matrix} \right\}$ . Для этого разложим  $\frac{\mathbf{z}^3}{\mathbf{z}_1}$  в ряд

Тейлора в окрестности  $\begin{matrix} \diamond_1^2 = 0 & \diamond_2^1 = 0 & \diamond_3^1 = 0 \\ \diamond_1^3 = 0 & \diamond_2^3 = 0 & \diamond_3^2 = 0 \end{matrix}$  соответственно.

$$\mathbf{z}_1^3 = \mathbf{z}_1^3 \left( \begin{matrix} \diamond_1^1 \\ \diamond_1^2 \\ \diamond_1^3 \end{matrix} \right) \Big|_0 - \left| \quad \right| \dots \left( \quad \right)$$



$$r_0^3(z_1^1) = \sqrt{\left(\frac{z_0^2}{r_0^1}\right)^2 + \left(\frac{z_0^3}{r_0^1}\right)^2}$$

так  $\|r_{0i}\| =$

$$\frac{z_1^1}{z_0^2} \left| \frac{-z_0^2}{2\sqrt{\left(\frac{z_0^2}{r_0^1}\right)^2 + \left(\frac{z_0^3}{r_0^1}\right)^2}} \right|_{\substack{z_1^2=0 \\ z_1^3=0}} = \frac{r_0^2}{z_1^2=0, z_1^3=0}$$

$$\frac{z_1^1}{z_0^3} \left| \frac{-z_0^3}{2\sqrt{\left(\frac{z_0^2}{r_0^1}\right)^2 + \left(\frac{z_0^3}{r_0^1}\right)^2}} \right|_{\substack{z_1^2=0 \\ z_1^3=0}} = \frac{r_0^3}{z_1^2=0, z_1^3=0}$$

$$z_1^1 \left( \frac{z_0^2}{r_0^1}; \frac{z_0^3}{r_0^1} \right) = \frac{r_0^3}{r_0^1} \quad \text{---}$$

Аналогичным образом получим представления для двух других переменных

$$z_2^1 \left( \frac{z_0^2}{r_0^1}; \frac{z_0^3}{r_0^1} \right) = \frac{r_0^3}{r_0^2} \quad \text{---}$$

$$z_3^1 \left( \frac{z_0^2}{r_0^1}; \frac{z_0^3}{r_0^1} \right) = \frac{r_0^2}{r_0^3} \quad \text{---}$$

Подставляя полученные выражения в (2.3), получим систему вида



Из уравнений в этой системе исключаем нелинейные слагаемые относительно  $\left\{ \begin{matrix} \mathbf{A}, & \mathbf{z} \\ \mathbf{z} & \end{matrix} \right\}$ . После сокращений получим систему (2.4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= -\frac{1}{\theta\theta\theta\theta} \left( \mathbf{z} \right) \left( \frac{(r_{02}^3)^2}{r_{02}^{22}} - \frac{r_{02}^{13}}{\theta} \right) \\
 \mathbf{A}_2 &= -\frac{r_{02}^{12}}{r_{02}^{33}} + \frac{(r_{03}^2)^2}{\theta\theta} \\
 \mathbf{A}_3 &= -\frac{1}{\theta\theta\theta} + \frac{r_{01}^{23}}{r_{01}^{11}} + \frac{(r_{01}^3)^2}{\theta} + \frac{1}{\theta} \left( \frac{\mathbf{B}}{\theta\theta} \right) \\
 \mathbf{A}_4 &= -\frac{1}{\theta\theta} + \frac{(r_{03}^1)^2}{r_{03}^{33}} + \frac{r_{03}^{12}}{\theta\theta} \\
 \mathbf{A}_5 &= -\frac{1}{\theta\theta\theta} + \frac{(r_{01}^2)^2}{r_{01}^{11}} + \frac{r_{01}^{23}}{\theta} \\
 \mathbf{A}_6 &= -\frac{1}{\theta\theta} + \frac{r_{02}^{13}}{r_{02}^{22}} + \frac{(r_{02}^1)^2}{\theta\theta\theta} \\
 \mathbf{A}_7 &= -\mathbf{f} \Gamma \\
 \mathbf{A}_8 &= -\mathbf{f} \Gamma \\
 \mathbf{A}_9 &= -\mathbf{f} \Gamma \\
 \mathbf{A}_{10} &= -\mathbf{f} \Gamma \\
 \mathbf{A}_{11} &= -\mathbf{f} \Gamma \\
 \mathbf{A}_{12} &= -\mathbf{f} \Gamma
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.4) – это система линейного приближения для положения равновесия (2.1).



вынести решение об устойчивости всей системы (2.5). Выпишем эти системы.

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Очевидно, что все системы одинаковы, и мы можем рассмотреть одну из них, результаты для которой потом перенести на две другие.

Рассмотрим первую из систем

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Матрица системы (2.6), вырожденная, но

$$\ddot{z}_2 + \dot{z}_2 = 0$$

то есть система (2.6) имеет первый интеграл, что позволит нам понизить порядок системы.

Выразим одну переменную через другую:

$$\dot{z}_2 = -z_2$$

Порядок системы (2.6) уменьшился на единицу, а подставив в нее полученное выражение для  $\dot{z}_2$ , мы получим линейную систему второго порядка (2.7):

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= -z_3 + \frac{G}{T\theta} z_2 \\ \dot{z}_2 &= -z_2 \\ z_3 &= z_3 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Исследуем систему линейную (2.7) на устойчивость. Для этого представим систему в матричном виде, выпишем ее матрицы и построим характеристический квазиполином системы:

$$\dot{X} = A X + B u$$

$$K = \begin{pmatrix} a_2 + \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \gg 0 \quad \begin{pmatrix} a_2 + \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{det} \left| \lambda E - \overline{\overline{B}} \right|$$

$$\left| \begin{matrix} \lambda + \frac{1}{A} e^{-\lambda \theta \lambda \theta} & \frac{a_2 +}{\lambda} \\ 1 & \lambda \end{matrix} \right| = \lambda \frac{1}{A} e^{-\lambda \theta \lambda \theta} \frac{a_2 +}{\lambda} \quad (2.8)$$

Получился квазиполином второго порядка. В случае, если запаздывания в системе нет, то есть  $\theta = 0$ , квазиполином (2.8) превращается в полином, который имеет оба корня в левой полуплоскости, а система (2.7) при  $\theta = 0$  получается асимптотически устойчивой, что соответствует результатам, полученным в [5]. Посмотрим, сохраняется ли устойчивость в случае ненулевого запаздывания. Для этого исследуем корни характеристического квазиполинома (2.8).

## 2.2 Исследование корней характеристического квазиполинома

Имеем характеристический квазиполином линейной системы с запаздыванием второго порядка (2.7) вида (2.8):

$$\lambda^2 + \frac{1}{A} \lambda e^{-\lambda\theta} + \frac{a_2 + a_3}{A} e^{-\lambda\theta} = 0$$

Пусть  $\frac{1}{A} = \alpha, \frac{a_2 + a_3}{A} = \beta; \alpha, \beta > 0$ .

Тогда квазиполином переписется в виде:

$$\lambda^2 + \alpha \lambda e^{-\lambda\theta} + \beta e^{-\lambda\theta} = 0 \quad (2.9)$$

Конечно, для устойчивости линейной системы с постоянным запаздыванием (2.7) достаточно, чтобы  $\Re \lambda_s < 0$ , но вычисление корней характеристического квазиполинома (2.8) представляет сложности, поэтому для исследования на устойчивость можно применить метод Д-разбиений или критерии устойчивости (алгебраические и частотные).

Использование метода Д-разбиения в нашем случае сопряжено с несколькими трудностями. Во-первых, это наличие в характеристическом квазиполиноме двух параметров, а, во-вторых, наличие множителя  $e^{-\lambda\theta}$ , который имеет бесконечное множество корней (это можно увидеть, если разложить экспоненту в ряд Паде [15]). Поэтому, оставим метод Д-разбиения для более позднего исследования и остановимся на критериях устойчивости.



## 2.2.1 Критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости, такие как критерий Рауса-Гурвица, для систем с запаздыванием не подойдут. Конечно, есть аналоги таких критериев для систем с запаздыванием, но они имеют высокую вычислительную сложность и большого распространения на практике не получили.

Для систем с запаздыванием гораздо более популярными являются частотные критерии устойчивости, такие как критерий Михайлова и Найквиста. При использовании этих критериев для построения годографа системы в характеристическом уравнении производят замену  $\lambda \rightarrow i\omega$ . Цыпкин Я.З. доказал, что для систем с запаздыванием удобнее оказывается критерий устойчивости Найквиста [15] (из-за сложности формулировки критерия Михайлова при наличии в характеристическом уравнении элемента  $e^{-\lambda\theta}$ ). Его и рассмотрим для квазиполинома (2.9):

$$\lambda^2 + \alpha\lambda e^{-\lambda\theta} + \beta e^{-\lambda\theta} = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$D_{\theta}(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda e^{-\lambda\theta} + \beta e^{-\lambda\theta}$$

Тогда для (2.9) вещественная и мнимая части представляются в виде

$$\begin{aligned} \Re \lambda &= -\frac{\alpha \cos \omega\theta + \beta}{2} \\ \Im \lambda &= \pm \sqrt{\alpha \sin \omega\theta} \end{aligned}$$

Следовательно, передаточная функция системы с запаздыванием

$$W_{\theta}(\lambda) = \frac{\beta e^{-\lambda\theta}}{\lambda^2 + \alpha\lambda e^{-\lambda\theta} + \beta e^{-\lambda\theta}}$$

для квазиполинома (2.9) будет иметь вид (2.10):

$$W_{\theta}(\lambda) = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\lambda^2} e^{-\lambda\theta} \quad (2.10)$$

Согласно критерию Найквиста [15], в (2.10) произведем замену  $\lambda = i\omega$ , вследствие чего получим частотную передаточную функцию

$$W_{\theta}(i\omega) = \frac{\alpha i\omega + \beta}{(i\omega)^2} e^{-i\omega\theta} \quad (2.11)$$

При этом, любую частотную передаточную функцию системы с запаздыванием можно представить в виде

$$W_{\theta}(i\omega) = |W_{\theta}(i\omega)| e^{-i\omega\theta + i\psi(\omega)}$$

где  $|W_{\theta}(i\omega)|$  - амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) системы без запаздывания

$$|W_{\theta}(i\omega)| = \sqrt{\dots} \quad \text{- амплитудно-частотная}$$

характеристика (АЧХ) системы без запаздывания

$$\psi(\omega) = \dots - \text{фазочастотная характеристика (ФЧХ) системы без}$$

запаздывания

$$\psi_{\theta}(\omega) = \dots - \text{фазочастотная характеристика (ФЧХ) системы с}$$

запаздыванием

Видно, что модуль  $A(\omega)$  при рассмотрении системы с запаздыванием не меняется по отношению к модулю АЧХ системы без запаздывания, лишь появляется фазовый сдвиг на  $\omega\theta$ . Получается, зная АФХ для системы без

запаздывания, можно получить АФХ системы с запаздыванием поворотом первой по часовой стрелке на угол  $\omega\theta$ .

Обычно, фазовый сдвиг ухудшает устойчивость системы, так как АФХ приближается к критической точке  $(-1, 0)$ , но также возможны случаи, когда появление в системе запаздывания, наоборот, улучшает устойчивость.

Имея частотную передаточную функцию (2.11), можно найти критическое значение частоты  $\omega_{pk}$ , при котором характеристика  $iW(\omega)$  будет проходить через точку  $(-1, 0)$ , то есть система будет находиться на границе устойчивости. По  $\omega_{pk}$  можно найти критическое значение запаздывания  $\theta_{pk}$ , которое используется как оценка сверху для величины запаздывания в системе при исследовании системы на устойчивость. Условия для этих критических значений имеют вид [15]:

$$W(\omega) = \dots - i\omega\theta \psi(\omega) \dots$$

$$|W(\omega)| = 1 \quad \psi(\omega) = \dots + i \dots$$

Из этих условий можно найти  $\omega_{pk}$  и  $\theta_{pk}$ :

$$\theta_{pk} = \frac{\psi(\omega_{pk}) + i}{\omega_{pk}} \dots \frac{2\pi}{\omega_{pk}} i$$

На практике обычно ищут минимальное критическое значение запаздывания  $\theta_{\text{нпк}}$  (при  $i = 0$ ):

$$\theta_{\text{нпк}} = \frac{\pi + \varphi(\omega_{\text{пк}})}{\omega_{\text{пк}}}$$

где  $\varphi(\omega_{\text{пк}})$  - запас устойчивости по фазе.

Тогда условием устойчивости системы будет:

$$\theta_{\text{нпк}} > 0$$

Получим критические значения для квазиполинома (2.9).

$$W(\omega) = \frac{\alpha\omega\beta + \dots}{-\omega^2}$$

$$U(\omega) = -\frac{\beta}{\omega^2}$$

$$V(\omega) = -\frac{\alpha}{\omega}$$

$$|W(\omega)| = \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\omega^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\omega^2}}$$

Из представления для АЧХ найдем критическое значение частоты

$$\omega_{\text{пк}} = \sqrt{\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\omega_{\text{пк}}^4}}$$

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{\alpha\beta\sqrt{4}}{2}}$$

Тогда значение критического запаздывания для квазиполинома (2.9) в параметрах  $\alpha\beta$  будет иметь вид (2.12):

$$\theta_{cr} = \frac{\pi + \arctan\left(\frac{V(\omega_{cr})}{\omega_{cr}}\right)}{\omega_{cr}} = \frac{\pi + \arctan\left(\frac{\alpha\omega_{cr}}{\beta}\right)}{\omega_{cr}} \quad (2.12)$$

Видно, что значение критического запаздывания, при котором система окажется на границе устойчивости, напрямую зависит от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . В Приложении А1 представлены наглядные графики для различных значений этих параметров.

## Выводы

Нам успешно удалось ввести в систему, описывающую вращение твердого тела, постоянное запаздывание в составе управляющего момента, и мы получили систему двенадцатого порядка, которая имеет восемь положений равновесия. Особый интерес для нас представляло равновесие (2.1), так как оно в случае нулевого запаздывания оказывается асимптотически устойчиво, что было получено в [5], и нам было интересно, сохраняется ли устойчивость при ненулевом запаздывании, в нашем случае постоянном.

Благодаря наличию у системы трех первых интегралов, нам удалось понизить порядок системы с двенадцати до девяти и получить нелинейную систему в отклонениях от положения равновесия (2.1). Дальнейшие наши исследования строились по методу линейного приближения. Мы получили систему линейного приближения для положения равновесия (2.1) девятого порядка. Для определенности в качестве рассматриваемых векторов связанной системы координат  $\bar{r}_{0i}$  были взяты орты, при рассмотрении которых система линейного приближения распалась на три одинаковых по структуре системы третьего порядка, каждая из которых снова имела по одному первому интегралу. Наличие первых интегралов позволило нам уменьшить порядок каждой из трех систем до двух. Так как системы подобны, то нам оказалось достаточно рассмотреть одну из них, так как выкладки и результаты для двух других были бы аналогичны.

При рассмотрении системы мы сосредоточили свое внимание на исследовании характеристического квазиполинома этой системы. Квазиполином (2.9) получился второго порядка с двумя постоянными положительными параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ , которые входят в уравнение линейно.

Для нас, для получения вывода об устойчивости или неустойчивости системы, было важно исследовать корни этого характеристического квазиполинома.

Благодаря использованию частотного критерия Найквиста [15] для квазиполинома была получена передаточная функция, которая учитывала экспоненциальный элемент, который отличает характеристические полиномы систем без запаздывания от квазиполиномов систем с запаздыванием. Дальнейшее исследование позволило нам получить параметрическую оценку сверху для величины запаздывания в системе в форме критической величины запаздывания, зависящего от постоянных параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , входящих линейно в характеристический квазиполином.

Получив такую оценку, мы построили наглядные графики в системе Matlab для некоторых произвольных значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Мы можем сделать вывод, что при величине запаздывания в системе меньше этого критического значения линейная система будет асимптотически устойчивой, при величине, большей критической, система будет неустойчивой, при наличии в системе запаздывания, равного этой величине, получается критический случай, при котором система оказывается на границе устойчивости.

Более общий вывод мы можем сделать такой: при значениях запаздывания, меньших критического, исследование по линейному приближению, возможно, приводит к выводу об асимптотической устойчивости исследуемого положения равновесия при значениях запаздывания, меньших критического.

Конечно, эта неопределенность требует дополнительного исследования, так как, имея только полученные результаты, нельзя делать окончательный вывод относительно устойчивости или неустойчивости

нелинейной системы и всего положения равновесия. Но, с другой стороны, построенные оценки позволяют довольно точно исследовать линейные системы, даже имеющие неизвестные параметры. К тому же, полученные результаты дают возможность для дальнейшего развития темы, использования примененных методов для исследования других положений равновесия, исследования на неустойчивость, обобщения рассмотренного случая для произвольных векторов  $\bar{r}_{0i}$ .



## Заключение

В настоящей работе была построена система, описывающая вращение твердого тела вокруг неподвижной точки, замкнутая управляющим моментом с постоянным транспортным запаздыванием. Были найдены положения равновесия данной системы. Для положения равновесия, которое было асимптотически устойчиво в случае системы без запаздывания, была построена система в отклонениях. Для системы в отклонениях были найдены первые интегралы, позволившие понизить порядок системы с двенадцати до девяти. Была получена система линейного приближения для данного положения равновесия.

Был рассмотрен случай трех базисных векторов связанной системы координат, при котором линейная система распалась на три подсистемы. В каждой подсистеме был найден первый интеграл, что позволило в результате получить три системы из двух уравнений каждая.

Было проведено исследование характеристического квазиполинома второго порядка с двумя постоянными параметрами, входящими в уравнение линейно, построенного для одной из систем (результаты для двух других систем результаты получаются аналогичными). С помощью частотного критерия Найквиста [15] было получено критическое значение запаздывания и сделан вывод, что при значениях запаздывания, меньших критического, исследование по линейному приближению, возможно, приводит к выводу об асимптотической устойчивости исследуемого положения равновесия при значениях запаздывания, меньших критического, но для более строгого вывода требуются дополнительные исследования.

## Список литературы

1. Александров А. Ю. , Жабко А. П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием. Сиб. матем. журн., 53:3 (2012), 495–508
2. Безгласный С. П., Мысина О. А. О реализации одноосной и трехосной ориентации системы двух тел. Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер., 2011:2(83), 80–90
3. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. - 548 с.
4. Жабко А.П., Харитонов В.Л. Методы линейной алгебры в задачах управления. Л.: Издательство ЛГУ, 1993
5. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975
6. Зубов В.И., Ермолин В.С., Иголкин В.Н. Динамика свободного твердого тела и определение его ориентации в пространстве. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1968. - 205 с.
7. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
8. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
9. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. - 256 с.
10. Павликов С. В. К задаче о стабилизации управляемых механических систем. Автомат. и телемех., 2007, выпуск 9, 16–26

11. Прасолов А.В. Математические модели управления. Л. : Издательство Ленинградского университета, 1991. - 91 с.
12. Прасолов А.В. Аналитические и численные методы исследования динамических процессов. СПб. : Издательство Санкт-Петербургского университета, 1995. - 148 с.
13. Прасолов А.В. Дифференциальные уравнения с последействием и их приложения. СПб. : СОЛО, 2007. - 189 с.
14. Прасолов А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии. СПб. : Издательство Лань, 2010. - 192 с.
15. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления / Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, А. А. Воронова и др.; Под ред. А. А. Воронова.—2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986. — 367 с.
16. Чижова О.Н. Одноосная стабилизация твердого тела с учетом запаздывания. Вестник Санкт-Петербургского университета . Сер.1, Математика. Механика. Астрономия. - СПб. : Издательство Санкт-Петербургского университета, 1946 - 2002г. Вып. 4 . - С.91-93
17. Чижова О.Н. Методы исследования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом - СПб. : СОЛО, 2011. - 47 с.
18. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. - 296 с.

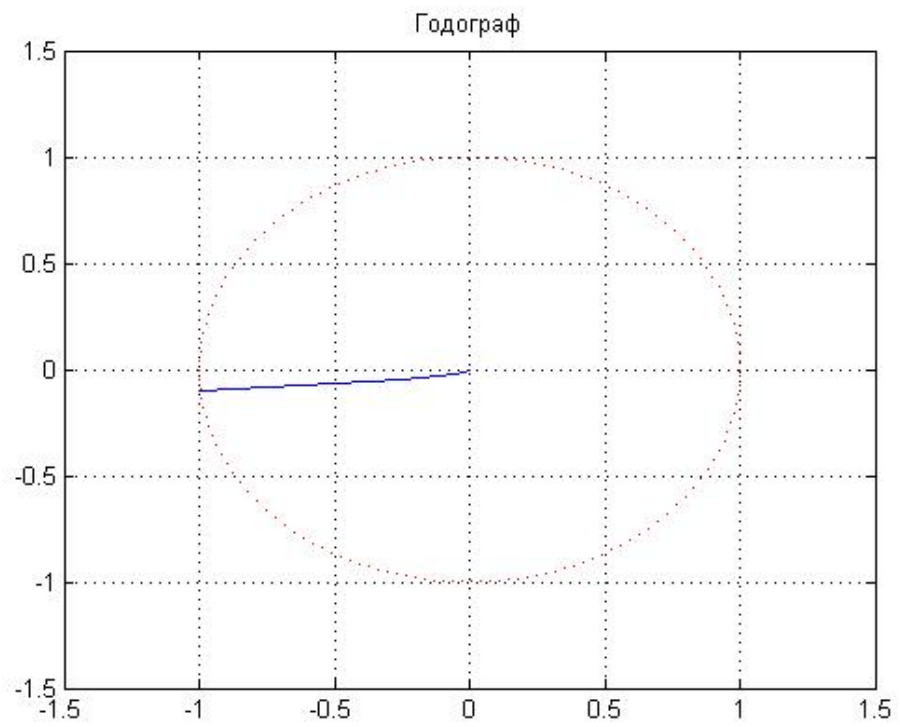
## Приложение А1

Построим годограф системы с запаздыванием и на том же графике изобразим окружность радиусом  $R=1$ . Пересечение характеристики с окружностью дает понимание об устойчивости системы. При пересечении окружности в точке  $(-1, i0)$  мы получаем критический случай нахождения системы на границе устойчивости. Для наглядности будем варьировать переменные константы  $\alpha$  и  $\beta$ , получая для них по (2.12) критическое значение запаздывания  $\theta$ .

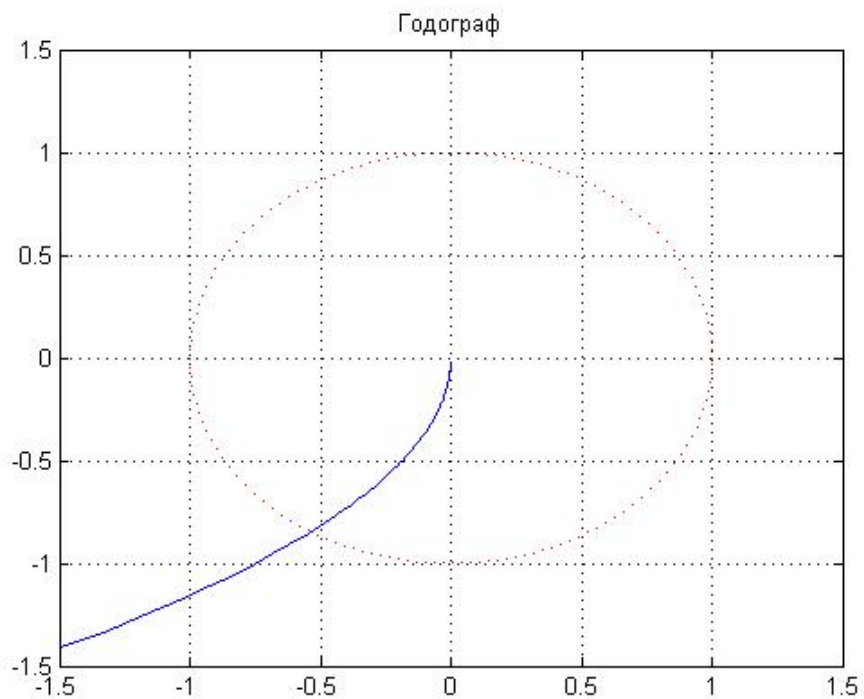
Программа MatLab:

```
>>
R = 1; %радиус
% координаты начала
x0 = 0;
y0 = 0;
% задаем окружность в параметрическом виде
t = 0:0.001:2*pi;
x = x0 + R.*cos(t);
y = y0 + R.*sin(t);
% строим график
figure, plot(x,y,'r')
hold on
grid on
w = 0:0.1:100; % точки частоты
p = 1i*w; % комплексная частота
a=*; % задаем параметры
b=*;
h=*; % задаем запаздывание
W =(a.*p+b)./(p.^2) .* exp(-h.*p); % передаточная функция
plot(W)
axis ([-1.5 1.5 -1.5 1.5]); %область приближения
grid on
title('Годограф')
<<
```

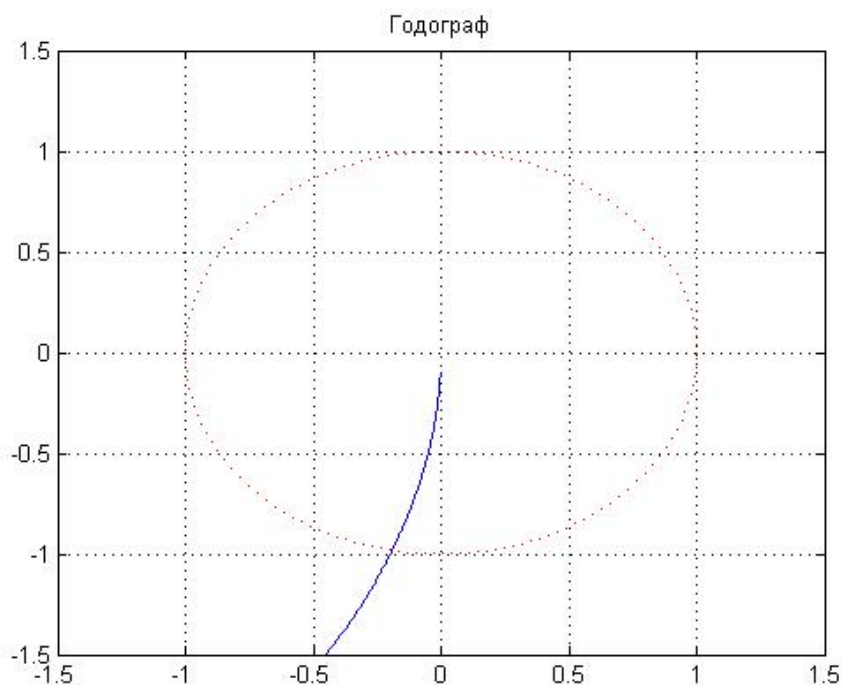
1)  $\alpha\beta \neq 0$



2)  $\alpha\beta = 0$

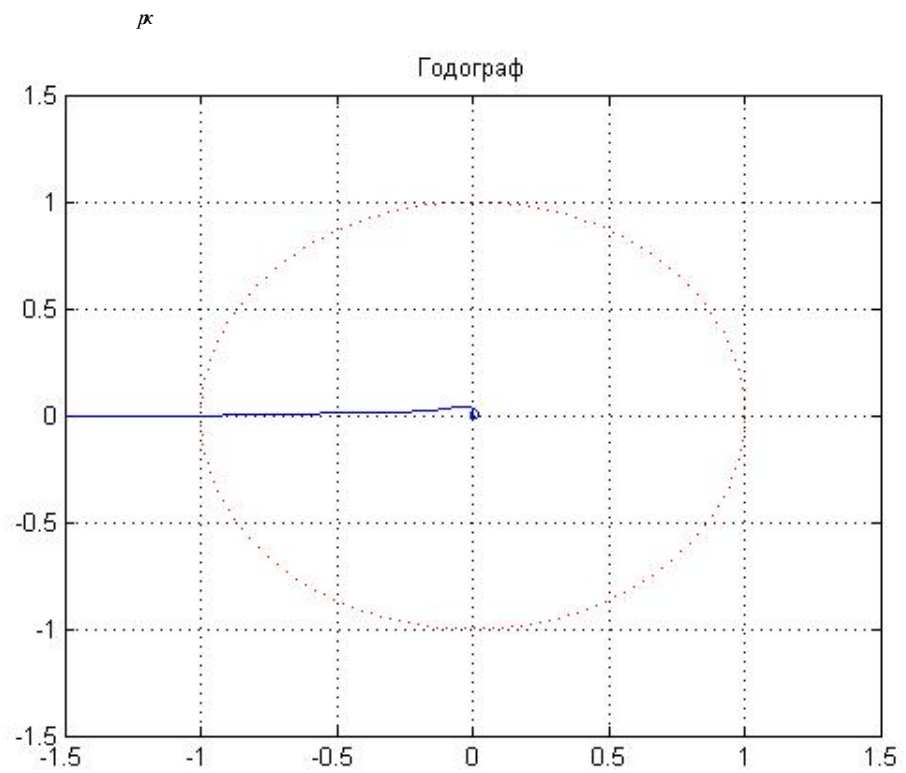


3)  $\alpha\beta \ll 1$

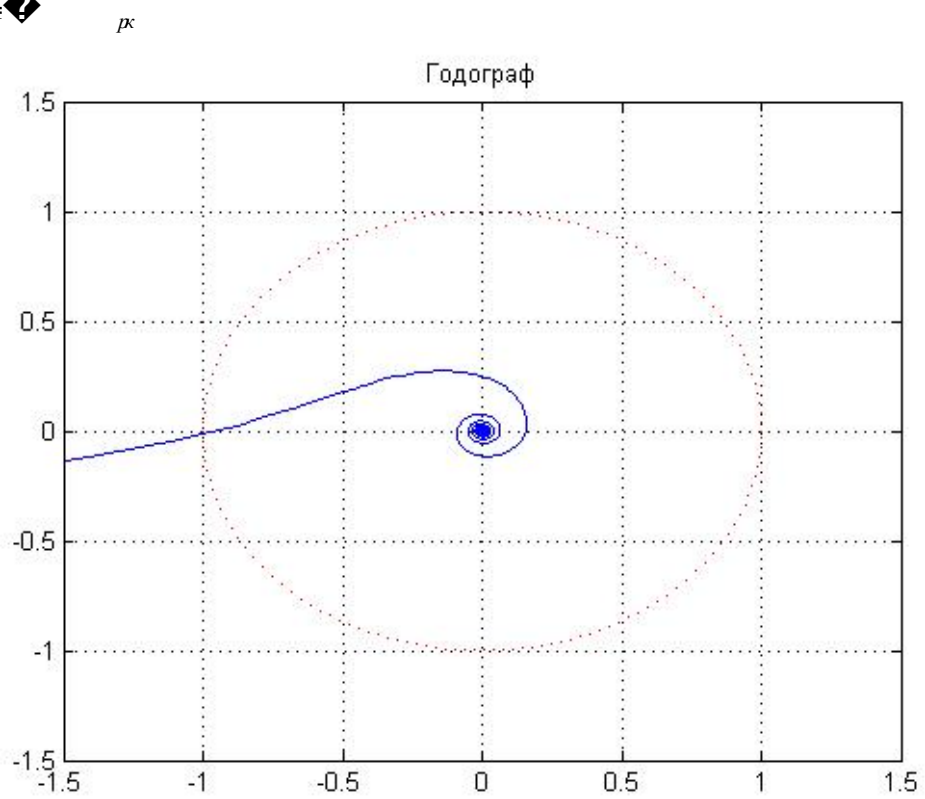


Видно, что и при малых, и при больших значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  система без запаздывания остается устойчивой.

4)  $\alpha\beta=0$

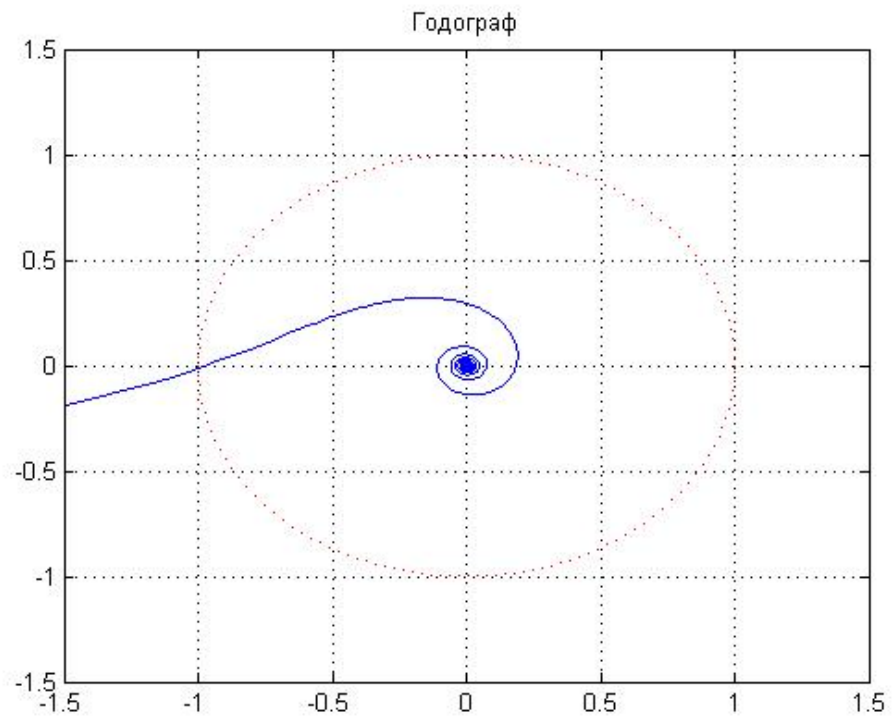


5)  $\alpha\beta=1$

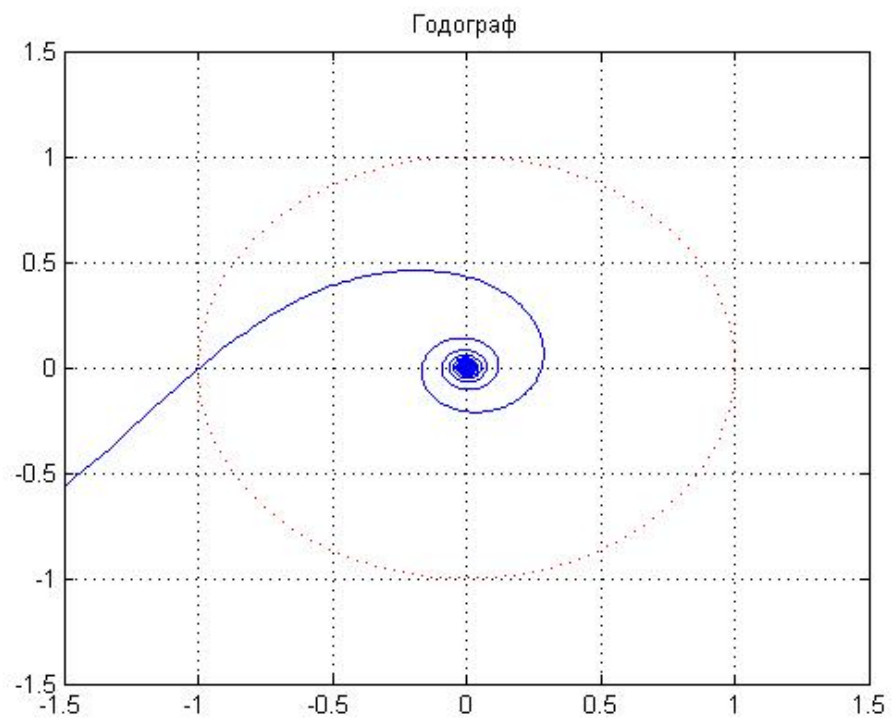


6)  $\alpha\beta=2$

$\rho$

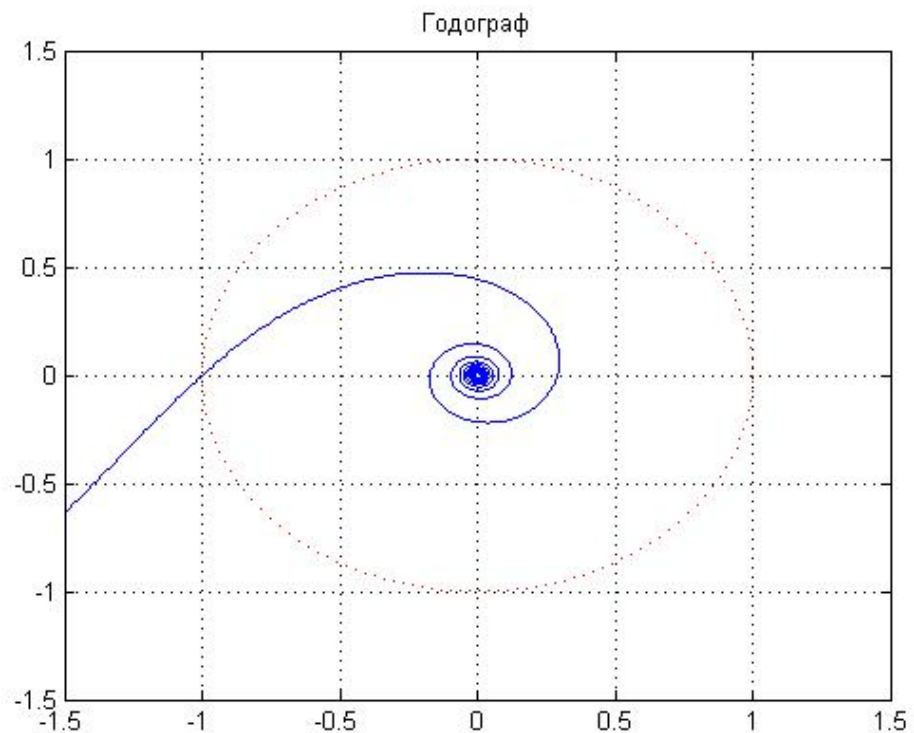


7)  $\alpha\beta \neq 0$   $\rho$



8)  $\alpha\beta \neq 0$   $\rho$





По графикам видно, и это вполне логично, что при росте параметров  $\alpha$  и  $\beta$  критическое запаздывание, при котором система с запаздыванием находится на границе устойчивости, уменьшается.

Условие устойчивости  $\theta \ll \theta_{\text{кр}}$  является наиболее употребимым на практике вариантом условия устойчивости системы в критерии Найквиста [15], так как обычно в прикладных задачах стремятся уменьшить запаздывание для повышения точности и быстродействия системы. Но также возможно исследование для получения нескольких критических значений запаздывания для системы и, соответственно, получение участков устойчивости для конкретных переменных параметров. Наличие нескольких критических значений возможно, если годограф пересекает окружность единичного радиуса не один раз, а несколько.

