

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Кафедра теоретической и прикладной механики

Орехов Константин Андреевич

Моделирование и исследование устойчивости электромеханических
систем с помощью уравнений Лагранжа-Ньютона

Магистерская диссертация

Допущена к защите.

Зав. кафедрой:

д.ф.-м.н., профессор Товстик П.Е.

Научный руководитель:

ведущий инженер, к.ф.-м.н. Родюков Ф.Ф.

Рецензент:

доцент, к.ф.-м.н. Диевский В.А.

Санкт-Петербург

2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics and Mechanics Faculty

Department of Theory and Applied Mechanics

Orekhov Konstantin Andreevich

Modeling and study of electromechanical system stability with the help of
Lagrange-Newton equations

Master's Thesis

Head of Department:

Professor, Dr. of Science Tovstik P.E.

Scientific supervisor:

Chief Engineer, Ph.D. of Science Rodyukov F.F.

Reviewer:

Docent, Ph.D. of Science Dievsky V.A.

Saint-Petersburg

2016

О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр.
Постановка задачи	2
Введение	4
§ 1. Формализм уравнений Лагранжа-Ньютона	4
§ 2. Парадоксы существующей теории однофазного трансформатора и их разрешение с помощью уравнений Лагранжа-Ньютона	6
§ 3. Теория реального однофазного трансформатора	8
§ 4. Установившийся режим работы однофазного трансформатора по уравнениям Лагранжа-Ньютона	10
Глава I. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАБОТЫ ВЕТРОЭЛЕКТРОСТАНЦИИ	12
Глава II. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ МАЯТНИК В БЫСТРОПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ	15
Глава III. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА-МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МАЯТНИКА С СОЛЕНОИДОМ	19
§ 1. Математическое моделирование исследуемой системы	19
§ 2. Переход к безразмерной форме	20
§ 3. Приближенные решения для токов i_1, i_2	21
Глава IV. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА - НЬЮТОНА В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МАЯТНИКОВ	23
§ 1. Составление уравнений Лагранжа-Ньютона	23
§ 2. Переход к безразмерной форме	24
§ 3. Приближенное вычисление потокосцеплений ψ_1, ψ_2	25
§ 4. Приближенное уравнение для исследования на устойчивость рассматриваемой электромеханической системы	25
ВЫВОДЫ	27
ЛИТЕРАТУРА	27

Постановка задачи.

Электромеханика - раздел электротехники, в котором рассматриваются задачи о превращении электрической энергии в механическую работу и наоборот.

Множество различных конструкций электрических машин и их применение в науке и в быту, начиная с мощных силовых установок ветроэлектростанций и кончая тончайшими приборами и механизмами, потребовали создания единой теории таких машин. Эта теория, с одной стороны - часть теоретической электротехники, а с другой - раздел аналитической механики и требует от механиков - теоретиков построения математических моделей, верно описывающих сложные физические процессы возникающие при взаимодействии полей и токов.

В современной научной литературе, посвящённой моделированию реальных физических процессов внутри электромеханической системы, можно встретить исследования, приводящие к парадоксальным результатам.

В монографии [1, с. 52] введено понятие "формально диссипативных сил". Так названо слагаемое в механическом уравнении движения электропроводящего маятника в быстропеременном электромагнитном поле, несущее диссипативный характер, но имеющее отрицательный знак. Вот это уравнение:

$$\ddot{\theta} + (2n - \varepsilon\beta \cos^2 \theta)\dot{\theta} + (\beta \cos \theta + k) \sin \theta = 0,$$

где

θ - угол отклонения маятника от вертикали,

n - безразмерное механическое сопротивление в точке подвеса маятника,

ε - безразмерное электрическое сопротивление электропроводящего контура маятника,

β - безразмерный коэффициент, связанный с параметрами возбуждающего колебания маятника электромагнитного поля,

k - безразмерный коэффициент, связанный с потенциальной энергией маятника.

Время в этом уравнении безразмерное - τ .

Очевидно, что в данном уравнении электрическое рассеяние (диссипация) носит раскачивающий характер. Это вызывает большие сомнения, так как законы природы едины. Поэтому диссипативные силы всегда должны иметь успокаивающий, а не раскачивающий систему характер.

Главной задачей настоящего исследования является проверка не являются ли уравнения Лагранжа-Ньютона средством избежать упомянутого парадокса с электромагнитным маятником. Ведь с их помощью уже получены адекватные математические модели электрических машин переменного тока.

Поскольку метод уравнений Лагранжа-Ньютона не распространен пока широко, то облегчению его освоения посвящено Введение. Поэтому во Введении почти полностью воспроизведена Глава I из монографии [3, сс. 5-24].

Введение

§ 1. Формализм уравнений Лагранжа - Ньютона.

Вспомним формулировку II-го закона Ньютона, данную им в трактате [10, с. 40]: "Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила происходит". Формулировка закона электромагнитной индукции Фарадея соответствует формулировке второго закона механики Ньютона.

Обратимся непосредственно к упомянутым законам.

II-ой закон Ньютона в форме самого Ньютона.

$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt} = f,$$

где $p = mv$ – количество движения, или импульс тела массой m .

II-ой закон Ньютона с диссипацией.

$$\dot{p} = -rv + f, \quad v = \frac{p}{m}; \quad (1.1)$$

$$\dot{p} = -\frac{r}{m}p + f. \quad (1.2)$$

Здесь r – механическое сопротивление.

Закон электромагнитной индукции Фарадея.

$$\frac{d\Psi}{dt} = -e = u,$$

где e и u электродвижущая сила и напряжение на катушке индуктивности. $\Psi = Li$, где L – индуктивность катушки (аналог массы).

II-ой закон Кирхгофа с диссипацией.

$$\dot{\Psi} = -Ri + u \sin \omega t, \quad i = \frac{\Psi}{L}; \quad (1.3)$$

$$\dot{\Psi} = -\frac{R}{L}\Psi + u \sin \omega t. \quad (1.4)$$

Здесь R – электрическое сопротивление катушки индуктивности.

Уравнения (1.2) и (1.4) записаны в импульсах p и их аналогах в электро-механике – потокоцеплениях Ψ . Уравнения же Лагранжа приспособлены для обобщённых координат q и обобщённых скоростей \dot{q} . Поэтому когда используют эти уравнения в электромеханике, то вносится принципиальная ошибка. Она состоит в том, что неправильно записываются силы диссипации, т.е. не через импульсы – потокоцепления – а через обобщённые скорости – токи. Чтобы устранить эту ошибку, надо вернуться к форме записи второго закона механики в форме Ньютона. Для этого надо определить кинетическую энергию не в форме Лейбница

$$T' = \frac{1}{2}mv^2,$$

а в форме Ньютона, используя понятие количества движения (импульса p), т.е.

$$T = \frac{1}{2}(mv)^2 = \frac{1}{2}p^2.$$

Очевидно, что $T = mT'$.

Также очевидно, что диссипативную функцию необходимо записывать в следующем виде

$$D = \frac{1}{2} \frac{r}{m} (mv)^2 = \frac{1}{2} \frac{r}{m} (p)^2.$$

Для катушки индуктивности

$$T'_e = \frac{1}{2}Li^2,$$

где i – ток. Тогда

$$T_e = LT'_e = \frac{1}{2}(Li)^2 = \frac{1}{2}\Psi^2.$$

Соответственно диссипативную функцию надо записать так

$$D_e = \frac{1}{2} \frac{R}{L} (Li)^2 = \frac{1}{2} \frac{R}{L} \Psi^2.$$

Очевидно, что **уравнения Лагранжа** надо записывать тоже **в форме Ньютона**. В случае наличия только сил диссипации в классической механике они будут выглядеть следующим образом

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial D}{\partial p} - \frac{\partial T}{m \partial q} = f.$$

Здесь функцию обобщённой скорости выполняет импульс тела, а q и m – обобщённая координата (расстояние) и масса тела соответственно.

А в случае электромеханики они приобретают такой вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_e}{\partial \psi} + \frac{\partial D_e}{\partial \psi} - \frac{\partial T_e}{L \partial q} = f.$$

Здесь функцию обобщённой скорости выполняет потокосцепление, а q и L – обобщённая координата (электрический заряд) и индуктивность контура.

§ 2. Парадоксы существующей теории однофазного трансформатора и их разрешение с помощью уравнений Лагранжа-Ньютона.

Рассмотрим в качестве примера уравнения однофазного трансформатора.

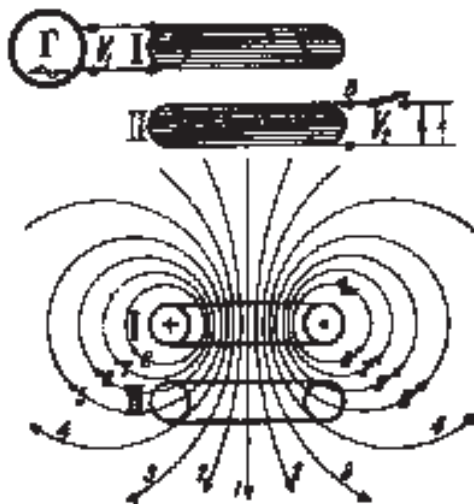


Рис. 1: *Схема однофазного трансформатора.*

Он состоит из двух катушек индуктивности, намотанных друг на друга, имеющих изоляционный слой между собой и общий ферромагнитный сердечник. Очевидно, что с физической точки зрения они имеют одну и ту же магнитную ось. С математической точки зрения это означает, что соответствующая система дифференциальных уравнений должна иметь одну независимую переменную. Напомним, что при составлении уравнений для электрических контуров, связанных между собой законом электромагнитной индукции Фарадея существенно используется понятие потокосцепления – аналога количества движения (импульса) в механике. Соответственно мы должны были бы использовать уравнения Лагранжа, где вместо обобщённых скоростей используются импульсы, т.е. уравнения Лагранжа в форме Ньютона. Но так как до сих пор для этой цели используются просто уравнения Лагранжа, то приходим к парадоксальным выводам.

Записывая уравнения для этих двух контуров с помощью уравнений Лагранжа-Максвелла, приходим к такой системе

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= -R_1 i_1 + u \sin \omega t, & \dot{\Psi}_2 &= -R_2 i_2; \\ \Psi_1 &= L_1 i_1 + M i_2, & \Psi_2 &= M i_1 + L_2 i_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вид диссипативных сил здесь не соответствует используемым здесь импульсам – потокосцеплениям Ψ_1, Ψ_2 . В результате оказывается, что омические сопротивления R_1, R_2 изменяют размерность фазового пространства. Действительно, если положить эти сопротивления равными нулю, то рассматриваемая система разбивается на две независимые, каждая со своей независимой координатой. В случае же $R_1 > 0, R_2 > 0$ порядок рассматриваемой системы возрастает до двух. С точки зрения механики это и является парадоксом.

Другой парадокс состоит в следующем. Если сопротивление вторичного контура $R_2 = 0$, т.е. он является сверхпроводящим, то $\Psi_2 \equiv 0$ (так как начальное условие для $\Psi_2(0) = 0$). Получается, что в этом случае преобразования энергии в таком трансформаторе не осуществляется. Но с физической точки зрения отсутствие сопротивления в одном или обоих контурах не является препятствием к процессу преобразования энергии. Это и является вторым парадоксом в современной теории трансформаторов. Надо еще добавить следующее. Хотя в уравнении втором приведенной системы напряжение на вторичном контуре полагается равным нулю, но когда речь заходит об этом напряжении на практике, то его выводят из теории идеального трансформатора. Из нее получают, что на вторичном контуре напряжение равно напряжению на первичном, умноженное на отношение количества витков двух катушек. Но такое рассуждение некорректно, так как предполагается, что у идеального трансформатора отсутствуют потоки электромагнитного рассеяния (т.е. $M = \sqrt{L_1 L_2}$), а $R_1 = R_2 = 0$. Но ведь мы уже знаем, что при $R_2 = 0$ преобразования энергии в рассматриваемой модели не происходит! Получаем порочный круг.

Чтобы разорвать этот порочный круг, надо быть последовательными и к рассматриваемой задаче применять не уравнения Лагранжа - Максвелла, а уравнения Лагранжа в форме Ньютона. Тогда электрокинетическую энергию и диссипативную функцию надо записать следующим образом

$$T = \frac{1}{2} \dot{\Psi}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\Psi}_2^2, \quad D = \frac{1}{2} \frac{R_1}{L_1} \Psi_1^2 + \frac{1}{2} \frac{R_2}{L_2} \Psi_2^2. \quad (3.2)$$

Теперь уравнения рассматриваемой системы принимают такой вид

$$\dot{\Psi}_1 = -\frac{R_1}{L_1} \Psi_1 + u \sin \omega t, \quad \dot{\Psi}_2 = -\frac{R_2}{L_2} \Psi_2; \quad (3.3)$$

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2, \quad \Psi_2 = M i_1 + L_2 i_2. \quad (3.4)$$

Очевидно, что первый из рассмотренных выше парадоксов (об искажении размерности реального фазового пространства с единицы до двух) при правильной записи уравнений исчезает.

Но возникает вопрос: какая электромагнитная сила приложена ко вторичной обмотке? Ведь по существующим представлениям она равна нулю, так как во вторичной обмотке нет самостоятельного источника электродвижущей силы (ЭДС)! Ответом на него служат два закона электромагнитной

индукции для однофазного трансформатора: первый – для невращающегося электромагнитного поля, а второй – для вращающегося электромагнитного поля.

Первый закон. Во невращающемся электромагнитном поле ко вторичной обмотке однофазного трансформатора приложено напряжение в следующем виде

$$u_2 = \frac{M}{L_1} \omega \Psi_1 \cos \gamma_2. \quad (3.5)$$

Второй закон. Во вращающемся электромагнитном поле ко вторичной обмотке трансформатора приложено напряжение в следующем виде

$$u_2 = \frac{M}{L_1} \frac{R_2}{L_2} \Psi_1 \cos \gamma_2. \quad (3.6)$$

В приведенных выше формулах Ψ_1 Ψ_2 – потокосцепления первичной и вторичной обмоток, R_1 R_2 – активные сопротивления этих обмоток, L_1 L_2 – индуктивности этих обмоток, M – взаимная индуктивность между ними, γ_2 – угол между магнитными осями первичной и вторичной обмоток, ω – угловая частота подводимого к первичной обмотке напряжения.

Второй закон будем использовать для так называемых вращающихся трансформаторов, т.е. электрических машин переменного тока. А для простых однофазных трансформаторов будем использовать первый закон.

Забегая вперед, скажем, что в первом случае большая часть энергии, подаваемая на первичный контур трансформатора идет на нагревание трансформатора. Во втором же случае энергия вращающегося электромагнитного поля, создаваемого первичными обмотками, идет в основном на создание электромагнитного момента, захватывающего во вращение вторичные обмотки. И еще: если в первом случае преобразование энергии может происходить при сверхпроводящей вторичной обмотке, то во втором случае при сверхпроводящих вторичных обмотках создание в них электромагнитного момента в асинхронных машинах будет невозможно. Именно поэтому во втором законе появляется множитель $\frac{R_2}{L_2}$.

§ 3. Теория реального однофазного трансформатора.

Уравнения Лагранжа - Ньютона устраняют изложенные выше парадоксы существующей теории однофазного трансформатора. Поскольку при их использовании не требуется предположения ни об отсутствии потоков рассеяния электромагнитной энергии, ни о сверхпроводимости контуров трансформатора, то назовем новую теорию *теорией реального однофазного трансформатора*. Используя первый закон электромагнитной индукции для трансформатора и считая угол $\gamma_2 = 0$, получим следующую полную систему уравнений Лагранжа - Ньютона для реального однофазного трансформатора.

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}_1 + \frac{R_1}{L_1}\Psi_1 &= u_m \sin \omega t, \\
\dot{\Psi}_2 + \frac{R_2}{L_2}\Psi_2 &= \frac{M}{L_1}\omega\Psi_1; \\
\Psi_1 &= L_1 i_1 + M i_2, \quad \Psi_2 = M i_1 + L_2 i_2, \\
i_1 &= \frac{L_2\Psi_1 - M\Psi_2}{\mu L_1 L_2}, \\
i_2 &= \frac{-M\Psi_1 + L_1\Psi_2}{\mu L_1 L_2} \quad (\mu = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}).
\end{aligned}$$

Найдем частное решение исходной системы уравнений для установившегося режима работы трансформатора:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= -\frac{u_m}{\omega(1 + \varepsilon_1^2)}(\cos \omega t - \varepsilon_1 \sin \omega t), \\
\Psi_2 &= -\frac{u_m M}{\omega L_1(1 + \varepsilon_1^2)(1 + \varepsilon_2^2)}[(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \sin \omega t + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \omega t], \\
i_1 &= \frac{u_m}{\mu \omega L_1(1 + \varepsilon_1^2)(1 + \varepsilon_2^2)}[(1 - \mu)(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) + \varepsilon_1(1 + \varepsilon_2^2)] \sin \omega t + [1 + \varepsilon_2^2 - (1 - \mu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] \cos \omega t, \\
i_2 &= \frac{1 - \mu}{\mu} \frac{u_m}{\omega M(1 + \varepsilon_1^2)(1 + \varepsilon_2^2)}[-(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2^2) \sin \omega t + (1 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos \omega t], \\
u_2 &= \frac{M}{L_1}\omega\Psi_1 = -\frac{u_m M}{L_1(1 + \varepsilon_1^2)}(\cos \omega t - \varepsilon_1 \sin \omega t); \\
\varepsilon_1 &= \frac{R_1}{\omega L_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{R_2}{\omega L_2}.
\end{aligned}$$

Так как для электрических машин отношения активных сопротивлений к реактивным есть малые величины второго порядка малости, то приведенные формулы без ущерба для практических целей могут быть значительно упрощены, а именно:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &\approx -\frac{u_m}{\omega} \cos \omega t, \\
\Psi_2 &\approx -\frac{u_m M}{\omega L_1} \sin \omega t, \\
i_1 &\approx \frac{1}{\mu} \cdot \frac{u_m}{\omega L_1} [(1 - \mu) \sin \omega t - \cos \omega t], \\
i_2 &\approx \frac{1 - \mu}{\mu} \cdot \frac{u_m}{\omega M} (\cos \omega t - \sin \omega t), \\
u_2 &= \frac{M}{L_1}\omega\Psi_1 \approx -\frac{u_m M}{L_1} \cos \omega t.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что вышеперечисленные парадоксы существующей теории трансформаторов сняты. Заметим также, что если последние формулы трактовать как точные для трансформатора со сверхпроводящими контурами, то следует вывод о нормальной трансформации энергии в этом случае.

Скажем несколько слов о практической стороне вопроса. Из практики эксплуатации трансформаторов известно, что отношение модулей напряжений на первичном и вторичном контурах трансформатора относятся как количества витков в них. А это значит, что электромагнитное рассеяние между контурами настолько мало, что им можно пренебречь. Тогда коэффициент электромагнитного рассеяния μ можно положить равным нулю. Следовательно

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

и далее следует, что

$$u_2 = \frac{M}{L_1} \omega \Psi_1 \approx -u_m \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cos \omega t = -u_m \frac{w_1}{w_2} \cos \omega t,$$

где w_1 , w_2 – число витков первичной и вторичной обмоток.

Таким образом высказанное выше утверждение хорошо подтверждается практикой эксплуатации реальных трансформаторов.

Заметим, что введенный первый закон электромагнитной индукции для статического трансформатора не требует условия замкнутости вторичного контура (впрочем, как и в законе Фарадея). То есть он действует и в случае разомкнутости вторичного контура.

§ 4. Установившийся режим работы однофазного трансформатора по уравнениям Лагранжа - Максвелла

Рассмотрение существующей математической модели трансформатора, полученной с помощью уравнений Лагранжа - Максвелла, в установившемся режиме его работы дает нам еще один повод использовать в теории трансформатора именно уравнения Лагранжа - Ньютона.

Для удобства читателя повторим здесь уравнения Лагранжа - Максвелла:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= -R_1 i_1 + u \sin \omega t, & \dot{\Psi}_2 &= -R_2 i_2; \\ \Psi_1 &= L_1 i_1 + M i_2, & \Psi_2 &= M i_1 + L_2 i_2. \end{aligned}$$

Целесообразно перейти в них к безразмерной форме, так как в размерной форме выкладки слишком громоздки (в этом смысле, кстати, уравнения Лагранжа - Ньютона гораздо проще). Безразмерное время τ введем так $\tau = \omega t$. Остальные переменные в безразмерной форме (с черточкой сверху) введем так

$$\Psi_1 = \frac{u_m}{\omega} \bar{\Psi}_1, \quad \Psi_2 = \frac{u_m}{\omega} \bar{\Psi}_2, \quad i_1 = \frac{u_m}{\omega L_1} \bar{i}_1, \quad i_2 = \frac{u_m}{\omega L_2} \bar{i}_2.$$

В безразмерной форме исследуемые уравнения примут такой вид (условимся за безразмерными величинами оставлять их прежние обозначения, точка над переменной будет теперь обозначать дифференцирование по безразмерному времени):

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_1 + \varepsilon_1 i_1 &= \sin \tau, & \dot{\Psi}_2 + \varepsilon_2 i_2 &= 0; \\ \Psi_1 &= i_1 + n_2 i_2, & \Psi_2 &= n_1 i_1 + i_2,\end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{R_1}{\omega L_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{R_2}{\omega L_2}, \quad n_1 = \frac{M}{L_1}, \quad n_2 = \frac{M}{L_2}.$$

Выразим i_1 , i_2 через Ψ_1 , Ψ_2 и подставим их в первые два уравнения системы.

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{1}{\mu} \cdot (\Psi_1 - n_2 \Psi_2), & i_2 &= \frac{1}{\mu} \cdot (-n_1 \Psi_1 + \Psi_2), & \mu &= 1 - n_1 n_2; \\ \dot{\Psi}_1 + \frac{\varepsilon_1}{\mu} (\Psi_1 - n_2 \Psi_2) &= \sin \tau, \\ \dot{\Psi}_2 + \frac{\varepsilon_2}{\mu} (-n_1 \Psi_1 + \Psi_2) &= 0.\end{aligned}$$

Из этой системы найдем частное решение (установившийся режим работы), а через него и значения токов i_1 , i_2 :

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{\mu^2}{\Delta} \cdot [\varepsilon_1 (\varepsilon_2^2 + \mu) \sin \tau - (\mu^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 n_2 + \varepsilon_2^2) \cos \tau], \\ \Psi_2 &= \varepsilon_2 \cdot n_1 \cdot \frac{\mu^2}{\Delta} \cdot [(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \mu) \sin \tau - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \tau], \\ i_1 &= \frac{\mu^2}{\Delta} \cdot \{[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \mu (\varepsilon_2 \varepsilon_2 - \mu)] \sin \tau - (\mu + \varepsilon_2^2) \cos \tau\}, \\ i_2 &= n_1 \cdot \frac{\mu^2}{\Delta} \cdot [-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin \tau + (\mu - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \cos \tau], \\ \Delta &= (\mu^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 n_2 + \varepsilon_1^2)(\mu^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 n_2 + \varepsilon_2^2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 n_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2.\end{aligned}$$

Парадокс дополнительный заключается в том, что при сверхпроводящем вторичном контуре, когда $\varepsilon_2 = 0$, потокосцепление этого контура очевидно равно нулю, а ток в нем при этом отличен от нуля!. Решение системы при $\varepsilon_2 = 0$ математически удовлетворяет систему. Но человека думающего такая ситуация удовлетворить не может!

Очевидно, что описанная ситуация, противоречащая законам физики, не возникает, если для описания процессов в трансформаторах применять уравнения Лагранжа - Ньютона и первый закон электромагнитной индукции для невращающихся трансформаторов.

Глава I. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАБОТЫ ВЕТРОЭЛЕКТРОСТАНЦИИ

В качестве примера приложения метода уравнений Лагранжа-Ньютона используем их для исследования устойчивости работы ветроэлектростанции.

Ветроэлектростанции (ВЭС) – экологически самые чистые источники электрической энергии. Они строились в 30-е гг, но не получили широкого распространения из-за неконкурентоспособности по сравнению с гидроэлектростанциями. В связи с изменением экологической обстановки взгляды на ВЭС за рубежом уже пересмотрены, и они там в настоящее время снова строятся.

За время, протекшее с 30-х гг многое изменилось как в плане новых технологий, так и в плане новых математических возможностей для нахождения оптимальных параметров ВЭС и тем самым улучшения всех их показателей.

На ВЭС в качестве генераторов электрической энергии используются асинхронные генераторы (АГ) и синхронные генераторы (СГ). При теоретическом исследовании режимов работы ВЭС вместо уравнений, описывающих динамику АГ и СГ, используются лишь их хорошо известные механические характеристики. Более полное и правильное представление о динамике ВЭС может дать привлечение к их исследованию полных уравнений Лагранжа-Ньютона для генераторов переменного тока. В настоящей работе будем исследовать ВЭС с СГ.

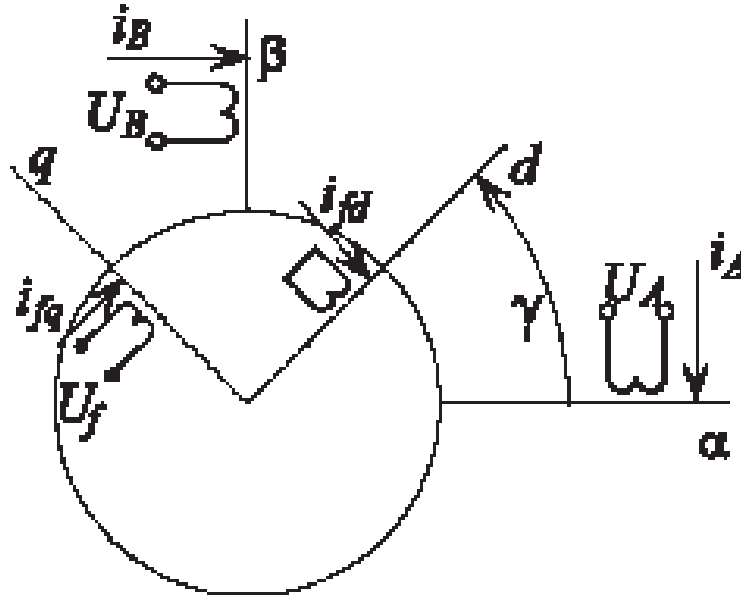


Рис. 2: Электрическая схема синхронного генератора.

Уравнения Лагранжа-Ньютона для СГ ВЭС возьмем из монографии [2, с. 75]:

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}_x &= -\varepsilon_s \Psi_x + \Psi_y - 1, \\
\dot{\Psi}_y &= -\varepsilon_s \Psi_y - \Psi_x, \\
\dot{x} &= -\varepsilon_f x + sy + \varepsilon_f \Psi_x - u_f \sin \theta, \\
\dot{y} &= -\varepsilon_f y - sx + \varepsilon_f \Psi_y - u_f \cos \theta, \\
\dot{\theta} &= s, \\
\dot{s} &= -\delta \left[2 \frac{1-\mu}{\mu} (\Psi_y x - \Psi_x y) + cv^2 \right].
\end{aligned} \tag{1}$$

В уравнениях (1) Ψ_x, Ψ_y – потокосцепления статорных обмоток СГ; x, y – магнитные заряды (магнитоны) статорных обмоток; $\varepsilon_s, \varepsilon_f$ – сопротивления статорных и обмоток возбуждения соответственно; u_f – постоянное напряжение на реальной обмотке возбуждения; θ – угол поворота ротора СГ; s – скольжение; δ – электромеханическая постоянная, обратно пропорциональная моменту инерции ротора; μ – коэффициент электромагнитного рассеяния энергии ($\mu = 1 - \frac{M^2}{L_s L_f}$); M – взаимдуктивность между индуктивностями обмоток статора L_s и ротора L_f ; v – скорость ветра.

$$c = \frac{c_w F l \gamma \omega_s R_s}{2 \rho v_m^2 \varepsilon_s g},$$

где F – площадь лопасти репеллера, l – плечо лопасти репеллера, c_w – коэффициент аэродинамического сопротивления, γ – удельный вес воздуха, g – ускорение свободного падения.

Все переменные и константы в уравнениях (1) – безразмерные величины.

Заметим, что структура уравнений (1) адекватно отражает физические особенности электрических машин переменного тока. А именно, размерность фазового пространства электрических уравнений системы (1) равняется двум, то есть соответствует плоскому характеру магнитного поля таких машин. А при удалении ротора из статора машины (при этом $\mu = 1$) влияние на него электромагнитного поля статора устраняется. Этот результат очевиден с точки зрения здравого смысла. Но с точки зрения уравнений Парка-Горева для подобных машин это влияние остается [3, с. 84-85].

В электрических машинах имеет место соотношение

$$\varepsilon_s \sim 10^{-2},$$

поэтому из первых двух уравнений системы (1) получаем приближенно

$$\Psi_x \approx 0, \quad \Psi_y \approx 1.$$

Соответственно система (1) принимает следующий вид:

$$\dot{x} = -\varepsilon_f x + sy - u_f \sin \theta,$$

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= -\varepsilon_f y - sx + \varepsilon_f - u_f \cos \theta, \\
\dot{\theta} &= s, \\
\dot{s} &= -\delta(2bx + cv^2). \quad b = \frac{1 - \mu}{\mu}
\end{aligned} \tag{2}$$

Учитывая, что параметр δ очень малая величина ($\delta \sim 10^{-3} \div 10^{-5}$), в последней системе можно осуществить прямое разделение движений на медленные механические и быстрые электрические. Для этого "заморозим" в электрических уравнениях медленные переменные s , θ . Тогда эти уравнения становятся линейными. Очевидно, что ее решения устойчивы и достигают своих установившихся значений настолько быстро, что в механических уравнениях медленные переменные практически не успевают измениться. Поэтому в механические уравнения можно подставить только установившиеся значения x :

$$x = -\frac{1}{\varepsilon_f^2 + s^2} [\varepsilon_f u_f \sin \theta + s(\varepsilon_f + u_f \cos \theta)].$$

Подставив это значение x в выражение для электромагнитного момента, найдем его в таком виде:

$$\begin{aligned}
M_e = 2bx &= -\frac{2b}{\varepsilon_f^2 + s^2} [\varepsilon_f u_f \sin \theta + s(\varepsilon_f + u_f \cos \theta)] = \\
&= -\frac{2b}{\varepsilon_f^2 + s^2} \left[\varepsilon_f s + \sqrt{\varepsilon_f^2 + s^2} u_f \cos(\theta + \beta) \right],
\end{aligned}$$

где

$$\sin \beta = \frac{s}{\sqrt{\varepsilon_f^2 + s^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\varepsilon_f}{\sqrt{\varepsilon_f^2 + s^2}}.$$

В малой окрестности установившегося режима СГ ВЭС, когда $s = s_0 = 0$,

$$\frac{s^2}{\varepsilon_f^2} \ll 1 \implies \sin \beta \approx 0, \quad \cos \beta \approx 1.$$

Электромагнитный момент в этой окрестности имеет такой стандартный вид:

$$M_e \approx -2 \frac{b}{\varepsilon_f} (s + u_f \sin \theta).$$

Окончательно малые колебания ротора СГ ВЭС описываются таким образом:

$$\ddot{\theta} + \delta \left[2 \frac{b}{\varepsilon_f} (\dot{\theta} + u_f \sin \theta) - cv^2 \right] = 0. \tag{3}$$

Линеаризация уравнения (3) в окрестности положений равновесия дает такое характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \delta \left[2 \frac{b}{\varepsilon_f} (\lambda + u_f) - cv^2 \right] = 0.$$

Из него следует, что условием устойчивости работы ВЭС является соблюдение следующего соотношения:

$$2\frac{bu_f}{\varepsilon_f} > cv^2 \implies v < \sqrt{2\frac{bu_f}{c\varepsilon_f}}.$$

Глава II. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ МАЯТНИК В БЫСТРОПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

Рассматриваемая здесь задача уже исследовалась (см., например, [1, с. 50-56]). Ее постановка вызывает большие сомнения, так как при неограниченной мощности поля как далеко ни удаляй маятник это никак не скажется на его движении. Несмотря на это, хочется уточнить некоторые выкладки из упомянутой публикации, чтобы развеять все сомнения.

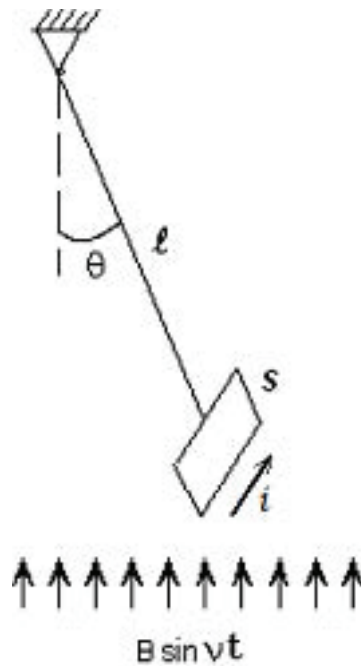


Рис. 3: Схема электромагнитного маятника.

Для создания математической модели этого маятника используем уравнения Лагранжа-Максвелла.

$$T_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2, \quad T_e = \frac{1}{2} L i^2 + i S B_0 \sin \nu t \sin \theta$$

– механикокинетическая и электрокинетическая энергии соответственно,

$$\Pi = mgl(1 - \cos \theta), \quad D = D_e + D_m = \frac{1}{2} R i^2 + \rho \dot{\theta}^2$$

– потенциальная энергия и суммарная диссипативная функция соответственно.

Здесь

J – момент инерции маятника,

m – масса маятника,

l – длина маятника,

R – сопротивление маятника ,

ρ – коэффициент сопротивления в точке подвеса маятника,

B, ν – магнитная индукция и угловая частота электромагнитного поля,

S – площадь рамки маятника .

Используя вышеприведенные выражения для энергий и рассеяния части их на сопротивлениях, выводим следующие уравнения для угла поворота маятника и тока:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\theta} - iSB \sin \nu t \cos \theta + mgl \sin \theta &= 0, \\ L\dot{i} + SB\dot{\theta} \sin \nu t \cos \theta + \nu SBop \cos \nu t \sin \theta + Ri &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Переходя в этих уравнениях к безразмерной форме, введем сначала безразмерное время

$$\tau = \nu t \Rightarrow t = \nu^{-1}\tau.$$

При этом уравнения (1) примут такой вид:

$$\begin{aligned} J\nu^2 \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\rho \frac{d\theta}{d\tau} - BSi \sin \tau \cos \theta + mgl \sin \theta &= 0, \\ L\nu \frac{di}{d\tau} + BS\nu \frac{d\theta}{d\tau} \sin \tau \cos \theta + BS\nu \cos \tau \sin \theta + Ri &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее вводим безразмерный ток \bar{i} следующим образом:

$$i = \frac{BS}{\nu L} \bar{i}.$$

Уравнения (2) тогда принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^2}{d\tau^2} + 2\frac{\rho}{\nu^2 J} \frac{d\theta}{d\tau} - \frac{(BS)^2}{\nu^2 JL} \bar{i} \sin \tau \cos \theta + \frac{mgl}{\nu^2 J} \sin \theta &= 0, \\ \frac{d\bar{i}}{d\tau} + \frac{R}{\nu L} \bar{i} + \frac{d\theta}{d\tau} \sin \tau \cos \theta + \cos \tau \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Наконец, введем безразмерные параметры:

$$\frac{\rho}{\nu^2 J} = n, \quad \frac{(BS)^2}{\nu^2 JL} = 2\beta, \quad \frac{mgl}{\nu^2 J} = k, \quad \frac{R}{\nu L} = \varepsilon.$$

Условимся теперь за безразмерной переменной \bar{i} оставить ее прежнее обозначение, а точка над переменной теперь будет обозначать дифференцирование по безразмерному времени τ . С учетом этого замечания окончательно уравнения рассматриваемого маятника в безразмерной форме примут такой вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} - 2\beta i \sin \tau \cos \theta + k \sin \theta &= 0, \\ \dot{i} + \varepsilon i + \dot{\theta} \sin \tau \cos \theta + \cos \tau \sin \theta &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Так как считаем, что величина ν достаточно велика, то будем считать, что $\nu^{-1} \sim 10^{-2}$. Легко видеть, что при этом рассматриваемая система уравнений имеет медленное механическое движение и быстрое электрическое. В таких случаях применяется следующий приближенный метод исследования: из уравнений быстрых движений находится их частное установившееся решение, которое подставляется в уравнения медленных движений. В нашем случае, применяя этот метод, ищем частное решение уравнения для тока из (4) в таком виде:

$$i = A \sin \tau \sin \theta + B \cos \tau \sin \theta + C \sin \tau \cos \theta + D \cos \tau \cos \theta.$$

В результате приходим к системе четырех алгебраических уравнений, в результате решения которой приходим к такому виду неизвестный коэффициент A, B, C, D :

$$\begin{aligned}A &= -\frac{1}{\det} \left[(1 - \dot{\theta}^2)^2 + \varepsilon^2 (1 + \dot{\theta}^2) \right], \\ B &= -\frac{\varepsilon}{\det} \left[(1 - \dot{\theta}^2)(1 - \dot{\theta}^2 + \dot{\theta}) + \varepsilon^2 (1 + \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}) \right], \\ C &= \frac{\varepsilon \dot{\theta}}{\det} (1 - \dot{\theta}^2 - \varepsilon^2), \\ D &= \frac{\varepsilon^2 \dot{\theta}}{\det} (1 + \varepsilon^2),\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\det = (1 - \dot{\theta}^2 + \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 \dot{\theta}^2.$$

Поскольку максимальный порядок малости обратной частоты ν есть два, то имеем следующие порядки малости для $\dot{\theta}$, ε :

$$\dot{\theta} \sim 10^{-2}, \quad \varepsilon \sim 10^{-2}.$$

Имея в виду эти оценки, коэффициентам (5) следует придать следующий вид:

$$\begin{aligned}\det &\approx 1, \\ A &\approx -1, \\ B &\approx -\varepsilon \dot{\theta}, \\ C &\approx \varepsilon \dot{\theta}, \\ D &\approx \varepsilon^2 \dot{\theta}.\end{aligned}$$

$$i = -\sin \tau \sin \theta - \varepsilon \dot{\theta} (\cos \tau \sin \theta - \sin \tau \cos \theta - \varepsilon \cos \tau \cos \theta). \quad (6)$$

Подставляя выражение для тока (6) в первое из уравнений (4), получим

$$\ddot{\theta} + (2n - 2\beta\varepsilon \sin^2 \tau \cos^2 \theta + 2\beta\varepsilon \sin \tau \cos \tau \sin \theta \cos \theta - 2\beta\varepsilon^2 \sin \tau \cos \tau \cos^2 \theta) \dot{\theta} + (2\beta \sin^2 \tau \cos \theta + k) \sin \theta = 0.$$

Осредняя в этом выражении быстрые переменные за период 2π , придем окончательно к уравнению:

$$\ddot{\theta} + (2n - \varepsilon\beta \cos^2 \theta) \dot{\theta} + (\beta \cos \theta + k) \sin \theta = 0. \quad (7)$$

Как видим, электрическое сопротивление ε входит в диссипативный член этого уравнения со знаком минус. То есть оно имеет раскачивающий характер, что противоречит самой сути диссипации энергии. В монографии [1, с. 52] этот член назван "формально диссипативной" силой, носящей раскачивающий характер. Соответствующий параграф этой монографии [с. 50-56] посвящен всестороннему исследованию этого уравнения, причем этот член рассматривается как физическая реальность.

Позволим себе в этом не согласиться так как мы столкнулись здесь с очевидным парадоксом. Но прежде обратим внимание на то обстоятельство, что при неограниченной мощности поля как далеко ни удаляй маятник это никак не скажется на его движении. Чтобы более адекватно описать движение электромагнитного маятника, рассмотрим в следующей главе вместо поля неограниченной мощности катушку индуктивности (соленоид), создающую электромагнитное поле ограниченной мощности.

Глава III. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА-МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МАЯТНИКА С СОЛЕНОИДОМ

§ 1. Математическое моделирование исследуемой системы.

Математическая модель будет адекватно воспроизводить соответствующий физический объект, если будут выработаны **правила соответствия**, доказывающие эту адекватность. [7, с. 330]

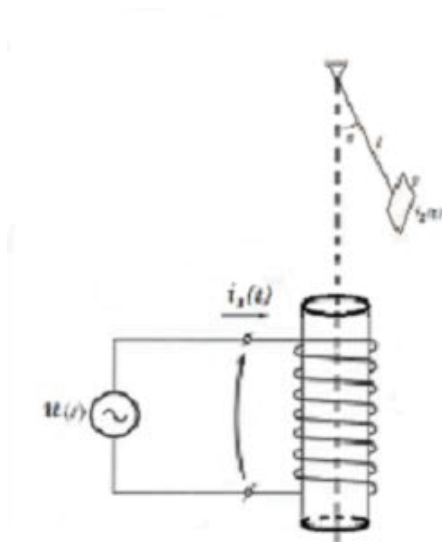


Рис. 4: Электромагнитный маятник плюс соленоид.

Для составления уравнений Лагранжа-Максвелла для исследуемой электромеханической системы выпишем выражения для соответствующих энергий и диссипативных функций:

$$T_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2; \quad T_e = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + Mi_1i_2 \sin \theta + \frac{1}{2}L_2i_2^2,$$

$$\Pi = mgl(1 - \cos\theta), \quad D_e = \frac{1}{2}r_1i_1^2 + \frac{1}{2}r_2i_2^2, \quad D_m = \rho\dot{\theta}^2,$$

где

J – момент инерции контура маятника с наведенным током,

m – масса маятника,

l – длина маятника,

L_j, r_j – индуктивность и сопротивление катушки индуктивности и контура маятника, $j = 1, 2$,

M – амплитудное значение взаимоиндуктивности между катушкой индуктивности и контуром маятника,

S – площадь контура маятника,

ρ – механическое сопротивление в точке подвеса маятника,

$u(t)$ – переменное напряжение, приложенное к катушке индуктивности.

Будем считать, что частота $u(t)$ может меняться в широком диапазоне, т. е.

$u = u(\nu t)$, где за ν обозначена эта частота.

Рассмотрим случай, когда $u(t) = u \sin(\nu t)$.

Уравнение Лагранжа-Максвелла для переменной i_1 примет следующий вид:

$$L_1 \dot{i}_1 + M \dot{i}_2 \sin \theta + M \dot{\theta} i_2 \cos \theta + r_1 i_1 = u \sin(\nu t).$$

Уравнение для переменной i_2 будет иметь вид:

$$L_2 \dot{i}_2 + M \dot{i}_1 \sin \theta + M \dot{\theta} i_1 \cos \theta + r_2 i_2 = 0.$$

Уравнение же для механической переменной θ выглядит так:

$$J \ddot{\theta} + 2\rho \dot{\theta} - M i_1 i_2 \cos \theta + mgl \sin \theta = 0.$$

§ 2. Переход к безразмерной форме.

Безразмерное время τ вводим так:

$$\tau = \nu t.$$

Безразмерные токи \bar{i}_1 , \bar{i}_2 вводим следующим образом:

$$i_1 = \frac{u}{\nu L_1} \bar{i}_1, \quad i_2 = \frac{u}{\nu L_2} \bar{i}_2.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}_1}{d\tau} + \frac{M}{L_2} \frac{d\bar{i}_2}{d\tau} \sin \theta + \frac{M}{L_2} \frac{d\theta}{d\tau} \bar{i}_2 \cos \theta + \frac{r_1}{\nu L_1} \bar{i}_1 &= \sin \tau, \\ \frac{d\bar{i}_2}{d\tau} + \frac{M}{L_1} \frac{d\bar{i}_1}{d\tau} \sin \theta + \frac{M}{L_1} \frac{d\theta}{d\tau} \bar{i}_1 \cos \theta + \frac{r_2}{\nu L_2} \bar{i}_2 &= 0, \\ \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2 \frac{\rho}{\nu J} \frac{d\theta}{d\tau} - \frac{M}{L_1 L_2} \frac{u^2}{\nu^4 J} \bar{i}_1 \bar{i}_2 \cos \theta + \frac{mgl}{\nu^2 J} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для безразмерных параметров системы (1) введем следующие обозначения:

$$\frac{M}{L_1} = n_1, \quad \frac{M}{L_2} = n_2,$$

где n_1 , n_2 – коэффициенты трансформации;

$$\frac{r_1}{\nu L_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{r_2}{\nu L_2} = \varepsilon_2, \quad \frac{\rho}{\nu J} = n, \quad \frac{u^2}{\nu^4 J L_1} = 2\beta, \quad \frac{mgl}{\nu^2 J} = k.$$

Условимся для безразмерных токов оставить их прежние обозначения, а точка над переменной теперь будет обозначать дифференцирование по безразмерному времени τ . Тогда система (1) примет такой вид:

$$\begin{aligned}
\dot{i}_1 + n_2 \dot{i}_2 \sin \theta + n_2 \dot{\theta} i_2 \cos \theta + \varepsilon_1 i_1 &= \sin \tau, \\
\dot{i}_2 + n_1 \dot{i}_1 \sin \theta + n_1 \dot{\theta} i_1 \cos \theta + \varepsilon_2 i_2 &= 0, \\
\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} - 2\beta n_2 i_1 i_2 \cos \theta + k \sin \theta &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Вид системы (2) для численного интегрирования.

$$\begin{aligned}
\dot{i}_1 &= \det^{-1} [-(\varepsilon_1 - n_1 n_2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) i_1 + n_2 (\varepsilon_2 \sin \theta - \dot{\theta} \cos \theta) i_2 + \sin \tau], \\
\dot{i}_2 &= \det^{-1} [n_1 (\varepsilon_1 \sin \theta - \dot{\theta} \cos \theta) i_1 - (\varepsilon_2 - n_1 n_2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) i_2 - n_1 \sin \theta \sin \tau], \\
\dot{\theta} &= \omega, \\
\dot{\omega} &= -2n\omega + 2\beta i_1 i_2 \cos \theta - k \sin \theta,
\end{aligned}$$

где $\det = 1 - n_1 n_2 \sin^2 \theta$.

§ 3. Приближенные решения для токов i_1 , i_2 .

Используя первые два уравнения системы (2), будем искать приближенные решения для токов i_1 , i_2 в следующем виде:

$$\begin{aligned}
i_1 &= A \sin \tau + B \cos \tau, \\
i_2 &= C \sin \tau + D \cos \tau.
\end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в первые два уравнения системы (2) и приравнивания коэффициенты при $\cos \tau$ и $\sin \tau$ получим для A , B , C , D такие выражения:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\varepsilon_1 - l}{\det}, \\
B &= -\frac{1 - m}{\det},
\end{aligned} \tag{3}$$

$$C = \frac{n_1}{(1 + \varepsilon_2^2) \det} \{ -(\varepsilon_1 - l) \sin \theta + (1 - m) \dot{\theta} \cos \theta - \varepsilon_2 [(1 - m) \sin \theta + (\varepsilon_1 - l) \dot{\theta} \cos \theta] \},$$

$$D = \frac{n_1}{(1 + \varepsilon_2^2) \det} \{ \varepsilon_2 [-(\varepsilon_1 - l) \sin \theta + (1 - m) \dot{\theta} \cos \theta] + (1 - m) \sin \theta + (\varepsilon_1 - l) \dot{\theta} \cos \theta \}.$$

В (3) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{n_1 n_2}{(1 + \varepsilon_2^2) \det_1} [\sin^2 \theta - \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \dot{\theta} \sin(2\theta)], \\
l &= \frac{n_1 n_2}{(1 + \varepsilon_2^2) \det_1} [-\varepsilon_2 (\sin^2 \theta - \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) + \dot{\theta} \sin(2\theta)], \\
\det_1 &= (1 - m)^2 + (\varepsilon_1 - l)^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Упрощение усредненных по быстрому времени τ выражений для A , B , C , D .

В механическое уравнение системы уравнений (2) входит произведение токов $i_1 i_2$:

$$\begin{aligned} i_1 i_2 &= (A \sin \tau + B \cos \tau)(C \sin \tau + D \cos \tau) = AC \sin^2 \tau + (AD + BC) \sin \tau \cos \tau + BD \cos^2 \tau. \\ &= AC \sin^2 \tau + (AD + BC) \sin \tau \cos \tau + BD \cos^2 \tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Усредняя выражения (5) за период по τ , получим

$$\langle i_1 i_2 \rangle = \frac{1}{2}(AC + BD). \quad (6)$$

Считая $\varepsilon_1^2 \approx 0$, $\varepsilon_2^2 \approx 0$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \approx 0$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$ после элементарных, хотя и утомительных преобразований приходим к такому виду выражения (6):

$$\langle i_1 i_2 \rangle = \frac{1}{2}(AC + BD) \approx \frac{n_1}{2det^2} [-det^2 + 2n_1 n_2 \varepsilon_2 \dot{\theta} \sin(2\theta)] \sin \theta.$$

Подставляя это выражение в третье уравнение системы (2), получим

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} - \beta \frac{n_1 n_2}{det^2} [2n_1 n_2 \varepsilon_2 \dot{\theta} \sin(2\theta) - det^2] \sin \theta \cos \theta + k \sin \theta = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \left[n - \beta \varepsilon_2 \frac{(1 - \mu)^2 \sin^2(2\theta)}{(1 - (1 - \mu) \sin^2 \theta)^2} \right] \dot{\theta} + \\ + [\beta(1 - \mu) \cos \theta + k] \sin \theta = 0, \end{aligned}$$

где

$$\mu = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - n_1 n_2 \longrightarrow n_1 n_2 = 1 - \mu$$

μ – коэффициент электромагнитного рассеяния энергии.

В случае удаления маятника от соленоида на достаточно большое расстояние взаимдуктивность M можно положить равной нулю. Тогда очевидно, что $\mu = 1$ и последнее уравнение превращается в уравнение колебаний обычного маятника:

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + k \sin \theta = 0.$$

То есть рассматриваемая модель системы ближе к реальности, чем в предыдущем случае. Однако парадокс с "фактически диссипативным членом" остался. Значит исследовать ее на устойчивость не имеет никакого практического смысла.

В следующей главе мы воспользуемся для математического моделирования изучаемой электромеханической системы вместо уравнений Лагранжа-Максвелла уравнениями Лагранжа-Ньютона и проанализируем полученную модель на ее физическую адекватность исходной модели.

**Глава IV. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА-НЬЮТОНА
В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МАЯТНИКОВ**

§ 1. Составление уравнений Лагранжа-Ньютона.

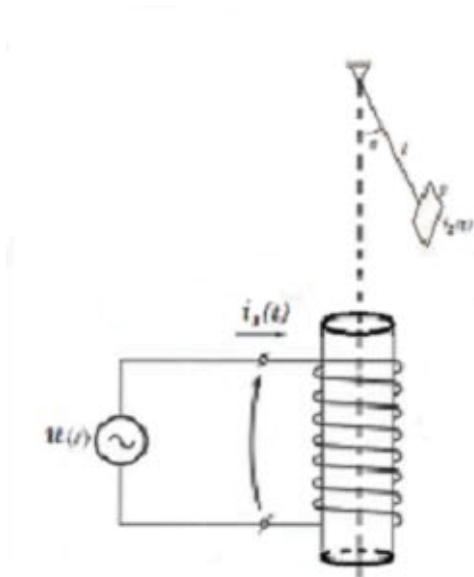


Рис. 5: Электромагнитный маятник плюс соленоид.

Для составления уравнений Лагранжа-Ньютона для исследуемой электромеханической системы выпишем выражения для соответствующих энергий и диссипативных функций:

$$T_e = \frac{1}{2}(\psi_1^2 + \psi_2^2), \quad T_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2, \quad D_e = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{L_1}\psi_1^2 + \frac{r_2}{L_2}\psi_2^2\right),$$

$$D_m = \rho\dot{\theta}^2, \quad \Pi = mgl(1 - \cos \theta).$$

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \sin \theta, \quad \psi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \sin \theta.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_e}{\partial \psi_j} + \frac{\partial D_e}{\partial \psi_j} = Q_j, \quad j = 1, 2.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_m}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D_m}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T_e}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0, \quad j = 1, 2.$$

$$M_e = \sum_j \frac{\partial T_e}{\partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} = \left(\frac{\psi_1}{L_1} i_2 + \frac{\psi_2}{L_2} i_1 \right) M \cos \theta.$$

$$i_1 = \frac{L_2 \psi_1 - M \psi_2 \sin \theta}{L_1 L_2 - M^2 \sin^2 \theta}, \quad i_2 = \frac{L_1 \psi_2 - M \psi_1 \sin \theta}{L_1 L_2 - M^2 \sin^2 \theta}.$$

$$M_e = \frac{M \cos \theta}{L_1 L_2 - M^2 \sin^2 \theta} \left[2\psi_1 \psi_2 - \left(\frac{\psi_1^2}{L_1} + \frac{\psi_2^2}{L_2} \right) M \sin \theta \right].$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{r_1}{L_1} \psi_1 + u \sin(\nu t),$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{r_2}{L_2} \psi_2 + \frac{M}{L_1} \frac{r_2}{L_2} \psi_1 \sin \theta,$$

$$J\ddot{\theta} = -2\rho\dot{\theta} - mgl \sin \theta + \frac{M \cos \theta}{L_1 L_2 - M^2 \sin^2 \theta} \left[2\psi_1 \psi_2 - \left(\frac{\psi_1^2}{L_1} + \frac{\psi_2^2}{L_2} \right) M \sin \theta \right].$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{r_1}{L_1} \psi_1 + u \sin(\nu t),$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{r_2}{L_2} \psi_2 + \frac{M}{L_1} \frac{r_2}{L_2} \psi_1 \sin \theta,$$

$$J\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\theta} + mgl \sin \theta + \frac{M \cos \theta}{L_1 L_2 [1 - (1 - \mu) \sin^2 \theta]} \left[2\psi_1 \psi_2 - \left(\frac{\psi_1^2}{L_1} + \frac{\psi_2^2}{L_2} \right) M \sin \theta \right] = 0,$$

где $\mu = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$ – коэффициент электромагнитного рассеяния энергии.

§ 2. Переход к безразмерной форме.

$$\tau = \nu t, \quad \psi_1 = \frac{u}{\nu} \bar{\psi}_1, \quad \psi_2 = \frac{Mu}{L_1 \nu} \bar{\psi}_2.$$

$$M_e = \frac{u^2}{L_1 \nu^2} \bar{M}_e, \quad \bar{M}_e = \frac{1 - \mu}{1 - (1 - \mu) \sin^2 \theta} [2\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 - [\bar{\psi}_1^2 + (1 - \mu) \bar{\psi}_2^2] \sin \theta] \cos \theta.$$

$$\dot{\psi}_1 = -\varepsilon_1 \psi_1 + \sin \tau,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\varepsilon_2 \psi_2 + \varepsilon_2 \psi_1 \sin \theta, \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + k \sin \theta - \frac{2\beta(1 - \mu) \cos \theta}{1 - (1 - \mu) \sin^2 \theta} \{2\psi_1 \psi_2 - [\psi_1^2 + (1 - \mu) \psi_2^2] \sin \theta\} = 0,$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$\varepsilon_1 = \frac{r_1}{\nu L_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{r_2}{\nu L_2}, \quad n = \frac{\rho}{\nu^3 J}, \quad 2\beta = \frac{u^2}{\nu^4 J L_1}, \quad k = \frac{mgl}{\nu^2 J}.$$

В (1) за переменными оставлены их прежние обозначения, а точка над переменной теперь обозначает дифференцирование по безразмерному времени τ .

§ 3. Приближенное вычисление потокосцеплений ψ_1, ψ_2 .

Полагая $\varepsilon_1 \ll 1$, для потокосцепления ψ_1 из первого уравнения системы (1) находим приближенное решение

$$\psi_1 = -\cos \tau, \quad (2)$$

которое, подставляя во второе уравнение системы (1), для нахождения ψ получаем следующее уравнение:

$$\dot{\psi}_2 + \varepsilon_2 \psi_2 = -\varepsilon_2 \cos \tau \sin \theta. \quad (3)$$

Приближенное решение уравнения (3) ищем в следующем виде:

$$\psi_2 = A \sin \tau \sin \theta + B \cos \tau \sin \theta + C \sin \tau \cos \theta + D \cos \tau \cos \theta. \quad (4)$$

После его подстановки в уравнение (3) и приравнивания коэффициентов при соответствующих тригонометрических функциях приходим к следующей алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов A, B, C, D :

$$\begin{aligned} A - D\dot{\theta} + \varepsilon_2 B &= -\varepsilon_2, \\ -B - C\dot{\theta} + \varepsilon_2 A &= 0, \\ -D + A\dot{\theta} + \varepsilon_2 C &= 0, \\ B\dot{\theta} + C + \varepsilon_2 D &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) легко находим

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\varepsilon_2}{1 + \varepsilon_2^2 + \dot{\theta}^2}, \\ B &= -\frac{\varepsilon_2^2}{1 + \varepsilon_2^2 + \dot{\theta}^2}, \\ C &= 0, \\ D &= \frac{\varepsilon_2 \dot{\theta}}{1 + \varepsilon_2^2 + \dot{\theta}^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (6) выражение для ψ_2 приобретает следующий вид:

$$\psi_2 = \frac{\varepsilon_2}{1 + \varepsilon_2^2 + \dot{\theta}^2} (-\sin \tau \sin \theta - \varepsilon_2 \cos \tau \sin \theta + \dot{\theta} \cos \tau \cos \theta).$$

§ 4. Приближенное уравнение для исследования на устойчивость рассматриваемой электромеханической системы.

Полагая $\varepsilon_2^2 \approx 0 \rightarrow \psi_2^2 \approx 0, \dot{\theta}^2 \approx 0$, приходим к следующему виду искомого уравнения:

$$\ddot{\theta} + 2 \left[n + \frac{\varepsilon_2 \beta (1 - \mu) \cos^2 \theta}{1 - (1 - \mu) \sin^2 \theta} \right] \dot{\theta} + \left[\frac{\beta (1 - \mu) \cos \theta}{1 - (1 - \mu) \sin^2 \theta} + k \right] \sin \theta = 0. \quad (7)$$

Очевидно, что здесь активное электрическое сопротивление ε_2 имеет успокаивающий систему характер, как это и должно иметь место в реальности. Отсюда следует вывод, что имеет практический смысл всестороннее исследование как уравнения (7), так и системы (1). Здесь же мы ограничимся только исследованием уравнения (1) на локальную устойчивость.

При условии $\sin \theta = 0$ имеем два положения равновесия:

нижнее

$$\theta = 0$$

и верхнее

$$\theta = \pi.$$

В окрестности нижнего положения равновесия имеем

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1, \quad \sin^2 \theta \approx 0, \quad \cos^2 \theta \approx 1.$$

Уравнению (7), линеаризованному в окрестности нижнего положения равновесия соответствует следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2[n + \varepsilon_2 \beta (1 - \mu)]\lambda + [\beta(1 - \mu) + k] = 0.$$

Очевидно, что нижнее положение равновесия асимптотически устойчиво.

В окрестности верхнего положения равновесия имеем

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx -1, \quad \sin^2 \theta \approx 0, \quad \cos^2 \theta \approx 1.$$

Уравнению (7), линеаризованному в окрестности верхнего положения равновесия соответствует следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2[n + \varepsilon_2 \beta (1 - \mu)]\lambda + [-\beta(1 - \mu) + k] = 0.$$

Очевидно, что верхнее положение равновесия устойчиво при соблюдении условия:

$$k > \beta(1 - \mu).$$

ВЫВОДЫ

1. На примере однофазного трансформатора изучен метод уравнений Лагранжа-Ньютона.
2. Метод уравнений Лагранжа-Ньютона применен при моделировании и исследовании на устойчивость работы ветроэлектростанции.
3. При анализе уравнений электромагнитного маятника, работающего от электромагнитного поля неограниченной мощности, выявлено наличие члена, связанного с электрической диссипацией энергии со знаком, противоположным физическому смыслу явления.
4. С помощью уравнений Лагранжа-Максвелла построена математическая модель электромагнитного маятника, работающего от катушки индуктивности. Хотя эта задача более адекватна физическому объекту, чем в предыдущем случае, но член с электрической диссипацией тоже имеет противоположный здравому смыслу знак.
5. С помощью уравнений Лагранжа-Ньютона построена математическая модель электромагнитного маятника, работающего от катушки индуктивности. Эта модель оказалась полностью адекватна физическому объекту. Поэтому и член с электрической диссипацией в ней имеет знак, соответствующий здравому смыслу. Делается вывод, что именно эта модель имеет практическую ценность, поэтому ее полное математическое исследование целесообразно.
6. Последняя модель исследована на локальную устойчивость ее положений равновесия. Показано, что нижнее положение равновесия асимптотически устойчиво, а для верхнего положения найдено условие его устойчивости.

Л и т е р а т у р а

1. Скубов Д.Ю., Ходжаев К.Ш. Нелинейная электромеханика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 360 с.
2. Родюков Ф.Ф. Математическая модель большой электроэнергетической системы. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2006. – 153 с.
3. Родюков Ф.Ф. Четыре шага вперед в теории электромагнитного поля и в электромеханике. LAP Lambert Academic Publishing, 2013. - 116 p.
4. Львович А.Ю. Электромеханические системы. Л.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1989. - 296 с.
5. Пасынков В.Е., Родюков Ф.Ф. Математическое моделирование работы ветроэлектростанции// Динамика и устойчивость механических систем / Под ред. П.Е. Товстика. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та. 1997. С. 56-61. (Прикладная механика; Вып. 10).
6. Перли С.Б. Ветронасосные и ветроэлектрические агрегаты. – ОНТИ, Харьков, 1938, 266с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968. - 720 с.