

Санкт-Петербургский государственный университет
Механика и математическое моделирование
Механика разрушения

Чеврычкина Анастасия Александровна

*«Структурная макромеханика
разрушения горных материалов»*

Магистерская диссертация

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор Петров Ю.В.

Научный консультант:
доктор физ.-мат. наук Груздков А.А.

Рецензент:
доктор техн. наук Смирнов В.И.

Санкт-Петербург

2016

Saint-Petersburg State University
Mechanics and Mathematical Modelling
Fracture Mechanics

Anastasiia Chevrychkina

«*Structural macro-mechanics of rock material
fracture*»

Master's Thesis

Scientific supervisor:
Dr of Physico-Mathematical Sciences, Professor Petrov Y.V.

Scientific consultant:
Dr of Physico-Mathematical Sciences Gruzdkov A.A.

Reviewer:
Dr of Engineering Sciences Smirnov V.I.

Saint-Petersburg

2016

Аннотация

Чеврычкина Анастасия Александровна.

Структурная макромеханика разрушения горных материалов.

Науч. руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор Петров Ю.В.

Науч. консультант: доктор физ.-мат. наук Груздков А.А.

Направление механика, кафедра теории упругости.

Результаты работы показывают возможность модификации критериев. Изменение закона подобия может убрать систематическое влияние градиента напряжений. Градиент напряжений систематически проявляется в том, что значение каждого параметра расстояния тем больше, чем меньше градиент напряжений. Критерий критической точки, структурный и градиентный критерий находятся в достаточно хорошем соответствии с экспериментальными данными при удачно подобранных параметрах расстояния в каждой схеме нагружения.

Количество использованных источников – 14.

Чеврычкина, А. А. Структурная макромеханика разрушения горных материалов: магистерская дис.: защищена 9.06.2016 / Чеврычкина Анастасия Александровна. – СПб., 2016. – 48с. –Библиогр.: с. 47-48.

Содержание

Введение	6
1 Нелокальные критерии в задачах с неоднородным полем напряжений	7
1.1 Обзор нелокальных критериев	9
1.1.1 Структурный критерий Нейбера - Новожилова . .	9
1.1.2 Критерий Питерсона - критерий критической точки	10
1.1.3 Градиентный критерий, предложенный Харлабом В.Д.	11
1.2 Некоторые задачи с неоднородным полем напряжений . .	12
1.2.1 Растяжение пластины с круглым отверстием . . .	12
1.2.2 Растяжение пластины с угловым вырезом, трещиной	19
1.2.3 Изгиб балки	25
1.3 Значение характерных расстояний d, r_c, δ в задачах с неоднородным полем напряжений	28
1.4 Заключение первой главы	30
2 Нелокальные эффекты в структурно-неоднородных материалах	32
2.1 Зависимость предельного напряжения от толщины балки	32
2.2 Параметры расстояния в задаче изгиба и растяжения пластины с трещиной	37
2.3 Заключение второй главы	38
3 Нелокальный критерий во времени	39
3.1 Механические свойства горных материалов	39
3.2 Схемы испытаний для разных скоростей нагружения . .	40
3.3 Критерий инкубационного времени	42
3.4 Применение критерия инкубационного времени	43

Выводы по работе	45
Апробация работы	46
Список литературы	47

Введение

Многочисленные исследования прочности материалов и условий их разрушения выявили, что критическое напряжение может существенно превосходить значение прочности материала при больших перепадах поля напряжений во времени или пространстве. Это может быть объяснено тем, что разрушение твердых тел является не критическим событием, а процессом, протекающим во времени и пространстве. Классические критерии прочности не описывают указанные зависимости, так как они рассматривают разрушение, как критическое событие, происходящее в математической точке. Существует класс нелокальных критериев, которые рассматривают разрушение как процесс, протекающий во времени и пространстве. Нелокальные критерии описывают указанные зависимости.

Горные породы и бетон являются одним из основных конструктивных материалов, поэтому важно правильно понимать их поведения в различных условиях нагружения. Механические свойства структурно-неоднородных материалов, как горные породы и бетон, зависят от степени неоднородных воздействий временных или пространственных.

В первой главе рассмотрены различные неоднородные поля напряжений, возникающие в задачах растяжения пластины с разрезом, угловым вырезом или круглым отверстием, а также изгиб балки. Во второй главе рассматривается применение нелокальных критериев в задачах изгиба и растяжения пластины с трещиной для бетона и горных материалов. В третьей главе рассматривается нелокальность воздействий во времени и применение критерия инкубационного времени.

1 Нелокальные критерии в задачах с неоднородным полем напряжений

Теория прочности, заключающаяся в сопоставлении внутренних напряжений в некоторой точке деформированного тела с некоторым предельным значением, является одним из способов оценивания прочности объектов. Условие прочности в рамках классического подхода можно представить в виде (1.1):

$$f(\sigma_{ij}) \leq \sigma_{critical}, \quad (1.1)$$

где $f(\sigma_{ij})$ — некоторая функция компонент тензора напряжений σ_{ij} , $\sigma_{critical}$ — предельное напряжение равномерно напряженного материала. Наступлению предельного состояния (разрушению) соответствует знак равенства в выражении (1.1).

Область применения классического подхода ограничивается случаем относительно равномерных полей напряжений. В случае неоднородных полей напряжений проявляется размерный эффект, который не описывается в рамках классической теории прочности. Размерным эффектом в данной работе называется зависимость прочности тела от характера изменения поля напряжений в некоторой области. Размерный эффект проявляется в том, что предельное напряжение неоднородно напряженного материала существенно больше, чем равномерно напряженного материала.

Решение проблемы оценки прочности тел с сильно неоднородными полями напряжения, возникающих в телах с трещинами, находится в рамках теории трещин. Алан Гриффитс решил проблему сингулярности поля напряжений в кончике трещины путём составления энергетического баланса при варьировании длины трещины. Ирвин развил теорию Гриффитса, предложив взять в качестве критерия прочности условие достижения критического значения коэффициентом интенсивности напряжений K_I , то есть коэффициента при сингулярном члене

\sqrt{r} в распределения напряжений у вершины трещины.

$$K_I \leq K_{Ic},$$

где K_{Ic} — трещиностойкость разрушения, то есть критическое значение коэффициента интенсивности.

Подходы классической теории прочности и механики разрушения имеют разные области практического применения. В реальных задачах не всегда возможно правильно оценить степень неоднородности поля напряжений. Поэтому актуальными являются нелокальные критерии, которые позволяют охватывать поля напряжений разной степени неоднородности и с единых позиций подходить к оценке предельных состояний в задачах и с однородными, и с неоднородными полями напряжений.

Нелокальные критерии, в отличие от классических, рассматривают разрушение как физический процесс, происходящий не в математической точке, в которой достигается максимальное значение напряжения, а в некоторой малой области (зоне концентрации напряжений). Условие прочности в рамках нелокального критерия можно представить в виде (1.2):

$$f(\sigma_{ij}, \nabla\sigma, d, \sigma_{critical}) \leq 1, \quad (1.2)$$

где f — функционал поля напряжений, $\sigma_{critical}$ — предельное напряжение равномерно напряженного материала, d — параметр размерности длины, $\nabla\sigma$ — градиент напряжений.

Более подробно рассмотрим критерии Нейбера-Новожилова, Питерсона и градиентный критерий, предложенный В.Д. Харлабом.

1.1 Обзор нелокальных критериев

1.1.1 Структурный критерий Нейбера - Новожилова

Критерий учитывает напряженное состояние во всех точках, расположенных на отрезке длины d от рассматриваемой точки в направлении вероятного распространения трещины [2, 3].

В 1907 году К. Вигхардт (Wleghard K.) решил плоскую задачу в действительных переменных о нагружении упругой плоскости с острым угловым вырезом. Были получены асимптотические формулы для напряжено - деформированного состояния в окрестности конца выреза. Анализ этого решения привел к формулировке критерия разрушения, устраняющего бесконечность напряжения посредством его осреднения на некотором пространственном отрезке перед острой кромкой выреза, с последующим сопоставлением полученного осредненного напряжения с характеристикой прочности ненадрезанного материала. Позднее многие авторы предлагали схожие идеи. Нейбер (Heinz Neuber) в 1930 году предложил подобный критерий для определения усталостной прочности образца, содержащего угловой вырез. Независимо аналогичный критерий в 1969 году предложил В.В. Новожилов для предсказания хрупкого разрушения. Большой вклад в развитие критерия, предложенный В.В. Новожиловым, внёс Н.Ф. Морозов [1]. Whitney и Nuismer независимо от предыдущих работ в 1970 году использовали подобный критерий при описании хрупкого разрушения в образцах из композита с круговым отверстием и выемкой.

Критерий дает достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными в случае неоднородных полей напряжений. Общую форму записи критерия удобно представить в полярной системе координат (r, θ) . Начало координат расположено в рассматриваемой точке y . $\eta(\theta)$ – единичный вектор исходящий из начала координат полярной

системы, составляет угол θ с координатной осью ординат.

$$\max_{-\pi < \theta \leq \pi} \int_0^d \sigma_{\theta\theta}(y + \eta(\theta)y)dy = \sigma_c d \quad (1.3)$$

где σ_c — прочность тела без концентраторов напряжений, d — параметр, размерности длины.

Если известно, в каком направлении θ_0 достигается максимум в (1.3), то условие достижения предельного состояния в критерии можно переписать в более простой форме.

$$\int_0^d \sigma(y)dy = \sigma_c d.$$

Значение параметра d определяется из условия достижения критического состояния в критерии (1.3) для задач с неоднородным распределением напряжений. Традиционно значение d определяется выражением (1.4), полученным из предположения эквивалентности структурного критерия и критерия Ирвина.

$$d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{critical}} \right)^2. \quad (1.4)$$

1.1.2 Критерий Питерсона - критерий критической точки

Критерий критической точки учитывает состояние в некоторой точке, расположенной на определенном расстоянии от рассматриваемой точки [2, 3]. В 1930 году Питерсон (Ralph Earl Peterson) предложил критерий для определения критического состояния при усталостном нагружении с угловым вырезом. Данный подход также используется в предсказании хрупкого разрушения. Общий вид критерия при неизвестном направлении распространения трещины удобно представить в полярной системе координат:

$$\max_{-\pi < \theta \leq \pi} \left[\min_{0 \leq y \leq r_c} \sigma_{\theta\theta}(y + \eta(\theta)y) \right] = \sigma_c. \quad (1.5)$$

В рамках этого подхода разрушение произойдет, если минимальное напряжение на отрезке $[0; \sigma_c]$, направленном от рассматриваемой точки в сторону вероятного распространения трещины $\theta = \theta_o$ будет превышать σ_c . Критерий не чувствителен к особенностям распределения напряжений на $[0; r_c]$ (например, к выпуклости).

Если известно, в каком направлении θ_o достигается максимум в формуле (1.5), то условие предельного состояния можно переписать в более простой форме:

$$\min_{0 \leq y \leq r_c} \sigma_{\theta\theta}(y + \eta(\theta_o)y) = \sigma_c. \quad (1.6)$$

Значение параметра r_c , аналогично предыдущему, определяется из условия достижения критического состояния критерия (1.5) в задачах с неоднородным распределением напряжений. Традиционно значение r_c определяется выражением (1.7), полученным из предположения эквивалентности критериев Питерсона и Ирвина.

$$r_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{1c}}{\sigma_{critical}} \right)^2. \quad (1.7)$$

1.1.3 Градиентный критерий, предложенный Харлабом В.Д.

Градиентный критерий (1.8) был предложен В. Д. Харлабом [8]. Автор исходил из того, что критерий, учитывающий неоднородное напряженное состояние, должен включать в себя помимо самого характерного напряжения σ величину его относительного изменения $\delta |\nabla \sigma| / \sigma$ на характерной для материала длине δ так, чтобы неоднородность напряженного состояния повышала сопротивление материала разрушению. Критерий учитывает градиент распределения напряжений, но остается не чувствительным к некоторым особенностям поля напряжений также, как и критерий критической точки.

$$\max_{0 \leq r \leq \delta} \frac{\sigma(r)}{1 + \delta |\nabla \sigma(r)| / \sigma(r)} = \sigma_{critical}, \quad (1.8)$$

δ — параметр материала размерности длины; ∇ — символ градиента; $\sigma(r)$ — характерное напряжение в направлении распространения напряжения.

Значение параметра δ можно определять из условия предельного состояния критерия (1.8) в задачах с неоднородным распределением напряжений.

1.2 Некоторые задачи с неоднородным полем напряжений

1.2.1 Растяжение пластины с круглым отверстием

Рассмотрим задачу одноосного растяжения пластины, содержащей регулярный концентратор напряжений в виде центрального кругового отверстия (рис. 1). Если диаметр отверстия мал по сравнению с размерами пластины, то распределение напряжений можно оценить, воспользовавшись известным решением задачи Кирша. Точки максимальных растягивающих напряжений располагаются на контуре отверстия по концам диаметра, перпендикулярного линии приложения нагрузки. Направим ось y вдоль этой линии, тогда направлении быстрого изменения напряжений ось x . Распределение растягивающих напряжений выражается формулой:

$$\sigma_y = \frac{p}{2} \left(2 + \frac{a^2}{x^2} + 3 \frac{a^4}{x^4} \right),$$

где p — приложенная нагрузка; a — радиус отверстия (начало координат выбрано в центре отверстия). Максимальные напряжения имеют место на контуре отверстия в точках $x = \pm a$ и втрое превышают величину приложенного напряжения.

ПММА является удобным материалом для проведения различных

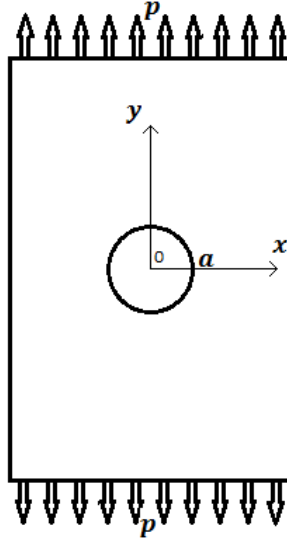


Рис. 1: Задача растяжения пластины с круглым отверстием.

схем испытаний. Проанализируем с позиции нелокальных критериев экспериментальные данные ПММА из работы [6] о разрушении пластин с круговым отверстием при растяжении. В работе [6] приведены результаты испытаний пластины с отверстиями из ПММА, прочность растяжения данного материала — 72 МПа.

Структурный критерий (1.3) в задаче растяжения пластины с круглым отверстием:

$$\frac{p}{2d} \int_a^{a+d} \left(2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 + 3 \left(\frac{a}{x}\right)^4 \right) dx \leq \sigma_c. \quad (1.9)$$

Условие достижения критической нагрузки в структурном критерии получим, приравняв левую часть выражения (1.9) к правой части и выразив критическую нагрузку p^* :

$$\frac{p^*}{\sigma_c} = \left(1 + \left(1 + \frac{d}{a}\right)^{-1} + 0.5 \left(1 + \frac{d}{a}\right)^{-2} + 0.5 \left(1 + \frac{d}{a}\right)^{-3} \right)^{-1}. \quad (1.10)$$

Экспериментальные данные и результаты расчета по формуле (1.10) со значением параметра расстояния, подобранного методом наимень-

ших квадратов, приводятся на рис. 2. Представленные данные демонстрируют значительный размерный эффект, который достаточно хорошо описывается структурным критерием разрушения (1.3). Согласно приведенному графику классический результат $p^*/\sigma_c = 1/3$, вытекающий из классического условия разрушения $\max \sigma_y = 3p^* = \sigma_c$, справедлив только для относительно очень больших отверстий $a/d \rightarrow \infty$. С уменьшением относительного радиуса отверстия a/d его влияние на прочность тела понижается и в пределе исчезает $\lim_{a/d \rightarrow 0} p/\sigma_c = 1$.

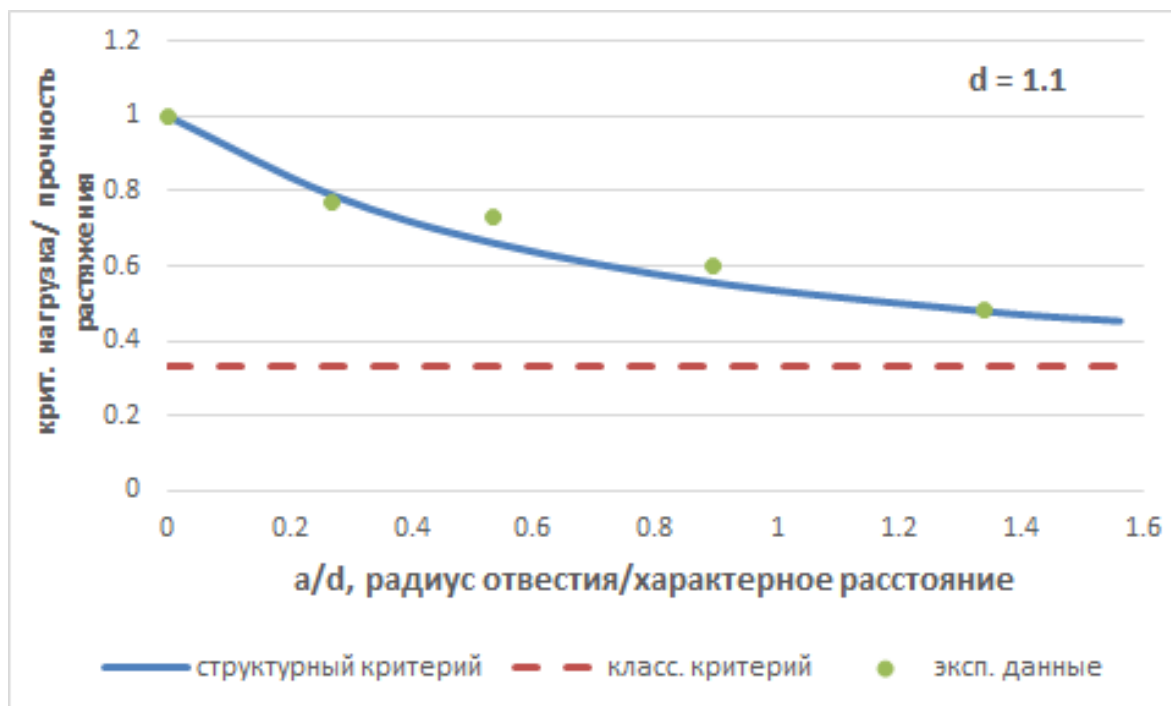


Рис. 2: Структурный критерий. Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия.

Значение параметра d можно определить для каждого радиуса круглого отверстия так, чтобы напряжение, предсказанное структурным критерием, полностью совпадало с экспериментальными данными. Значения параметра d определяются из уравнения (1.10).

Значения характерного расстояния d для каждого радиуса приведено в таблице 1. Значение параметра d лежит в интервале $0.68 \leq d \leq 1.58$. Характер зависимости значения d/a от радиуса отверстия является монотонно-убывающим в рамках структурного критерия.

a , мм	d , мм	d/a
0.3	0.86	2.87
0.6	1.34	2.23
1	1.02	1.02
1.5	0.68	0.45

Таблица 1: Характерное расстояние в структурном критерии d в задаче растяжения пластины с отверстием.

Критерий критической точки (1.5) в задаче растяжения пластины с круглым отверстием:

$$\frac{p}{2} \left(2 + \left(\frac{a}{a+r_c} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{a+r_c} \right)^4 \right) \leq \sigma_c. \quad (1.11)$$

Условие достижения критической нагрузки в критерии критической точки получим, приравняв левую часть к правой части в (1.11) и преобразовав полученное выражение.

$$\frac{p^*}{\sigma_c} = 2 \left(2 + \left(1 + \frac{r_c}{a} \right)^{-2} + 3 \left(1 + \frac{r_c}{a} \right)^{-4} \right)^{-1}. \quad (1.12)$$

Экспериментальные данные и результаты расчета по формуле (1.12) приведены на рис. 3. Представленные данные демонстрируют значительный размерный эффект, который достаточно хорошо описывается критерием критической точки (1.5). Классический результат $p^*/\sigma_c = 1/3$ также справедлив в критерии критической точки только для относительно очень больших отверстий $a/d \rightarrow \infty$. С уменьшением радиуса отверстия, его влияние на прочность тела понижается и в пределе исчезает $a/d \rightarrow 0$.

Значение параметра r_c также можно определить в зависимости от радиуса круглого отверстия так, чтобы напряжение, предсказанное критерием критической точки, полностью совпадало с экспериментальными данными. Значение параметра r_c определяется из уравне-

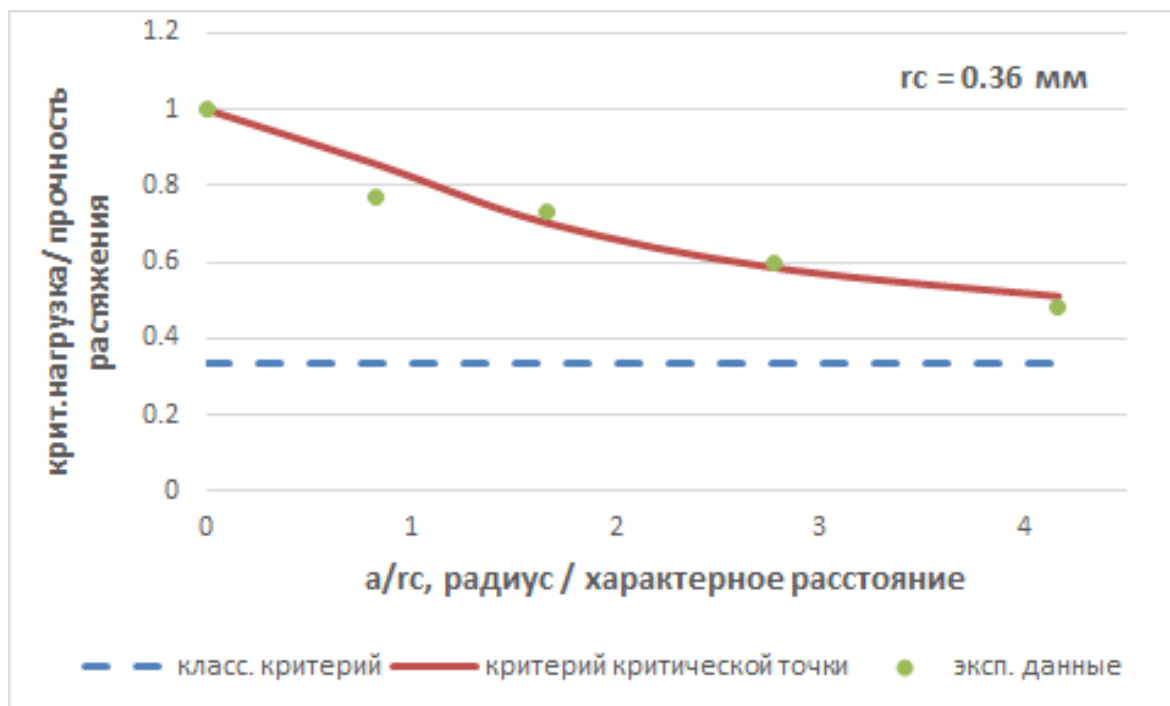


Рис. 3: Структурный критерий. Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия.

ния (1.12).

Значение характерного расстояния r_c , определенного из уравнения (1.12), приведено в таблице 2. Значение параметра r_c лежит в интервале $0.24 \leq r_c \leq 0.53$. Характер зависимости значения r_c/a от радиуса отверстия является монотонно-убывающим.

a , мм	r_c , мм	r_c/a
0.3	0.24	0.8
0.6	0.4	0.67
1	0.53	0.52
1.5	0.29	0.19

Таблица 2: Характерное расстояние в критерии критической точки r_c в задаче растяжения пластины с отверстием.

Градиентный критерий (1.8) в задаче растяжения пластины с круглым отверстием:

$$p \max_x \frac{2 + (a/x)^2 + 3(a/x)^4}{2 \left(1 + \frac{\delta 2(a/x)^3(1 + 6(a/x)^2)}{a 2 + (a/x)^2 + 3(a/x)^4} \right)} \leq \sigma_c. \quad (1.13)$$

Из условия достижения критической нагрузки в градиентном критерии $\max \sigma_{\nabla} = \sigma_c$ получим формулу для определения величины разрушающей нагрузки p^* :

$$\frac{p^*}{\sigma_c} = \frac{2 + (a/x^*)^2 + 3(a/x^*)^4}{2 \left(1 + \frac{\delta 2(a/x^*)^3(1 + 6(a/x^*)^2)}{a 2 + (a/x^*)^2 + 3(a/x^*)^4} \right)},$$

где x^* — координата точки, в которой достигается максимум в левой части выражения (1.13).

Расчетная точка x^* при $a/\delta \geq 1.638$ располагается на контуре отверстия ($x^* = a$), при $a/\delta < 1.638$ она смещается вглубь материала, так что область около отверстия становится как бы упрочненной, что не соответствует действительности. Если $a/\delta \geq 1.638$, то (поскольку $x^* = a$)

$$\frac{p^*}{\sigma_c} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\delta 7}{a 3} \right). \quad (1.14)$$

Экспериментальные данные и результаты расчета по формуле (1.14) приведены на рис. 4. Представленные данные демонстрируют значительный размерный эффект, который достаточно хорошо описывается критерием критической точки (1.8), но значительно хуже, чем два предыдущих. Классический результат $p^*/\sigma_c = 1/3$ справедлив в градиентном критерии для относительно очень больших отверстий $a/d \rightarrow \infty$ также, как и в двух предыдущих критериях. С уменьшением радиуса отверстия критическая нагрузка возрастает и в пределе $a/d \rightarrow 0$ выходит на бесконечность, таким образом нет выхода на результат растяжения пластины без отверстия, в отличие от двух предыдущих

критериев.

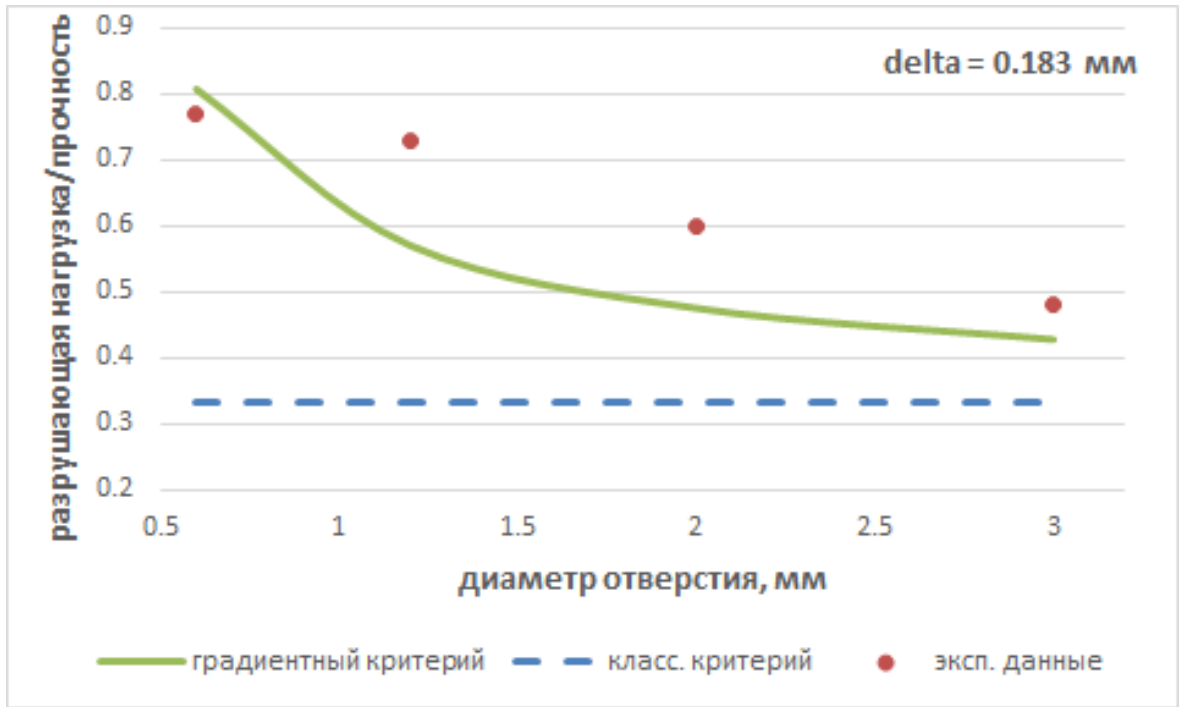


Рис. 4: Градиентный критерий. Зависимость критического напряжения от диаметра отверстия.

Параметр δ имеет несколько иные свойства, чем параметры d и r_c . Градиентный критерий (σ_c, δ) не чувствителен к отверстиям радиуса, которых меньше $1.638\tilde{\delta}$ (из условия $a/\delta \geq 1.638$). Для значения параметра $\delta = 0.183$ мм область применения градиентного критерия ограничена отверстиями с радиусами не меньше 0.3 мм.

Значение параметра δ также можно определить для каждого радиуса отверстия так, чтобы напряжение, предсказанное градиентным критерием, полностью совпадало с экспериментальными данными. Значение параметра δ определяется из уравнения (1.14).

Значение характерного расстояния δ , определенного из уравнения (1.14), приведено в таблице 3. Значение параметра r_c лежит в интервале $0.17 \leq \delta \leq 0.34$. Характер зависимости значения δ/a от радиуса отверстия является монотонно-убывающим.

a , мм	δ , мм	δ/a
0.3	0.17	0.56
0.6	0.30	0.51
1	0.34	0.34
1.5	0.28	0.19

Таблица 3: Характерное расстояние в градиентном критерии δ в задаче растяжения пластины с отверстием.

1.2.2 Растяжение пластины с угловым вырезом, трещиной

Рассмотрим задачу одноосного растяжения пластины, содержащей сингулярный концентратор напряжений в виде острого углового выреза (рис.5). Распределение напряжений можно оценить, воспользовавшись работой [1]. В полярной системе координат направлению быстрого изменения напряжений соответствует $\theta = 0$, тогда формула (1.15) определяет асимптотику напряженного состояния в окрестности угловой точки.

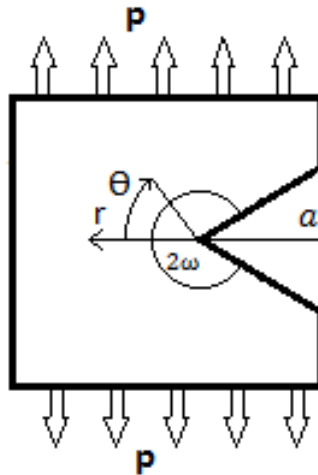


Рис. 5: Задача о растяжении упругой плоскости с угловым вырезом.

$$\sigma_{\theta\theta, \theta=0} = pc(\omega) \left(\frac{r}{2a} \right)^{\mu-1}, \quad (1.15)$$

где p — приложенное напряжение, μ наименьший положительный корень уравнения (1.16), коэффициент $c(\omega)$ определяется выражением (1.17). В вершине углового выреза в точке $r = 0$ имеют место бесконечные напряжения.

$$\sin 2\mu\omega + \mu \sin 2\omega = 0. \quad (1.16)$$

$$c(\omega) = \frac{\pi}{2\omega \cos 2\mu\omega + \sin 2\omega} \left[\frac{2K(\mu^2 \sin^2 \omega) - \sin^2 \mu\omega}{1 - \mu} - \mu^2(1 + \mu) \sin^2 \omega \right] \quad (1.17)$$

$$K = \frac{1 - 2 \sin^2 \omega \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda\omega + \lambda \sin 2\omega}}{4 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda\omega - \lambda^2 \sin^2 \omega}{\lambda(\lambda^2 + 1)(\operatorname{sh} 2\lambda\omega + \lambda \sin 2\omega)} d\lambda}$$

Замечание. Для угла раствора равного $\pi/2$ угловая точка в постановке задачи исчезает, задача становится растяжением "сплошной" пластины. Формула (1.15) приобретает вид $\sigma_{\theta\theta, \theta=0}(\omega = \pi/2) = 3p$ ($\mu(\pi/2) = 1$, $c(\pi/2) = 3$), что не соответствует случаю растяжению "сплошной" пластины.

Для угла раствора $\omega = \pi$ угловой вырез становится разрезом. Формула (1.15) со значением $\omega = \pi$ соответствует решению задачи растяжения пластины с разрезом.

Область применения формулы (1.15) ограничивается интервалом значений ω : $(\pi/2, \pi]$.

Проанализируем с позиции нелокальных критериев экспериментальные данные о разрушении пластин с угловым вырезом при растяжении. В работе [6] приведены результаты испытаний пластины с угловыми разрезами из ПММА, прочность растяжения данного материала — 70.2 МПа.

Структурный критерий (1.3) в задаче растяжения пластины с угловым вырезом:

$$\frac{1}{d} \int_0^d p c(\omega) \left(\frac{r}{2a}\right)^{\mu-1} \leq \sigma_c. \quad (1.18)$$

Условие достижение критической нагрузки в структурном критерии получим, приравняв левую часть выражения (1.18) к правой и выразив значение критической нагрузки p^* .

$$\frac{p^*}{\sigma_c} = \frac{\mu 2^{\mu-1}}{c(\omega)} \left(\frac{d}{a}\right)^{1-\mu}. \quad (1.19)$$

Экспериментальные данные и результаты расчета по формуле (1.19) приведены на рис. 6. Представленные данные демонстрируют зависимость от угла раствора, которая достаточно хорошо описывается структурным критерием разрушения (1.3).

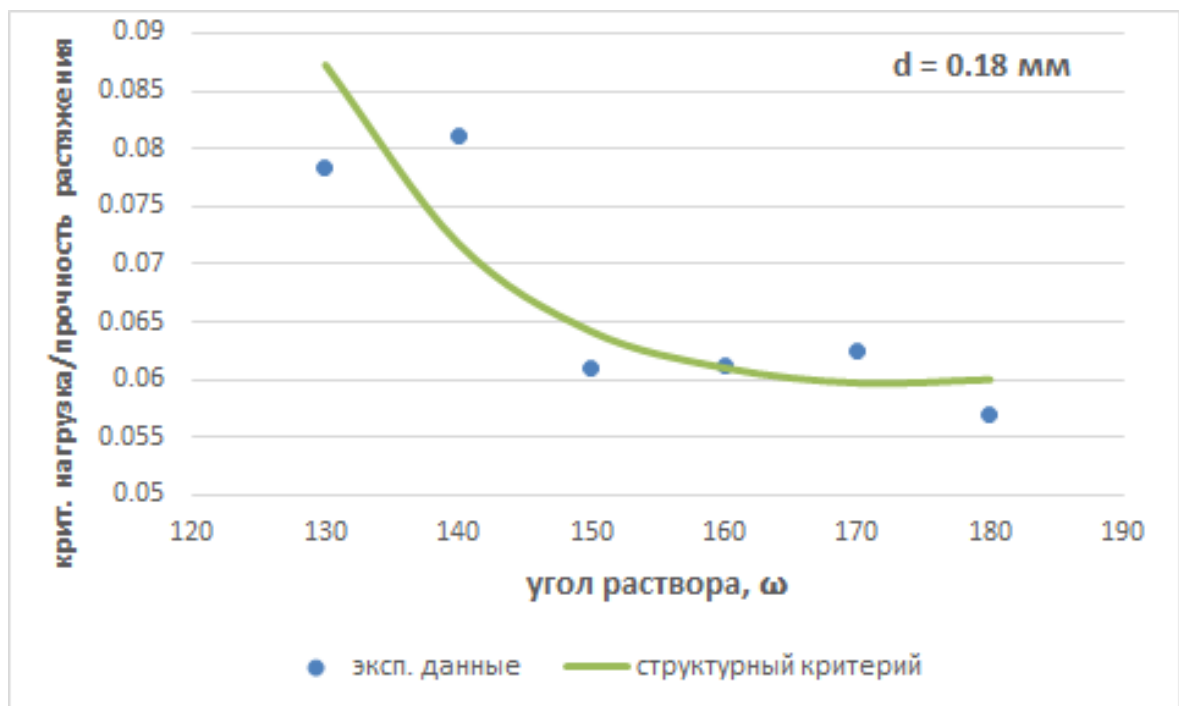


Рис. 6: Структурный критерий. Зависимость критического напряжения от угла раствора $2(\pi - \omega)$.

Значение параметра d можно определить для каждого углового вы-

ω°	d , мм	$d/l(\omega)$
180	0.162	–
170	0.2	0.07
160	0.18	0.032
150	0.163	0.02
140	0.23	0.021
130	0.14	0.01

Таблица 4: Характерное расстояние d в задаче растяжения пластины с угловым вырезом. $l(\omega)$ — длина дуги окружности радиуса 25 мм с углом раствора — $2(\pi - \omega)$

реза так, чтобы напряжение, предсказанное структурным критерием, полностью совпадало с экспериментальными данными. Значения параметра d , вычисленные по формуле (1.19), приведены в таблице 4 в зависимости от угла раствора ω . Значение расстояния d явно не зависит от угла раствора, но находится в достаточно узком интервале: $0.14 \leq d \leq 0.23$. Явной зависимости от угла раствора для отношения параметра d к характерной геометрической особенности (например, $l(\omega)$ — длина дуги окружности) не наблюдается. Значение $d/l(\omega)$ монотонно уменьшается с увеличением угла ω , за исключением значения для угла $\omega = 140^\circ$, что, может быть, связано с разбросом экспериментальных данных.

Критерий критической точки (1.5) в задаче растяжения пластины с угловым вырезом и трещиной:

$$pc(\omega) \left(\frac{r_c}{2a} \right)^{\mu-1} \leq \sigma_c. \quad (1.20)$$

Условие достижения критической нагрузки в критерии (1.6) получим, приравняв левую к правой части в условии (1.20) и выразив p/σ_c в полученном выражении:

$$\frac{p^*}{\sigma_c} = \left(\frac{r_c}{a}\right)^{1-\mu} \frac{2^{\mu-1}}{c(\omega)}. \quad (1.21)$$

Экспериментальные данные и результаты расчета по формуле (1.21) приведены на рис. 7. Представленные данные демонстрируют значительную зависимость предельной нагрузки от угла раствора, которая качественно описывается критерием критической точки (1.5).

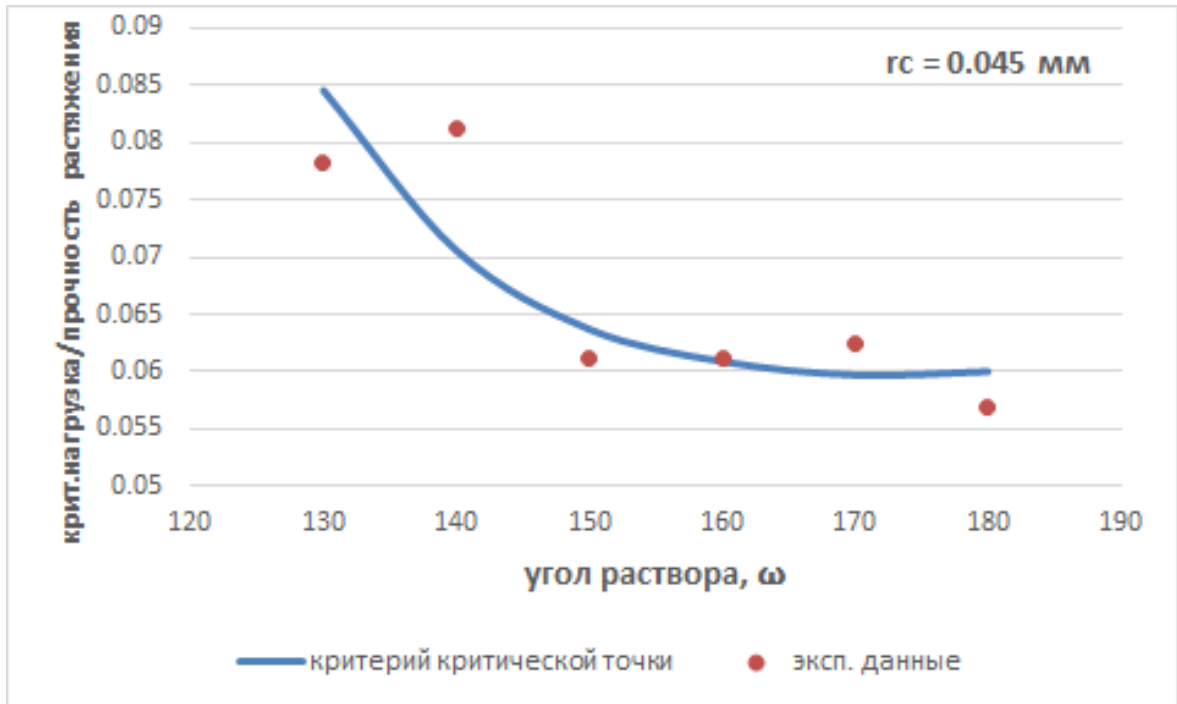


Рис. 7: Критерий критической точки. Зависимость критического напряжения от угла раствора $2(\pi - \omega)$.

Значение параметра r_c , как и для параметра d , можно определить для каждого углового выреза так, чтобы напряжение, предсказанное критерием критической точки, полностью совпадало с экспериментальными данными. Значение параметра r_c , вычисленные по формуле (1.21), приведено в таблице 5 в зависимости от угла раствора ω . Значение расстояния r_c также явно не зависит от угла раствора, но находится в более широком интервале: $0.038 \leq r_c \leq 0.06$. Для отношения параметра r_c к длине характерной геометрической особенности (длине дуги сектора) также наблюдается монотонная зависимость за

ω°	r_c , мм	$r_c/l(\omega)$
180	0.04	–
170	0.049	0.017
160	0.045	0.008
150	0.041	0.005
140	0.06	0.0054
130	0.038	0.003

Таблица 5: Характерное расстояние r_c в задаче растяжения пластины с угловым вырезом. $l(\omega)$ — длина дуги окружности радиуса 25 мм с углом раствора — $2(\pi - \omega)$

исключением угла раствора $\omega = 140^\circ$.

Градиентный критерий (1.8) в задаче растяжения пластины с угловым вырезом и трещиной: В задаче с сингулярным концентратором напряжений типа углового выреза градиентный критерий, предложенный В. Д. Харлабом, приобретает вид (1.22) (см. работу [8]).

$$\frac{\sigma}{(\delta |\nabla \sigma| / \sigma)^{1-\mu}} \leq \sigma_c. \quad (1.22)$$

Условие достижения критической нагрузки в градиентном критерии (1.23).

$$\frac{p^*}{\sigma_c} = \frac{1}{c(\omega)} \left(\frac{\tilde{\delta}}{2a} \right)^{1-\mu}, \quad (1.23)$$

где $\tilde{\delta} = (1 - \mu)\delta$.

Градиентный критерий в задаче растяжения плоскости с угловым вырезом (1.23) совпадает с критерием критической точки, за исключением значения параметра δ . Значение параметра δ отличается в $(1 - \mu(\omega))$ раз от значения параметра r_c для каждого угла ω . Графики теоретических кривых критерия критической точки и градиентного

критерия совпадают (рис. 7). Выводы о поведении параметра r_c верны для δ . Значения параметра δ для каждого угла раствора приведены в таблице 6.

ω°	δ , мм	$\delta/l(\omega)$
180	0.081	–
170	0.098	0.035
160	0.092	0.016
150	0.085	0.01
140	0.013	0.012
130	0.086	0.006

Таблица 6: Характерное расстояние δ в задаче растяжения пластины с угловым вырезом. $l(\omega)$ — длина дуги окружности радиуса 25 мм с углом раствора — $2(\pi - \omega)$

1.2.3 Изгиб балки

Задача изгиба балок является важным проявлением размерного эффекта. Известным фактом является увеличение максимального напряжения при уменьшении толщины балки [5]. Распределение напряжений в поперечном сечении балки при плоском изгибе (рис. 8) определяется формулами (1.24), выведенными в предположении, что поведение балки упруго-хрупкое и выполняются гипотезы Бернулли.

$$\sigma(y) = \sigma_{max} \frac{2y}{h}, \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}, \quad (1.24)$$

где $\sigma_{max} = Mh/2I_x$ — максимальное растягивающее напряжение при изгибе (растягивающее напряжение в крайнем волокне); $I_x = bh^3/12$ — момент инерции прямоугольного сечения балки; M — момент относительно оси O_x .

Проанализируем с позиции нелокальных критериев экспериментальные данные изгиба балки. В работе [10] приведены данные изгиба балки: $\sigma_c = 72$ МПа, $\sigma_{max_bend} = 105$ МПа, толщина балки $h = 3.02$ мм.

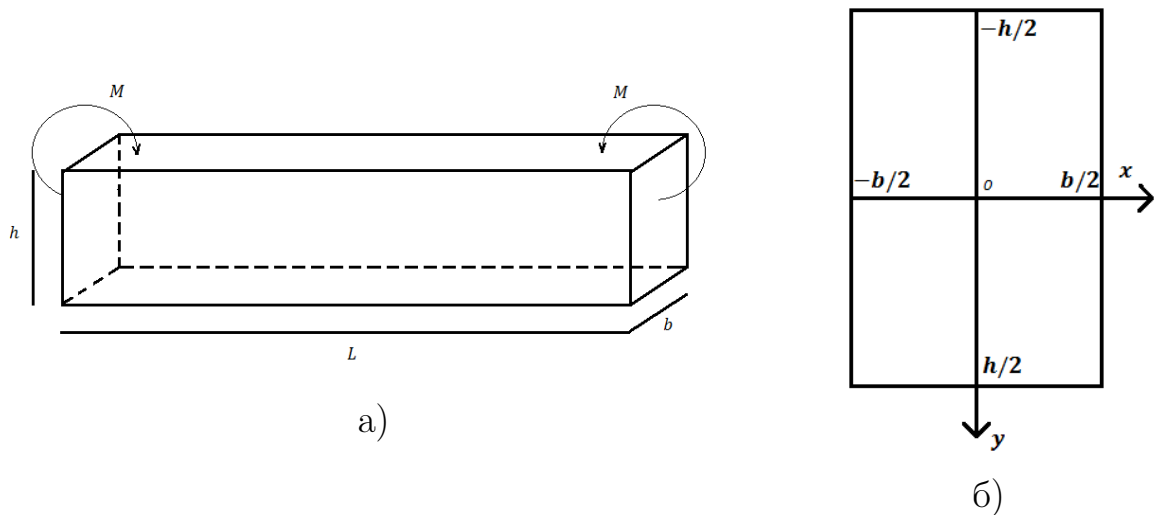


Рис. 8: а) Задача о изгибе балки с изгибающим моментом M ; h, b — толщина и ширина балки соответственно. б) Расположение декартовой системы координат.

Изгибающий момент равен $M = PL/4$ в трёх-точечном изгибе, когда поперечная сила P приложена к середине балки.

Структурный критерий (1.3) в задаче изгиба балки примет вид:

$$\sigma_{max} \frac{h}{d} \int_{h/2-d}^{h/2} 2y dy \leq \sigma_c.$$

Условие достижения критического состояния в структурном критерии примет вид $\sigma_{max}^* = \sigma_c / (1 - d/h)$.

Для каждой толщины балки можно сопоставить значение расстояния d такое, чтобы напряжение, предсказанное структурным параметром, полностью совпадало с экспериментальными данными. Значение параметра d в этом случае определяется формулой:

$$d = h \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_{max}} \right). \quad (1.25)$$

Размерный эффект в изгибе балки проявляется в том, что максимальное напряжение превосходит прочность растяжения и с умень-

шением толщины балки возрастает, то есть $\sigma_c/\sigma_{max} < 1$. Выражения (1.25) для заданного значения параметра d накладывает ограничение на применение структурного критерия для толщин балки: $h > d$. При рассмотрении d , как параметра прочности материала, мы получаем нижнюю оценку для толщины балок равную d . Применение структурного критерия с параметрами (σ_c, \tilde{d}) для балок с толщиной меньше \tilde{d} будет давать неверный результат: разрушение балки не произойдет при любом значении нагрузки.

Значение характерного расстояния d приведено в таблице 7.

Критерий критической точки (1.5) в задаче изгиба балки примет вид:

$$\sigma_{max} \left(1 - \frac{2r_c}{h} \right) \leq \sigma_c.$$

Условие достижения критического состояния в критерии критической точки примет вид $\sigma_{max}^* = \sigma_c/(1 - 2r_c/h)$.

Для каждой толщины балки можно сопоставить значение расстояния r_c такое, чтобы напряжение, предсказанное критерием критической точки, полностью совпадало с экспериментальными данными. Значение r_c в этом случае определяется формулой:

$$r_c = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_{max}} \right). \quad (1.26)$$

Оценка толщин балок в критерии критической точки (σ_c, \tilde{r}_c) также существует и имеет вид: $h > 2\tilde{r}_c$. Критерий критической точки (σ_c, \tilde{r}_c) предсказывает, что балка с толщиной меньше \tilde{r}_c не разрушится при любом значении нагрузки.

Значение характерного расстояния r_c приведено в таблице 7.

Градиентный критерий (1.8) в задаче изгиба балки примет вид:

$$\frac{\sigma_{max}}{1 + 2\delta/h} \leq \sigma_c.$$

Условие достижения критического состояния в градиентном критерии примет вид $\sigma_{max}^* = \sigma_c(1 + 2\delta/h)$.

Каждой толщине балки можно сопоставить значение расстояния δ такое, чтобы напряжение, предсказанное критерием критической точки, полностью совпадало с экспериментальными данными. Значение δ определяется формулой:

$$\delta = \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_c} - 1 \right).$$

Градиентный критерия не подразумевает никаких ограничений для слишком "тонких" или "толстых" балок.

Значение характерного расстояния δ приведено в таблице 7.

1.3 Значение характерных расстояний d, r_c, δ в задачах с неоднородным полем напряжений

В таблице 7 приведены значения характерных расстояний d, r_c, δ для ПММА в задачах с разной степенью неоднородности поля напряжений: задачи с сингулярным концентратором напряжений, в которых напряжение формально возрастают до бесконечности при приближении к концентратору (растяжение пластины с разрезом $\omega = \pi$ и угловым вырезом $\pi/2 < \omega < \pi$); задачи с регулярным концентратором напряжений (растяжение пластины с круглым отверстием и изгиб балки).

По данным таблицы 7 можно заключить, что значения параметров расстояния в задачах с одинаковым типом концентратора напряжений находятся в рамках одного порядка и значения характерных расстояний в среднем больше, чем поле напряжений равномернее. Параметр d в 6.9 раз больше в задаче с регулярным концентратором напряжений, чем с сингулярным; r_c в 11.8; δ в 8.5 раз. Из рассмотренных критериев структурный критерий является наиболее универсальным, так как параметр расстояния d наименее зависит от схемы испытания.

пластина с	трещиной	вырезом	кругл. отверстием	изгиб балки
d , мм	0.16	0.18	1.1	0.95
r_c , мм	0.04	0.045	0.36	0.47
δ , мм	0.081	0.095	0.21	0.69

Таблица 7: Характерные расстояния d , r_c , δ для задач с неоднородным полем напряжений.

В реальных задачах не всегда возможно правильно оценить степень неоднородности поля напряжения. Использование нелокальных критериев в инженерной практике подразумевает, что значение всех параметров заданы. Поэтому актуальным являются критерии, которые с одним набором значений параметров адекватно оценивают состояние материала для любой степени неоднородности поля напряжений. Значения параметров критерия не должны зависеть от схемы испытаний, в которых они были определены. Существенно различные значения параметров расстояния в задачах с сингулярным и регулярным концентратором могут осложняют использование нелокальных критериев в компьютерных расчётных программах. Критическое напряжение может превосходить значение прочности материала в несколько раз при больших значениях градиента поля напряжений. Серьёзные ошибки в расчётах могут возникать из-за неучёта неоднородности поля напряжений. Решение этих проблем требует модификации нелокальных критериев. Например, монотонная зависимость (d/a) от a показывает на то, что изменение закона подобия в критерии может привести к его большей универсальности.

Значение характерного расстояния можно интерпретировать как размер зоны разрушения. Большее значение характерных расстояний в задаче с регулярным концентратором напряжений, чем с сингулярным концентратором напряжений, согласуется с тем, что зона разрушения в них больше (рис. 9).

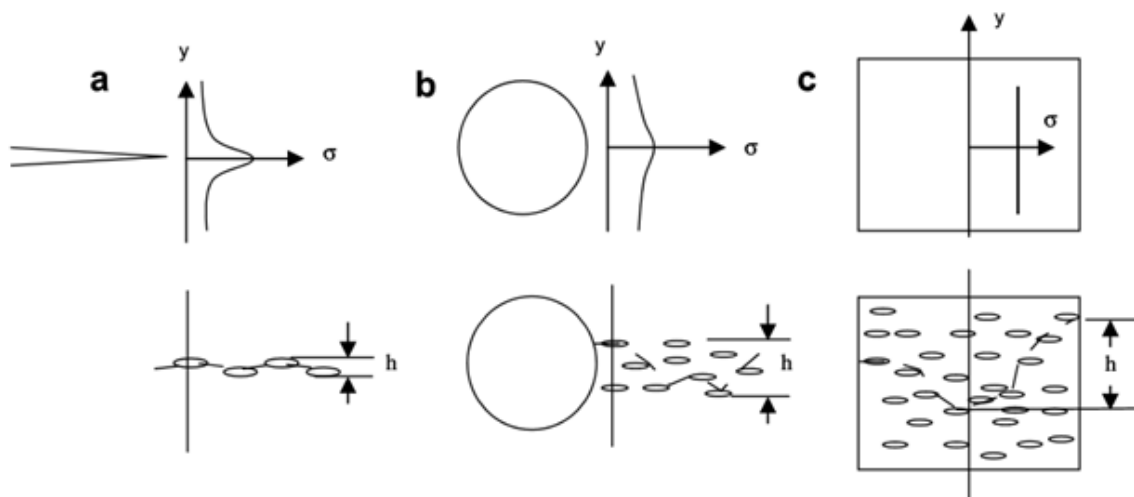


Рис. 9: Схематическое изображение зоны разрушения в задачах с разной степенью неоднородности поля напряжений. а) растяжение пластины с разрезом; б) растяжение пластины с круглой выемкой; в) растяжение сплошной пластины

1.4 Заключение первой главы

Все три рассмотренных критерия являются двухпараметрическими. Они используют дополнительно к параметру прочности параметр размерности длины.

Значение параметров расстояния можно подобрать в рамках критерия для каждой схемы испытаний так, чтобы было достаточно хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Критерий критической точки, структурный и градиентный критерии в задаче растяжения пластины с отверстием для относительно большого радиуса выводят на классический результат. Структурный критерий и критерий критической точки в задаче растяжения пластины с круглым отверстием включают в себя граничный случай растяжения пластины без отверстия. Градиентный критерий не включает случай растяжения сплошной пластины.

Критерий критической точки, структурный и градиентный критерии в задаче растяжения пластины с угловым вырезом находятся в качественном соответствии с экспериментальными данными для угло-

вых вырезов $90^\circ < \omega \leq 180^\circ$.

Значения характерных расстояний в задачах с сингулярным концентратором напряжений (растяжение пластины с трещиной или угловым вырезом) в несколько раз меньше, чем в задачах с регулярным концентратором напряжений (растяжение пластины с круглым вырезом, изгиб) таблица 7. Это согласуется с тем, что в задачах с сингулярным концентратором напряжений зона разрушения больше, чем с регулярным концентратором напряжений. Значения параметров расстояния находятся достаточно близко к друг другу в задачах одного типа концентратора напряжений.

Структурный критерий является наиболее универсальным из рассмотренных нелокальных критериев и параметр расстояния d наименее зависит от схемы испытания.

Результаты работы показывают возможность модификации критериев. Изменение закона подобия может убрать систематическое влияние градиента напряжений. Градиент напряжений систематически проявляется в том, что значение каждого параметра расстояния тем больше, чем меньше градиент напряжений.

2 Нелокальные эффекты в структурно-неоднородных материалах

В структурно-неоднородных материалах таких, как горные породы и бетон, сильно проявляются масштабные эффекты, особенно в условиях неоднородных полей напряжений. Горные породы и бетон широко используются, как конструкционные материалы, поэтому важно правильно понимать их поведение в различных условиях нагружения.

В данной главе рассмотрим данные по изгибу балок и растяжению пластин с разрезом из бетона и различных горных материалов.

2.1 Зависимость предельного напряжения от толщины балки

Задача изгиба балок является важным проявлением размерного эффекта. Известным фактом является увеличение максимального напряжения с уменьшением толщины балки [5]. Задача изгиба балки и применение нелокальных критериев рассмотрено в предыдущей главе, в этом разделе более подробно рассмотрим особенности трёх-точечного и четырёх-точечного изгиба бетонных балок.

В случае трёх-точечного изгиба поперечная сила P приложена к середине балки и изгибающий момент равен $M = PL/4$. В случае четырёх-точечного изгиба поперечная P сила приложена в двух равноотстоящих точках от опор. Изгибающий момент равен $M = PL/3$, если поперечная сила P приложена расстоянию $L/3$ от опор. Схема четырёх-точечного изгиба является более аккуратной схемой проведения чистого изгиба.

Проанализируем с позиции нелокальных критериев экспериментальные данные о разрушении балок. В работе [5] приведены результаты испытаний изгиба бетонных балок, прочность растяжения бетона — 2 МПа.

Структурный критерий (1.3) в задаче изгиба балки

Условие достижения критического состояния в структурном критерии примет вид:

$$\sigma_{max}^* = \frac{\sigma_c}{1 - d/h}. \quad (2.1)$$

Данное условие не зависит от типа нагружения: трёх-точечный или четырёх-точечный изгиб. Теоретическая кривая для максимального напряжения при изгибе имеет один вид для двух типов нагружения.

Экспериментальные данные из работы [5] и результаты расчета по формуле (2.1) со значением $d = 40$ мм показаны на рис.10. Данные максимального напряжения трех-точечного изгиба выше, чем четырех-точечного по толщине балки, то есть размерный эффект в трех-точечной схеме нагружения проявляется более ярко. Это можно объяснить тем, что напряженное состояние в четырех-точечном изгибе является относительно равномерным в области между приложенными силами, в трех-точечном изгибе такая область отсутствует. Теоретическая кривая $\sigma_{max} = \sigma_{max}(h)$ позволяет качественно оценить размерный эффект для двух типов нагружения.

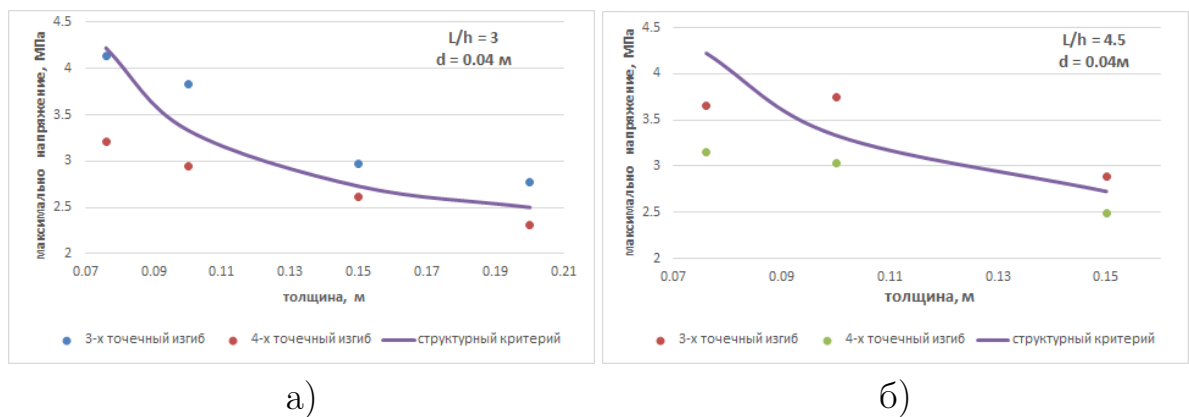


Рис. 10: Структурный критерий. Зависимость критического напряжения от толщины балки. а) $L/h = 3$, б) $L/h = 4.5$

В работе [4] рассматривается номинальное напряжение $\sigma_{nom} = Q/bh$ (bh — площадь сечения балки) вместо максимального напряжения, которое является стандартной характеристики разрушения при изгибе. Теоретическая кривая $\sigma_{nom} = \sigma_{nom}(h)$ зависит от типа нагружения.

Предельное условие для номинального напряжения в структурном критерии при трёх-точечном изгибе:

$$\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_c} = \frac{2h}{3L} \frac{1}{1 - d/h}. \quad (2.2)$$

Предельное условие для номинального напряжения в структурном критерии при четырех-точечном изгибе:

$$\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_c} = \frac{h}{2L} \frac{1}{1 - d/h}. \quad (2.3)$$

На рис. 11 приведены экспериментальные данные и результаты расчёта по формулам (2.2) со значением $d_3 = 42$ мм, $d_4 = 40$ мм, (2.3) со значением $d_4 = 30$ мм, $d_4 = 30$ мм (нижний индекс у параметра расстояния указывает на схему нагружения: 3 — трех точечный изгиб, 4 — четырех точечный изгиб).

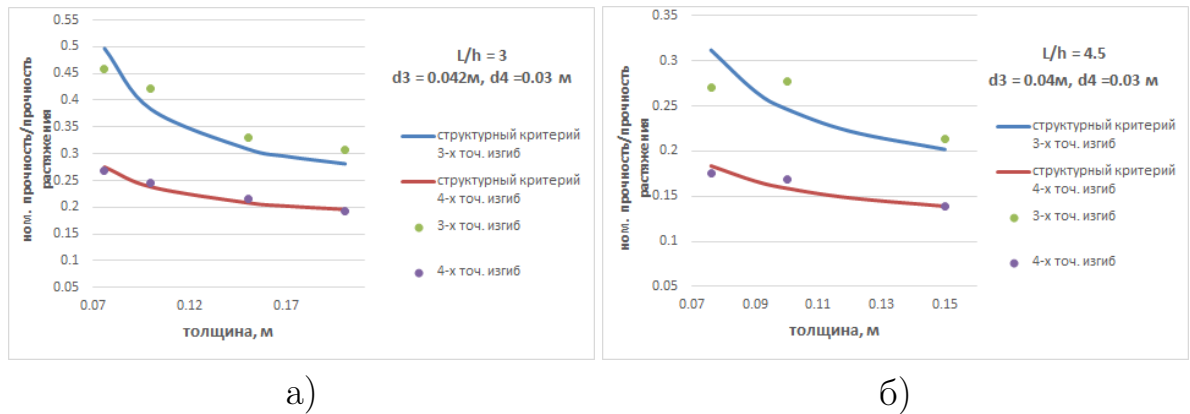


Рис. 11: Структурный критерий Зависимость номинального напряжения от толщины балки. а) $L/h = 3$, б) $L/h = 4.5$

Значение характерного расстояния d , определенного по формуле (1.25), приведено в таблице 8. Значение параметра d изменяется немонотонно с ростом толщины балки, для данных 3-х точечного изгиба значение параметра меняется в пределах 41%, для 4-х точечного изгиба — 29%. Безразмерный параметр — d/h убывает монотонно с ростом толщины балки для 3-х и 4-х точечного изгиба.

h , м	d_3 , м	d_4 , м	d_3/h	d_4/h
0.076	0.039	0.029	0.52	0.38
0.1	0.048	0.032	0.48	0.32
0.15	0.049	0.035	0.33	0.23
0.2	0.055	0.027	0.28	0.13

Таблица 8: Характерное расстояние в структурном критерии. d_3, d_4 характерное расстояние для 3-х и 4-х точ. изгиба соответственно. $L/h = 3$

Критерий критической точки (1.5) в задаче изгиба балки

Предельное условие для номинального напряжения в критерии критической точки при трёх-точечном изгибе:

$$\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_c} = \frac{2h}{3L} \frac{1}{1 - 2r_c/h}. \quad (2.4)$$

Предельное условие для номинального напряжения в критерии критической точки при четырех-точечном изгибе:

$$\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_c} = \frac{h}{2L} \frac{1}{1 - 2r_c/h}. \quad (2.5)$$

Экспериментальные данные и теоретические расчеты по формулам (2.4) со значением $r_c^3 = 21$ мм, $r_c^3 = 19$ мм и (2.5) со значением $r_c^4 = 15$ мм на рис. 12. Критерий находится в хорошем соответствии с экспериментальными данным в задаче изгиба.

Значение параметра r_c , определенного по формуле (1.26), приведено в таблице 9.

Градиентный критерий (1.8) в задаче изгиба балки

Предельное условие для номинального напряжения в градиентном

$h, \text{ м}$	$r_c^3, \text{ м}$	$r_c^4, \text{ м}$	r_c^3/h	r_c^4/h
0.076	0.017	0.017	0.22	0.18
0.1	0.023	0.017	0.23	0.17
0.15	0.022	0.015	0.15	0.09

Таблица 9: Характерное расстояние в структурном критерии. r_c^3, r_c^4 характерное расстояние для 3-х и 4-х точ. изгиба соответственно. $L/h = 3$

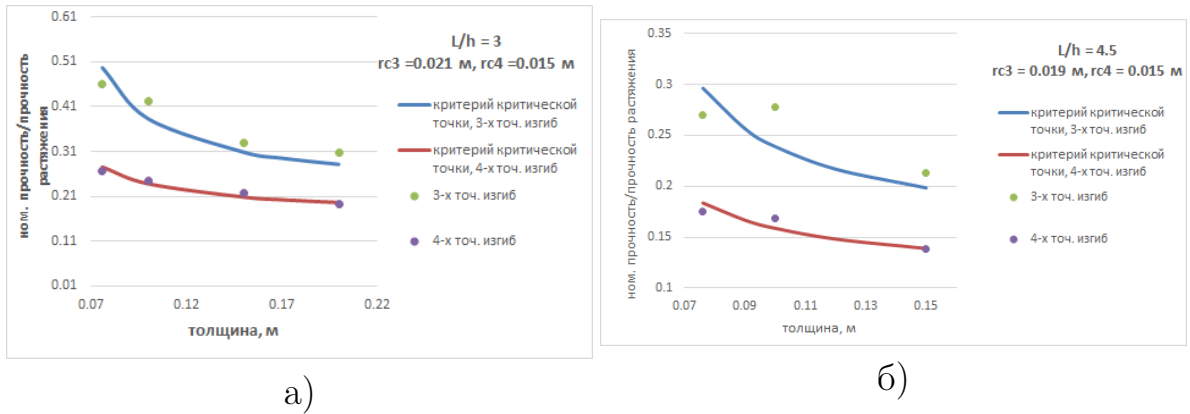


Рис. 12: Критерий критической точки. Зависимость номинального напряжения от толщины балки. а) $L/h = 3$, б) $L/h = 4.5$

критерии при трёх-точечном изгибе:

$$\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_c} = \frac{2h}{3L}1 + 2\delta/h. \quad (2.6)$$

Предельное условие для номинального напряжения в градиентном критерии при четырех-точечном изгибе:

$$\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_c} = \frac{h}{2L}1 + 2\delta/h. \quad (2.7)$$

Экспериментальные данные и теоретические расчеты по формулам (2.6) со значением $\delta^3 = 40 \text{ мм}$, $\delta^3 = 36 \text{ мм}$ и (2.7) со значением $\delta^4 = 22 \text{ мм}$, $\delta^4 = 23 \text{ мм}$ на рис. 12. Результат применения градиентного критерия находится в достаточно хорошем соответствии с экспериментальными данными с подобранными значениями параметров

расстояния.

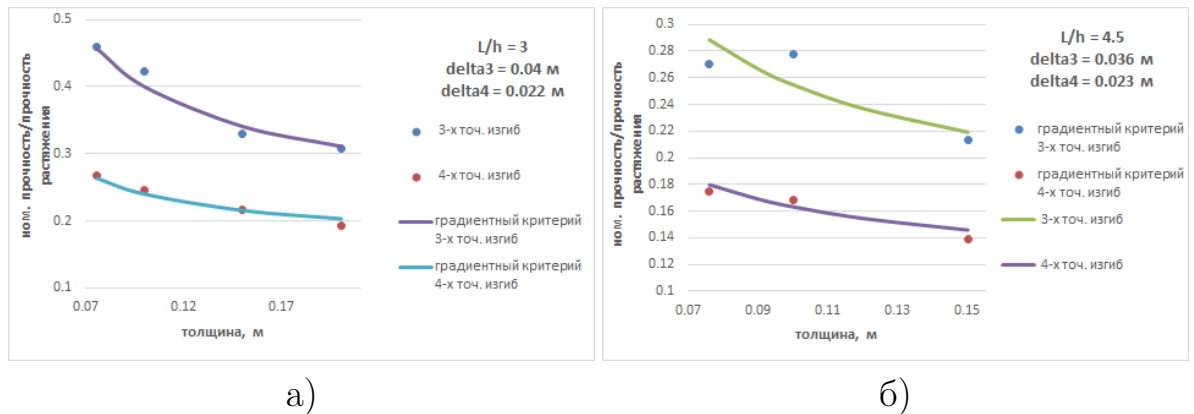


Рис. 13: Градиентный критерий. Зависимость номинального напряжения от толщины балки. а) $L/h = 3$, б) $L/h = 4.5$

2.2 Параметры расстояния в задаче изгиба и растяжения пластины с трещиной

В разделе 2.3 было замечено, что значение параметра расстояния нелокальных критериев больше для задач с регулярным концентратором напряжений, чем с сингулярным. В таблице 10 приведены значения параметров расстояния структурного критерия и критерия критической точки для горных пород [14] и бетона [5]. Как и ожидалось, значение параметра расстояния в задаче с трещиной (сингулярный концентратор напряжений) меньше, чем в задаче изгиба (регулярный концентратор напряжений).

По данным таблиц 7 и 10 видно, что для параметр d лежит в наиболее узком интервале для двух задач относительно параметров расстояния других критериев. Для горных пород и бетона разброс значений параметров меньше, чем для ПММА. Меньший разброс значений параметров расстояния для бетона и горных пород относительно ПММА может быть связан со структурой материалов.

материал	бетон	габбро-диабаз	гранит
h , мм	76-150	25.6	21.6
r_c^{crack} , мм	6	3	2.7
r_c^{bend} , мм	14	7.7	8.2
d^{crack} , мм	25	11.9	10.7
d^{bend} , мм	30	15.4	16.1

Таблица 10: Изгиб: бетон — 4-х точечный ($L/h = 4.5$); горные материалы — 3-х точечный; толщина указана для изгиба балки.

2.3 Заключение второй главы

Нелокальные критерии в задаче изгиба бетонных балок дают качественную и достаточно хорошую количественную оценку при подходящем подборе параметров.

Структурный критерий и критерий критической точки имеют ограниченную область применения по толщине балки: $h > 2r_c$ и $h > d$.

Структурный критерий (относительно всех использованных критериев в данной работе) является наиболее универсальным и, как следствие, значение параметра d является более устойчивым относительно разных задач.

3 Нелокальный критерий во времени

Исследования динамического разрушения твердых тел при ударно-волновом нагружении показывают ряд эффектов, противоречащих классическим моделям прочности. Статическая прочность растяжения характеризует поведение материала в равновесном растянутом состоянии. В случае динамического нагружения разрушающее напряжение зависит от скорости деформации. Классическая теория прочности не объясняет данный эффект. Концепция инкубационного времени позволяет объяснить скоростную зависимость прочности.

При анализе процессов воздействия взрыва, высокоскоростного удара и других импульсных воздействий на твердые тела требуются сведения о поведении материала при высоких напряжениях и малых длительностях воздействия. Горные породы широко используются как конструкционный материал в строительстве, поэтому важно иметь возможность правильно оценивать предельное состояние материала.

На примере трех горных пород (туфф, гранит, мрамор) рассмотрим применение критерия инкубационного времени.

3.1 Механические свойства горных материалов

Туф — магматическая горная порода, из вулканического пепла, вулканических бомб и других обломков, выброшенных во время извержения вулкана и уплотнившихся. Туфф — хрупкий материал, имеет разные физико-механические свойства в зависимости от места добычи или глубины. В данной работе используются данные неаполитанского желтого туффа (Neapolitan yellow tuff – NYT) [11]. Механические характеристики туффа представлены в таблице 11.

Гранит («granum») в переводе с латинского означает «зерно». В континентальной земной коре это наиболее распространенная горная порода. Природный камень гранит представляет собой явно кристаллическую зернистую массивную хрупкую вулканическую породу, обра-

Таблица 11: Свойства материалов

	Туфф	Гранит	Мрамор
прочность, МПа	0.68	7.09	3
модуль упругости, ГПа	2.6	27	16
инкубационное время, мкс	29	7	27

зовавшуюся в процессе медленного остывания и дальнейшего затвердения магматического расплава на большой глубине. В работе используются данные гранита (Barre granite) [12]. Механические характеристики гранита представлены в таблице 11.

Мрамор — это представитель горных пород кристаллической структуры, которые образовались в процессе реструктуризации внутреннего строения доломитовых или известняковых образований. В работе используются данные мрамора (Yule marble) [13], Данный мрамор является чистым кальцитом на 90% с размером зерна 0.3-0.5 мм. Механические характеристики мрамора представлены в таблице 11.

3.2 Схемы испытаний для разных скоростей нагружения

Статическое и динамическое нагружение проводилось на разных экспериментальных установках, но схемы испытаний подобны во всех работах. В работе используются данные квазистатических (скорость деформации $\approx 10^{-5} \div 10^0$) и динамических нагружений (скорость деформации $\approx 10^0 \div 10^2$). Обработка результатов статических и квазистатических экспериментов осуществляется одинаково, хотя средства нагружения и регистрации этих методов существенно различны. В большинстве работ для квазистатических испытаний использовалась экспериментальная установка «Instron».

Динамические испытания проводились на испытательной установке Гопкинсона (split Hopkinson pressure bar – SHPB) или её модифика-

циях, например, методика динамическое раскалывание (так называемый «бразильский тест» - splitting test или Brazilian test). «Бразильский тест» наиболее простой и удобный в реализации. Анализ экспериментальных данных проводился по методике Кольского.

В бразильском тесте (рис.14) образец, расположенный в системе РСГ (рис. 15), поворачивают на 90^0 относительно поперечной оси, и после приложения нагрузки разрушается на две половинки по диаметральной плоскости. Считается, что в этом случае напряжение растяжения является постоянным на 80% диаметра образца, а на оставшихся 20% диаметра у внешних краёв подвержены сжимающим напряжениям, вызывающим маленькие треугольные участки разрушения образца.

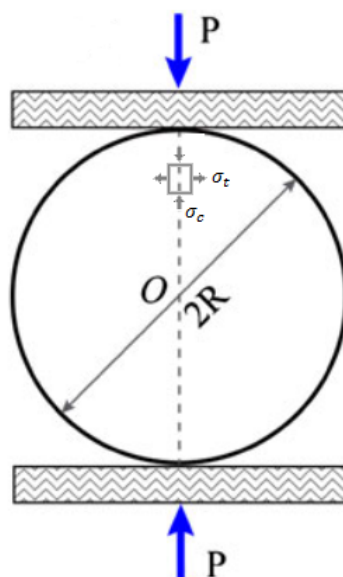


Рис. 14: Схематическое изображение Бразильского теста

Установка РСГ (рис. 15) для испытаний на растяжение представляет систему из трёх стержней: двух прочных и длинных стержней и одного более "мягкого" короткого образца. В одном из стержней ударом бойка возбуждается одномерная упругая волна сжатия ε_{in} , которая распространяется по стержням со скоростью C_B . При достижении образца, эта волна ввиду разницы акустических жесткостей $\rho_B C_B$ мате-

риала стержня и образца (ρ — плотность стержня), а также площадей их поперечных сечений, расщепляется: часть её отражается обратно волной растяжения ε_{re} , а часть проходит через образец во второй стержень волной сжатия ε_{tr} . Образец при этом разрушается, в то время как стержни деформируются упруго.

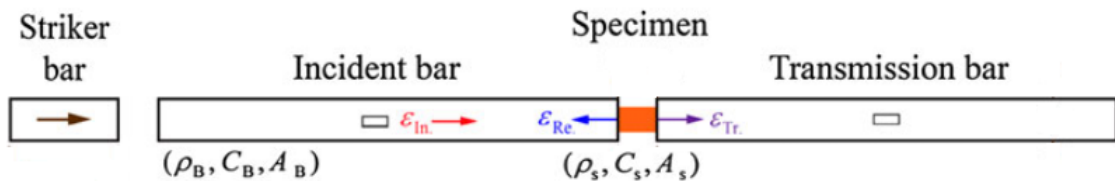


Рис. 15: Схематическое изображение установки Гопкинсона. Incident bar — нагружающий стержень, transmission bar — опорный стержень, striker bar — боёк.

3.3 Критерий инкубационного времени

Критическое напряжение можно считать постоянной материала при статическом нагружении, в динамических испытаниях критическое напряжение зависит от скорости деформаций, способа приложения нагрузки и не является постоянной материала. Многочисленные эксперименты демонстрируют целостность образца при высокоинтенсивном импульсном нагружении, когда амплитуда внешних воздействий оказывается существенно больше разрушающей силы при статическом нагружении. Самые ранние работы на эту тему — это работы Дж. Кальтхоффа, Д. Шоки, В. Кнаусса и др. Решением данной проблемы может служить критерий инкубационного времени. В рамках этого подхода, считается, что разрушение наступает тогда, когда текущее напряжение превышает статический предел прочности на протяжении некоторого минимального — инкубационного времени, которое можно считать постоянной материала.

Критерий инкубационного времени при разрушении «бездефект-

ных» сред выражается следующей формулой:

$$\int_{t-\tau}^t \sigma(s) ds \leq \sigma\tau, \quad (3.1)$$

где σ_c — статистическая прочность на растяжение, τ — инкубационное время материала, $\sigma(t)$ — распределение напряжений.

Закон изменения напряжений от времени может быть представлен в виде линейной функции до момента разрушения:

$$\sigma(t) = E\dot{\epsilon}tH(t),$$

где $H(t)$ — функция Хэвисайда; E — модуль упругости материала; $\dot{\epsilon}$ — скорость деформации, предполагается, что осуществлено жесткое нагружение, то есть $\dot{\epsilon} = const$.

Критерий содержит два определяющих параметра: статическую прочность и инкубационное время материала. Согласно [2, 9], инкубационное время — это результат релаксационного процесса, который предшествует развитию макро-структурных дефектов в материале. Считается, что инкубационное время — это характерное время процесса разрушения постоянное для разных скоростей деформаций. Инкубационное время можно определить сопоставлением предельного напряжения, соответствующего двум различным скоростям нагружения.

3.4 Применение критерия инкубационного времени

Экспериментальные данные из работ [11, 12, 13] и результаты расчёта по формуле (3.1) при значении параметров из таблицы 11 представлены на графиках 16, 17. Значение инкубационного времени горных пород определено по методу наименьших квадратов так, чтобы отклонение теоретической кривой (3.1) от экспериментальных данных

было наименьшим. Горизонтальная линия, которая соответствует квазистатическому нагружению, а также область резкого роста, соответствующая предельному напряжению при динамическом нагружении (скорость деформации $1 \div 100$ 1/s). Экспериментальные данные предельного напряжения обозначены точками. Критерий предсказывает поведение материала на высоких и медленных скоростях нагружения.

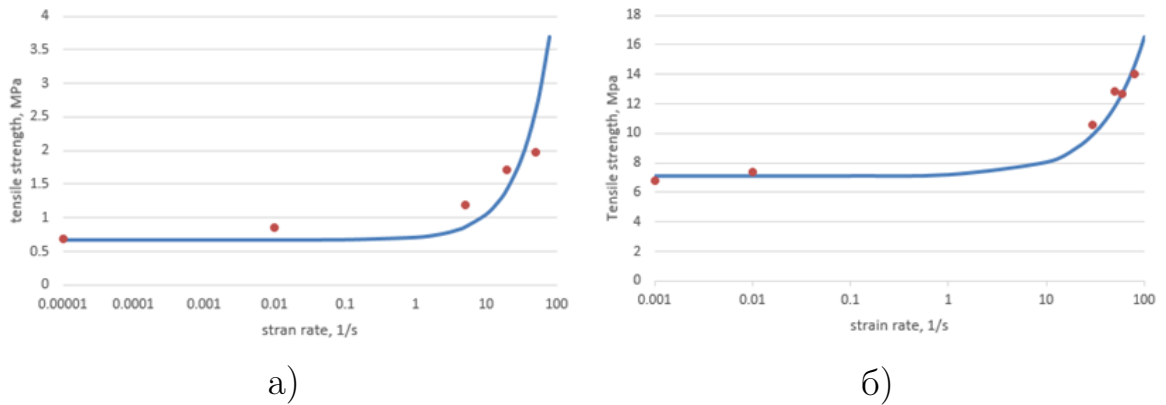


Рис. 16: а) Прочность туффа., б) Прочность гранита.

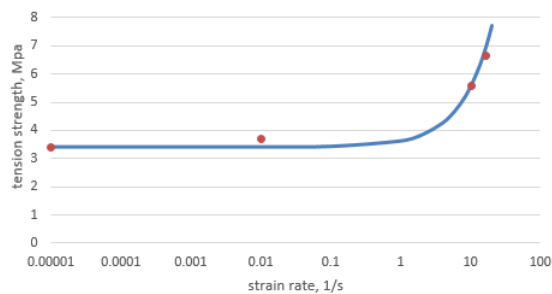


Рис. 17: Прочность мрамора.

Выводы по работе

- Критерий критической точки, структурный и градиентный критерии находятся в достаточно хорошем соответствии с экспериментальными данными в каждой рассмотренной схеме нагружения при удачно подобранных параметрах расстояния.
- Структурный критерий является наиболее универсальным из рассмотренных нелокальных критериев и параметр расстояния d наименее зависит от схемы испытания.
- Результаты работы показывают возможное направление модификации критерия. Изменение закона подобия может убрать систематическое влияние градиента напряжений. Градиент напряжений систематически проявляется в том, что значение каждого параметра расстояния тем больше, чем меньше градиент напряжений.
- Критерий инкубационного времени предсказывает поведение материала при высоких и медленных скоростях нагружения.

Апробация работы

- Груздков А.А., Чеврычкина А.А. Нелокальные критерии разрушения и проблема универсальных прочностных характеристик // Научная конференция посвященная 186-й годовщине образования Санкт-Петербургского государственного технологического института 2-3 декабря 2014 года.
- Груздков А.А., Чеврычкина А.А. Применение нелокальных критериев к определению прочностных характеристик материала // Международная научная конференция по механике "Седьмые Поляховские Чтения". 2-6 февраля 2015 года: Тезисы докладов. - М.: Издатель И.В. Балабанов, 2015. - 307с. ISBN 978-5-91563-101-3
- Груздков А.А., Чеврычкина А.А. Структурный подход к расчёту прочности горных пород // Научная конференция "Традиции и инновации посвященная 187-й годовщине образования Санкт-Петербургского государственного технологического института. 3-4 декабря 2015 года: Тезисы докладов. -СПб.: Издательство Санкт-Петербургского технологического института, 2015. - 223с. ISBN 978-5-905240-54-6

Список литературы

- [1] Морозов Н.Ф. "Математические вопросы теории трещин" // М., Наука. 1984. 157стр.
- [2] D.Taylor "The Theory of critical distances: a History and a New Definition" / SDHM, vol.2 no.1, pp.1-10, 2006.
- [3] G. Pluvinage. Transferability and critical distance approaches
- [4] P. Z. Bazant Er-Ping Chen. "Scaling of structural failure." // Appl. Mech. Rev., vol.50, no. 10, October 1997, pp. 593-627.
- [5] P. J. E. Wright and F. Garwood. "The effect of the method of test on the flexural strength of concrete." // Magazine of Concrete Research, 11(October) 1952. pp. 67-76.
- [6] X. B. Zhang, J. Li. "A failure criterion for brittle and quasi-brittle materials under any level of stress concentration." // Engineering Fracture Mechanics 75(2008) 4925-4932
- [7] Петров Ю.В., Груздков А.А., Братов В.А. "Структурно-временная теория разрушения как процесса, протекающего на разных масштабных уровнях." // Физическая механика 15 2 (2012), стр. 15-21.
- [8] Харлаб В. Д., Минин В. А. "Критерий прочности, учитывающий влияние градиента напряженного состояния" // Исследование по механике строительных конструкций и материалов: Межвуз. темат. сб. тр. / Л: ЛИСИ. 1989. стр. 53-57
- [9] Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. "Проблемы динамики разрушения твердых тел" // Издательство Санкт-Петербургского университета, 1997.
- [10] F. Mujika, N. Carbajal, A. Arrese, I. Mondragon. Determination of tensile and compressive moduli by flexural tests. // Polymer Testing 25 (2006), pp. 766– 771.

- [11] D. Asprone et al. / International Journal of Rock Mechanics & Mining Science / vol. 46(2009) page 514-520.
- [12] W. Goldsmith et al. "Static and Dynamic Fracture Strength of Barre Granite" / Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. / vol. 13(1976), p. 303-309.
- [13] Howe S, Goldsmith W, Sackman J "Macroscopic static and dynamic mechanical properties of Yule marble" / Experimental Mechanics / vol. 14(September 1974), p. 337-346.
- [14] Атрошенко С.А., Кривошеев С.И., Петров Ю.В., Смирнов В.И., Уткин А.А., Федоровский Г.Д. Экспериментальное исследование разрушения горных пород с различной структурой при ударно-импульсном и статическом нагружении. // ВЕМ&FЕМ, 2006, том 2, стр. 53-59.