ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)
Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц
Направление «Физика»

Неабелевы струны в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной квантовой хромодинамике, деформированной массой присоединённой материи

Магистерская диссертация студента

Иевлева Евгения Альбертовича

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. **Юнг А.В.**

Рецензент:
канд.ф.-м.н. **Кудрявцев В.А.**

Санкт–Петербург
2016

Содержание

Введение

Хорошо известно, что сильные взаимодействия обладают феноменом конфайнмента. Этот факт следует из реальных экспериментальных наблюдений, а также из численных расчётов, но до сих пор никому не удалось вывести это свойств из первых принципов теории сильных взаимодействии. Существует мнение, что этот эффект существенно непертурбативный. В случае суперсимметричных теорий, однако, кое-что может быть вычислено в режиме сильной связи даже если полная теория нерешаема. Это происходит, когда в теории есть БПС сектор. Примером такой теории является $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{U}(1)$ $\mathcal{N}=2$ квантовая хромодинамика, и изучение этой теории помогает проникнуть в суть несуперсимметричной квантовой хромодинамики и других теорий.

Общая идея следует из рассмотрения эффекта Мейснера в сверхпроводнике. Вообще говоря, сверхпроводник выталкивает электромагнитное поле из себя. Однако, если приложить сильное магнитное поле перпендикулярно тонкой сверхпроводящей пластине, то в ней возникнут тонкие потоковые трубки (Абрикосовские струны). Эффективно эти трубки связывают между собой монополи, сидящие на поверхности сверхпроводника. Такие вихри живут в (Хиггсоподобном) вакууме сверхпроводника. Замечательно, что если (гипотетически) сделать сверхпроводящую пластину толще, то потоковые трубки не рвутся; вместо этого они удлиняются, и их энергия пропорциональна их длине.

Несложно увидеть некоторое сходство с ситуацией в квантовой хромодинамике, где энергия трубки хромоэлектрического потока между кварками примерно пропорциональна её длине. И действительно, т' Хофт [1] и Мандельштам [2] предложили гипотезу дуального эффекта Мейснера, которая могла бы объяснить цветовой конфайнмент в неабелевых калибровочных теориях. Неабелевы струны естественно связываются с удержанием монополей [3, 4].

Решение Зайберга-Виттена [5] $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса показало, что в этой теории присутствуют безмассовые монополи, и что добавление небольшой ($\mathcal{N}=2$)-нарушающей деформации ведёт к их конденсации, образуя струны, несущие хромоэлектрический поток. Однако оказывается, что эти струны являются абелевыми, и что детали конфайнмента в этой теории далеки от реальной хромодинамики. Нужна была модель с неабелевым конфайнментом.

Одна из таких моделей описана, к примеру, в обзоре [3, 4]. Авторы рассматривают четырёхмерную $\mathcal{N}=2$ теорию Янга-Миллса с калибровочной группой $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{U}(1)$ (далее — основная теория, теория в балке) с F-членом Файе-Илиопулоса (ФИ) и $N_f=N$ ароматами фундаментальной материи. В этой теории образуются монополи, подверженные конфайнменту; они «дуальны кваркам в том же смысле, что трубки магнитного потока дуальны трубкам электрического потока». Эти монополи соединены неабелевыми струнами, которые обладают, кроме трансляционных (и супертрансляционных) также и ориентационными (и суперориентационными) степенями свободы, связанными с вращениями цветовых потоков внутри неабелевой группы, см. [6, 7, 8, 9] и обзоры [3, 4, 10, 11, 12].

В работе [13] была рассмотрена похожая модель с ФИ D-членом и нулевыми массами кварков для случая калибровочной группы $U(2)$, в [14] — для $U(N)$ при произвольном N. Однако главная особенность этой работы в том, что авторы рассматривают деформацию теории, нарушающую $\mathcal{N}=2$ до $\mathcal{N}=1$. Главный результат заключается в выражении для эффективного действии в низкоэнергетическом пределе на мировой поверхности струны: полученная модель получила название «гетеротическая $\mathcal{N}=2$ сигма-модель с $\mathrm{CP}(N-1)$ пространством с бозонными полями и дополнительным правым фермионным полем, взаимодействующим специальным образом с фермионными полями $\mathcal{N}=(2,2)$ $\mathrm{CP}(N-1)$ модели.»

Задача, рассмотренная в последней работе, носит в некотором смысле академический характер, так как в ней ФИ D-член был введён искусственно. Кроме того, при такой постановке задачи было бы невозможно ввести массы кварков, так как иначе в теории не существовали бы 1/2 БПС-решения. Напротив, в настоящей работе я рассматриваю $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{U}(1)$ теорию с ненулевыми массами кварков, деформируя её введением массового члена для присоединённой материи с параметром деформации μ. Оказывается, что этот случай существенно отличается от рассмотренного в [14]. Больше всего это различие проявляется в эффективной теории: ориентационный и трансляционный секторы полностью расщепляются, в то время как супериентационный сектор «поднимается» (становится массивным) и вовсе уходит из эффективной теории.

Из физических соображений рассматривается только деформация массовым членом присоединённой материи. В $\mathcal{N}=2$ квантовую хромодинамику помимо кварков и глюонов входят также присоединённые поля фермионов λ^1, скалярные кварки, а также дополнительный присоединённый мультиплет полей a, a^a и λ^2 (более подробно это объяснено в главах 1 и 3). При деформации теория переходит в $\mathcal{N}=1$ КХД, в которой присоединённый мультиплет уже отсутствует. Более того, за счёт конденсации скалярных полей a, a^a теория $\mathcal{N}=2$ абелизуется, так что отщепление этих полей ведёт к настоящей неабелевой теории. Разумеется, $\mathcal{N}=1$ КХД является более близкой к реальной квантовой хромодинамике, нежели $\mathcal{N}=2$, и её изучение в непертурбативном режиме имеет большое теоретическое значение для понимания физики самой квантовой хромодинамики. Это является важнейшей мотивацией данной работы.

Основные результаты, полученные в данной работе, следующие:

1. Выведены суперориентационные моды неабелевой струны. Показано, что они становятся ненулевыми модами при введении μ- деформации.

2. Выведена низкоэнергетическая эффективная двумерная теория для суперориентационных мод при малых деформациях.

3. Полечены супертрансляционные моды струны в пределе больших деформаций.

4. Выведена низкоэнергетическая эффективная двумерная теория на неабелевой струне в пределе больших деформаций. Показано, что её фермионный сектор сводится к супертрансляционному.

Структура данной работы следующая. В главе 1 рассматривается основная $\mathcal{N}=2$ модель. В главе 2 представлено решение для неабелевой бозонной струны. Эти две главы содержат в большей степени уже ранее полученные результаты. В главе 3 я вывожу суперориентационные нулевые моды, начиная с $\mathcal{N}=2$ теории и переходя затем к деформированному $\mathcal{N}=1$ случаю; эффективное действие на мировом листе представлено в главе 4. Глава 5 посвящена выводу супертрансляционных нулевых мод, снова начиная с недеформированной теории и затем включая деформацию. Эффективное действие в супертрансляционном секторе выводится в главе 6. В конце этой главы представлен также основной результат: эффективное действие в пределе большого параметра деформации μ. Выводы представлены в Заключении. Некоторые детали вычислений суперориентационных нулевых мод приведены в Приложении.

1 Основная модель

Основной моделью, с которой начинается работа, является $\mathcal{N}=2$ суперсимметричная теория Янга-Миллса с калибровочной группой $\mathrm{SU}(N)\times\mathrm{U}(1)$. В данной главе я представлю лишь необходимые сведения, за деталями ссылаясь на [3, 4].

Бозонная часть действия рассматриваемой теории выглядит следующим образом: [1]

$$
\begin{aligned}
S_{\text{bos}} \;=\; \int d^4x \, \Bigg(& \frac{1}{2g_2^2}\mathrm{Tr}\,\left(F_{\mu\nu}^{\mathrm{SU}(N)}\right)^2 \;+\; \frac{1}{g_1^2}\left(F_{\mu\nu}^{\mathrm{U}(1)}\right)^2 \;+ \\
& \frac{2}{g_2^2}\mathrm{Tr}\,\left|\nabla_\mu a^{\mathrm{SU}(N)}\right|^2 \;+\; \frac{4}{g_1^2}\left|\partial_\mu a^{\mathrm{U}(1)}\right|^2 \;+\; \left|\nabla_\mu q^A\right|^2 \;+\; \left|\nabla_\mu \bar{\widetilde{q}}^A\right|^2 \;+ \\
& V(q^A, \widetilde{q}_A, a^{\mathrm{SU}(N)}, a^{\mathrm{U}(1)}) \Bigg) \, .
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь ∇_μ есть ковариантная производная в соответствующем представлении:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu^{\text{adj}} \;&=\; \partial_\mu \;-\; i\,[A_\mu^a T^a,\; \cdot\;]\;, \\
\nabla_\mu^{\text{fund}} \;&=\; \partial_\mu \;-\; i\,A_\mu^{\mathrm{U}(1)} \;-\; i\,A_\mu^a T^a\;,
\end{aligned}
$$

[1] Здесь и далее используется евклидова нотация, в которой $F_{\mu\nu}^2 = 2F_{0i}^2 + F_{ij}^2$, $(\partial_\mu a)^2 = (\partial_0 a)^2 + (\partial_i a)^2$, и т.д. Кроме того, сигма-матрицы определяются как $\sigma^{\alpha\dot{\alpha}} = (1, -i\vec{\tau})$, $\bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha} = (1, i\vec{\tau})$, где $\vec{\tau}$ есть набор из трёх матриц Паули. Поднятие и опускание индексов производится при помощи антисимметричного тензора $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1$, $\varepsilon^{12} = \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = -1$. Такие же правила поднятия и опускания индексов распространяются и на $\mathrm{SU}(N)$ индексы ароматов f, g и т.д.

и нормировка генераторов группы $\mathrm{SU}(N)$ выбрана в соответствии с правилом

$$\mathrm{Tr}\,\left(T^a T^b\right) \;=\; (1/2)\,\delta^{ab}\;.$$

Потенциал V в действии выводится из суперпотенциала

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=2} \;\;=\;\; \sqrt{2}\left\{\widetilde{q}_A \mathcal{A}^{\mathrm{U}(1)} q^A \;+\; \widetilde{q}_A \mathcal{A}^a T^a q^A\right\} \;+\; m_A\,\widetilde{q}_A q^A\;, \tag{1.2}$$

включающего в себя присоединённые $\mathcal{A}^{\mathrm{U}(1)}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{SU}(N)} = \mathcal{A}^a T^a$, являющиеся $\mathcal{N} = 2$ суперпартнёрами $\mathrm{U}(1)$ и $\mathrm{SU}(N)$ калибровочных мультиплетов. q^A и $\widetilde{q}_A$ есть мультиплеты кварков.

Массовый член для присоединённых полей, нарушающий суперсимметрию, происходит от суперпотенциала

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} \;\;=\;\; \sqrt{2N}\,\mu_1\left(\mathcal{A}^{\mathrm{U}(1)}\right)^2 \;\;+\;\; \frac{\mu_2}{2}\,(\mathcal{A}^a)^2\;. \tag{1.3}$$

Нашей целью является предел, когда значения параметров μ_1 и μ_2 велики.

Потенциал V в (1.1) даётся суммой F и D членов,

$$\begin{aligned}
V(q^A, \widetilde{q}_A, a^{\mathrm{SU}(N)}, a^{\mathrm{U}(1)}) \;\;&=\\
=\;\; &\frac{g_2^2}{2}\left(\frac{1}{g_2^2}\,f^{abc}\overline{a}^b a^c \;+\; \overline{q}_A\,T^a q^A \;-\; \widetilde{q}_A\,T^a \overline{\widetilde{q}}^A\right)^2\\
+\;\; &\frac{g_1^2}{8}\,(\overline{q}_A q^A \;-\; \widetilde{q}_A \overline{\widetilde{q}}^A)^2\\
+\;\; &2g_2^2\left|\widetilde{q}_A\,T^a q^A \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial \mathcal{W}_{\mathcal{N}=1}}{\partial a^a}\right|^2 \;+\; \frac{g_1^2}{2}\left|\widetilde{q}_A q^A \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\partial \mathcal{W}_{\mathcal{N}=1}}{\partial a^{\mathrm{U}(1)}}\right|^2\\
+\;\; &2\sum_{A=1}^{N}\left\{\left|\left(a^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \frac{m_A}{\sqrt{2}} \;+\; a^a T^a\right) q^A\right|^2 \;+\right.\\
&\qquad\left.\left|\left(a^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \frac{m_A}{\sqrt{2}} \;+\; a^a T^a\right) \overline{\widetilde{q}}^A\right|^2\right\},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся флейворным значкам A.

Некоторые поля имеют ненулевое вакуумное среднее значение:

$$\begin{gathered}
\langle q^{kA}\rangle \;=\; \sqrt{\frac{\xi}{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & ...\\ ... & ... & ...\\ ... & 0 & 1\end{pmatrix} \;=\; \langle\overline{\widetilde{q}}^{kA}\rangle\\
k \;=\; 1, \ldots N\;, \qquad A \;=\; 1, \ldots N\;,
\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\langle\Phi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{ccc} m_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & m_N \end{array}\right), \tag{1.6}$$

где матрица присоединённых скалярных полей определена как

$$\Phi = a + T^a\, a^a. \tag{1.7}$$

Для простоты я рассматриваю случай одинаковых ненулевых масс кварков

$$m_1 = m_2 = ... = m_N \equiv m. \tag{1.8}$$

На протяжении данной работы также для простоты часто подразумевается выполнение следующего тождества:

$$\mu_2 \;\;=\;\; \mu_1\sqrt{2/N} \;\;\equiv\;\; \mu\ , \tag{1.9}$$

так что

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} = \mu \mathrm{Tr}\,(\Phi^2) \tag{1.10}$$

а параметр в уравнении (1.5) есть

$$\xi \;\;=\;\; 2\mu m\ . \tag{1.11}$$

Ненулевое среднее (1.5) приводит к спонтанному нарушению как калибровочной, так и SU(N) симметрий, но таким образом, что ненарушенной остаётся их диагональная глобальная подгруппа:

$$\mathrm{U}(N)_{\mathrm{gauge}} \times \mathrm{SU}(N)_{\mathrm{flavor}} \to \mathrm{SU}(N)_{C+F}\ . \tag{1.12}$$

Таким образом, в вакууме теории имеет место сцепление цвета и аромата.

2 Бозонные решения в четырёхмерной теории

В этой главе рассматривается четырёхмерная теория в пределе малых значений параметра μ. В этом пределе массовый член для присоединённой материи сводится к ФИ F-члену (в лидирующем порядке по μ) и не нарушает суперсимметрию. Решения для вихрей в этом случае совпадают с приведёнными в [3, 4], и здесь я снова лишь приведу необходимые результаты.

Для полей скалярных кварков может быть использован следующий анзац:

$$q^{kA} = \bar{\tilde{q}}^{kA} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi^{kA}\ , \tag{2.1}$$

тогда как присоединённые поля a, a^a могут быть положены равными их вакуумным средним (1.7). В таких обозначениях исходное бозонное действие приобретает черезвычайно простой вид:

$$
S = \int \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{1}{4g_2^2} \left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{4g_1^2} \left(F_{\mu\nu}\right)^2 \right.
$$

$$
\left. + |\nabla_\mu \varphi^A|^2 + \frac{g_2^2}{2} \left(\bar{\varphi}_A T^a \varphi^A\right)^2 + \frac{g_1^2}{8} \left(|\varphi^A|^2 - N\xi\right)^2 , \right.
$$

Решение для струны в этом случае идентично выведенному в [3, 4] и может быть записано как

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \phi_2 + n\overline{n}\left(\phi_1 - \phi_2\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\phi_1 + (N-1)\phi_2\right) + \left(\phi_1 - \phi_2\right)\left(n\overline{n} - 1/N\right) , \\
A_i^{\mathrm{SU}(N)} &= \varepsilon_{ij}\, \frac{x^j}{r^2}\, f_N(r) \left(n\overline{n} - 1/N\right) , \qquad (2.2) \\
A_i^{\mathrm{U}(1)} &= \frac{1}{N}\varepsilon_{ij}\, \frac{x^j}{r^2}\, f(r) .
\end{aligned}
$$

Здесь индекс i пробегает значения 1, 2, а n^l есть ориентационные переменные, параметризующие вращения матрицами из $\mathrm{SU}(N)$. Если, скажем,

$$
\varphi = U \begin{pmatrix} \phi_2(r) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \phi_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \phi_1(r) \end{pmatrix} U^{-1} , \qquad (2.3)
$$

тогда n^l определяются при помощи соотношения

$$
\frac{1}{N} U \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -(N-1) \end{pmatrix} U^{-1} = -n^i\, \overline{n}_l + \frac{1}{N} \cdot \mathbf{1}^i{}_l , \qquad (2.4)
$$

где в левой части использованы матричные обозначения. Эти параметры удовлетворяют ограничениям

$$
\overline{n}_l \cdot n^l = 1 , \qquad (2.5)
$$

которые есть не что иное как $\mathrm{CP}(N\text{-}1)$ условие.

Функции $\phi_1(r)$ и $\phi_2(r)$ определяют профили скалярных кварков в плоскости, ортогональной струне в состоянии покоя, в то время как $f(r)$ и $f_{NA}(r)$ есть профили калибровочных полей. Они удовлетворяют уравнениям первого порядка, слеующим из уравнений БПС после подстановки вышеуказанного анзаца:

$$
\begin{aligned}
\partial_r \phi_1(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\;\Big(f(r) \;+\; (N-1) f_N(r)\Big)\;\phi_1(r) \;&=\; 0,\\
\partial_r \phi_2(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\;\Big(f(r) \;-\; f_N(r)\Big)\;\phi_2(r) \;&=\; 0,\\
\partial_r f(r) \;-\; r\,\frac{N g_1^2}{4}\;\Big((N-1)\phi_2(r)^2 \;+\; \phi_1(r)^2 \;-\; N\xi\Big) \;&=\; 0,\\
\partial_r f_N(r) \;-\; r\,\frac{g_2^2}{2}\;\Big(\phi_1(r)^2 \;-\; \phi_2(r)^2\Big) \;&=\; 0\;.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Граничные условия выбираются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\phi_1(0) \;=\; 0, \quad \phi_2(0) \;\neq\; 0, \quad \phi_1(\infty) \;=\; \sqrt{\xi}, \quad \phi_2(\infty) \;=\; \sqrt{\xi},\\
&f_N(0) \;=\; 1, \quad f(0) \;=\; 1, \quad f_N(\infty) \;=\; 0, \quad f(\infty) \;=\; 0.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Предположим теперь что ориентационные модули n^l больше не являются постоянными параметрами решения, а слабо зависят от координат x_0, x_3 на мировом листе струны. Тогда вертексное решение поменяется: компоненты 0, 3 калибровочного поля SU(N), обращающиеся до этого в ноль, теперь будут принимать нетривиальные значения:

$$
A_\mu^{\mathrm{SU}(N)} \;=\; i\;[\,n\overline{n}, \partial_\mu(n\overline{n})\,]\,\rho(r)\;, \qquad\qquad \mu \;=\; 0, 3\;.
$$

Здесь $\rho(r)$ есть соответствующая профильная функция, которая может быть определена при помощи процедуры минимизации [3, 4] и равняется

$$
\rho(r) \;=\; 1 \;-\; \frac{\phi_1}{\phi_2}\;.
$$

Подставляя бозонные анзацы в действие (1.1) и интегрируя по координатам x_1, x_2 (координаты в ортогональной к струне плоскости), приходим к двумерной CP(N-1) модели:

$$
S_{\mathrm{bos}}^{1+1} \;=\; 2\beta\int dt\,dz \Big\{\,\big|\partial n^l\big|^2 \;+\; (\overline{n}\partial_k n)^2\,\Big\}
\tag{2.8}
$$

с константой взаимодействия

$$
\beta \;=\; \frac{2\pi}{g_2^2}\,.
\tag{2.9}
$$

3 Фермионные ноль-моды: суперориентационный сектор

В данной главе я рассматриваю нулевые моды, которые будут нужны для построения эффективного действия. Сперва рассматривается случай $\mathcal{N}=2$, затем $\mathcal{N}=1$ теории в пределе малых значений параметра деформации.

3.1 Решения недеформированной теории

Для того, чтобы вывести фермионную часть эффективной теории, необходимо получить ноль-моды исходной четырёхмерной теории. В случае числа цветов $N = 2$ это было сделано в работе [6], и здесь я представляю обобщение на случай произвольного N.

Фермионная часть теории (1.1) записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4\mathrm{d}} \;=\;& \frac{2i}{g_2^2}\mathrm{Tr}\,\overline{\lambda_f^{\mathrm{SU}(N)}\not{\mathcal{D}}}\lambda^{f\,\mathrm{SU}(N)} \;+\; \frac{4i}{g_1^2}\overline{\lambda_f^{\mathrm{U}(1)}\not{\partial}}\lambda^{f\,\mathrm{U}(1)} \;+\; \mathrm{Tr}\; i\,\overline{\psi\nabla}\psi \;+\; \mathrm{Tr}\; i\,\widetilde{\psi}\nabla\overline{\widetilde{\psi}} \\
&+\; i\sqrt{2}\,\mathrm{Tr}\;\left(\overline{q}_f\lambda^{f\,\mathrm{U}(1)}\psi \;+\; \widetilde{\psi}\lambda_f^{\mathrm{U}(1)}q^f \;+\; \overline{\psi\lambda_f^{\mathrm{U}(1)}}q^f \;+\; \overline{q^f\lambda_f^{\mathrm{U}(1)}\widetilde{\psi}}\right) \\
&+\; i\sqrt{2}\,\mathrm{Tr}\;\left(\overline{q}_f\lambda^{f\,\mathrm{SU}(N)}\psi \;+\; \widetilde{\psi}\lambda_f^{\mathrm{SU}(N)}q^f \;+\; \overline{\psi\lambda_f^{\mathrm{SU}(N)}}q^f \;+\; \overline{q^f\lambda_f^{\mathrm{SU}(N)}\widetilde{\psi}}\right) \\
&+\; i\sqrt{2}\,\mathrm{Tr}\;\widetilde{\psi}\left(a^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \frac{m_A}{\sqrt{2}} \;+\; a^{\mathrm{SU}(N)}\right)\psi \;+\; i\sqrt{2}\,\mathrm{Tr}\;\overline{\psi}\left(\overline{a}^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \frac{m_A}{\sqrt{2}} \;+\; \overline{a}^{\mathrm{SU}(N)}\right)\overline{\widetilde{\psi}} \\
&-\; 2\sqrt{\frac{N}{2}}\mu_1\left(\left(\lambda^{2\,\mathrm{U}(1)}\right)^2 \;+\; \left(\overline{\lambda}_2^{\mathrm{U}(1)}\right)^2\right) \;-\; \mu_2\mathrm{Tr}\left(\left(\lambda^{2\,\mathrm{SU}(N)}\right)^2 \;+\; \left(\overline{\lambda}_2^{\mathrm{SU}(N)}\right)^2\right)\,.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Производные с чертой, такие как $\bar{\nabla}$, означают свёртку с $\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}$ а не с $\sigma^{\alpha\dot{\alpha}}_{\mu}$. Для фермионов в пространстве цвет-флейвор используются матричные обозначения, и следы берутся по соответствующим значкам. Индекс f есть $\mathrm{SU}(2)_R$ индекс $\mathcal{N} = 2$ теории, и $q^f \;=\; (q, \overline{\widetilde{q}})$. Стоит отметить, что нарушающий суперсимметрию массовы член присутствует только для $f = 2$ калибровочных суперпартнёров. Свёртка спинорных значков производится по следующим правилам:

$$
\lambda\psi \;=\; \lambda_{\alpha}\,\psi^{\alpha}\,, \qquad \overline{\lambda\psi} \;=\; \overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}\,\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\,.
$$

Соответствующие уравнения Дирака записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{4i}{g_1^2}\left(\overline{\partial}\lambda^{f\mathrm{U}(1)}\right) \;+\; i\sqrt{2}\,\mathrm{Tr}\,\left(\overline{\psi}q^f \;+\; \overline{q}^f\overline{\widetilde{\psi}}\right) \;-\; 4\,\delta_2{}^f\sqrt{\frac{N}{2}}\mu_1\,\overline{\lambda}_2^{U(1)} \;=\; 0\,,\\
&\frac{i}{g_2^2}\left(\overline{\mathcal{D}}\lambda^{f\mathrm{SU}(N)}\right)^a \;+\; i\sqrt{2}\,\mathrm{Tr}\,\left(\overline{\psi}T^aq^f \;+\; \overline{q}^fT^a\overline{\widetilde{\psi}}\right) \;-\; \delta_2{}^f\mu_2\,\overline{\lambda}_2^{a\mathrm{SU}(N)} \;=\; 0\,,\\
&-i\,\overline{\psi}\overleftarrow{\overline{\nabla}} \;+\; i\sqrt{2}\left(\overline{q}_f\left\{\lambda^{f\mathrm{U}(1)}+\lambda^{f\mathrm{SU}(N)}\right\} \;+\; \widetilde{\psi}\left\{\overline{a}^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \frac{m_A}{\sqrt{2}} \;+\; \overline{a}^{\mathrm{SU}(N)}\right\}\right) \;=\; 0\,,\\
&i\,\nabla\overline{\widetilde{\psi}} \;+\; i\sqrt{2}\left(\left\{\lambda_f^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \lambda_f^{\mathrm{SU}(N)}\right\}q^f \;+\; \left\{\overline{a}^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \frac{m_A}{\sqrt{2}} \;+\; \overline{a}^{\mathrm{SU}(N)}\right\}\psi\right) \;=\; 0\,,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
&i\overline{\nabla}\psi \;+\; i\sqrt{2}\left(\left\{\overline{\lambda}_f^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \overline{\lambda}_f^{\mathrm{SU}(N)}\right\}q^f \;+\; \left\{a^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \frac{m_A}{\sqrt{2}} \;+\; a^{\mathrm{SU}(N)}\right\}\overline{\widetilde{\psi}}\right) \;=\; 0\,,\\
&-i\,\widetilde{\psi}\overleftarrow{\overline{\nabla}} \;+\; i\sqrt{2}\left(\overline{q}^f\left\{\overline{\lambda}_f^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \overline{\lambda}_f^{\mathrm{SU}(N)}\right\} \;+\; \overline{\psi}\left\{a^{\mathrm{U}(1)} \;+\; \frac{m_A}{\sqrt{2}} \;+\; a^{\mathrm{SU}(N)}\right\}\right) \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Рассматриваемое решение для струны есть 1/2 БПС; это означает, что половина суперзарядов в этой теории обнуляет решение (2.2). Оставшиеся суперзаряды генерируют нетривиальные моды (супертрансляционные моды), являющиеся суперпартнёрами двух трансляционных мод.

Преобразования суперсимметрии четырёх мерной теории выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta\lambda^{\alpha f} &= \frac{1}{2}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\epsilon^f)^\alpha F_{\mu\nu} + \epsilon^{\alpha p}F^m(\tau^m)_p^f \;+\ldots,\\
\delta\lambda^{a\alpha f} &= \frac{1}{2}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\epsilon^f)^\alpha F^a_{\mu\nu} + \epsilon^{\alpha p}F^{am}(\tau^m)_p^f \;+\ldots,\\
\delta\bar{\tilde{\psi}}^{kA}_{\dot\alpha} &= i\sqrt{2}\;\bar{\nabla}_{\dot\alpha\alpha}q_f^{kA}\epsilon^{\alpha f} \;+\cdots,\\
\delta\bar{\psi}_{\dot\alpha Ak} &= i\sqrt{2}\;\bar{\nabla}_{\dot\alpha\alpha}\bar{q}_{fAk}\epsilon^{\alpha f} \;+\cdots.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ФИ F-члены в этом выражении есть

$$F^1 + iF^2 = -\,i\,\frac{g_1^2}{4}\,\left(\mathrm{Tr}\,|\varphi|^2 - N\xi\right)\,, \qquad F^3 = 0 \tag{3.4}$$

для полей U(1), и

$$F^{a1} + iF^{a2} = -\,i\,g_2^2\,\mathrm{Tr}\,\left(\bar{\varphi}T^a\varphi\right)\,, \qquad F^{a3} = 0 \tag{3.5}$$

для полей SU(N). Точки в (3.3) обозначают слагаемые с присоединёнными скалярными полями и равны нулю на нашем решении для струны (в пределе равных масс кварков), так как присоединённые поля равны своим вакуумным средним (1.6).

Как уже было упомянуто выше, четыре суперзаряда этой теории действую тривиально на статическое решение для струны. Для того чтобы сгенерировать суперориентационные моды я следую работе [6]. Рассмотрим ориентационные модули n^l и предположим, что они слабо зависят от координат на мировом листе струны. Тогда ориентационные ноль-моды могут быть сгенерированы преобразованиями суперсимметрии, ассоциированным с параметрами, подчиняющимися условиям

$$\epsilon^{21} \;=\; \epsilon^{22}, \qquad\qquad \epsilon^{11} \;=\; -\epsilon^{12}\;.$$

При помощи уравнений для профилей (2.6) легко приходим к

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}_{\dot{\alpha}Ak} &= 2i\,\delta_{\dot{\alpha}}^{\;\dot{2}}\,\frac{\phi_1^2\;-\;\phi_2^2}{\phi_2}\cdot n\overline{n}\,\partial_L(n\overline{n})\cdot\epsilon^{21}\;,\\
\overline{\widetilde{\psi}}{}^{kA}_{\dot{\alpha}} &= -\,2i\,\delta_{\dot{\alpha}}^{\;\dot{1}}\,\frac{\phi_1^2\;-\;\phi_2^2}{\phi_2}\cdot\partial_R(n\overline{n})\,n\overline{n}\cdot\epsilon^{12}\;,\\
\lambda^{11\;\mathrm{SU}(N)} &= -\,2\,\frac{\phi_1}{\phi_2}\,f_N\,\frac{x^1-i\,x^2}{r^2}\cdot n\overline{n}\,\partial_L(n\overline{n})\cdot\epsilon^{21}\\
\lambda^{22\;\mathrm{SU}(N)} &= 2\,\frac{\phi_1}{\phi_2}\,f_N\,\frac{x^1+i\,x^2}{r^2}\cdot\partial_R(n\overline{n})\,n\overline{n}\cdot\epsilon^{12}\\
\lambda^{12\;\mathrm{SU}(N)} &= \lambda^{11\;\mathrm{SU}(N)}\,,\qquad \lambda^{21\;\mathrm{SU}(N)} \;=\; -\,\lambda^{22\;\mathrm{SU}(N)}\,,
\end{aligned}$$

где верхние значки записаны в порядке $\lambda^{\alpha f}$, а производные

$$\partial_R \;=\; \partial_0\;+\;i\,\partial_3\;,\qquad\qquad \partial_L \;=\; \partial_0\;-\;i\,\partial_3\;.$$

В терминах двумерной суперсимметрии,

$$\begin{aligned}
i\sqrt{2}\partial_R(n\bar{n})n\bar{n}\frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^{12}-\epsilon^{11}) = \xi_R\bar{n}\;,\\
i\sqrt{2}(n\bar{n})\partial_L n\bar{n}\frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^{21}+\epsilon^{22}) = n\bar{\xi}_L\;,
\end{aligned}$$

и ноль-моды могут быть переписаны в виде

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi}_{\dot{2}Ak} &= \frac{\phi_1^2 \; - \; \phi_2^2}{\phi_2} \cdot n\bar{\xi}_L \;, \\
\overline{\widetilde{\psi}}{}_{\dot{1}}^{kA} &= -\,\frac{\phi_1^2 \; - \; \phi_2^2}{\phi_2} \cdot \xi_R \bar{n} \;, \\
\lambda^{11\ \mathrm{SU}(N)} &= i\frac{\phi_1}{\phi_2}\, f_N\, \frac{x^1 - i\,x^2}{r^2} \cdot n\bar{\xi}_L \\
\lambda^{22\ \mathrm{SU}(N)} &= -\,i\frac{\phi_1}{\phi_2}\, f_N\, \frac{x^1 + i\,x^2}{r^2} \cdot \xi_R \bar{n} \\
\lambda^{12\ \mathrm{SU}(N)} &= \lambda^{11\ \mathrm{SU}(N)}\,, \qquad \lambda^{21\ \mathrm{SU}(N)} \;=\; -\,\lambda^{22\ \mathrm{SU}(N)}\,,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Переменные $\xi_{R,L}$ подчинены условиям, являющимися суперсимметричным обобщением $\mathrm{CP}(N-1)$ условия $|n|^2 = 1$:

$$
\overline{n}_l\, n^l \;=\; 1\,, \qquad\qquad \overline{n}_l\, \xi^l \;=\; \overline{\xi}_l\, n^l \;=\; 0\;, \tag{3.7}
$$

Разумеется, полученные моды должны удовлетворять уравнениям Дирака (3.2). Используя уравнения для профильных функций (2.6), после громоздких вычислений мне удалось убедиться, что это действительно так.

3.2 Разложение по малому параметру μ

При включении массового члена для $f = 2$ калибровочных суперпартнёров (см. последнюю строчку в (3.1)), теория становится $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной, и половина супер зарядов теряется. Больше не остаётся суперпреобразований, действующих тривиально на статическое решение для струны (эти суперпреобразования были использованы в выводе суперориентационных мод в предыдущей главе). Струна больше не является БПС-решением. Поэтому, вообще говоря, для нахождения ноль-мод нужно решать уравнения Дирака. Упрощающим обстоятельством является то, что в пределе малых значений параметра μ можно воспользоваться теорией возмущений. Сейчас мы ограничимся рассмотрением именно этого предела.

По аналогии с методом, использованным в [14], попытаемся угадать подходящий анзац:

$$
\begin{aligned}
\lambda^{1f\ \mathrm{SU}(N)} &= 2\,\frac{x^1 - ix^2}{r}\,\lambda_+^{1f}(r)\; n\overline{\xi_L} \;\;+\;\; 2\,\lambda_-^{1f}(r)\; \xi_L \overline{n}\,, \\
\lambda^{2f\ \mathrm{SU}(N)} &= 2\,\frac{x^1 + ix^2}{r}\,\lambda_+^{2f}(r)\; \xi_R \overline{n} \;\;+\;\; 2\,\lambda_-^{2f}(r)\; n\overline{\xi}_R\,,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}} &= 2\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}+}(r)\,\xi_R\overline{n} \;+\; 2\,\frac{x^1 - ix^2}{r}\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}-}(r)\,n\overline{\xi}_R\,. \\
\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}} &= 2\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}+}(r)\,n\overline{\xi_L} \;+\; 2\,\frac{x^1 + ix^2}{r}\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r)\,\xi_L\overline{n}\,. \\
\overline{\psi}_{\dot{1}} &= 2\,\overline{\psi}_{\dot{1}+}(r)\,\xi_R\overline{n} \;+\; 2\,\frac{x^1 - ix^2}{r}\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r)\,n\overline{\xi}_R\,. \\
\overline{\psi}_{\dot{2}} &= 2\,\overline{\psi}_{\dot{2}+}(r)\,n\overline{\xi_L} \;+\; 2\,\frac{x^1 + ix^2}{r}\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r)\,\xi_L\overline{n}\,.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Здесь $\lambda_+(r)$ и $\psi_+(r)$ представляют собой «недеформированные» профильные функции в том смысле, что только они присутствуют в случае $\mathcal{N} = 2$ теории. Функции $\lambda_-(r)$ и $\psi_-(r)$ есть «возмущения», возникающие при разрушении суперсимметрии. Разумеется, эти названия имеют смысл только в пределе малых μ, когда «-» -компоненты действительно малы (порядка μ).

Для того чтобы вывести уравнения для введённых фермионных профильных функций, следует подставить этот анзац в уравнения Дирака (3.2). Эта задача является всего лишь технической и не представляет особого труда; результат в виде 16 уравнений приведёт в Приложении A.1.

Решения для «+» -компонент могут быть найдены (с точностью до членов порядка $O(\mu^2)$) из (3.6):

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi}_{\dot{1}+} &= 0, \\
\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}+} &= 0, \\
\overline{\psi}_{\dot{2}+} &= \frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{2\phi_2}, \\
\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}+} &= -\frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{2\phi_2},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$
\lambda_+^{11\ \mathrm{SU}(N)} = i\frac{\phi_1}{2r\phi_2}\,f_N \tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_+^{22\ \mathrm{SU}(N)} &= -\,i\frac{\phi_1}{2r\phi_2}\,f_N \\
\lambda_+^{12\ \mathrm{SU}(N)} &= \lambda_+^{11\ \mathrm{SU}(N)}, \qquad \lambda_+^{21\ \mathrm{SU}(N)} = -\,\lambda_+^{22\ \mathrm{SU}(N)}.
\end{aligned}
$$

Это действительно так, потому что бозонные профильные функции приобретают поправки только порядка $O(\mu^2)$. Легко проверить, что функции (3.11) действительно удовлетворяют соответствующим уравнениям, приведённым в Приложении.

Рассмотрим теперь уравнения для поправочных «-» -компонент. Половина из них очень похожа на найденные в [14] профили. Скажем, если обозначить

$$\lambda_-^{22} - \lambda_-^{21} \equiv \lambda_- \,,$$

то соответствующие уравнения с функцией λ_- (в пределе малых μ) выглядят следующим образом:

$$\partial_r \overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\left(f + f_N(N-1)\right)\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \;+\; i\phi_2\,\lambda_- \;=\; 0 \qquad (3.12)$$

$$-\,\partial_r\lambda_- \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda_- \;+\; i\,g_2^2\phi_2\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \;-\; \mu_2 g_2^2\,\frac{i}{2}\frac{f_N}{r}\frac{\phi_1}{\phi_2} \;=\; 0 \qquad (3.13)$$

Эти уравнения с точностью до числовых коэффициентов совпадают с написанными в [14]. В самом деле, можно взять решения, полученные в этой работе, и лишь немного их изменить:

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-} \;&=\; -\,\mu_2 g_2^2\frac{r}{8\phi_1}\left(\phi_1^2 \;-\; \phi_2^2\right) \;+\; O(\mu^3)\,, \\
\lambda_- \;=\; \lambda_-^{22} - \lambda_-^{21} \;&=\; -\,\mu_2 g_2^2\frac{i}{4}\left((f_N - 1)\frac{\phi_2}{\phi_1} \;+\; \frac{\phi_1}{\phi_2}\right) \;+\; O(\mu^3)\,, \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

так что они удовлетворяют уравнениям (3.12) и (3.13). Такой же трюк проходит для ещё одной пары уравнений, и

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}_{\dot{2}-} \;&=\; \mu_2 g_2^2\frac{r}{8\phi_1}\left(\phi_1^2 \;-\; \phi_2^2\right) \;+\; O(\mu^3)\,, \\
\lambda_-^{12} \;+\; \lambda_-^{11} \;&=\; \mu_2 g_2^2\frac{i}{4}\left((f_N - 1)\frac{\phi_2}{\phi_1} \;+\; \frac{\phi_1}{\phi_2}\right) \;+\; O(\mu^3)\,. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Но для оставшихся уравнений всё уже не так просто. Обозначая

$$\lambda_-^{22} + \lambda_-^{21} \equiv \lambda_{(1)}\,,$$

получим:

$$\begin{aligned}
\partial_r\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{Nr}(f - f_N)\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; i\phi_1\,\lambda_{(1)} \;&=\; 0\,, \\
-\,\partial_r\lambda_{(1)} \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda_{(1)} \;+\; i\,g_2^2\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;-\; \mu_2 g_2^2\,\frac{i}{2}\frac{f_N}{r}\frac{\phi_1}{\phi_2} \;&=\; 0.
\end{aligned} \qquad (3.16)$$

И здесь начинаются сложности. До сих пор наши решения представляли собой некоторые алгебраические комбинации бозонных профильных функций. Однако, для компонент $\overline{\psi}_{\dot{1}-}$ и $\lambda_{(1)}$ это уже не будет так, и скоро мы в этом убедимся.

После подстановки

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_{\mathrm{i}-}(r) &= \frac{1}{r\phi_2(r)}\Psi(r), \\ \lambda_{(1)}(r) &= ig_2^2\Lambda(r) \end{aligned}$$

уравнения (3.16) приводятся к

$$\begin{aligned} \frac{1}{rg_2^2\phi_1\phi_2}\partial_r\Psi &= \Lambda\,, \\ r\partial_r\Lambda + f_N\Lambda - \frac{\phi_1}{\phi_2}\Psi &= -\frac{\mu_2 f_N}{2}\frac{\phi_1}{\phi_2}\,, \end{aligned} \tag{3.17}$$

откуда, в свою очередь, нетрудно получить уравнение второго порядка для Ψ:

$$\partial_r^2\Psi - \frac{1}{r}\left(1 + \frac{2}{N}(f - f_N)\right)\partial_r\Psi - g_2^2\phi_1^2\Psi = -\frac{\mu_2 f_N}{2}g_2^2\phi_1^2\,. \tag{3.18}$$

При попытке найти решение системы (3.16) в виде алгебраической комбинации функций $\phi_1,\ \phi_2,\ f_N$ неизбежно следует, что такое решение существует лишь для однородной версии (3.16). Это решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_{\mathrm{i}-} &= c\frac{f_N}{r\phi_2}, \\ \lambda_{(1)} &= c\frac{ig_2^2}{2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1}\right). \end{aligned}$$

с произвольной постоянной c. Этому соответствует $\Psi = f_N$; и действительно, такая функция есть решение однородной версии уравнения (3.18). С его помощью можно свести это уравнение к уравнению первого порядка. Пусть

$$\Psi(r) = \mu_2\, f_N(r)\left(\int_0^r \mathrm{d}x\,\chi(x) + c_1\right),$$

с некоторой константой c_1, тогда из (3.18) следует, что

$$\partial_r\chi + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{f_N}r^2 g_2^2(\phi_1^2 - \phi_2^2) - 1 - \frac{2}{N}(f - f_N)\right)\chi = -\frac{1}{2}g_2^2\phi_1^2\,. \tag{3.19}$$

Решить получившееся уравнение первого порядка не составляет труда; его решение есть

$$\chi = -\frac{g_2^2 r\phi_2^2}{2f_N^2}\left(\int_0^r \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{\phi_1^2}{\phi_2^2}f_N^2 + c_2\right). \tag{3.20}$$

Собирая всё вместе, получим:

$$\overline{\psi}_{\mathrm{i}-}(r) \;=\; -\,\mu_2\,g_2^2\,\frac{f_N(r)}{r\phi_2(r)}\left(\int\limits_0^r \mathrm{d}x\,\frac{x\phi_2^2(x)}{2f_N^2(x)}\left(\int\limits_0^x \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)}f_N^2(y) \;+\; c_2\right)+c_1\right). \tag{3.21}$$

с некоторой новой постоянной c_1.

Для того, чтобы это решение вело себя удовлетворительно в нуле (несингулярно), следует положить $c_1 \;=\; 0$. Для убывания на бесконечности необходимо также положить

$$c_2 \;=\; -\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)}f_N^2(y).$$

так что

$$\overline{\psi}_{\mathrm{i}-}(r) \;=\; \frac{\mu_2\,g_2^2}{2}\,\frac{f_N(r)}{r\phi_2(r)}\int\limits_0^r \mathrm{d}x\,\frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)}\int\limits_x^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)}f_N^2(y). \tag{3.22}$$

Их уравнений для бозонных профилей может быть получено их асимптотическое поведение:

$$\ln f_N(r) \sim -\,r\,g_2\sqrt{\xi}, \quad r \to \infty,$$

из которого следует, что при больших r решение (3.22) спадает экспоненциально.

Запишем решение для калибровочных суперпартнёров:

$$\begin{aligned}\lambda_{(1)}(r) \;&\equiv\; \lambda_-^{22} \;+\; \lambda_-^{21} \;= \\ &=\; \frac{i\,\mu_2\,g_2^2}{2}\left(\frac{g_2^2}{2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \;-\; \frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\int\limits_0^r \mathrm{d}x\,\frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)}\int\limits_x^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)}f_N^2(y)\right. \\ &\qquad\left. +\;\frac{\phi_2}{\phi_1 f_N}\int\limits_r^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)}f_N^2(y)\right).\end{aligned} \tag{3.23}$$

Прямой подстановкой мне удалось проверить, что моды (3.22) и (3.23) в самом деле удовлетворяют уравнениям (3.16). Заметим, что решение (3.23) убывает на бесконечности, тогда как в нуле оно сингулярно как $1/r$.

Следуя точно так же, получаем для двух оставшихся мод

$$
\begin{aligned}
\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r) &= -\frac{\mu_2\, g_2^2}{2}\,\frac{f_N(r)}{r\phi_2(r)}\int\limits_0^r \mathrm{d}x\,\frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)}\int\limits_x^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_N^2(y)\,,\\
\lambda_-^{12} - \lambda_-^{11} &= -\frac{i\,\mu_2\, g_2^2}{2}\left(\frac{g_2^2}{2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\int\limits_0^r \mathrm{d}x\,\frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)}\int\limits_x^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_N^2(y)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{\phi_2}{\phi_1 f_N}\int\limits_r^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_N^2(y)\right).
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

3.3 Квазинулевые моды

Так комбинации $(\lambda_-^{22} + \lambda_-^{21})$ и $(\lambda_-^{12} - \lambda_-^{11})$ ведут себя в окрестности нуля как $1/r$, они не нормируемы. Это означает, что фермионных нулевых мод больше нет. Вместо этого они могут быть «подняты», то есть, они являются собственным функциями оператора Дирака с ненулевыми собственными значениями. Изучим подробнее эту возможность. Для этого рассмотрим уравнение на собственные состояния оператора Дирака:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\psi} &= -i\,\overline{\psi}\overleftarrow{\overline{\nabla\!\!\!/}} + i\sqrt{2}\Big(\overline{q}_f\left\{\lambda^{f\mathrm{U}(1)} + \lambda^{f\mathrm{SU}(N)}\right\}\\
&\qquad + \widetilde{\psi}\left\{\overline{a}^{\mathrm{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \overline{a}^{\mathrm{SU}(N)}\right\}\Big) = -\mu_2\alpha\,\widetilde{\psi}\,,
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\widetilde{\psi}} &= i\,\nabla\!\!\!/\,\overline{\widetilde{\psi}} + i\sqrt{2}\Big(\left\{\lambda_f^{\mathrm{U}(1)} + \lambda_f^{\mathrm{SU}(N)}\right\} q^f\\
&\qquad + \left\{\overline{a}^{\mathrm{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \overline{a}^{\mathrm{SU}(N)}\right\}\psi\Big) = -\mu_2\beta\,\psi\,.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

где константы α, β будут определены из условия нормируемости полученных решений.

Действуя так же, как в предыдущей главе, приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
\partial_r\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) + \frac{1}{r}\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) + \frac{1}{Nr}(f - f_N)\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) + i\phi_1\,\lambda_{(1)} &= \mu_2\alpha\,\frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{2\phi_2}\,,\\
-\partial_r\lambda_{(1)} - \frac{f_N}{r}\lambda_{(1)} + i\,g_2^2\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) - \mu_2 g_2^2\,\frac{i}{2}\,\frac{f_N}{r}\,\frac{\phi_1}{\phi_2} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Для решения этих уравнений рассмотрим некоторое обобщения системы (3.27), а именно:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r g_2^2 \phi_1 \phi_2} \partial_r \Psi &= \Lambda + F\,, \\
r\partial_r \Lambda \;+\; f_N \Lambda \;-\; \frac{\phi_1}{\phi_2}\Psi &= G\,,
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

где $F(r), G(r)$ — некоторые заданные функции. Из этой системы получается уравнение второго порядка для Ψ:

$$
\partial_r^2 \Psi \;-\; \frac{1}{r}\left(1 \;+\; \frac{2}{N}(f - f_N)\right)\partial_r \Psi \;-\; g_2^2 \phi_1^2 \Psi \;=\; H\,. \tag{3.29}
$$

где $H = g_2^2 \phi_1 \phi_2 (G + f_N F + rF')$, штрих обозначает производную по r. После подстановки

$$
\Psi \;=\; f_N \left(c_1 \;+\; \int\limits_0^r \mathrm{d}x\, \chi(x) \right) \tag{3.30}
$$

это уравнение сводится к

$$
\partial_r \chi \;+\; \left(2\frac{f_N'}{f_N} \;-\; \frac{1}{r}\left(1 \;+\; \frac{2}{N}(f - f_N)\right)\right)\chi \;=\; \frac{H}{f_N}\,. \tag{3.31}
$$

Решение может быть написано в виде

$$
\chi \;=\; \frac{r\phi_2^2}{f_N^2}\left(c_2 \;-\; \int\limits_r^\infty \mathrm{d}y \frac{H f_N}{y\phi_2^2}\right), \tag{3.32}
$$

откуда легко получается решение исходного уравнения:

$$
\overline{\psi}_{\mathrm{i}-}(r) \;=\; \frac{f_N(r)}{r\phi_2(r)}\left(c_1 \;+\; \int\limits_0^r \mathrm{d}x \frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)}\left(c_2 \;-\; \int\limits_x^\infty \mathrm{d}y \frac{f_N(y)}{y\phi_2^2(y)} H(y)\right)\right) \tag{3.33}
$$

В нашем случае,

$$
\begin{aligned}
G &= -\frac{\mu_2}{2} f_N \frac{\phi_1}{\phi_2}\,, \\
F &= \frac{\mu_2 \alpha}{2 g_2^2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \;-\; \frac{\phi_2}{\phi_1}\right), \\
H &= \mu_2 \left(\alpha - \frac{g_2^2}{2}\right) f_N \phi_1^2\,.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Для того, чтобы обеспечить нужное поведение функции $\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r)$ в нуле и на бесконечности, нужно положить $c_1 = c_2 = 0$, так что

$$\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;=\; -\mu_2\left(\alpha - \frac{g_2^2}{2}\right)\frac{f_N(r)}{r\phi_2(r)}\int\limits_0^r \mathrm{d}x \frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)}\int\limits_x^\infty \mathrm{d}y \frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)} \tag{3.35}$$

Легко вычислить после этого $\lambda_{(1)}$:

$$\begin{aligned}\lambda_{(1)}(r) \;&=\; -ig_2^2F(r) + \frac{i}{r\phi_1\phi_2}\,\Psi' \\ &= -i\frac{\mu_2\alpha}{2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1}\right) - ig_2^2\mu_2\left(\alpha - \frac{g_2^2}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\times \\ &\int\limits_0^r \mathrm{d}x\frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)}\int\limits_x^\infty \mathrm{d}y\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)} - i\mu_2\left(\alpha - \frac{g_2^2}{2}\right)\frac{\phi_2}{f_N\phi_1}\int\limits_r^\infty \mathrm{d}y\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)}\end{aligned} \tag{3.36}$$

Можно заметить, что первое и последнее слагаемые в этой формуле расходятся в нуле как $1/r$. Следует выбрать значение параметра α так, чтобы эта расходимость сократилась. Подставляя явные выражения для функций F, H и извлекая расходящуюся часть, получаем, что для сокращения расходимости должно быть выполнено следующее соотношение:

$$\alpha \;-\; 2\left(\alpha - \frac{g_2^2}{2}\right)\int\limits_0^\infty \mathrm{d}y\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)} \;=\; 0, \tag{3.37}$$

откуда следует, что

$$\alpha \;=\; -\frac{g_2^2\displaystyle\int\limits_0^\infty \mathrm{d}y\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)}}{1 \;-\; 2\displaystyle\int\limits_0^\infty \mathrm{d}y\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)}}. \tag{3.38}$$

Рассматривая уравнение (A.14) и (A.20) минус (A.12), можно пройти через те же шаги и получить

$$\partial_r\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \frac{1}{Nr}(f - f_N)\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;+\; i\phi_1\,\lambda_{(2)} \;=\; \mu_2\beta\,\frac{\phi_1^2 \;-\; \phi_2^2}{2\phi_2}\,, \tag{3.39}$$

$$-\;\partial_r\lambda_{(2)} \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda_{(2)} \;+\; i\,g_2^2\phi_1\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;-\; \mu_2 g_2^2\,\frac{i}{2}\,\frac{f_N}{r}\,\frac{\phi_1}{\phi_2} \;=\; 0\,, \tag{3.40}$$

где $\lambda_{(2)} \;=\; \lambda_{-}^{12} \;-\; \lambda_{-}^{11}$. Легко видеть, что полученные уравнения идентичны уравнениям (3.27), так что из решения те же самые:

$$\beta \;=\; \alpha\,, \tag{3.41}$$

$$\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;=\; -\mu_2\left(\alpha-\frac{g_2^2}{2}\right)\frac{f_N(r)}{r\phi_2(r)}\int\limits_0^r \mathrm{d}x\frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)}\int\limits_x^\infty \mathrm{d}y\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)}\,, \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{(2)}(r) \;=\; & -i\frac{\mu_2\alpha}{2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\;-\;\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\;-\;ig_2^2\mu_2\left(\alpha-\frac{g_2^2}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\;-\;\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\times\\ &\int\limits_0^r \mathrm{d}x\frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)}\int\limits_x^\infty \mathrm{d}y\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)}\;-\;i\mu_2\left(\alpha-\frac{g_2^2}{2}\right)\frac{\phi_2}{f_N\phi_1}\int\limits_r^\infty \mathrm{d}y\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)}\,.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Тот факт, что нижние по энергии фермионные моды удовлетворяют уравнениям (3.25) и (3.26) а не исходным уравнениям Дирака, говорит о том, что после нарушения суперсимметрии эти моды поднимаются. Как будет показано в следующей главе, это обстоятельство приведёт к появлению массового члена в эффективном действии.

4 Эффективное действие в ориентационном секторе

В этой главе я выведу эффективное двумерное действие в ориентационном секторе в первом порядке по параметру μ. С этой целью подставим сперва анзац (3.8), (3.9) в лагранжиан теории (3.1). Кинетические члены для четырёхмерных фермионов (то есть их часть с производными ∂_0 и ∂_3) даст кинетический член для двумерных фермионов; получим:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{2d}} \;=\; \gamma_1\,(\bar{\xi}_L i\partial_R\xi_L \;+\; \bar{\xi}_R i\partial_L\xi_R), \tag{4.1}$$

Здесь подразумевается, что в действии фермионные множители могут быть переставлены друг с другом по следующим правилам:

$$\xi_R i\partial_L\bar{\xi}_R \;=\; \bar{\xi}_R i\partial_L\xi_R, \tag{4.2}$$

$$\xi_R\bar{\xi}_L \;=\; -\bar{\xi}_L\xi_R \tag{4.3}$$

В первом порядке по μ,

$$\gamma_1 \;=\; \frac{8}{g_2^2}\int dx_1dx_2\,|\lambda_+^{1f}|^2 \;+\; 4|\overline{\psi}_{\dot{2}+}|^2, \tag{4.4}$$

суммирование по f подразумевается. После подстановки явных решений для фермионных профилей этот коэффициент может быть сведён к интегралу от полной производной, что даёт

$$\gamma_1 \;=\; \frac{4\pi}{g_2^2}\,. \tag{4.5}$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с результатом, приведённым в [14] (см. формулу (3.11) и перед (4.12)). Слагаемые с калибровочными бозонами $A_\mu,\ \mu = 0,\,3$ дают нулевой вклад.

Массовый член получается из остальной части четырёхмерного действия. Чтобы упростить вычисления, перегруппируем слагаемые в (3.1). Несложно убедится в справедливости следующего равенства:

$$\mathcal{L}_{4\mathrm{d}} \;=\; \frac{1}{2}\,\overline{\lambda}_f^{\mathrm{U}(1)}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\overline{\lambda}_f^{\mathrm{U}(1)}} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\lambda^{f\,\mathrm{U}(1)}}\lambda^{f\,\mathrm{U}(1)} \tag{4.6}$$

$$+\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\;\overline{\lambda}_f^{\mathrm{SU}(N)}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\overline{\lambda}_f^{\mathrm{SU}(N)}} \;+\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\;\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\lambda^{f\,\mathrm{SU}(N)}}\,\lambda^{f\,\mathrm{SU}(N)} \tag{4.7}$$

$$+\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\;\overline{\psi}\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\overline{\psi}} \;+\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\;\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\psi}\,\psi \;+\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\;\widetilde{\psi}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\widetilde{\psi}} \;+\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\;\frac{\delta\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}}{\delta\overline{\widetilde{\psi}}}\,\overline{\widetilde{\psi}} \tag{4.8}$$

Производные $\partial_0,\ \partial_3$ были учтены при выводе кинетического члена двумерной теории, поэтому теперь для вывода массового члена эффективного действия они должны быть опущены. Подставим в правую часть последней формулы уравнения Дирака для полей λ (первые две сточки в (3.2)) и уравнения для *квазинулевых* мод (3.25) для $\overline{\psi}$, (3.26) для $\overline{\widetilde{\psi}}$ и сопряжённые уравнения для $\psi,\ \widetilde{\psi}$. Таким образом можно найти, что

$$\mathcal{L}_{4\mathrm{d}}\Big|_{\substack{\partial_0=0\\ \partial_3=0}} \;=\; 0 \;+\; 0 \;+\; 0 \;+\; 0 \;-\; \mu_2\mathrm{Tr}\;(\beta\,\overline{\psi}\overline{\widetilde{\psi}} \;+\; \alpha\,\widetilde{\psi}\psi). \tag{4.9}$$

Подставляя сюда решения для кварковых полей, интегрируя по переменным $x_1,\ x_2$ и комбинируя это с (4.1), получим двумерное действие в первом порядке по μ:

$$\mathcal{S}_{2\mathrm{d}} \;=\; \int dt dz\,\frac{4\pi}{g_2^2}(\bar{\xi}_L i\partial_R\xi_L \;+\; \bar{\xi}_R i\partial_L\xi_R) \;+\; \mu_2\gamma_2\,(\bar{\xi}_R\xi_L \;+\; \bar{\xi}_L\xi_R), \tag{4.10}$$

где t, z есть координаты на мировом листе x_0, x_3, и коэффициент

$$\gamma_2 \;=\; -4\,\alpha\int dx_1 dx_2\,\overline{\widetilde{\psi}}_{1+}\,\overline{\psi}_{\dot{2}+} \;=\; 4\,\alpha\int dx_1 dx_2\,|\overline{\psi}_{\dot{2}+}|^2\,. \tag{4.11}$$

Главная особенность действия (4.10) заключается в том, что в нйм все фермионы являются массивными, что приводит к их полному отщеплению в пределе больших μ. Это является важным отличием настоящей теории от теории с ФИ D-членом, исследованной в [14], где эти самые ориентационные фермионы были безмассовыми и взаимодействовали с остальными бозонными и фермионными степенями свободы.

5 Фермионные ноль-моды: супертрансляционный сектор

5.1 Супертрансляционные ноль-моды $\mathcal{N}=2$ теории

Супертрансляционные моды исходной $\mathcal{N}=2$ теории связаны с преобразованиями суперсимметрии (3.3), параметры которых отождествляются с фермионными координатами на мировом листе:

$$\zeta_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^{11} + \epsilon^{12}), \qquad \zeta_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^{22} - \epsilon^{21}). \tag{5.1}$$

Эти моды могут быть найдены прямой подстановкой решения для бозонной струны в преобразования (3.3). После некоторых вычислений с использованием уравнений (2.6) можно придти к

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}_{\dot{2}} &= -2\sqrt{2}\,\frac{x_1 + ix_2}{Nr^2}\,\Big(\frac{1}{N}\phi_1(f+(N-1)f_N) + \frac{N-1}{N}\phi_2(f-f_N) \\
&\quad + (n\overline{n} - 1/N)\Big\{\phi_1(f+(N-1)f_N) - \phi_2(f-f_N)\Big\}\Big)\,\zeta_L\,, \\
\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}} &= 2\sqrt{2}\,\frac{x_1 - ix_2}{Nr^2}\,\Big(\frac{1}{N}\phi_1(f+(N-1)f_N) + \frac{N-1}{N}\phi_2(f-f_N) \\
&\quad + (n\overline{n} - 1/N)\Big\{\phi_1(f+(N-1)f_N) - \phi_2(f-f_N)\Big\}\Big)\,\zeta_R\,,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^{11\ \mathrm{U}(1)} &= -\frac{ig_1^2}{2\sqrt{2}}\Big((N-1)\phi_2^2 + \phi_1^2 - N\xi\Big)\,\zeta_L\,, \\
\lambda^{22\ \mathrm{U}(1)} &= +\frac{ig_1^2}{2\sqrt{2}}\Big((N-1)\phi_2^2 + \phi_1^2 - N\xi\Big)\,\zeta_R\,, \\
\lambda^{11\ \mathrm{SU}(N)} &= -\frac{ig_2^2}{\sqrt{2}}(n\overline{n} - 1/N)\Big(\phi_1^2 - \phi_2^2\Big)\,\zeta_L\,, \\
\lambda^{22\ \mathrm{SU}(N)} &= +\frac{ig_2^2}{\sqrt{2}}(n\overline{n} - 1/N)\Big(\phi_1^2 - \phi_2^2\Big)\,\zeta_R\,, \\
\lambda^{12\ \mathrm{U}(1)} &= \lambda^{11\ \mathrm{U}(1)}, \qquad \lambda^{21\ \mathrm{U}(1)} = -\lambda^{22\ \mathrm{U}(1)}, \\
\lambda^{12\ \mathrm{SU}(N)} &= \lambda^{11\ \mathrm{SU}(N)}, \qquad \lambda^{21\ \mathrm{SU}(N)} = -\lambda^{22\ \mathrm{SU}(N)},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

где написаны только моды, не обращающиеся тождественно в ноль.

5.2 Ненарушенные генераторы

Следующим шагом естественно было бы включить деформацию с малым значением параметра μ и исследовать поведение деформированных фермионных мод. Оказывается, однако, что это весьма сложная задача в силу технических трудностей: на этом пути я натолкнулся на систему из четырёх дифференциальных уравнений первого порядка, решить которую не удалось.

Вместо этого, оказывается возможным прямо перейти к пределу больших μ. Сделать это позволяет тот факт, что, хотя при переходе к $\mathcal{N} = 1$ теории исчезают суперзаряды, связанные с параметрами $\epsilon^{\alpha, f=2}$, суперориентационные моды тем не менее могут быть сгенерированы при помощи суперпреобразований с параметрами $\epsilon^{\alpha, f=1}$. Сперва проверим, что это может быть сделано в исходной $\mathcal{N} = 2$ теории.

Для полей λ преобразования (3.3) в явном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\lambda^{11\ \mathrm{U}(1)} &= iF_{12}^{\mathrm{U}(1)}\epsilon^{11} + \left(F^{1\,\mathrm{U}(1)} + iF^{2\,\mathrm{U}(1)}\right)\epsilon^{12}\,, \\
\lambda^{12\ \mathrm{U}(1)} &= iF_{12}^{\mathrm{U}(1)}\epsilon^{12} + \left(F^{1\,\mathrm{U}(1)} - iF^{2\,\mathrm{U}(1)}\right)\epsilon^{11}\,, \\
\lambda^{21\ \mathrm{U}(1)} &= -iF_{12}^{\mathrm{U}(1)}\epsilon^{21} + \left(F^{1\,\mathrm{U}(1)} + iF^{2\,\mathrm{U}(1)}\right)\epsilon^{22}\,, \\
\lambda^{22\ \mathrm{U}(1)} &= -iF_{12}^{\mathrm{U}(1)}\epsilon^{22} + \left(F^{1\,\mathrm{U}(1)} - iF^{2\,\mathrm{U}(1)}\right)\epsilon^{21}\,,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^{11\ \mathrm{SU}(N)} &= i\left(F_{12}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{11} + F_{L}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{21}\right) + \left(F^{1\,\mathrm{SU}(N)} + iF^{2\,\mathrm{SU}(N)}\right)\epsilon^{12}\,, \\
\lambda^{12\ \mathrm{SU}(N)} &= i\left(F_{12}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{12} + F_{L}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{22}\right) + \left(F^{1\,\mathrm{SU}(N)} - iF^{2\,\mathrm{SU}(N)}\right)\epsilon^{11}\,, \\
\lambda^{21\ \mathrm{SU}(N)} &= i\left(-F_{12}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{21} + F_{R}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{11}\right) + \left(F^{1\,\mathrm{SU}(N)} + iF^{2\,\mathrm{SU}(N)}\right)\epsilon^{22}\,, \\
\lambda^{22\ \mathrm{SU}(N)} &= i\left(-F_{12}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{22} + F_{R}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{12}\right) + \left(F^{1\,\mathrm{SU}(N)} - iF^{2\,\mathrm{SU}(N)}\right)\epsilon^{21}\,,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
F_{L}^{\mathrm{SU}(N)} &= \left(F_{01}^{\mathrm{SU}(N)} - i\,F_{31}^{\mathrm{SU}(N)}\right) - i\left(F_{02}^{\mathrm{SU}(N)} - i\,F_{32}^{\mathrm{SU}(N)}\right)\,, \\
F_{R}^{\mathrm{SU}(N)} &= \left(F_{01}^{\mathrm{SU}(N)} + i\,F_{31}^{\mathrm{SU}(N)}\right) + i\left(F_{02}^{\mathrm{SU}(N)} + i\,F_{32}^{\mathrm{SU}(N)}\right)\,.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь учтено, что $F^{3\,\mathrm{U}(1)} = F^{3\,\mathrm{SU}(N)} = 0$, и включены только ненулевые компоненты тензоров напряжённости $F_{\mu\nu}^{\mathrm{U}(1)}$ и $F_{\mu\nu}^{\mathrm{SU}(N)}$.

Исходно супериентационные моды были сгенерированы суперзарядами, связанными с (5.1):

$$\zeta_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^{11} + \epsilon^{12}), \qquad \zeta_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^{22} - \epsilon^{21})\,. \tag{5.7}$$

Однако из (5.4) и (5.5) видно, что эти моды могут быть сгенерированы только при помощи параметров ϵ^{11} и ϵ^{21} (стоит отметить, что это неверно для суперориентационных мод). В таком случае найдём (держа в голове явные выражения для F-членов (3.5) и компонент тензоров напряжённостей):

$$\begin{aligned} \lambda^{11\ \mathrm{U}(1)} &= \lambda^{12\ \mathrm{U}(1)} = iF_{12}^{\mathrm{U}(1)}\epsilon^{11}\,, \\ \lambda^{22\ \mathrm{U}(1)} &= -\lambda^{21\ \mathrm{U}(1)} = -iF_{12}^{\mathrm{U}(1)}\epsilon^{21}\,, \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{11\ \mathrm{SU}(N)} &= \lambda^{12\ \mathrm{SU}(N)} = iF_{12}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{11}\,, \\ \lambda^{22\ \mathrm{SU}(N)} &= -\lambda^{21\ \mathrm{SU}(N)} = -iF_{12}^{\mathrm{SU}(N)}\epsilon^{21}\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

где подразумевается, что ориентационные модули n^l есть константы.

Всё это также верно и для кварковых мод. Для них преобразования суперсимметрии в явном виде записываются как

$$\overline{\psi}_{\dot\alpha Ak} = i\left((\epsilon^{11} + \epsilon^{12})\bar{\nabla}_{\dot\alpha 1} + (\epsilon^{21} + \epsilon^{22})\bar{\nabla}_{\dot\alpha 2}\right)\varphi_{Ak}\,, \tag{5.10}$$

$$\overline{\widetilde{\psi}}{}^{kA}_{\dot\alpha} = i\left((\epsilon^{11} - \epsilon^{12})\bar{\nabla}_{\dot\alpha 1} + (\epsilon^{21} - \epsilon^{22})\bar{\nabla}_{\dot\alpha 2}\right)\varphi^{kA}\,. \tag{5.11}$$

Если мы снова рассмотрим преобразования только с параметрами ϵ^{11} и ϵ^{21}, мы придём к

$$\overline{\psi}_{\dot 2 Ak} = i\epsilon^{11}\bar{\nabla}_{\dot 2 1}\varphi_{Ak}\,, \tag{5.12}$$

$$\overline{\widetilde{\psi}}{}^{kA}_{\dot 1} = i\epsilon^{21}\bar{\nabla}_{\dot 1 2}\varphi^{kA}\,. \tag{5.13}$$

Заметим, что, как и в предыдущем случае, супериентационные моды не могут быть сгенерированы подобным образом.

Все найденные моды будут такими же, как (5.2) и (5.3), если фермионные координаты ввести как

$$\zeta_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{11}, \qquad \zeta_R = -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{21}\,. \tag{5.14}$$

5.3 $\mathcal{N}=1$ супертрансляционный сектор

В предыдущей главе было установлено, что в недеформированном случае супертрансляционные моды могут быть сгенерированы только при помощи $\mathcal{N}=1$ суперзарядов, которые связаны с параметрами ϵ^{11} и ϵ^{21} в (3.3). Этот факт позволяет сразу перейти к пределу больших μ, где остаются только упомянутые суперзаряды.

5.3.1 Преобразования суперсимметрии

Когда массовый параметр μ велик, присоединённые поля a, a^a и $\lambda^{f=2}$ становятся тяжёлыми и отщепляются. Если проинтегрировать по этим полям, то в итоге останется следующий суперпотенциал:

$$-i\mathcal{W}(q,\tilde{q}) = -\frac{1}{2\mu_2}\left((\tilde{q}_A q^B)(\tilde{q}_B q^A) - \frac{\alpha}{N}(\tilde{q}_A q^A)^2\right) + m(\tilde{q}_A q^A)\,, \tag{5.15}$$

где

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{N}{2}\frac{\mu_2}{\mu_1}}\,, \tag{5.16}$$

Преобразования суперсимметрии больше не даются выражениями (3.3). Суперпотенциал (5.15) генерирует новые F-члены, которые добавляются к суперпреобразованиям кварковых полей. Эти F-члены даются производными суперпотенциала:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{Ak} &= -\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial q^{kA}} = \frac{i}{\mu_2}\left(\tilde{q}_{Ck}(\tilde{q}_A q^C) - \frac{\alpha}{N}(\tilde{q}_C q^C)\tilde{q}_{Ak}\right) + m\tilde{q}_{Ak} \\ &= \frac{i}{\mu_2}\left(\varphi_{Ck}(\varphi_A \varphi^C) - \frac{\alpha}{N}(\varphi_C\varphi^C)\varphi_{Ak}\right) + m\varphi_{Ak}\,, \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{F}}^{kA} &= -\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial \tilde{q}_{Ak}} = \frac{i}{\mu_2}\left(q^{kC}(\tilde{q}_C q^A) - \frac{\alpha}{N}(\tilde{q}_C q^C)q^{kA}\right) + mq^{kA} \\ &= \frac{i}{\mu_2}\left(\varphi^{kC}(\varphi_C \varphi^A) - \frac{\alpha}{N}(\varphi_C\varphi^C)\varphi^{kA}\right) + m\varphi^{kA}\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

С этим можно написать новые преобразования суперсимметрии:

$$\begin{aligned} \delta\lambda^{\alpha} &= \frac{1}{2}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\epsilon)^\alpha F_{\mu\nu}, \\ \delta\lambda^{a\alpha} &= \frac{1}{2}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\epsilon)^\alpha F^a_{\mu\nu}, \\ \delta\bar{\tilde{\psi}}^{kA}_{\dot{\alpha}} &= i\sqrt{2}\,\bar{\nabla}\!\!\!\!/_{\dot{\alpha}\alpha} q^{kA}\epsilon^\alpha + \sqrt{2}\,\bar{\epsilon}^\alpha \bar{\tilde{F}}^{kA}\,, \\ \delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}Ak} &= i\sqrt{2}\,\bar{\nabla}\!\!\!\!/_{\dot{\alpha}\alpha}\bar{q}_{Ak}\epsilon^\alpha + \sqrt{2}\,\bar{\epsilon}^\alpha\bar{F}_{kA}\,. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Параметры преобразований обозначены как $\epsilon^\alpha \equiv \epsilon^{\alpha,\, f=1}$, и калибровочные суперпартнёры $\lambda^\alpha \equiv \lambda^{\alpha,\, f=1}$ и $\lambda^{a\alpha} \equiv \lambda^{a\alpha,\, f=1}$.

5.3.2 Область промежуточных значений r

Для вывода эффективного действия нужно знать явные выражения для фермионных ноль-мод в области $R_g \lesssim r \lesssim 1/m_L$, где

$$R_g \sim \frac{1}{m_W}\ln(m_W/m_L), \quad m_W = g_2\sqrt{\xi}, \quad m_L = \frac{\xi}{|\mu_2|}. \tag{5.20}$$

Величина R_g имеет смысл размера центра струны, где сконцентрированы калибровочные поля [15]. Как будет показано в дальнейшем, в этой область фермионные ноль-моды ведут себя как $1/r$. В эффективной теории это приведёт к логарифмическим вкладам в нормировку кинетического члена. Наш главный интерес именно в этих логарифмических вкладах.

Вычислим фермионные моды в этом пределе. Для больших значений параметра μ струна перестаёт быть БПС, и уравнения для бозонных профильных функций становятся не уравнениями первого порядка как (2.6), а второго. Эти уравнения были написаны и решены моим научным руководителем Алексеем Юнгом. Найденные им асимптотические решения в интересующей области записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi_1 &\approx \sqrt{\xi}\left(1 - \frac{\ln\dfrac{1}{rm_L}}{\ln\dfrac{g_2\sqrt{\xi}}{m_L}}\right), \\ \phi_2 &\approx \sqrt{\xi}\,, \\ f &\approx f_N \approx 0\,. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Для того, чтобы вычислить фермионные моды, следует подставить эти решения в преобразования (5.19). Легко увидеть, что все поля λ есть нули. Рассмотрим кварковые профили. В выражении (5.19) первый член третьей строки даёт $1/r$ вклад, тогда как F-член даёт константу и некоторые логарифмические добавки, которые однако подавлены множителем $1/\mu_2$. Пренебрегая последними вкладами, запишем приближённо ненулевые фермионные моды ($\zeta_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^1,\ \zeta_R = -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^2$)

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_{\dot{1}Ak} &= (n\overline{n})\,\frac{x^1 - i\,x^2}{r}\frac{1}{r}\,\frac{\sqrt{\xi}}{\ln\frac{g_2\sqrt{\xi}}{m_L}}\,\zeta_R\,, \\ \overline{\psi}_{\dot{2}Ak} &= (n\overline{n})\,\frac{x^1 + i\,x^2}{r}\frac{1}{r}\,\frac{\sqrt{\xi}}{\ln\frac{g_2\sqrt{\xi}}{m_L}}\,\zeta_L\,, \\ \overline{\widetilde{\psi}}{}_{\dot{1}}^{kA} &= (n\overline{n})\,\frac{x^1 - i\,x^2}{r}\frac{1}{r}\,\frac{\sqrt{\xi}}{\ln\frac{g_2\sqrt{\xi}}{m_L}}\,\zeta_R\,, \\ \overline{\widetilde{\psi}}{}_{\dot{2}}^{kA} &= (n\overline{n})\,\frac{x^1 + i\,x^2}{r}\frac{1}{r}\,\frac{\sqrt{\xi}}{\ln\frac{g_2\sqrt{\xi}}{m_L}}\,\zeta_L \end{aligned} \tag{5.22}$$

Легко увидеть что они, как и ожидалось, пропорциональны $1/r$.

5.3.3 Область малых r

Для полноты рассмотрим область $r \lesssim R_g$. Используем снова асимптотические решения, полученные Алексеем Юнгом:

$$\begin{aligned} \phi_1 &\approx 0\,, \\ \phi_2 &\approx \sqrt{\xi}\,, \\ f &\approx f_N \approx 1 - \frac{r^2}{R_g^2}\,. \end{aligned} \tag{5.23}$$

С помощью (5.19) легко можно получить приближённые выражения для фермионных мод:

$$\begin{aligned} \lambda^{1\ \mathrm{U}(1)} &= i\frac{2\sqrt{2}}{NR_g^2}\,\zeta_L\,, \\ \lambda^{2\ \mathrm{U}(1)} &= -i\frac{2\sqrt{2}}{NR_g^2}\,\zeta_R\,, \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{1\ \mathrm{SU}(N)} &= i\left(n\overline{n} - \frac{1}{N}\right)\frac{2\sqrt{2}}{NR_g^2}\,\zeta_L\,, \\ \lambda^{2\ \mathrm{SU}(N)} &= -i\left(n\overline{n} - \frac{1}{N}\right)\frac{2\sqrt{2}}{NR_g^2}\,\zeta_R\,, \end{aligned} \tag{5.25}$$

Кварковые моды зануляются в рассматриваемой области.

6 Эффективное действие в пределе больших μ

Это финальная глава данной работы. Здесь выводится главный результат — эффективное действие на мировом листе струны в низкоэнергетическом пределе.

6.1 Фермионная часть трансляционного сектора

Для построения эффективного действия следует подставить решения (5.22) в четырёхмерное действие (3.1) и проинтегрировать по координатам x_1, x_2. При этом всё эффективное действие будет состоять только из кинетического члена, и задача состоит в вычислении нормировочного коэффициента.

Область интегрирования разбивается на три части. Основной вклад даётся интегрированием по промежуточным значениям переменной r: $R_g \lesssim r \lesssim 1/m_L$, или, пренебрегая двойным логарифмическим вкладомя, $1/m_W \lesssim r \lesssim 1/m_L$. Находим:

$$\mathcal{L}_{2\mathrm{d}} = 2\pi\xi\, I_\xi(\bar{\zeta}_L i\partial_R\zeta_L + \bar{\zeta}_R i\partial_L\zeta_R)\,, \tag{6.1}$$

где нормировочная постоянная

$$I_\xi \;=\; \frac{2N}{\ln \frac{m_W}{m_L}}\,. \tag{6.2}$$

При этом вклад от F-членов (5.17) и (5.18) есть порядка $(m_W/m_L)^2 \ln(m_W/m_L)$ и подавлен как степень.

Диапазон больших значений переменной $r \gtrsim 1/m_L$ даёт малый вклад в нормировочный множитель, так как в этой области фермионные профили спадают экспоненциально как $\exp(-rm_L)$. В интегрирование по промежутку $0 \leqslant r \lesssim R_g$ дают вклад только профили λ (5.24) и (5.25); соответствующая добавка к нормировочному множителю

$$\begin{aligned} I_\xi^{\text{малые r}} \;&=\; \frac{16}{N^2 \xi R_g^2}\left(\frac{1}{g_2^2}\left(1-\frac{1}{N}\right) \;+\; \frac{2N}{g_1^2}\right) \\ &\sim\; \frac{16 g_2^2}{N^2(\ln(m_W/m_L))^2}\left(\frac{1}{g_2^2}\left(1-\frac{1}{N}\right) \;+\; \frac{2N}{g_1^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Видно, что этот вклад подавлен логарифмически по сравнению с (6.2).

6.2 Полное эффективное действие для струны

Полное эффективное действие состоит из трансляционного сектора, который есть просто кинетический член для трансляционных полей $x_0^i, i = 1, 2$; ориентационного сектора (2.8); супертрансляционного сектора (6.1). Суперориентационный сектор является тяжёлым в пределе больших μ и поэтому может быть отброшен при построении действия в низкоэнергетическом пределе.

Канонически нормируя (6.1) и включая бозонные степени свободы, приходим к

$$S_{1+1} \;=\; \int d^2x \left(2\pi\xi\left(\frac{1}{2}(\partial x_0^i)^2 \;+\; \bar{\zeta}_L i\partial_R \zeta_L \;+\; \bar{\zeta}_R i\partial_L \zeta_R\right) + 2\beta\left(|\partial n|^2 \;+\; (\bar{n}\partial_k n)^2\right)\right)\,. \tag{6.4}$$

Нормировочная постоянная $\beta \sim 2\pi/g_2^2 \times m_W^2/m_L^2$. Поля $x_0^i, i = 1, 2$ есть трансляционные модули, зависящие от координат t, z на мировом листе. Трансляционный сектор тривиален и отщепляется, ток что в пределе больших μ остаётся бозонная CP(N-1) модель без фермионов.

Заключение

Главной целью данной работы был вывод эффективного действия для струны в низкоэнергетическом пределе, и результат даётся формулой (6.4):

$$S_{1+1} \;=\; \int d^2x \left(2\pi\xi\left(\frac{1}{2}(\partial x_0)^2 \;+\; \bar{\zeta}_L i\partial_R\zeta_L \;+\; \bar{\zeta}_R i\partial_L\zeta_R\right) + 2\beta\left(|\partial n|^2 \;+\; (\bar{n}\partial_k n)^2\right)\right).$$

На основании этого результата можно сказать, что эффективная теория может быть решена методом Виттена [16] разложением по $1/N$. Это поможет понять физику явления (конфайнмент монополей) в пределе, когда теория становится $\mathcal{N}=1$ квантовой хромодинамикой.

Одним из возможных направлений для дальнейшей работы может быть отказ от условия (1.8) и переход к случаю неравных масс кварков. Другой путь обобщения полученного результата заключается в рассмотрении теории с числом ароматов N_f, превышающим число N для калибровочной группы $\mathrm{SU}(N)$.

В соответствии с главной мотивацией данной работы — попытка понять конфайнмент в реальной квантовой хромодинамике — в будущем мы планируем ещё больше приблизиться к последней, то есть продвигаться к теории с полностью нарушенной суперсимметрией.

Приложение

A.1 Уравнения для супертрансляционных компонент

Подставляя (3.8) и (3.9) в уравнения Дирака (3.2), можно получить (с учётом того что профильные функции λ получатся чисто мнимыми)

$$
\begin{aligned}
-\partial_r\lambda^{22}_+ \; - \; \frac{1}{r}\lambda^{22}_+ \; + \; \frac{f_N}{r}\lambda^{22}_+ \; + \; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_2\,\overline{\psi}_{\dot{1}+}(r) \; + \; \phi_1\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}+}(r)\right) \; + \; \mu_2 g_2^2\,\lambda^{22}_- \;&=\; 0\,,\\
-\partial_r\lambda^{22}_- \; - \; \frac{f_N}{r}\lambda^{22}_- \; + \; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \; + \; \phi_2\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-}(r)\right) \; + \; \mu_2 g_2^2\,\lambda^{22}_+ \;&=\; 0\,,\\
-\partial_r\lambda^{12}_+ \; - \; \frac{1}{r}\lambda^{12}_+ \; + \; \frac{f_N}{r}\lambda^{12}_+ \; + \; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{2}+}(r) \; + \; \phi_2\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}+}(r)\right) \; - \; \mu_2 g_2^2\,\lambda^{12}_- \;&=\; 0\,,\\
-\partial_r\lambda^{12}_- \; - \; \frac{f_N}{r}\lambda^{12}_- \; + \; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_2\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \; + \; \phi_1\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}-}(r)\right) \; - \; \mu_2 g_2^2\,\lambda^{12}_+ \;&=\; 0\,,
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

$$
\begin{aligned}
-\partial_r\lambda^{21}_+ \; - \; \frac{1}{r}\lambda^{21}_+ \; + \; \frac{f_N}{r}\lambda^{21}_+ \; + \; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_2\,\overline{\psi}_{\dot{1}+}(r) \; - \; \phi_1\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}+}(r)\right) \;&=\; 0\,,\\
-\partial_r\lambda^{21}_- \; - \; \frac{f_N}{r}\lambda^{21}_- \; + \; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \; - \; \phi_2\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-}(r)\right) \;&=\; 0\,,\\
-\partial_r\lambda^{11}_+ \; - \; \frac{1}{r}\lambda^{11}_+ \; + \; \frac{f_N}{r}\lambda^{11}_+ \; + \; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{2}+}(r) \; - \; \phi_2\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}+}(r)\right) \;&=\; 0\,,\\
-\partial_r\lambda^{11}_- \; - \; \frac{f_N}{r}\lambda^{11}_- \; + \; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_2\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \; - \; \phi_1\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}-}(r)\right) \;&=\; 0\,.
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Для кварков,

$$
\begin{aligned}
\partial_r\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}+}(r) \; - \; \frac{1}{Nr}(f - f_N)\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}+}(r) \; + \; i\phi_1\,(\lambda^{22}_+ \; - \; \lambda^{21}_+) \;&=\; 0\,,\\
\partial_r\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \; + \; \frac{1}{r}\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \; - \; \frac{1}{Nr}\,(f + f_N(N-1))\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \; + \; i\phi_2\,(\lambda^{22}_- \; - \; \lambda^{21}_-) \;&=\; 0\,,\\
\partial_r\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}+}(r) \; + \; \frac{1}{Nr}\,(f + f_N(N-1))\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}+}(r) \; + \; i\phi_2\,(\lambda^{12}_+ \; - \; \lambda^{11}_+) \;&=\; 0\,,\\
\partial_r\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \; + \; \frac{1}{r}\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \; + \; \frac{1}{Nr}(f - f_N)\,\overline{\overline{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \; + \; i\phi_1\,(\lambda^{12}_- \; - \; \lambda^{11}_-) \;&=\; 0\,,
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_r \overline{\psi}_{\mathrm{1}+}(r) \;+\; \frac{1}{Nr}\,(f + f_N(N-1))\,\overline{\psi}_{\mathrm{1}+}(r) \;+\; i\phi_2\,(\lambda^{22}_{+} \;+\; \lambda^{21}_{+}) \;=\; 0\,, \\
&\partial_r \overline{\psi}_{\mathrm{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\psi}_{\mathrm{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{Nr}(f - f_N)\,\overline{\psi}_{\mathrm{1}-}(r) \;+\; i\phi_1\,(\lambda^{22}_{-} \;+\; \lambda^{21}_{-}) \;=\; 0\,, \\
&\partial_r \overline{\psi}_{\dot{2}+}(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\,(f - f_N)\overline{\psi}_{\dot{2}+}(r) \;+\; i\phi_1\,(\lambda^{12}_{+} \;+\; \lambda^{11}_{+}) \;=\; 0\,, \qquad \text{(A.4)} \\
&\partial_r \overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\,(f + f_N(N-1))\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;+\; i\phi_2\,(\lambda^{12}_{-} \;+\; \lambda^{11}_{-}) \;=\; 0\;.
\end{aligned}
$$

Теперь можно упростить эти уравнения в пределе малых значений параметра μ. Опуская слагаемые порядка $O(\mu^2)$, получаем:

$$
\begin{aligned}
&-\partial_r \lambda^{22}_{+} \;-\; \frac{1}{r}\lambda^{22}_{+} \;+\; \frac{f_N}{r}\lambda^{22}_{+} \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\phi_1\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\mathrm{1}+}(r) \;=\; 0\,, \\
&-\partial_r \lambda^{22}_{-} \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda^{22}_{-} \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\Big(\phi_1\,\overline{\psi}_{\mathrm{1}-}(r) \;+\; \phi_2\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\mathrm{1}-}(r)\Big) \;+\; \mu_2 g_2^2\,\lambda^{22}_{+} \;=\; 0\,, \qquad \text{(A.5)} \\
&-\partial_r \lambda^{12}_{+} \;-\; \frac{1}{r}\lambda^{12}_{+} \;+\; \frac{f_N}{r}\lambda^{12}_{+} \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{2}+}(r) \;=\; 0\,, \\
&-\partial_r \lambda^{12}_{-} \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda^{12}_{-} \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\Big(\phi_2\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \phi_1\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r)\Big) \;-\; \mu_2 g_2^2\,\lambda^{12}_{+} \;=\; 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\partial_r \lambda^{21}_{+} \;-\; \frac{1}{r}\lambda^{21}_{+} \;+\; \frac{f_N}{r}\lambda^{21}_{+} \;-\; i\,\frac{g_2^2}{2}\phi_1\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\mathrm{1}+}(r) \;=\; 0\,, \\
&-\partial_r \lambda^{21}_{-} \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda^{21}_{-} \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\Big(\phi_1\,\overline{\psi}_{\mathrm{1}-}(r) \;-\; \phi_2\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\mathrm{1}-}(r)\Big) \;=\; 0\,, \qquad \text{(A.6)} \\
&-\partial_r \lambda^{11}_{+} \;-\; \frac{1}{r}\lambda^{11}_{+} \;+\; \frac{f_N}{r}\lambda^{11}_{+} \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{2}+}(r) \;=\; 0\,, \\
&-\partial_r \lambda^{11}_{-} \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda^{11}_{-} \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\Big(\phi_2\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;-\; \phi_1\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r)\Big) \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

Для кварков,

$$
\begin{aligned}
&\partial_r \overline{\widetilde{\psi}}_{\mathrm{1}+}(r) \;-\; \frac{1}{Nr}(f - f_N)\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\mathrm{1}+}(r) \;+\; i\phi_1\,(\lambda^{22}_{+} \;-\; \lambda^{21}_{+}) \;=\; 0\,, \\
&\partial_r \overline{\widetilde{\psi}}_{\mathrm{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\widetilde{\psi}}_{\mathrm{1}-}(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\,(f + f_N(N-1))\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\mathrm{1}-}(r) \;+\; i\phi_2\,(\lambda^{22}_{-} \;-\; \lambda^{21}_{-}) \;=\; 0\,, \\
&\partial_r \overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \frac{1}{Nr}(f - f_N)\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;+\; i\phi_1\,(\lambda^{12}_{-} \;-\; \lambda^{11}_{-}) \;=\; 0\,, \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_r \overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{Nr}(f-f_N)\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; i\phi_1\,(\lambda^{22}_- \;+\; \lambda^{21}_-) \;\;=\;\; 0\,,\\
&\partial_r \overline{\psi}_{\dot{2}+}(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\,(f-f_N)\overline{\psi}_{\dot{2}+}(r) \;+\; i\phi_1\,(\lambda^{12}_+ \;+\; \lambda^{11}_+) \;\;=\;\; 0\,,\\
&\partial_r \overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\,(f+f_N(N-1))\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;+\; i\phi_2\,(\lambda^{12}_- \;+\; \lambda^{11}_-) \;\;=\;\; 0\;..
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

Для «-» -компонент находим:

$$
-\,\partial_r\lambda^{22}_- \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda^{22}_- \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \phi_2\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}-}(r)\right) \;+\; \mu_2 g_2^2\,\lambda^{22}_+ \;\;=\;\; 0\,, \tag{A.9}
$$

$$
-\,\partial_r\lambda^{12}_- \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda^{12}_- \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_2\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \phi_1\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r)\right) \;-\; \mu_2 g_2^2\,\lambda^{12}_+ \;\;=\;\; 0\,, \tag{A.10}
$$

$$
-\,\partial_r\lambda^{21}_- \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda^{21}_- \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;-\; \phi_2\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}-}(r)\right) \;\;=\;\; 0\,, \tag{A.11}
$$

$$
-\,\partial_r\lambda^{11}_- \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda^{11}_- \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\left(\phi_2\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;-\; \phi_1\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r)\right) \;\;=\;\; 0\,. \tag{A.12}
$$

For quarks,

$$
\partial_r \overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\,(f+f_N(N-1))\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}-}(r) \;+\; i\phi_2\,(\lambda^{22}_- \;-\; \lambda^{21}_-) \;\;=\;\; 0\,, \tag{A.13}
$$

$$
\partial_r \overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \frac{1}{Nr}(f-f_N)\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r) \;+\; i\phi_1\,(\lambda^{12}_- \;-\; \lambda^{11}_-) \;\;=\;\; 0\,, \tag{A.14}
$$

$$
\partial_r \overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \frac{1}{Nr}(f-f_N)\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; i\phi_1\,(\lambda^{22}_- \;+\; \lambda^{21}_-) \;\;=\;\; 0\,, \tag{A.15}
$$

$$
\partial_r \overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \frac{1}{r}\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;-\; \frac{1}{Nr}\,(f+f_N(N-1))\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;+\; i\phi_2\,(\lambda^{12}_- \;+\; \lambda^{11}_-) \;\;=\;\; 0\;\;. \tag{A.16}
$$

Подставляя

$$
\lambda^{12}_+(r) \;\;=\;\; \frac{i}{2}\frac{f_N}{r}\frac{\phi_1}{\phi_2} \;+\; O(\mu_2^2), \tag{A.17}
$$

$$
\lambda^{22}_+(r) \;\;=\;\; -\frac{i}{2}\frac{f_N}{r}\frac{\phi_1}{\phi_2} \;+\; O(\mu_2^2)\,: \tag{A.18}
$$

из (3.11), можно записать:

$$-\,\partial_r \lambda_-^{22} \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda_-^{22} \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\Big(\phi_1\,\overline{\psi}_{\dot{1}-}(r) \;+\; \phi_2\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{1}-}(r)\Big) \;-\; \mu_2 g_2^2\,\frac{i}{2}\frac{f_N}{r}\frac{\phi_1}{\phi_2} \;\;=\;\; 0\,, \tag{A.19}$$

$$-\,\partial_r \lambda_-^{12} \;-\; \frac{f_N}{r}\lambda_-^{12} \;+\; i\,\frac{g_2^2}{2}\Big(\phi_2\,\overline{\psi}_{\dot{2}-}(r) \;+\; \phi_1\,\overline{\widetilde{\psi}}_{\dot{2}-}(r)\Big) \;-\; \mu_2 g_2^2\,\frac{i}{2}\frac{f_N}{r}\frac{\phi_1}{\phi_2} \;\;=\;\; 0\,. \tag{A.20}$$

Список литературы

[1] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B190**, 455 (1981).

[2] S. Mandelstam, Phys. Rept. **23**, 245 (1976).

[3] M. Shifman and A. Yung, Rev. Mod. Phys **79**, 1139 (2007), hep-th/0703267.

[4] M. Shifman and A. Yung, *Supersymmetric Solitons* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2009), Hardback.

[5] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **B426**, 19 (1994), hep-th/9407087, Erratum: **B430**, 485 (1994).

[6] M. Shifman and A. Yung, Phys. Rev. D **70**, 045004 (2004), hep-th/0403149.

[7] A. Hanany and D. Tong, JHEP **0307**, 037 (2003), hep-th/0306150.

[8] A. Hanany and D. Tong, JHEP **0404**, 066 (2004), hep-th/0403158.

[9] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi, and A. Yung, Nucl. Phys. B **673**, 187 (2003), hep-th/0307287.

[10] D. Tong, Tasi lectures on solitons, hep-th/0509216.

[11] D. Tong, Quantum Vortex Strings: A Review, hep-th/0809.5060.

[12] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi, and N. Sakai, J. Phys. A **39**, R315 (2006), hep-th/0602170.

[13] M. Shifman and A. Yung, Phys. Rev. D **77**, 125016 (2008), hep-th/0803.0158.

[14] P. A. Bolokhov, M. Shifman, and A. Yung, Phys. Rev. D **79**, 085015 (2009), hep-th/0901.4603, Erratum: **80**, 049902 (2009).

[15] A. Yung, Nucl. Phys. B **562**, 191 (1999), hep-th/9906243.

[16] E. Witten, Nucl. Phys. B **149**, 285 (1979).