Санкт-Петербургский Государственный Университет
Кафедра вычислительных методов механики деформируемого тела

Рединских Надежда Дмитриевна

Магистерская диссертация

Статистическое оценивание стратегии развития фирмы в условиях коррупции

Направление 010400
Прикладная математика и информатика
Магистерская программа «Надежность и безопасность сложных систем»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат.наук,
профессор
Малафеев О.А.

Санкт-Петербург
2016 г.

Оглавление

Введение

Исследование вопроса коррупции в настоящее время имеет особую актуальность. Все чаще в средствах массовой информации появляется информация о проявлениях коррупции в различных сферах. За период с января по октябрь 2015 года в России возбудили 5,8 тыс. уголовных дел по статье 290 УК РФ «Получение взятки». Материальный ущерб по оконченным уголовным делам коррупционной направленности за приведенный период по официальным сведениям составил 39,1 миллиарда рублей [20]. Средний размер взятки по России за 2015 год составил 172,9 тыс.руб.[22]. Расхищение государственных средств лицами, причастными к коррупционной системе, и их присвоение ради собственной выгоды приводит к снижению уровня жизни населения, сокращению нормального функционирования предпринимательства, к повышению криминализации общества. Ежегодно неправительственная международная организация по борьбе с коррупцией Transparency International составляет индекс, отражающий уровень восприятия коррупции аналитиками и предпринимателями различных стран. Согласно оценке за 2015 год Россия в рейтинге стран занимает 119 место из 168 возможных.

На сегодняшний момент принимаются различные меры по снижению уровня коррумпированности в России. 1 апреля 2016 года Президентом Российской Федерации принят указ №147 «О Национальном плане противодействия коррупции на 2016 - 2017 годы»[23]. Данный указ предусматривает проведение мероприятий направленных на решение следующих задач: усиление контроля за сведениями о доходах/расходах чиновников; проведение процедуры по предотвращению хищений в сфере госзакупок, муниципального и государственного имущества; обнаружение фактов подкупа иностранных должностных лиц. Предполагается проведение социологических исследований для оценки уровня коррупции.

Постановка задачи

В качестве задачи была поставлена проблема формализации и анализа стратегии развития фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия. Необходимо было определить основные понятия и определения функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия и исследовать связь между введенными понятиями. Требовалось рассмотреть введенные характеристики функционирования фирмы в условиях негативного коррпуционного воздействия для различных распределений (распределение Вейбулла, нормальное распределение, логарифмическое распределение, усеченно-нормальное распределение, Гамма-распределение, распределение Рэлея). После прекращения функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия, она может возобновить свое функционирование, так что процесс ее развития будет продолжаться. Для такого типа функционирования необходимо было рассмотреть возобновление деятельности фирмы, прекратившей свое функционирование вследствие негативного коррупционного воздействия. Также необходимо было формализовать и исследовать процесс функционирования конгломерата (действующих связанным образом между собой) фирм в условиях негативного коррупционного воздействия. Требовалось ввести основные понятия и определения для случая функционирования конгломерата фирм в условиях негативного коррупционного воздействия. В качестве подзадачи, необходимо было проанализировать зависимость прекращения функционирования конгломерата фирм от вероятности прекращения функционирования составляющих его подразделений, для случая, если прекращение функционирования подразделений происходит независимо. Необходимо было сформулировать экспериментальное определение характеристик вероятности функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия, рассмотреть численные примеры для случаев функционирования фирмы и конгломерата фирм в условиях негативного коррупционного воздействия.

Обзор литературы

В работе [6] рассматриваются причины появления коррупции в современной Российской экономике. Коррупция представлена как сложный процесс, охватывающий такие сферы экономики, как функционирование бизнеса, государственного аппарата и жизнедеятельность домохозяйств. Также в статье проводится анализ причин распространения коррупции в различных странах. На основе проведенных исследований предложен ряд мер, направленных на противодействие коррупции в России. Также рассмотрены возможности формирования общественных и государственных институтов по борьбе с коррупцией.

Различные подходы к исследованию коррупции представлены в работе [13]. Рассмотрена классификация подходов к изучению коррупции в экономике – построение экономико-математических моделей, проведение эконометрических исследований, и социологии – проведение социологических опросов и экспертных оценок. Практика противодействия коррупции в России и направления борьбы с коррупцией исследованы в статье [3]. В работе вводится понятие коррупции, рассматриваются законы о противодействии коррупции, принятые, начиная с 1992 года. Проводится сравнительный анализ имеющихся антикоррупционных законодательств в России. Предлагается методология улучшения имеющегося антикоррупционного законодательства.

Различные способы оценки уровня коррупции представлены в [17]. Рассматриваются причины, по которым необходимо исследовать коррупцию, методики составления индекса восприятия коррупции и исследуется точность приведенных методик. На основе полученных данных ставится вопрос о построении оптимальной антикорупционной стратегии. Рассмотрена методика проведения региональных исследований уровня коррупции.

Использование математических моделей различного рода для оценки коррупции рассмотрено в работах [18],[19]. Влияние теневой экономики на уровень коррупции в различных странах рассматривается в работе [16]. Автор предполагает, что коррупция и теневая экономика неразрывно связаны в странах с развитой экономикой и дополняют друг друга в странах с развивающейся экономикой. Сделанное предположение протестировано на данных о 98 странах. Результаты исследования показали, что в большинстве случаев предположение подтверждается исследованием. В статье [15] исследуется вопрос становления коррупции в современной России. Автор рассматривает разветвленную коррумпированную структуру, которая имеется в настоящий момент в России, оценивает ее негативное влияние на различные сферы развития экономики и общества.

Вопросы коррупции в сетевой торговле рассмотрены в работе [4]. Исследуются теоретические положения и факты появления коррупции в сетевой торговле. Выявлены причины и факторы по которым коррупция возникает в торговле: поставка низкокачественного товара по завышенной цене, поставка товаров торговым организациям, которые не покупают товар без взяток. Предложены методы по противодействию коррупции в сетевой торговле. Методология оценки масштабов коррупционной деятельности представлена в работе [11]. На основе проведенного опроса было выявлено отсутствие зависимости между средним размером взятки, который изменяется от региона к региону, и интенсивностью получения взяток. Выявлен резкий рост коррупции в период 2001-2005 гг. Рассмотрена методология противодействия коррупции. Результаты социологических исследований уровня коррупции в России приведены в статье [12]. Представленные исследования проведены фондом ИНДЕМ с 2001 по 2010 годы. В книге анализируются различные проявления коррупции с помощью качественных и количественных эмпирических методов. Проведен анализ динамики коррупции за исследуемый период. Изложена методология исследования, практика деловой и бытовой коррупции в России.

Глава 1.Статистическое оценивание стратегии развития фирмы в условиях коррупции

Формализуется и исследуется задача оценивания качества стратегии φ развития фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия с помощью аппарата, методов и результатов теории надежности.

Введем основные понятия и определения используемые в работе.

Момент T прекращения функционирования фирмы при начальном моменте времени (начале процесса функционирования фирмы) $t = 0$ в условиях негативного коррупционного воздействия – случайная величина.

Вероятность функционирования фирмы $p(t)$ – вероятность функционирования фирмы $P(T)$ в течение заданного времени t в условиях негативного коррупционного воздействия, при условии, что фирма начала функционировать в момент времени $t_0 = 0$, или вероятность того, что время функционирования фирмы до момента прекращения T функционирования окажется больше заданного времени функционирования t, т.е. $p(t) = P(T \geq t)$.

Вероятность прекращения функционирования фирмы $q(t)$ в условиях негативного коррупционного воздействия – вероятность того, что фирма прекратит свое функционирование в течение заданного времени функционирования t, начав функционировать в начальный момент времени $t_0 = 0$, $q(t) = 1 - p(t)$.

Плотность распределения времени функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия $f(t)$ – функция, определяемая по формуле $f(t) = \frac{d}{dt}q(t) = -\frac{d}{dt}p(t)$. Смысл плотности распределения времени функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия состоит в том, что она показывает, частоту появления случайной величины в некоторой окрестности точки t при повторении наблюдений.

Интенсивность прекращения функционирования фирмы в момент времени t – плотность распределения времени функционирования фирмы к моменту времени t при условии, что до этого момента прекращение функционирования фирмы не произошло: $\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)}$

Среднее время прекращения функционирования фирмы в условиях коррупционного воздействия t_{avg} – математическое ожидание случайной величины T есть $t_{avg} = M(T) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int\limits_{0}^{\infty} tf(t)dt, (f(t) = 0, \text{при} \quad t > 0)$.

1.1. Связь между характеристиками функционирующей фирмы

Введенные величины связаны между собой и по одной из них можно найти другие. После прекращения функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия она может возобновить свое функционирование так, что процесс ее развития будет продолжаться (возможно, под иным названием). В этом случае, из определения функции распределения и ее плотности стандартным образом получаем:

$$f(t) = F'(t) = q'(t). \tag{1}$$

Все эти величины равны нулю при $t < 0$. Т.к. $q(t) = 1 - p(t)$, то

$$f(t) = -p'(t). \tag{2}$$

$$f(t) = p(t)\lambda(t). \tag{3}$$

Для вывода (3) воспользуемся следующим: пусть А – событие, означающее функционирование фирмы к моменту времени t, В – событие, означающее функционирование фирмы к моменту времени $t+\Delta t$. Событие AB – прекращение функционирования фирмы в интервале $(t, t+\Delta t)$, т.е. время прекращения функционирования лежит в интервале $(t, t+\Delta t)$. Тогда по теореме умножения $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$, но по определению события A и формуле $p(t) = P(T \geq t)$, получаем $P(A) = P(T \geq t) = p(t)$. Согласно определению события B и формуле $\lambda(t)\Delta t \simeq P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t)$ следует, что $P(B|A) = P(t \leq T \leq t+\Delta t|T \geq t) = \lambda(t)\Delta t$. В соответствии с формулой $f(t)\Delta t \simeq P(t \leq T \leq t + \Delta t)$ получаем, что $P(AB) = P(t \leq T \leq t + \Delta t) = f(t)\Delta t$. Следовательно, $f(t)\Delta t = p(t)\lambda(t)\Delta t$. После сокращения на Δt получается выражение (3). Учитывая (1), (2) $\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = \frac{f(t)}{1-q(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{F\prime(t)}{1-F(t)} = \frac{q\prime(t)}{1-q(t)} = \frac{p\prime(t)}{p(t)}$.

Функция распределения определяется через плотность распределения: $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$. Вероятность прекращения функционирования: $q(t) = F(t) = \int\limits_{0}^{t} f(x)dx$, следовательно $p(t) = 1 - q(t) = 1 - \int\limits_{0}^{t} f(x)dx = \int\limits_{t}^{\infty} f(x)dx$. По свойству плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Поскольку $f(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx = 1$. Тогда $p(t) = 1 - \int\limits_{0}^{t} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx - \int\limits_{0}^{t} f(x)dx = \int\limits_{t}^{\infty} f(x)dx$.

Можно также выразить $p(t)$ через $\lambda(t)$, решив дифференциальное уравнение

$$\lambda(t)dt = -\frac{dp(t)}{p(t)}.$$

Заменяя t на x и интегрируя обе части от 0 до t ($p(0) = 1$), получаем

$$\int\limits_{0}^{t} \lambda(x)dx = -\int\limits_{0}^{t} \frac{dp(t)}{p} = -\ln p(t)\mid_{0}^{t} = -l\ln p(t).$$

Следовательно,

$$p(t) = e^{-\int\limits_{0}^{t} \lambda(x)dx} = e^{-\int\limits_{0}^{t} \lambda(x)dx}. \tag{4}$$

Интегральные характеристики можно выразить через любые из функций $f(t)$, $q(t)$, $p(t)$, $\lambda(t)$. Если интенсивность прекращения функционирования фирмы $\lambda(t)$ постоянна (что можно интерпретировать как наличие системной коррупции, порождаемой внешними факторами) при которой вероятность прекращения функционирования фирмы за любой короткий промежуток времени постоянна, то в этом случае

$$t_{avg} = M(T) = \int\limits_{0}^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda,$$

$$\sigma = M(T) = 1/\lambda.$$

1.2. Распределения, используемые для вычисления вероятности функционирования фирмы

Экспоненциальное распределение

Распределение вероятности функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия называется экспоненциальным, если

$$p(t) = e^{-\lambda t}; t \geq 0.$$

Оно характеризуется параметром $\lambda = \text{const}$. Вероятность прекращения функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия определяется по формуле:

$$q(t) = F(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, t > 0 \end{cases}$$

Плотность распределения времени функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия: $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, интенсивность прекращения функционирования фирмы в таком случае $\lambda(t) = \frac{p(t)}{f(t)} = \lambda = \text{const}$. При экпоненциальном законе распределения интенсивность прекращения функционирования постоянна, что означает, что вероятность прекращения функционирования фирмы в интервале Δt не зависит от предыстории фирмы и равна $\lambda \Delta t$.

Распределение Вейбулла

При экспоненциальном распределении интенсивность прекращения функционирования фирмы $\lambda(t)$ остается постоянной. Однако во многих случаях интенсивность прекращения функционирования фирмы является или убывающей или возрастающей функцией времени. В этом случае для описания процесса функционирования фирмы удобно воспользоваться распределением Вейбулла, при котором вероятность функционирования фирмы есть

$$p(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}, \tag{5}$$

где λ, α – суть положительные константы. Естественным образом интерпретируются формулы

$$f(t) = -p'(t) = \alpha t^{\alpha-1}\lambda e^{-\lambda t^{\alpha}}. \qquad (6)$$

$$\lambda(t) = \alpha\lambda t^{\alpha-1}.$$

При $\alpha = 1$ распределение Вейбулла совпадает с экспоненциальным распределением, при $\alpha < 1$ дает убывание интенсивности прекращения функционирования с временем, а при $\alpha > 1$ – возрастание. Отсюда следует, что для распределения Вейбулла $\lambda(t)$ не равна постоянной λ. Среднее время функционирования определяется по формуле:

$$t_{avg} = M(T) = \int\limits_0^{\infty} f(t)dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t^{\alpha}}dt.$$

Этот интеграл может быть выражен через гамма-функцию $\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$. Используя подстановку $x = \lambda t^{\alpha}$, откуда $t = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{1}{\alpha}}$;

$$dt = \frac{1}{\alpha}\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{1}{\alpha}-1}dx.$$

Так как λ и $\alpha > 0$ (иначе распределение не имело бы смысла при $t = 0$ или $t = \infty$), пределы интегрирования не изменяются

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t^{\alpha}}dt = \frac{\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\int\limits_0^{\infty} x^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot e^{-x}dx = \frac{\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}\right).$$

Следовательно

$$t_{avg} = M(T) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Распределение Рэлея

Если интенсивность прекращения функционирования фирмы линейно растет со временем, то распределение Вейбулла в таком случае называется распределением Рэлея. Это соответствует значению $\alpha = 2$. Параметр λ в этом случае равен $1/2\sigma^2$. При данных значениях получаем следующие формулы для вероятности функционирования фирмы, плотности среднего времени прекращения функционирования, интенсивности прекращения функционирования:

$$p(t) = \exp^{-\frac{t}{2\sigma^2}} \tag{7}$$

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2} \cdot \exp^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{8}$$

$$\lambda(t) = \frac{t}{\sigma^2} \tag{9}$$

$$t_{avg} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \tag{10}$$

Гамма-распределение

В случае, когда анализируемая фирма имеет сложную, разветвленную структуру, отдельные подразделения которой могут в результате коррупционного воздействия прекратить функционирование и тем самым обусловить прекращение функционирования всей фирмы, вероятность функционирования фирмы выражается с помощью гамма-функции более сложным образом. В таком случае

$$f(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp^{-\lambda t}, (t \geq 0) \tag{11}$$

Используя замену $\lambda x = s, \lambda dx = ds$, получаем следующее:

$$p(t) = \int_t^\infty \lambda\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx = \int_{\lambda t}^\infty \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-s}ds \tag{12}$$

При $\alpha = k$ интеграл может быть выражен через элементарные функции с помощью интегрирования по частям, тогда (12) имеет вид

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t} \tag{13}$$

Среднее время функционирования фирмы определяется по формуле:

$$t_{avg} = \int\limits_0^\infty t f(t) dt = \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda t)^{\alpha-1}\lambda}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}. \tag{14}$$

Нормальное распределение

Допустим теперь, что прекращение функционирования фирмы происходит в результате целенаправленного действия другой заинтересованной фирмой (например, рейдером, или связанным с ним коррумпированным чиновником), стремящейся прекратить функционирование фирмы-конкурента в процессе взаимодействия и накопления дефектов управления у рассматриваемой фирмы. В этом случае вероятность прекращения функционирования фирмы согласно центральной предельной теореме будет иметь распределение, близкое к нормальному, с тем, однако, уточнением, что время функционирования фирмы всегда положительно. Поэтому здесь вводится «усечение» нормального распределения с плотностью

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma b} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (t \geq 0). \tag{15}$$

Коэффициент b введен для нормировки распределения так, чтобы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1. \tag{16}$$

Вероятность функционирования фирмы при усеченном нормальном распределении имеет вид

$$p(t) = \int\limits_t^\infty f(x) dx = \frac{1}{b} \int\limits_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-a)^1}{2\sigma^2}} dx. \tag{17}$$

Среднее время функционирования фирмы

$$t_{avg} = M(T) = a + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}\left[1 + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]} \cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \tag{18}$$

при $a \gg 3\sigma$ $t_{avg} \approx a$.

Логарифмически-нормальное распределение

При учете фактора времени в процессе функционирования фирмы подверженной воздействию безнаказанной коррупции, с течением которого приобретается опыт коррупционной деятельности лучшее, чем усеченное нормальное распределение доставляет логарифмически-нормальное распределение, при котором нормально распределен логарифм времени функционирования фирмы. В этом случае

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi} \cdot t} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (t \geq 0), \tag{19}$$

Интенсивность прекращения функционирования фирмы $\lambda(t)$ равна отношению $f(t)/p(t)$. Заметим, что величины a и σ не являются математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением для логарифмически нормального распределения. Для среднего времени функционирования фирмы t_{avg}, используя подстановку $s = \frac{\ln t - a}{\sigma}$, получаем

$$t_{avg} = M(T) = \int\limits_0^\infty t f(t) dt = \int\limits_0^\infty t \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot t} \cdot e^{-\frac{(\ln t - 1)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{a + \sigma s} \cdot e^{-\frac{s^2}{2}} ds \tag{20}$$

(так как при $t = 0$, $s = -\infty$, а для $t = +\infty$, $s = \infty$). Вводя подстановку $s - \sigma = u$, $ds = du$ получаем

$$t_{avg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{a + \frac{\sigma^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}}, \tag{21}$$

где a – есть математическое ожидание $\ln T$, но e^a не есть математическое ожидание T.

1.2. Возобновление деятельности фирмы, прекратившей функционирование, вследствие негативного воздействия коррупционных факторов

До сих пор рассматривался случай функционирования отдельной фирмы. Однако, часто сторона, управляющая функционированием фирмы, в случае прекращения ее функционирования открывает аналогичную фирму под другим названием. В этом случае требуется, чтобы фирма функционировала время t. В случае прекращения функционирования фирмы она вновь открывается под другой вывеской до тех пор, пока не наступит конечный момент T .

Рассмотрим зависимость вероятности функционирования фирмы от числа ее закрытий. Полагая, что вероятность функционирования фирмы при одном ее открытии есть p, вычислим вероятность функционирования фирмы после $(k-1)$ ее открытий. На всех циклах функционирования фирмы величину p считаем одной и той же. Полагая циклы независимыми и обозначив событие A – фирма функционирует в течение всего цикла, а событие $\bar{A}$ – противоположное событие, имеем

$$p_k = P(\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}A) = [P(\bar{A})]^{k-1}p(A). \tag{22}$$

Так как $P(A) = p$, $P(A) = 1 - p = q$, то

$$P_k = q^{k-1}p, k = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Данное распределение числа закрытий и возобновлений функционирования фирмы называется геометрическим. Для вычисления математического ожидания и среднеквадратического отклонения используем производящую функцию

$$\gamma_x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}t^k = \frac{pt}{1-qt}. \tag{24}$$

Здесь использованы формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^n + \ldots = \frac{a_1}{1-q}. \tag{25}$$

Знаменателем прогрессии является произведение qt, меньшее 1, так как параметр t сколь угодно мал, а $a_1 = pt$. В результате выкладок получаем

$$\gamma'_x(t) = \frac{p(1-qt)+qpt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}. \tag{26}$$

Откуда

$$m = M(X) = \gamma'_x(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}. \tag{27}$$

Вычислим вторую производную:

$$\gamma''_x(t) = \frac{2pq}{(1-qt)^3}. \tag{28}$$

Поэтому

$$M(X \cdot (X-1)) = \gamma''_x(1) = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}. \tag{29}$$

Отсюда

$$M(X^2) = \frac{2q}{p^2} = \frac{2q}{p^2} + M(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{p+2q}{p^2} = \frac{1+q}{p^2}, \tag{30}$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}, \tag{31}$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{q}}{p}. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь простую задачу о возобновлении деятельности фирмы, прекратившей функционирование, вследствие негативного воздействия коррупционных факторов. Пусть для фирмы имеет место экспоненциальное распределение вероятности функционирования с интенсивностью прекращения функционирования λ. В случае прекращения функционирования фирма возобновляет свое функционирование, причем время возобновления функционирования также случайная величина с экспоненциальным распределением с параметром μ. Пусть $p(t)$ – вероятность того, что фирма в момент t функционирует. Эту величину можно назвать функцией жизнеспособности или нестационарным коэффициентом жизнеспособности. Для определения $p(t)$ составим дифференциальное уравнение. Рассмотрим изменение состояния фирмы за интервал Δt. Пусть событие A – функционирование фирмы в момент $t + \Delta t$, вероятность этого события $P(A) = p(t + \Delta t)$. Рассмотрим гипотезы H_1 и H_2, составляющие полную группу. Гипотеза H_1 – функционирование фирмы в момент t, $P(H_1) = p(t)$. Гипотеза H_2 – в момент t функционирование фирмы прекратилось. Тогда $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - p(t)$. Найдем теперь условную вероятность $P(A|H_1)$ того, что фирма, функционирующая в момент t, остается функционирующей и в момент $t + \Delta t$. Для этого необходимо, чтобы фирма функционировала на интервале $[t, \Delta t]$. Но вероятность прекращения функционирования фирмы на этом интервале, если она функционировала в момент t, есть $\lambda \cdot \Delta t$, где λ – интенсивность воздействия негативных факторов. Тогда имеем, что $P(A|H_1) = 1 - \lambda \Delta t$. При этом мы полагаем, что за малый промежуток времени не может быть более одного прекращения функционирования фирмы, а также невозможно возобновление ее деятельности.

Условная вероятность $P(A|H_2)$ – есть вероятность того, что фирма, возобновляемая в момент t, возобновит свое функционирование за время Δt. Для распределения времени возобновления фирмы после ее прекращения функционирования параметр μ имеет то же значение и смысл, что и параметр λ для распределения времени функционирования фирмы, поэтому $P(A|H_2) = \mu \Delta t$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2).$$

Следовательно

$$p(t + \Delta t) = p(t)(1 - \lambda \Delta t) + [1 - p(t)]\mu \Delta t. \tag{33}$$

Перенесем $p(t)$ влево и разделим на Δt, получаем

$$p(t + \Delta t) - p(t) = -\lambda p(t) \Delta t + \mu[1 - p(t)] \cdot \Delta t,$$

$$\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}=-\lambda p(t)\Delta t+\mu[1-p(t)].$$

Устремляя t к нулю, получаем дифференциальное уравнения для $p(t)$:

$$\frac{dp(t)}{dt}=\mu-(\lambda+\mu)p(t). \tag{34}$$

Уравнение (34) – неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Его решение – сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения. Характеристическое уравнение – $r+(\lambda+\mu)=0$, корень которого $r_1=-(\lambda+\mu)$. Поэтому общее решение однородного уравнения

$$p(t)=Ce^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Так как μ =const, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $p_1(t)=A$ =const и подставляем в (34). Тогда

$$0=\mu-(\lambda+\mu)A,$$

$$A=\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Общее решение уравнения (34) имеет вид

$$p(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+Ce^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Для определения постоянной C используем налагаемое условие. Если в момент $t=0$ фирма функционирует, то $p(0)=1$. Тогда

$$p(0)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+Ce^{0}=1.$$

Отсюда

$$C=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

так что

$$p(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{35}$$

Это есть вероятность нахождения фирмы в состоянии функционирования в момент t, если в начальный момент она функционировала. Считаем, что если фирма прекратила функционирование, то она заменяется аналогичной, при этом на возобновление требуется случайное время с экспоненциальным распределением с параметром μ. На практике часто представляет интерес величина $p(t)$ при $t \to \infty$. Такой предел можно назвать коэффициентом эффективной стабильности фирмы и обозначить $k_e = \mu/(\lambda + \mu)$. При длительном времени функционирования фирмы коэффициент k_e получает статистическую интерпретацию. Допустим, t_1 – общее время нахождения фирмы в состоянии функционирования, а t_2 – общее время, в течение которого фирма находится в состоянии обновления и обновления функционирования. Отсюда длина всех интервалов $t_1 + t_2 = \tilde{t}$. Тогда

$$p(t) \approx \frac{t_1}{t_1 + t_2}, \qquad {}_e = \lim_{\substack{t_1 \to \infty \\ t_2 \to \infty}} \frac{t_1}{t_1 + t_2}. \tag{36}$$

Для частного случая экспоненциальных распределений для времени функционирования, состоянии обновления и обновления интерпретация коэффициентов λ, μ очевидна. Пусть T_1 – случайное время функционирования фирмы, а T_2 – случайное время ее нахождения в состоянии обновления. Тогда по свойствам показательного распределения

$$t_{avg} = M(T_1) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{1}{t_{avg}} \tag{37}$$

для среднего времени нахождения в состоянии функционирования, и для среднего времени возобновления функционирования

$$t_{avgrec} = M(T_2) = \frac{1}{\mu}, \qquad \mu = \frac{1}{t_{avgrec}}. \tag{38}$$

Подставляя выражения (37), (38) в (34), получаем

$$k_e = \frac{t_{avg}}{t_{avg} + t_{avgrec}}. \tag{39}$$

Поэтому коэффициент эффективной стабильности фирмы равен отношению среднего времени пребывания фирмы в состоянии функционирования к среднему промежутку времени между двумя соседними выходами фирмы в состояние функционирования (равному сумме среднего промежутка времени нахождения фирмы в состоянии функционирования и времени прекращения функционирования). Величина $t_{avg} + t_{avgrec}$ есть средний промежуток времени между последовательными прекращениями функционирования фирмы. Обратная величина доставляет среднее число закрытий фирмы в единицу времени, она называется плотностью возобновления и обозначается $h(t)$

$$h = \frac{1}{t_{avg} + t_{avgrec}} = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (40)$$

По величине h находится среднее число прекращений функционирования фирмы за промежуток t. Эта величина называется функцией возобновления и обозначается $H(t)$. При больших t

$$H = ht = t \cdot \frac{t}{t_{avg} + t_{avgrec}}. \qquad (41)$$

Глава 2. Статистическое оценивание и прогноз эффективности стратегии развития конгломерата фирм в условиях негативного коррупционного воздействия

Введенные ранее понятия и определения для стохастического оценивания и прогноза эффективности стратегии развития фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия равным образом относятся и к процессу стохастического оценивания и прогноза эффективности стратегии развития конгломерата фирм, действующих связанным между собой образом в условиях негативного коррупционного воздействия. Для них также вводятся следующие понятия. Вероятность функционирования конгломерата фирм в условиях негативного коррупционного воздействия характеризует отношение числа функционирующих фирм $N(t)$ в момент времени t к числу фирм $N(t_0)$ функционирующих момент времени $t_0 = 0$ в условиях негативного коррупционного воздействия.

$$P(t) = N(t)/N(t_0) \tag{42}$$

Вероятность прекращения функционирования характеризующая отношение числа фирм $N(t + \Delta t)$ функционирующих до момента времени $t + \Delta t$ к числу фирм $N(t)$, функционирующих в момент времени t в условиях негативного коррупционного воздействия

$$Q(t) = N(t + \Delta t)/N(t), \tag{43}$$

Плотность вероятности функционирования конгломерата фирм в условиях негативного коррупционного воздействия характеризующая отношение числа фирм $N(t + \Delta t) - N(t)$, прекративших свое функционирование в интервале $t + \Delta t$ к произведению числа функционирующих фирм $N(0)$ в начальный момент времени $t_0 = 0$ на длительность интервала времени Δt.

$$f(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(0)\Delta t}. \tag{44}$$

Интенсивность прекращения функционирования в условиях негативного коррупционного воздействия характеризующая отношение числа прекративших функционирование фирм в интервале времени $t + \Delta t$ к произведению числа функционирующих фирм в момент времени t на длительность интервала времени Δt, при условии, что прекратившие свое функционирование фирмы не восстанавливаются и вместо них не открывают новые

$$\lambda(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t}. \tag{45}$$

Среднее время прекращения функционирования группы фирм в условиях негативного коррупционного воздействия определяется как

$$t_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} t_i \tag{46}$$

где N –количество фирм, функционирующих в условиях негативного коррупционного воздействия, t_i – время функционирования i-ой фирмы.

Вероятность прекращения функционирования конгломерата фирм зависит сложным образом от вероятности прекращения функционирования составляющих ее подразделений. Считая вероятность продолжения деятельности конгломерата фирм сложным событием, а вероятность продолжения деятельности составляющих подразделений элементарным событием, получаем, что каждому набору состояний подразделений соответствует вполне определенное состояние функционирования конгломерата фирм. Для простоты можно считать вначале, что как подразделение, так и конгломерат фирм могут находиться в двух состояниях – либо функционирования, либо нефункционирования. Тогда с каждым состоянием свяжем соответствующую булеву переменную. Булева переменная конгломерата фирм будет функцией булевых переменных составляющих ее подразделений. Выписывая эту функцию с помощью логических сложения и умножения, можно связать вероятность функционирования конгломерата фирм с вероятностью функционирования отдельных подразделений. Считаем для простоты, что прекращение функционирования отдельного подразделения происходит независимо, так что условные вероятности не будут необходимы. Рассмотрим для примера два случая.

1. Прекращение функционирования двух подразделений означает прекращение функционирования конгломерата фирм. Обозначим A событие, состоящее в функционировании одного, а B — событие, состоящее в функционировании другого подразделения. Тогда по теореме об умножении независимых событий получаем событие AB – (конъюнкцию)
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \tag{47}$$

2. Пусть теперь функционирование конгломерата фирм из двух подразделений требует функционирования хотя бы одного подразделения из двух. Тогда функционирование конгломерата фирм соответствует событию $A + B$ и по теореме сложения для совместных событий
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{48}$$

Если A и B – независимые события, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \tag{49}$$

Если группа состоит более чем из двух подразделений, то следует использовать формулы несколько раз.

Глава 3. Экспериментальное определение характеристик функционирующей фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия

На практике величины определенные для вычисления характеристик функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия нужно определять опытным путем. Для этого требуется использовать статистическое истолкование вероятности. Пусть имеется N_0 одинаковых фирм функционирующих в условиях коррупционного воздействия. Если одновременно начать их исследовать на наличие коррупционной составляющей, то к моменту времени t будет $N(t)$ фирм, функционирующих в условиях коррупционного воздействия и $n(t)$ фирм прекративших свое функционирование. Очевидно,

$$N(t) + n(t) = N_0. \tag{50}$$

Отношение количества фирм, функционирующих в условиях коррупционного воздействия к первоначальному числу будет

$$p^*(t) = \frac{N(t)}{N_0} \tag{51}$$

и будет эмпирической вероятностью функционирования фирм в условиях негативного коррупционного воздействия. В соответствии с теоремой Бернулли, при достаточном числе N_0 она будет приближаться к величине $p(t)$, определенной выражением $p(t) = P(T \geq t)$. Аналогично

$$q^*(t) = \frac{n(t)}{N_0}, \tag{52}$$

будет приближением к $q(t)$, определенной формулой $q(t) = 1 - p(t) = P(T < t)$. Если построить график величины $q^*(t)$, то получится ступенчатая линия (величина $q^*(t)$ изменяется на $\frac{1}{N}$ когда прекращает функционирование очередная фирма). Полученный график эмпирической функции распределения представляет собой эмпирическое приближение к графику теоретической функции распределения $q(t) = F(t)$. С помощью критериев математической статистики можно установить, имеется ли отличие от теоретической кривой в пределах допустимого.

Для получения эмпирической оценки плотности вероятности прекращения функционирования фирмы в условиях коррупционного воздействия и интенсивности прекращения функционирования необходимо ввести величину Δn – число фирм, отказавших в интервале $(t; t+\Delta t)$, или для лучшего приближения выбрать интервал $(t - \frac{\Delta t}{2}; t + \frac{\Delta t}{2})$. Тогда согласно формуле $f(t)\Delta t \simeq P(t \leq T \leq t + \Delta t)$ и формулы $\lambda(t)\Delta t \simeq P(t \leq T \leq t + \Delta t / T \geq t)$ величины

$$f^*(t) = \frac{\Delta n}{N_0 \Delta t}, \tag{53}$$

$$\lambda^*(t) = \frac{\Delta n}{N(t)\Delta t} \tag{54}$$

будут соответственно приближениями к величинам $f(t)$ и $\lambda(t)$. Действительно, величина $\frac{\Delta n}{N_0}$ представляет собой относительную частоту прекращения функционирования в интервале Δt поэтому будет оценкой плотности вероятности. Если нанести величины $\frac{\Delta n}{N_0}$ на график, то получается гистограмма, являющаяся приближением к кривой распределения. Аналогично, величина $\frac{\Delta n}{N(t)}$ представляет собой относительную частоту прекращения функционирования фирмы в условиях коррупцинного воздействия в интервале Δt для тех элементов, которые были исправны к моменту t (поскольку число фирм, прекративших свое функционирование в условиях коррупционного воздействия Δn делится на число фирм, функционирующих в условиях коррупцинного воздействия $N(t)$), т.е. является статистической оценкой условной вероятности прекращения функционирования фирм в условиях коррупционного воздействия в интервале Δt. Отношение этой величины к Δt будет поэтому оценкой условной плотности, т.е. интенсивности коррупционного воздействия.

Оценкой среднего времени функционирования фирмы в условиях коррупционного воздействия t_{avg}, в соответствии с теоремой Чебышева, является эмпирическое среднее

$$t^*_{avg} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} t_k}{N_0}, \tag{55}$$

где t_k – время функционирования $k-$ой фирмы в условиях коррупционного воздействия. Эта величина характеризует среднее время функционирования фирмы до прекращения ее функционирования. Практическое определение величины t^*_{avg} по формуле (55) связано с трудностями, так как требует проведения опыта прекращения функционирования в условиях коррупционного воздействия для всех подразделений. Поэтому данную величину описывают косвенным путем по другим параметрам, либо берут приближенно. Например, проводят опыт до момента t_0, а затем считают

$$t^*_{avg} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k + (N_0 - n)t_0}{N_0}, \tag{56}$$

т.е. принимают, что в момент окончания эксперимента все оставшиеся фирмы, прекращают свое функционирование.

В случае фирм, возобновляющих функционирование, можно вместо испытаний нескольких фирм использовать одну фирму. Если считать, что свойства фирм после восстановления не меняются, то за T можно принять время между последовательными прекращениями функционирования фирмы в условиях коррупционного воздействия. Тогда вместо выражения (55) получим

$$t^*_{avg} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} t_k}{m}, \tag{57}$$

где t_k – полученный на опыте промежуток времени между последовательными прекращениями функционирования, m – число фирм, прекративших свое функционирование.

Глава 4. Примеры

Пример 1.

Z-score model (анализ Альтмана) - математическая формула, характеризующая вероятность банкротства отдельной фирмы (предприятия), сформулированная американским экономистом Эдвардом Альтманом в 1968. Модель представляет собой функцию от показателей, характеризующих экономический потенциал предприятия и результаты его работы за истекший период. На данный момент имеется 5 моделей для различных типов компаний. Рассмотрим пятифакторную модель Альтмана для частных компаний, которая формализована следующим образом: $Z^* = 0.717 \cdot X_1 + 0.847 \cdot X_2 + 3.107 \cdot X_3 + 0.420 \cdot X_4 + 0.998 \cdot X_5$, где $X_1 =$ Оборотный капитал/Активы, $X_2 =$ Нераспределенная прибыль/Активы, $X_3 =$ Операционная прибыль/Активы, $X_4 =$ Собственный капитал/ Обязательства, $X_5 =$ Выручка/Активы. В зависимости от полученного значения Z^* компанию можно отнести к той или иной группе: если $Z^* > 2,9$ - зона финансовой устойчивости ("зеленая"зона), если $1,23 < Z^* < 2,9$ - зона неопределенности ("серая"зона), если $Z^* < 1,23$ - зона финансового риска ("красная"зона). В данном контексте будем рассматривать банкротство отдельной фирмы как прекращение функционирования вследствие негативного коррупционного воздействия. Для вычисления значения Z^* воспользуемся бухгалтерской отчетностью с поквартальным периодом компании «А» за последние 18 месяцев до наступления банкротства. Вычислим значения $X_1 = -0.2452$, $X_2 = 0.0076$, $X_3 = 0.0108$, $X_4 = 0.0266$, $X_5 = 0.8725$. Используя пятифакторную модель Альтмана вычислим значения Z^*-функции для каждого квартала, что будет означать вероятность банкротства в заданный период времени. Для каждого вычисленного значения Z^*, можно сделать вывод, что выбранная компания находится на протяжении полугода в зоне финансового риска, т.к. вероятность функционирования достаточно низкая.

Таблица 1: Показатели финансовой отчетности

Название показателя	12мес. 2014	9мес. 2014	6мес. 2014	3мес. 2014	12мес. 2013	9мес. 2013
Оборотный капитал	63657793	23631697	23414708	25160955	22355487	23522501
Активы	128862567	122544792	117414312	120635676	104996142	95897664
Собственный капитал	14713745	2757373	2809307	2892196	2772921	2489464
Обязательства	114148821	119787418	114605004	117743477	102223221	93408199
Выручка	117313131	86057737	48815467	20904467	110150759	83677109
Операционная прибыль	-19558501	307473	285476	170146	1599358	1037971
Нераспределенная прибыль (убыток)	-19322469	129771	176341	120274	1029986	736380

Таблица 2: Вероятность прекращения функционирования фирмы

12мес. 2014	9мес. 2014	6мес. 2014	3мес. 2014	12мес. 2013	9мес. 2013
0,013374105	0,582294073	0,292456342	0,040398132	0,962853319	0,747994339

Пример 2.

Для вычисления финансовой устойчивости фирмы также можно воспользоваться коэффициентом соотношения заемных и собственных средств, который показывает количество заемных средств на единицу собственного капитала. Коэффициент обозначается $K_{з/с}$ и вычисляется по формуле

$$K_{з/с} = \frac{\text{Заемный капитал предприятия}}{\text{Собственный капитал}} =$$

$$= \frac{\text{Краткосрочные обязательства} + \text{Долгосрочные обязательства}}{\text{Собственный капитал}}.$$

В зависимости от значения коэффициента рассматриваемое предприятие (фирму) можно отнести к различным степеням устойчивости / неустойчивости. Оптимальное рекомендуемое значение коэффициента – меньше 1. Чем ниже значение коэффициента, тем выше финансовая устойчивость фирмы, соответственно, при увеличении значения коэффициента говорят о повышении финансовой неустойчивости фирмы. Рассмотрим фирму, для которой известны значения коэффициента соотношения заемных и собственных средств за последние 24 месяца (таблица 3).

Согласно таблице 3, можно сделать вывод о том, что фирма близка

Таблица 3: Значения коэффициента соотношения заемных и собственных средств за последние 24 месяца

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Значения коэффициента	0.5	0.7	0.9	1.2	0.7	0.6	1	1.2	1.4	1	1.1	0.9
Месяцы	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Значения коэффициента	1	1.2	0.7	0.8	0.6	1.1	1	1.2	0.9	0.6	0.9	0.6

к прекращению функционирования. Для определения вероятности прекращения функционирования фирмы с заданными коэффициентами необходимо проверить гипотезу, что выборка коэффициентов согласуется с нормальным законом распределения при уровне значимости $\alpha = 0.01$. Пусть H_0 – различия между эмпирическим и теоретическим законом несущественны, H_1 – различия между эмпирическим и теоретическим законом существенны. Вычислим выборочное среднее $\overline{x_n} = 0.66$ и выборочную дисперсию $\sigma_{\text{В}} = 0.819$. Вычислим теоретические частоты, учитывая, что $n = 24$, $h = 0.1$, $\sigma_{\text{В}} = 0.819$ по формуле $n'_i = \frac{nh}{\sigma_{\text{В}}} \cdot \varphi(u_i)$. Сравним эмпирические

Таблица 4

i	x_i	$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$\phi(u_i)$	n'_i
1	0.1	4,06779661	0,397	1,162738983
2	0.2	2,847457627	0,0396	0,115981017
3	0.3	2,847457627	0,1354	0,396561356
4	0.4	1,627118644	0,397	1,162738983
5	0.5	1,627118644	0,0387	0,113345085
6	0.6	1,627118644	0,0387	0,113345085
7	0.7	1,627118644	0,2943	0,861949831
8	0.8	0,406779661	0,1354	0,396561356
9	0.9	0,406779661	0,397	1,162738983

и теоретические частоты. Составим расчетные таблицы 4, 5 по которым найдем наблюдаемое значение $\chi^2_{\text{набл}} = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i$. Из таблицы 5 найдем $\chi^2_{\text{набл}} = 16.79$. По таблице (см.приложение) $\chi^2_{\text{крит}}(0.01, 6) = 16.8$.

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}$, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем. Далее вычислим вероятность функционирования фирмы для заданного периода времени $t = 24$ мес.: $p(t) =$

Таблица 5

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$
1	4	1,162738983	0,662738983	0,43922296	0,377748546
2	3	0,115981017	-0,484018983	0,234274376	2,019937246
3	3	0,396561356	-0,303438644	0,092075011	0,232183518
4	2	1,162738983	0,362738983	0,13157957	0,113163463
5	2	0,113345085	-0,786654915	0,618825956	5,459662914
6	2	0,113345085	-0,886654915	0,786156939	6,935959689
7	2	0,861949831	-0,238050169	0,056667883	0,06574383
8	1	0,396561356	-0,803438644	0,645513655	1,627777506
9	1	1,162738983	-0,137261017	0,018840587	0,016203625

$\frac{1}{2}[1 - \Phi(\frac{t-a}{\sigma})] = \frac{1}{2}[1 - \Phi(\frac{24-0.66}{0.81})] = 0.5.$

Пример 3.

Группа фирм состоит из трех подразделений, прекращение функционирования каждого из которых означает прекращение функционирования всей группы. Интенсивность прекращения функционирования подразделений λ_1, λ_2, λ_3. Распределение в режиме функционирования экспоненциально. Требуется найти вероятность функционирования группы в течение 2000 дней, если $\lambda_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ прекращ.функц./дней, $\lambda_2 = 0.2 \cdot 10^{-3}$ прекращ.функц./дней, $\lambda_3 = 1 \cdot 10^{-3}$ прекращ.функц./дней. Вероятности функционирования каждого подразделения группы суть $p_1 = e^{-\lambda_1 t} = e^{-2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-5}} = e^{-0.02} = 0.99$, $p_2 = e^{-\lambda_2 t} = e^{-2 \cdot 10^3 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}} = e^{-0.4} = 0.67$, $p_3 = e^{-\lambda_3 t} = e^{-2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} = e^{-2} = 0.1353$, $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0.0889$.

Пример 4.

Пусть группа фирм состоит из двух подразделений, прекращение функционирования каждого из которых означает прекращение функционирования группы. Среднее время функционирования первого подразделения – 300 суток, второго – 400 суток. Вероятность нормального функционирования подразделений распределена по Рэлею. Найти среднее время функционирования группы к моменту 1800 суток. Пусть вероятность функционирования подразделений обозначена через $p_1(t)$ и $p_2(t)$ соответственно. Тогда вероятность функционирования группы $P(t) = p_1(t) \cdot p_2(t)$. При этом $\ln P(t) = \ln p_1(t) + \ln p_2(t)$. Дифференцируя, получаем $\lambda(t) =$

$-\frac{P'(t)}{P(t)} = -\frac{p_1'(t)}{p_1(t)} - \frac{p_2'(t)}{p_2(t)} = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$. Для распределения Релея интенсивность прекращения функционирования $\lambda(t) = \frac{t}{\sigma_1^2} + \frac{t}{\sigma_2^2}$, где σ_1, σ_2 – параметры соответствующих распределений. Тогда при $\sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t_{1avg}$, $\sigma_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t_{2avg}$. Подставляя численные значения, получаем $\lambda(t) = \lambda(8000) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{t_{1avg}^2} +! t_{2avg}^2\right) = 9.75 \cdot 10^{-2}$ Для вычисления среднего времени функционирования проинтегрируем в соответствии с определением вероятности функционирования $P(t)$. Используя выражение для распределения Рэлея $p_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}}$, $p_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_2^2}}$, получаем $P(t) = p_1(t) \cdot p_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)}$. Следовательно, вероятность функционирования группы имеет распределение Рэлея с параметром σ, которое вычисляется из выражений $\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$, $\sigma = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$. И тогда из определения $t_{avg} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$. Иначе $t_{avg} = \frac{t_{1avg} \cdot t_{2avg}}{\sqrt{t_{1avg}^2 + t_{2avg}^2}}$. Подставляя численные значения, имеем $t_{avg} = \frac{300 \cdot 400}{\sqrt{300^2+400^2}} = 240$суток.

Пример 5.

Группа фирм состоит из десяти одинаковых подразделений, прекращение функционирования каждого из которых означает прекращение функционирования группы. Вероятность функционирования каждого подразделения имеет нормальное распределение с параметрами $a = 200$ суток и $\sigma = 40$ суток. Найти вероятность функционирования за 150 суток. Здесь $a > 3\sigma$. Вероятность функционирования каждого подразделения $p = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{150-200}{40}\right)\right] \approx 0.854$. Вероятность функционирования группы $P = P^{10} = 0.894^{10} = 0.306$.

Выводы

В работе введены основные характеристики процессов функционирования фирмы в условиях негативного коррупционнго воздействия и исследована связь между введенными характеристиками. Введенные характеристики рассмотрены для различных распределений. Рассмотрен случай возобновления деятельности фирмы, прекратившей свое функционирование вследствие негативного коррупционного воздействия. Введенные понятия и характеристики для функционирования отдельной фирмы обобщены для процесса функционирования конгломерата (действующих связанным образом между собой) фирм в условиях негативного коррупционного воздействия. Исследована зависимость вероятности прекращения функционирования конгломерата фирм от вероятности прекращения функционирования составляющих его подразделений. Рассмотрено прекращение функционирования конгломерата фирм состоящего из двух подразделений, для случая, если прекращение функционирования подразделений происходит независимо. Формализовано условие для функционирования конгломерата фирм, состоящего больше чем из двух фирм. Формализовано экспериментальное определение характеристик вероятности функционирования фирмы в условиях негативного коррупционного воздействия. Для различных случаев функционирования фирмы и конгломерата фирм в условиях негативного коррупционного воздействия рассмотрены численные примеры.

Заключение

Коррупция в России по прежнему остается одной из самых значимых проблем страны. Потери от коррупции не ограничиваются размерами прибыли от взяток, выплачиваемых ежегодно для подкупа должностных лиц в различных отраслях экономики. Негативные последствия коррупции препятствуют прогрессивному развитию общества и экономики, а также представляют угрозу национальной безопасности страны.

В данной работе исследовалась проблема внутренней коррупции фирмы. К внутренней коррупционной деятельности фирмы можно отнести следующее: мошеннические операции с активами компании, вывод прибыли в специальные организации, мошенничество с финансовой отчетностью компании. Внутренняя коррупция достигает максимальной концентрации в компаниях с государственным участием. Такие компании, как правило, имеют сложную организацию структуры бизнеса, специфические условия заключаемых договоров, предполагающие отсрочку платежей или осуществление убыточных или сверхприбыльных операций, иными словами, работа таких компаний направлена на расхищение внутренних активов.

В формализованной в работе модели исследуется статистическое оценивание стратегии развития фирмы в условиях негативного воздействия коррупционных факторов. Также в работе формализуется и исследуется статистическое оценивание стратегии развития конгломерата фирм в условиях негативного коррупционного воздействия. Полученные в работе результаты могут иметь прикладную направленность – они могут быть использованы для построения прогноза динамики прекращения функционирования фирмы и конгломерата фирм в условиях негативного коррупционного воздействия. Кроме того, результаты данной работы могут быть использованы в качестве рекомендаций государственным органам управления различного уровня.

Список литературы

[1] Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М.: Наука, 1984, 488 С.

[2] Гмурман В.Е., Теория веротяности и математическая статистика: Учеб.пособие для вузов, М.:Высш.шк., 2003, 479 С.

[3] Долгова А.И. Реагирование на коррупцию: практика противодействия России и направления оптимизации борьбы// В сборнике: Коррупция: состояние противодейтсвия и направления оптимизации борьбы Российская криминологическая ассоциация, 2015, С.7-24.

[4] Жигун Л.А., Е.М.Фиоктистова, Дискус о противодействии коррупции в сетевой торговле, Актуальные проблемы экономики и права, № 4 (36) / 2015, С.50-59.

[5] Зубова А.Ф., Малафеев О.А., Моделирование социально-экномических систем, СПб.: СПбГУ, 2006, – 907 С.

[6] Клейнер В.Г. Коррупция в России, Россия в коррупции: есть ли выход? // Вопросы экономики, 2014, № 6, С. 81-96.

[7] Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М.:Советское радио, 1967, 299 С.

[8] Кузовков Ю.В. Мировая история коррупции. — М.: Анима-Пресс, 2010, 137 С.

[9] Кун В.В. Математические основы теории надежности. Л., 1977, 48 С.

[10] Петросян Л. А. Теория игр: учебник / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012 — 432 С.

[11] Г. Сатаров, Как измерять и контролировать коррупцию. //Вопросы экономики, № 1, 2007, С. 5-11.

[12] Г.Сатаров, Российская коррупция: уровень, структура, динамика. Опыты социоло- гического анализа / Под ред. Г.А. Сатарова. Москва : Фонд "Либеральная Миссия 2013, 752 С.

[13] Шуманов И.В. Анализ подходов к исследованию феномена коррупции и современные исследовательские практики коррупции, Вестник Калининградского филиала Санкт-Петербургского университета МВД России, 2011, № 4, С. 26-31.

[14] Airson, Handbook of reliability edited by Airson, t. 1,2,3, Moscow, 1969.

[15] Cheloukhine S., King J. Corruption networks as a sphere of investment activities in modern Russia // Communist and Post-Communist Studies, Vol. 40, Iss. 1, March 2007, P. 107-122.

[16] Dreher A., Schneider S. Corruption and the shadow economy: an empirical analysis // Public Choice, Vol. 144, No. 1/2 (July 2010), P. 215-238

[17] Galtung F., Shacklock A., Connors C., Sampford C., Measuring corruption, Ashgate Publishing, Ltd., P. 318.

[18] Pak Hung Mo, Corruption and Economic Growth // Journal of Comparative Economics, Vol. 29, Iss. 1, March 2001, P. 66–79

[19] Okadaa K.,Samreth S., The effect of foreign aid on corruption: A quantile regression approach // Economics Letters, Vol. 115, Iss. 2, May 2012, P. 240–243

[20] В МВД подсчитали средний размер взятки в России [Электронный ресурс].

http://www.rbc.ru/economics/09/12/2015/5667f4069a79473b1ae0b836 (Дата обращения 23.03.2016)

[21] Коррупция без границ: как Россия будет бороться со взятками за рубежом [Электронный ресурс]. http://www.rbc.ru/economics/09/10/2015/55db18319a7947ed6c110d4a (Дата обращения 23.03.2016)

[22] Средняя сумма взятки в Москве увеличилась вдвое [Электронный ресурс]. http://www.rbc.ru/politics/28/01/2016/56aa10349a7947e20092f544 (Дата обращения 23.03.2016)

[23] Указ Президента РФ от 1 апреля 2016 г. N 147 "О Национальном плане противодействия коррупции на 2016 - 2017 годы"[Электронный ресурс]. http://www.garant.ru/hotlaw/federal/706953/ (Дата обращения 5.04.2016)

Приложение

Теорема Чебышева

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа С), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства $|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}| < \varepsilon$ будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Центральная предельная теорема

Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ есть бесконечная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание и дисперсию. Обозначим математическое ожидание и дисперсию через μ и σ^2, соответственно. Пусть также $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Тогда $\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$ при $n \to \infty$, где $N(0,1)$ – нормальное распределение с ну левым математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным единице. Обозначив символом $\overline{X}_n$ – выборочное среднее первых n величин, т.е. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ результат центральной предельной теоремы можно переписать в виде: $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma} \to N(0,1)$ по распределению при $n \to \infty$.

Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая гипотезы.

Часто необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен, то имеются основания предположить, что он имеет определенный вид. Выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону «А». Таким образом, в этой гипотезе идет речь о виде предполагаемого распределения. Наравне с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза.

Нулевой гипотезой называют выдвинутую гипотезу H_0. Конкурирующей гипотезой называют гипотезу H_1, противоречащую нулевой.

Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки.

После выбора критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых гипотеза отвергается, а другая – при которых гипотеза принимается. Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают. Областью принятия гипотезы называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают. Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение принадлежит области принятия гипотезы, гипотезу принимают. Критические точки – точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{\text{кр}}$, где $k_{\text{кр}}$ – положительное число. Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{\text{кр}}$, где $k_{\text{кр}}$ – отрицательное число. Односторонней называют правостороннюю или левостороннюю критическую область.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1, K > k_2$, где $k_2 > k_1$

Эмпирические и теоретические частоты.

Дискретное распределение.

Рассматривается дискретная случайная величина X, закон распределения которой неизвестен. Пусть произведено n испытаний, в результате которых величина X приняла n_1 раз значение x_1, n_2 раз значение x_2, n_k раз значение x_k, причем $\sum n_i = n$. Эмпирическими частотами называют фактически наблюдаемые частоты n_i. Пусть имеются основания предположить, что величина X распределена по некоторому определенному закону. Чтобы проверить, согласуется ли предположение с наблюдением, вычисляют теоретические частоты наблюдаемых значений. Теоретическими частотами называют частоты n'_i, найденные теоретически (вычислением). Теоретические частоты находят с помощью равенства $n'_i = nP_i$, где n – число испытаний, P_i – вероятность наблюдаемого значения x_i, вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение. Таким образом, теоретическая частота наблюдаемого значения x_i дискретного распределения равна произведению числа испытаний на вероятность этого наблюдаемого значения.

Непрерывное распределение.

В случае непрерывного распределения, вероятности отдельных возможных значений равны нулю (согласно *следствию*: *вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение равна нулю* см. [2]). В таком случае весь интервал возможных значений делят на k непересекающихся интервалов и вычисляют вероятности P_i попадания X в i-й частичный интервал, а затем, как и для дискретного распределения, умножают число испытаний на вероятности. Теоретические частоты непрерывного распределения находят по равенству $n'_i = nP_i$, где n – число испытаний, P_i – вероятность попадания X в i-й частичный интервал, вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение. Если предполагается, что случайная величина X распределена нормально, то теоретические частоты могут быть найдены по формуле $n'_i = \frac{nh}{\sigma_{\text{В}}}\phi(u_i)$, где n – число испытаний (объем выборки), h – длина частичного интервала, $\sigma_{\text{В}}$ – выборочное среднее квадратическое отклонение. $u_i = (x_i - \overline{x_{\text{В}}})/\sigma_{\text{В}}$ (x_i – середина i-го частичного интервала),

$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$.

Проверка статистических гипотез.

Если закон распределения генеральной совокупности не известен, но есть предположение, что генеральная совокупность распределена по закону «А», в этом случае проверка гипотезы о предполагаемом законе распределения производится при помощи специально подобранной величины – критерия согласия.

Критерий согласия – критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе распределения генеральной совокупности.

Воспользуемся критерием согласия Пирсона для проверки гипотезы о нормальном распределении совокупности (критерий может быть использован для проверки других распределений). Критерий Пирсона устанавливает на принятом уровне значимости согласие гипотезы с данными наблюдений.

Пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение:

варианты	x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_s
эмпирические частоты	n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_s

Пусть для нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n_i'. При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \sum (n_i - n_i')^2 / n_i'. \qquad (58)$$

Величина (58) – случайная, так как в различных опытах она принимает различные, заранее не известные значения. Чем меньше различаются эмпирические и теоретические частоты, тем меньше величина критерия, характеризующего близость эмпирического и теоретического распределений. Доказано, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины (58) независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы. Поэтому случайная величина (58) обозначена через χ^2, а сам критерий называют критерием согласия «хи квадрат». Число степеней свободы находят по равенству $k = s - 1 - r$, где s – число групп (частичных интервалов) выборки; где s – число групп (частичных интервалов) выборки; r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки. Поскольку односторонний критерий более «жестко» отвергает нулевую гипотезу, чем двусторонний, построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α: $P[\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)] = \alpha$. Таким образом правосторонняя критическая область определяется неравенством $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$, а область принятия нулевой гипотезы – неравенством $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$. Пусть значение критерия, вычисленное по данным наблюдений обозначено через $\chi^2_{\text{набл}}$. Для проверки нулевой гипотезы при заданном уровне значимости, необходимо, для начала, вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum (n_i - n_i')^2 / n_i. \qquad (59)$$

По таблице критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости α (*уровень значимости* – достаточно малая вероятность, при которой событие можно считать практически невозможным.) и числу степеней свободы $k = s - 3$ найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$. Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – нулевая гипотеза отвергается.

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0