

Правительство Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Санкт-Петербургский государственный университет»

Кафедра теоретической и прикладной механики

Бабин Александр Константинович

Анализ колебаний стержней и прямоугольных  
пластин численным и асимптотическими методами

Магистерская диссертация

Допущен к защите.

Зав. кафедрой:

проф, д.ф.-м.н. Товстик П.Е.

Научный руководитель:

проф, д.ф.-м.н. Бауэр С.М.

Рецензент:

д.ф.-м.н. Абрамян А.К.

Санкт-Петербург

2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Department of theoretical and applied mechanics

Aleksandr Babin

Analysis of vibrations of stretched beams and rectangular  
plates by numerical and asymptotic methods

Master's Thesis

Admitted for defence.

Head of the chair  
doctor of sciences P. Tovstik

Scientific supervisor:  
prof, doctor of sciences S. Bauer

Reviewer:  
doctor of sciences A. Abramian

Saint-Petersburg

2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>Колебания растянутого жёстко закреплённого стержня</b>	<b>4</b>
1.1	Постановка задачи . . . . .	4
1.2	Численное решение . . . . .	4
1.3	Метод динамического краевого эффекта . . . . .	6
1.4	Решение задачи по методу Вишика и Люстерника . . . . .	8
1.5	Сравнение результатов при числе волн $n=1$ и $n=5$ . . . . .	12
1.6	Заключение . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Колебания растянутой прямоугольной пластинки</b>	<b>14</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	14
2.2	Численное решение . . . . .	15
2.3	Метод динамического краевого эффекта . . . . .	17
2.4	Решение задачи по методу Вишика и Люстерника . . . . .	19
2.5	Сравнение результатов при числе волн $n=1$ и $n=5$ , $m=1$ и $m=5$ . . . . .	20
2.6	Заключение . . . . .	26

# 1 Колебания растянутого жёстко закреплённого стержня

## 1.1 Постановка задачи

Рассматривается задача о колебании растянутого жестко закреплённого стержня. На основе этой задачи, имеющей известное численное решение, проводится оценка области применимости асимптотических методов Вишика и Люстерника и динамического краевого эффекта.

Уравнение колебаний стержня имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь  $E$  — модуль упругости стержня,  $J$  — момент инерции сечения,  $EJ$  — жёсткость на изгиб,  $\rho$  — плотность материала,  $S$  — площадь поперечного сечения,  $T$  — сила натяжения,  $w$  — нормальный прогиб. Решение линейной задачи можно искать в виде:

$$w(x, t) = X(x) \sin \omega t.$$

Для однородного стержня постоянного сечения можно разделить переменные и получить уравнение для функции  $X(x)$ :

$$EJX^{IV} - \omega^2 \rho SX - TX'' = 0. \quad (1)$$

Граничные условия имеют вид:

$$X(0) = X(l) = X'(0) = X'(l) = 0,$$

где  $l$  — длина стержня.

Примем  $\bar{x} = x/l$ , и перейдем к безразмерному виду. В дальнейшем изложении будем использовать обозначение  $x$  вместо безразмерной переменной  $\bar{x}$ . В этом случае краевая задача для жёстко закреплённого стержня имеет вид:

$$\begin{cases} EJX^{IV} - \omega^2 \rho S l^4 X - T l^2 X'' = 0. \\ X(0) = X(1) = X'(0) = X'(1) = 0. \end{cases}$$

## 1.2 Численное решение

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (1) имеет вид

$$\lambda^4 - \lambda^2 \left( \frac{Tl^2}{EJ} \right) - \frac{\rho h \omega^2 l^4}{EJ} = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{Tl^2/EJ + \sqrt{T^2 l^4 / (EJ)^2 + 4\rho h \omega^2 l^4 / EJ}}{2}, \\ -\lambda_2^2 &= \frac{Tl^2/EJ - \sqrt{T^2 l^4 / (EJ)^2 + 4\rho h \omega^2 l^4 / EJ}}{2}. \end{aligned}$$

Решение может быть представлено в виде

$$X(x) = C_1 \sin \lambda_2 x + C_2 \cos \lambda_2 x + C_3 \operatorname{ch} \lambda_1 x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_1 x,$$

Константы могут быть определены из граничных условий

$$X(0) = 0 \implies C_2 + C_3 = 0 \implies C_3 = -C_2.$$

$$X'(0) = 0 \implies \lambda_2 C_1 + \lambda_1 C_4 = 0 \implies C_4 = -C_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

$$X(1) = 0 \implies C_1 \sin \lambda_2 + C_2 \cos \lambda_2 - C_2 \operatorname{ch} \lambda_1 + C_4 \operatorname{sh} \lambda_1 = 0.$$

$$X'(1) = 0 \implies \lambda_2 C_1 \cos \lambda_2 - \lambda_2 C_2 \sin \lambda_2 - \lambda_1 C_2 \operatorname{sh} \lambda_1 - \lambda_1 C_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{ch} \lambda_1 = 0.$$

Тогда

$$C_2 = C_1 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{sh} \lambda_1 - \sin \lambda_2 \right) / (\cos \lambda_2 - \operatorname{ch} \lambda_1)$$

И для существования нетривиального решения необходимо, чтобы

$$2\lambda_2 \lambda_1 (1 - \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2) + \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0.$$

Таким образом, частоты колебаний растянутого жёстко закреплённого стержня определяется из следующего уравнения

$$\begin{cases} \frac{2l^2 \omega}{\sqrt{EJ}} \sqrt{\rho S} (1 - \cos \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_1) + \frac{Tl^2}{EJ} \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{l^2 T}{2EJ} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4\omega^2 \rho S E J}{T^2}} \right], \\ \lambda_2^2 = \frac{l^2 T}{2EJ} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4\omega^2 \rho S E J}{T^2}} \right]. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим два случая: когда отношение  $EJ/l^2 T$  меньше и больше 1. Введём 2 безразмерных параметра  $\mu$  и  $\varepsilon$ , каждый из которых меняется в промежутке  $[0, 1]$ :  $\mu^2 = EJ/l^2 T$ ,  $\varepsilon = 1/\mu$ . Обозначим  $\Lambda = \rho S \omega^2 l^2 / T$ , тогда уравнение (2) можно переписать в следующем виде

$$\begin{cases} 2\sqrt{\Lambda} (1 - \cos \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_1) + \frac{1}{\mu} \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{1}{2\mu^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + 4\Lambda \mu^2} \right], \\ \lambda_2^2 = \frac{1}{2\mu^2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 4\Lambda \mu^2} \right]. \end{cases} \quad (3)$$

Для  $\varepsilon^2 = l^2 T / EJ$ , при  $A = \rho S \omega^2 l^4 / EJ$ , получим

$$\begin{cases} 2\sqrt{A} (1 - \cos \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_1) + \varepsilon^2 \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{\varepsilon^4}} \right], \\ \lambda_2^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{\varepsilon^4}} \right]. \end{cases} \quad (4)$$

Частоты колебаний могут быть найдены при численном решении уравнений (3) и (4).

### 1.3 Метод динамического краевого эффекта

Метод динамического краевого эффекта был разработан В.В. Болотиным [2, 3, 4, 5]. Предполагается, что решается уравнение, в котором все члены имеют одинаковый асимптотический порядок.

Рассмотрим сначала упрощённую постановку задачи, т.е. уравнение (1) при  $T = 0$  [6].

$$X^{IV} - a^2\omega^2 X = 0, \quad (5)$$

здесь  $a^2 = \frac{S\rho l^4}{EJ}$ .

Известно, что задача для шарнирно опёртого стержня имеет точное решение

$$X_n(x) = \sin \pi n x.$$

В этом случае безразмерная длина волны, соответствующая  $n$ -ой форме колебаний, составляет  $1/n$ .

Естественно предположить, что вдали от границ при колебаниях форма прогиба для жестко опёртого стержня будет мало отличаться от формы прогиба шарнирно опёртого стержня, поэтому будем искать решение задачи о колебаниях жестко закрепленного стержня (5) в виде  $X = X_1 + X_2$ , где

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + a\omega X_1 = 0 \quad \frac{d^2 X_2}{dx^2} - a\omega X_2 = 0$$

При этом функция  $X_1$  описывает основные колебания

$$a\omega = \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2, \quad X_1(x) = \sin \frac{\pi(x-x_0)}{\lambda_x}.$$

Здесь  $x_0$  — неизвестный сдвиг по фазе,  $\lambda_x$  — длина волны.

Уравнение

$$\frac{d^2 X_2}{dx^2} - \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2 X_2 = 0,$$

используем для построения интегралов краевого эффекта:

$$X_2 = C_1 e^{-\frac{\pi x}{\lambda_x}} + C_2 e^{-\frac{\pi(x-l)}{\lambda_x}},$$

Граничные условия позволяют определить неизвестные константы.

При  $x = 0$

$$X_1(0) + X_2(0) = X_1'(0) + X_2'(0) = 0,$$

то есть

$$C_1 - \sin\left(\frac{\pi x_0}{\lambda_x}\right) = 0, \quad C_1 - \cos\left(\frac{\pi x_0}{\lambda_x}\right) = 0,$$

а при  $x = 1$

$$X_1(1) + X_2(1) = X_1'(1) + X_2'(1) = 0,$$

то есть

$$C_2 + \sin\left(\frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x}\right) = 0, \quad C_2 + \cos\left(\frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x}\right) = 0.$$

Получаем 4 уравнения относительно 4 неизвестных:  $\lambda_x, x_0, C_1, C_2$ .

Из первых двух уравнений имеем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_0}{\lambda_x}\right) = 1$$

$$\frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad \text{или} \quad x_0 = \lambda_x \left(\frac{1}{4} + k\right);$$

Аналогично из граничных условий на правом конце стержня:

$$\frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} = \frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \frac{1}{\lambda_x} - \frac{1}{4} - n = \frac{1}{4} + k;$$

или

$$\lambda_x = \frac{1}{1/2 + m},$$

где  $m = k + n$ .

Таким образом, частоты колебаний может быть определены из равенства

$$\omega_n = \frac{\pi^2 (n + 1/2)^2}{al^2}.$$

Теперь пусть  $T \neq 0$ , в этом случае уравнение (1) принимает вид

$$X^{IV} - \varepsilon^2 X'' - a^2 \omega^2 X = 0,$$

Соответствующее характеристическое уравнение в этом случае имеет корни

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{4} + a^2 \omega^2}.$$

а частоты колебаний шарнирно опёртого стержня имеют вид

$$\omega_n^2 = \frac{EJ \pi^4 n^4}{\rho S l^4} + \frac{T}{EJ} \frac{EJ \pi^2 n^2}{\rho S l^2} = \frac{EJ \pi^4 n^4}{\rho S l^4} \cdot \left(1 + \frac{T l^2}{EJ n^2} l^2\right).$$

Форма колебаний в этом случае имеет вид

$$X = \sin \lambda x, \quad \lambda = \pi n.$$

В случае жестко опёртого стержня основное решение ищем, как и раньше, в виде  $X = X_1 + X_2$

$$X_1 = \sin \frac{\pi(x-x_0)}{\lambda_x}.$$

Пусть  $\lambda_1^2 > 0$ , а  $\lambda_2^2 < 0$ , тогда

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + \lambda_1^2 X_1 = 0, \quad \frac{d^2 X_2}{dx^2} + \lambda_2^2 X_2 = 0.$$

Используя замену  $\bar{\lambda}^2 = -\lambda_2^2$ , получаем выражение для интегралов краевого эффекта  $X_2$  в виде

$$X_2 = C_1 e^{-\bar{\lambda} x} + C_2 e^{\bar{\lambda}(x-1)},$$

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2, \quad \frac{\varepsilon^2}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + a^2 \omega_n^2} = \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2,$$

или

$$a^2 \omega_n^2 = \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^4 - \varepsilon^2 \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2.$$

Выражения для  $\bar{\lambda}_x, C_1, C_2, x_0$  найдём из граничных условий.

На левом краю

$$X(0) = C_1 - \sin \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = 0, \quad X'(0) = -C_1 \bar{\Lambda} + \frac{\pi}{\lambda_x} \cos \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = 0,$$

и таким образом,

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{\lambda_x} \cdot \frac{1}{\bar{\Lambda}},$$

а из условий справа

$$C_2 - \sin \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} = 0 \quad C_2 \bar{\Lambda} - \frac{\pi}{\lambda_x} \cos \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} = 0,$$

Таким образом, для безразмерной длины волны  $\lambda_x$  и сдвига по фазе  $x_0$  имеем 2 уравнения:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{\lambda_x} \cdot \frac{1}{\bar{\Lambda}}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} = \frac{\pi}{\lambda_x} \cdot \frac{1}{\bar{\Lambda}}. \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) можно получить

$$\frac{1-x_0}{\lambda_x} = \frac{x_0}{\lambda_x} + k \Rightarrow 1-2x_0 = k\lambda_x,$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \left( \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_x^2}{\pi^2}} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{\varepsilon^2 \lambda_x^2}{\pi^2}.$$

При увеличении числа волн длина волны колебаний становится малой величиной, поэтому  $(\varepsilon^2 \lambda_x^2) / \pi^2 \ll 1$  и приведённое выше уравнение можно решать асимптотическим методом [7].

В нулевом приближении

$$\frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{4} + \pi m \Rightarrow \frac{x_0}{\lambda_x} = \frac{1}{4} + m.$$

Если представить  $\pi x_0 / \lambda_x$  в виде  $\pi x_0 / \lambda_x = \pi/4 + \delta$ , то тогда можно получить, что  $\delta = -\varepsilon^2 \lambda_x^2 / 2\pi^2$ .

Для частоты стержня в этом случае имеем

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4 E J}{\rho l^4} \left( \frac{1}{2} + n \right)^4 + \frac{\pi^2 T}{E J} \left( \frac{1}{2} + n \right)^2.$$

Для уравнения

$$-\mu^2 X^{IV} + X'' + \Lambda X = 0,$$

получаем решение

$$\Lambda = \mu^2 \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)^4 + \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2. \quad (8)$$

## 1.4 Решение задачи по методу Вишика и Люстерника

Метод Вишика и Люстерника помогает определять собственные значения и функции в случае сингулярно-возмущённого дифференциального уравнения. Решение рассматриваемой задачи в первом приближении по методу Вишика и Люстерника представлено в [7].



Рассмотрим краевую задачу  $A_\mu$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mu^k a_{m+k} \frac{d^{k+m} y}{dx^{k+m}} + \sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k y}{dx^k} &= f(x) \\ x \in [x_1, x_2], \quad \frac{d^l y}{dx^l} &= q_j^l \quad \text{при } x = x_1, x_2 \quad j = 1, 2; \\ l = 0, 1, \dots, m_j + n_j - 1, \quad m_1 + m_2 &= m, \quad n_1 + n_2 = n. \end{aligned} \quad (9)$$

При  $\mu = 0$  задача  $A_\mu$  вырождается в задачу  $A_0$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k y}{dx^k} &= f(x) \\ x \in [x_1, x_2], \quad \frac{d^l y}{dx^l} &= q_j^l \quad \text{при } x = x_1, x_2 \quad j = 1, 2; \\ l = 0, 1, \dots, m_j + n_j - 1, \quad m_1 + m_2 &= m. \end{aligned}$$

Дополнительное характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (9), имеет вид

$$\sum_{k=0}^n a_{m+k} \lambda^k = 0. \quad (10)$$

Если уравнение (10) имеет  $n_1$  корней с отрицательной вещественной частью и  $n_2$  корней с положительной, то при решении задачи  $A_0$  методом Вишика и Люстерника надо отбросить  $n_1$  граничных условий слева и  $n_2$  справа, а решение задачи  $A_\mu$  представляется в виде:

$$y(x, \mu) \cong y_0^0(x, \mu) + Z^{(1)}(x, \mu) + Z^{(2)}(x, \mu),$$

где

$$y_0^0(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(x),$$

а  $Z^{(1)}(x, \mu)$ ,  $Z^{(2)}(x, \mu)$  — интегралы краевого эффекта, причем

$$Z^{(j)}(x, \mu) = \mu^{n_j} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k Z_k^{(j)}(\eta_j), \quad \eta_j = (-1)^{j+1} \cdot \frac{x - x_j}{\mu}, \quad j = 1, 2.$$

$Z_k^{(1)}(\eta_1) \rightarrow 0$  при  $\eta_1 \rightarrow \infty$ , а  $Z_k^{(2)}(\eta_2) \rightarrow 0$  при  $\eta_2 \rightarrow -\infty$ .

В рассматриваемой задаче:

$$-\mu^2 X^{IV} + X'' + \Lambda X = 0, \quad (11)$$

$$X(0) = X(1) = X'(0) = X'(1) = 0,$$

дополнительное характеристическое уравнение имеет вид

$$-\lambda^2 + 1 = 0.$$

Поэтому задача  $A_0$  имеет вид:

$$\frac{d^2 X_0}{dx^2} + \Lambda_0 X_0 = 0, \quad X_0(0) = X_0(1) = 0.$$

$$X_0 = A \sin \sqrt{\Lambda} x + B \cos \sqrt{\Lambda} x.$$

$$\Lambda_0 = n^2 \pi^2, \quad X_0 = \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение задачи  $A_\mu$  можно искать в виде

$$X(x) = X_0(x) + \mu Z_0^{(1)}\left(\frac{x}{\mu}\right) + \mu Z_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\mu}\right),$$

Граничное условие при  $x = 0$   $X'(0) = 0$ , тогда  $X_0'(0) + Z_0^{(1)'(0)} = 0$ , т.е.  $\pi n + Z_0^{(1)'(0)} = 0$ . Подставляя значения производных от  $X$  в (11), и, приравнявая члены при наименьших степенях  $\mu$ , получим:

$$\frac{1}{\mu} Z_0^{(1)''''}(\eta_1) + \frac{1}{\mu} Z_0^{(1)''}(\eta_1) = 0, \quad \text{где } \eta_1 = \frac{x}{\mu}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Z_0^{(1)}(\eta_1) = C_1 + C_2 \eta_1 + C_3 e^{\eta_1} + C_4 e^{-\eta_1}.$$

Константы  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , так как

$$Z_0^{(1)}(\eta_1) \rightarrow 0, \quad \text{при } \eta_1 \rightarrow \infty,$$

Из граничного условия для  $\eta_1 = x/\mu$  получим  $C_4 = \pi n$ . Аналогично, используя условия для  $\eta_2 = (1-x)/\mu$ , получим:

$$Z_0^{(1)}(\eta_1) = \pi n e^{-\eta_1}, \quad Z_0^{(2)}(\eta_2) = (-1)^{n+1} \pi n e^{-\eta_2}.$$

Если подставить  $\Lambda = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1$  и  $X(x) = X_0(x) + \mu X_1(x)$  в уравнение (11), оставить только члены при  $\mu$ , то получаем уравнение

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + \Lambda_0 X_1 = -\Lambda_1 X_0, \quad \text{где } X_0(x) = \sin \pi n x, \quad \Lambda_0 = n^2 \pi^2.$$

Решение однородной задачи  $X_{1 \text{ одн}}(x) = C_1 \sin \pi n x + C_2 \cos \pi n x$ . Частное решение  $X_{1 \text{ част}}(x) = \Lambda_1 x \cos \pi n x / 2\pi n$ . Тогда  $X_1(x) = X_{1 \text{ одн}}(x) + X_{1 \text{ част}}(x)$ .

Из граничных условий получаем

$$X(0) = 0 \Rightarrow X_1(0) + Z_0^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow C_2 + \pi n = 0 \Rightarrow C_2 = -\pi n.$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow X_1(1) + Z_0^{(2)}(0) = 0 \Rightarrow (-1)^n C_2 + (-1)^n \frac{\Lambda_1}{2\pi n} - (-1)^n \pi n = 0 \Rightarrow \Lambda_1 = 4\pi^2 n^2.$$

А составляющая  $X_1(x)$  равна

$$X_1(x) = -\pi n \cos \pi n x + 2\pi n x \cos \pi n x.$$

Собственное число  $\Lambda$  в первом приближении

$$\Lambda = n^2 \pi^2 + 4\mu n^2 \pi^2. \quad (12)$$

Собственная функция в нулевом приближении удовлетворяющая всем граничным условиям, имеет вид

$$X(x) = \sin \pi n x + \mu (-\pi n \cos \pi n x + 2\pi n x \cos \pi n x) + \mu \pi n e^{-\eta_1} + \mu (-1)^{n+1} \pi n e^{-\eta_2} + O(\mu^2).$$

Рассмотрим второе приближение метода Вишика и Люстерника. Решение в этом случае можно искать в виде

$$X(x) = X_0(x) + \mu X_1(x) + \mu Z_0^{(1)}\left(\frac{x}{\mu}\right) + \mu Z_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\mu}\right) + \mu^2 Z_1^{(1)}\left(\frac{x}{\mu}\right) + \mu^2 Z_1^{(2)}\left(\frac{1-x}{\mu}\right),$$

Из граничных условий при  $x = 0$   $X'(0) = 0$ , тогда  $X_1'(0) + Z_1^{(1)'}(0) = 0$ , т.е.  $2\pi n + Z_0^{(1)'}(0) = 0$ . Подставляя значения производных от  $X$  в (11), и, приравнивая члены при наименьших степенях  $\mu$ , получим:

$$\frac{1}{\mu} Z_1^{(1)''''}(\eta_1) + \frac{1}{\mu} Z_1^{(1)''}(\eta_1) = 0, \quad \text{где } \eta_1 = \frac{x}{\mu}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Z_1^{(1)}(\eta_1) = C_1 + C_2\eta_1 + C_3e^{\eta_1} + C_4e^{-\eta_1}.$$

Константы  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , так как

$$Z_1^{(1)}(\eta_1) \rightarrow 0, \quad \text{при } \eta_1 \rightarrow \infty,$$

Из граничного условия для  $\eta_1 = x/\mu$  получим  $C_4 = 2\pi n$ .

Аналогично, используя условия для  $\eta_2 = (1-x)/\mu$ , получим:

$$Z_1^{(1)}(\eta_1) = 2\pi ne^{-\eta_1}, \quad Z_1^{(2)}(\eta_2) = (-1)^{n+1}2\pi ne^{-\eta_2}.$$

Если представить  $\Lambda$  в виде  $\Lambda = \Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \mu^2\Lambda_2$  и  $X(x) = X_0(x) + \mu X_1(x)$  в уравнение (11), оставить только члены при  $\mu^2$ , то получаем уравнение

$$\frac{d^2 X_2}{dx^2} + \Lambda_0 X_2 = -\Lambda_2 X_0 - \Lambda_1 X_1 + \frac{d^4 X_0}{dx^4}, \quad (13)$$

где  $X_0(x) = \sin \pi n x$ ,  $\Lambda_0 = n^2 \pi^2$ ,  $X_1(x) = -\pi n \cos \pi n x + 2\pi n x \cos \pi n x$ ,  $\Lambda_1 = 4\pi^2 n^2$ .

Ищем решение уравнения (13) в виде

$$X_2(x) = C_1 \sin \pi n x + C_2 \cos \pi n x + C_3 x^2 \sin \pi n x + C_4 \sin \pi n x + C_5 x \cos \pi n x + C_6 x^2 \cos \pi n x.$$

Подставляя  $X_2(x)$ ,  $X_1(x)$ ,  $X_0(x)$ ,  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_1$  в уравнение (13) можно получить

$$C_6 = 0, \quad C_3 = -2\pi^2 n^2, \quad C_4 = 2\pi^2 n^2, \quad C_5 = \frac{\Lambda_2}{2\pi n} - \frac{pi^3 n^3}{2} - 2\pi n.$$

Из граничных условий

$$X(0) = 0 \Rightarrow X_2(0) + Z_1^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow C_2 + 2\pi n = 0 \Rightarrow C_2 = -2\pi n.$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow X_2(1) + Z_1^{(2)}(0) = 0 \Rightarrow (-1)^n C_2 + (-1)^n \left( \frac{\Lambda_2}{2\pi n} - \frac{pi^3 n^3}{2} - 2\pi n \right) - (-1)^n 2\pi n = 0 \Rightarrow \Lambda_2 = 12\pi^2 n^2 + \pi^4 n^4.$$

Уравнение для  $X_2(x)$  имеет вид

$$X_2(x) = 2\pi^2 n^2 (x - x^2) \sin \pi n x + \pi n (2x - 1) \cos \pi n x.$$

И собственное число  $\Lambda$  во втором приближении равно

$$\Lambda = n^2 \pi^2 + 4\mu n^2 \pi^2 + \mu^2 (12n^2 \pi^2 + \pi^4 n^4). \quad (14)$$

## 1.5 Сравнение результатов при числе волн $n=1$ и $n=5$

В таблицах №1,2 и на рис.1, 2 приведены частоты, полученные численно, методом динамического краевого эффекта и методом Вишика и Люстерника, для разных  $\mu$  при  $n = 1$  и  $n = 5$ .  $\Lambda_{\text{числ}}$  — безразмерная частота, полученная при решении системы уравнений (3),  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$  — частота, полученная при решении уравнения (12),  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  — частота, полученная при решении уравнения (14),  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  — частота, полученная при решении уравнения (8).  $\Lambda = \rho S \omega^2 l^2 / T$ ,  $\mu^2 = EJ / l^2 T$ .

**Таблица 1. Сравнение результатов при  $n=1$**

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	10.073	10.067	10.072	22.219
0.00625	160	10.125	10.116	10.125	22.226
0.01	100	10.288	10.264	10.286	22.256
0.02	50	10.752	10.659	10.746	22.404
0.04	25	11.847	11.449	11.794	22.996
0.08	12.5	14.837	13.028	14.409	25.363
0.1	10	16.804	13.818	15.976	27.138
0.125	8	19.759	14.804	18.177	29.912
<b>0.17</b>	<b>5.895</b>	<b>26.485</b>	<b>16.568</b>	22.781	<b>36.402</b>
<b>0.24</b>	<b>4.1075</b>	<b>41.855</b>	19.481	<b>32.274</b>	<b>51.435</b>
0.4	2.5	92.347	25.661	60.196	101.108

Жирным шрифтом выделены строки, в которых погрешность метода динамического краевого эффекта равна погрешности первого и второго приближения метода Вишика и Люстерника.

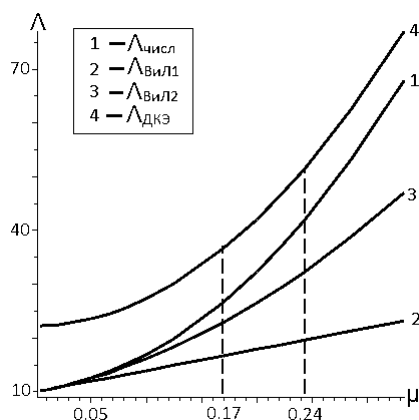


Рис. 1: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 1$ ,  $\mu = 0 \dots 0.3$

Если сначала рассматривать только первое приближение решения по методу Вишика и Люстерника, то можно отметить, что при  $n = 1$  и  $\mu < 0.17$  ближе к точному это решение, а при  $\mu > 0.17$  более точным является решение по методу динамического краевого эффекта. При  $\mu = 0.17$  погрешности как решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 37.44%.

Если рассматривать второе приближение решения по методу Вишика и Люстерника, то можно отметить, что при  $n = 1$  и  $\mu < 0.24$  ближе к точному это решение, а при  $\mu > 0.24$  более точным является решение по методу динамического краевого эффекта. При  $\mu = 0.17$  погрешности как решения, построенного по второму приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 22.89%.

**Таблица 2. Сравнение результатов при  $n=5$**

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	253.308	251.675	253.271	300.784
0.008	125	258.872	254.636	258.722	304.261
0.01	100	263.286	256.609	262.994	307.469
<b>0.02351</b>	<b>42.535</b>	<b>308.883</b>	<b>269.943</b>	<b>305.23</b>	<b>347.822</b>
0.04	25	404.782	286.219	388.365	441.172
0.05	20	485.679	296.088	455.692	521.394
<b>0.0533</b>	<b>18.75</b>	<b>516.531</b>	<b>299.378</b>	<b>480.969</b>	<b>552.093</b>
0.067	15	659.552	312.537	596.278	694.713

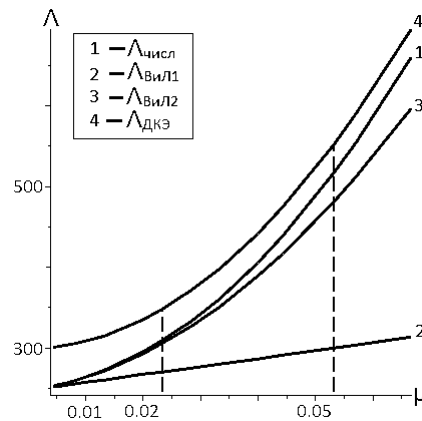


Рис. 2: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 5$ ,  $\mu = 0 \dots 0.06$

При  $n = 5$  и  $\mu = 0.02351$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта равны 12.6%.

При  $n = 5$   $\mu = 0.0533$  погрешности, и решения, построенного по второму приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта равны 7.9%.

Расчёты проводились и для других значений  $n$ . Вводя обозначение  $C = (\Lambda_{\text{ДКЭ}} - \Lambda_{\text{числ}}) / \Lambda_{\text{числ}}$ , получим отношение относительной погрешности ( $C$ ) от числа волн ( $n$ ) при  $\mu = 0.05$  для метода динамического краевого эффекта. График зависимости  $C$  от  $n$  представлен на рисунке 3.

Видно, что относительная погрешность решения, полученного методом динамического краевого эффекта, как и ожидалось, с ростом числа волн уменьшается.

Надо отметить, что все соотношения, представленные в работе, справедливы, если длина волны существенно больше размеров поперечного сечения, т.е. при  $1/n \gg \sqrt{S/l^2}$ .

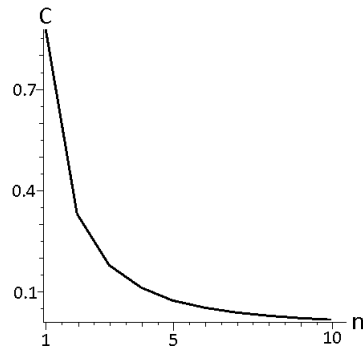


Рис. 3: Зависимость относительной погрешности  $C$  от числа волн  $n = 1 \dots 10$  при  $\mu = 0.05$

## 1.6 Заключение

Рассмотрена задача о колебании растянутого жёстко закрепленного стержня. Для данной задачи сравниваются

- 1) численное решение,
- 2) решение по первому и второму приближению метода Вишика и Люстерника,
- 3) решение по методу динамического краевого эффекта.

Проведена оценка области применимости первого и второго приближения метода Вишика и Люстерника и метода динамического краевого эффекта.

Как и следовало ожидать при малом  $\mu$  лучше работает метод Вишика и Люстерника, созданный для решения сингулярно-возмущённых уравнений, но при увеличении  $\mu$  метод Вишика и Люстерника работает всё хуже по сравнению с методом динамического краевого эффекта, применяемым обычно для уравнений, в которых все члены имеют одинаковый асимптотический порядок. Преимущество метода Вишика и Люстерника заключается в том, что можно получать в теории сколь угодно точное приближение, но, как было показано выше, сложность получения того или иного приближения значительно повышается. Решение же по методу динамического краевого эффекта не имеет никаких приближений, кроме нулевого, поэтому это решение нельзя улучшить, но чем больше число волн  $n$ , тем в более широком диапазоне параметров более точным является решение, полученное по методу динамического краевого эффекта.

## 2 Колебания растянутой прямоугольной пластинки

### 2.1 Постановка задачи

Рассматривается задача о колебании растянутой в обоих направлениях прямоугольной пластинки. Рассматриваются граничные условия шарнирного опирания по двум противоположным краям и жёсткого закрепления по двум другим. На основе этой задачи проводится оценка области применимости асимптотических методов Вишика и Люстерника и динамического краевого эффекта.

Уравнение колебаний пластинки имеет вид

$$D\Delta^2 W - T\Delta W - \rho h\omega^2 W = 0.$$

Граничные условия

$$\begin{cases} W(0, y) = W(a, y) = \frac{\partial W}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial W}{\partial x}(a, y) = 0, \\ W(x, 0) = W(x, b) = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x, b) = 0. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде:

$$W = X\left(\frac{x}{a}\right) \sin \frac{\pi m y}{b}.$$

Для пластинки можно разделить переменные и получить уравнение для  $X(x/a)$ :

$$X^{IV} - X'' \left( 2 \left( \frac{\pi m a}{b} \right)^2 + \frac{T a^2}{D} \right) + X \left( \left( \frac{\pi m a}{b} \right)^4 + \frac{T a^2}{D} \left( \frac{\pi m a}{b} \right)^2 - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D} \right) = 0. \quad (15)$$

Если рассмотреть случай растяжения в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления, то тогда уравнение колебаний пластинки имеет вид

$$D\Delta^2 W - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \rho h\omega^2 W = 0.$$

Уравнение для  $X(x/a)$  выглядит следующим образом:

$$X^{IV} - X'' \left( 2 \left( \frac{\pi m a}{b} \right)^2 + \frac{T a^2}{D} \right) + X \left( \left( \frac{\pi m a}{b} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D} \right) = 0. \quad (16)$$

## 2.2 Численное решение

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (15) имеет вид

$$\lambda^{IV} - \lambda^2 \left( 2 \left( \frac{\pi m a}{b} \right)^2 + \frac{T a^2}{D} \right) + \left( \frac{\pi m a}{b} \right)^4 + \frac{T a^2}{D} \left( \frac{\pi m a}{b} \right)^2 - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D} = 0.$$

$$\lambda_1^2 = \frac{2 \left( (\pi m a)/b \right)^2 + (T a^2)/D + \sqrt{(T^2 a^4)/D^2 + 4(\rho h \omega^2 a^4)/D}}{2},$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{2 \left( (\pi m a)/b \right)^2 + (T a^2)/D - \sqrt{(T^2 a^4)/D^2 + 4(\rho h \omega^2 a^4)/D}}{2}.$$

Тогда получаем уравнение с граничными условиями

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \sin \lambda_2 x + C_2 \cos \lambda_2 x + C_3 \operatorname{ch} \lambda_1 x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_1 x, \\ X(0) = X(1) = X'(0) = X'(1) = 0. \end{cases}$$

Далее идут выкладки, аналогичные приведённым в разделе (1.2), из которых следует

$$2\lambda_2 \lambda_1 (1 - \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2) + \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0.$$

$$\begin{cases} 2\lambda_2\lambda_1(1 - \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2) + \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{2((\pi ma/b)^2 + (Ta^2)/D + \sqrt{(T^2a^4)/D^2 + 4(\rho h\omega^2 a^4)/D}}{2}, \\ \lambda_2^2 = \frac{-2((\pi ma/b)^2 - (Ta^2)/D + \sqrt{(T^2a^4)/D^2 + 4(\rho h\omega^2 a^4)/D}}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая: когда отношение  $D/a^2T$  меньше или больше 1. Введём 2 безразмерных параметра  $\mu$  и  $\varepsilon$ , каждый из которых меняется в промежутке  $[0, 1]$ :  $\mu^2 = D/a^2T$ ,  $\varepsilon = 1/\mu$ . Обозначим  $\Lambda = \rho h\omega^2 a^2$  тогда последнее уравнение примет вид:

$$\begin{cases} 2\lambda_2\lambda_1(1 - \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2) + \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{2((\pi ma/b)^2 + 1/\mu^2 + \sqrt{1/\mu^4 + 4\Lambda/\mu^2}}{2}, \\ \lambda_2^2 = \frac{-2((\pi ma/b)^2 - 1/\mu^2 + \sqrt{1/\mu^4 + 4\Lambda/\mu^2}}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

Для  $\varepsilon^2 = a^2T/D$ , при  $A = \rho h\omega^2 a^4/D$ , получим

$$\begin{cases} 2\lambda_2\lambda_1(1 - \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2) + \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{2((\pi ma/b)^2 + \varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^4 + 4A}}{2}, \\ \lambda_2^2 = \frac{-2((\pi ma/b)^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^2 + 4A}}{2}. \end{cases}$$

Для случая растяжения в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^{IV} - \lambda^2 \left( 2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + \frac{Ta^2}{D} \right) + \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^4 - \frac{\rho h\omega^2 a^4}{D} = 0.$$

$$\lambda_1^2 = \frac{2((\pi ma/b)^2 + (Ta^2)/D + \sqrt{(T^2a^4)/D^2 + 4((\pi ma/b)^2 (Ta^2)/D + 4(\rho h\omega^2 a^4)/D}}{2},$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{2((\pi ma/b)^2 + (Ta^2)/D - \sqrt{(T^2a^4)/D^2 + 4((\pi ma/b)^2 (Ta^2)/D + 4(\rho h\omega^2 a^4)/D}}{2}.$$

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \sin \lambda_2 x + C_2 \cos \lambda_2 x + C_3 \operatorname{ch} \lambda_1 x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_1 x, \\ X(0) = X(1) = X'(0) = X'(1) = 0. \end{cases}$$

Далее идут выкладки, аналогичные приведённым в разделе (1.2), из которых следует

$$2\lambda_2\lambda_1(1 - \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2) + \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0.$$

$$\begin{cases} 2\lambda_2\lambda_1(1 - \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2) + \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{2((\pi ma/b)^2 + 1/\mu^2 + \sqrt{1/\mu^4 + 4((\pi ma/b)\mu)^2 + 4\Lambda/\mu^2}}{2}, \\ \lambda_2^2 = \frac{-2((\pi ma/b)^2 - 1/\mu^2 + \sqrt{1/\mu^4 + 4((\pi ma/b)\mu)^2 + 4\Lambda/\mu^2}}{2}. \end{cases} \quad (18)$$

Для  $\varepsilon^2 = a^2T/D$ , при  $A = \rho h\omega^2 a^4/D$ , получим



$$\begin{cases} 2\lambda_2\lambda_1(1 - \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2) + \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0, \\ \lambda_1^2 = \frac{2((\pi ma)/b)^2 + \varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^4 + 4((\pi ma\varepsilon)/b)^2 + 4A}}{2}, \\ \lambda_2^2 = \frac{-2((\pi ma)/b)^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^4 + 4((\pi ma\varepsilon)/b)^2 + 4A}}{2}. \end{cases}$$

### 2.3 Метод динамического краевого эффекта

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (15) имеет вид

$$\lambda^{IV} - \lambda^2 \left( 2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + \frac{Ta^2}{D} \right) + \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^4 + \frac{Ta^2}{D} \left( \frac{\pi a}{b} \right)^2 - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D} = 0.$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{2(\pi ma/b)^2 + Ta^2/D + \sqrt{T^2 a^4/D^2 + 4\rho h \omega^2 a^4/D}}{2}, \\ \lambda_2^2 &= -\frac{2(\pi ma/b)^2 + Ta^2/D - \sqrt{T^2 a^4/D^2 + 4\rho h \omega^2 a^4/D}}{2}. \end{aligned}$$

Пусть далее  $\varepsilon^2 = a^2 T/D$  и  $A = \rho S \omega^2 a^4/D$  тогда

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{2(\pi ma/b)^2 + \varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^4 + 4A}}{2}, \\ \lambda_2^2 &= \frac{-2(\pi ma/b)^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^4 + 4A}}{2}. \end{aligned}$$

Естественно предположить, что вдали от границ при колебаниях форма прогиба для направления пластинки, соответствующего граничным условиям жёсткого опирания, будет мало отличаться от формы прогиба шарнирно опертой пластинки, поэтому будем искать решение задачи о колебаниях жестко закрепленного пластинки (15) в виде  $X = X_1 + X_2$ , где

$$X_1 = \sin \frac{\pi(x - x_0)}{\lambda_x}.$$

$$-\left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon^4 + 4A}}{2} = \left( \frac{\pi}{\lambda_x} \right)^2.$$

$$\frac{\varepsilon^4}{4} + A = \left( \frac{\pi}{\lambda_x} \right)^4 + 2 \left( \frac{\pi}{\lambda_x} \right)^2 \left( \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + \left( \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)^2.$$

$$A = \left( \frac{\pi}{\lambda_x} \right)^4 + 2 \left( \frac{\pi}{\lambda_x} \right)^2 \left( \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^4 + \varepsilon^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2.$$

Пусть далее  $\lambda = \lambda_1$ . Тогда

$$X_2 = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda(x-1)}.$$

$$X_2(0) = C_1, \quad X_2(1) = C_2, \quad X_2'(0) = -C_1 \lambda, \quad X_2'(1) = C_2 \lambda.$$

Тогда

$$\begin{aligned} X_1(0) &= -\sin \frac{\pi x_0}{\lambda_x}, & X_1'(0) &= \frac{\pi}{\lambda_x} \cos \frac{\pi x_0}{\lambda_x}, \\ X_1(1) &= \sin \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x}, & X_1'(1) &= \frac{\pi}{\lambda_x} \cos \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x}. \end{aligned}$$

Так как  $X = X_1 + X_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} C_1 - \sin \frac{\pi x_0}{\lambda_x} &= 0, & -C_1 \lambda + \frac{\pi}{\lambda_x} \cos \frac{\pi x_0}{\lambda_x} &= 0, \\ C_2 + \sin \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} &= 0, & C_2 \lambda + \frac{\pi}{\lambda_x} \cos \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} &= 0. \\ \frac{\pi}{\lambda \lambda_x} &= \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x}, & \frac{\pi}{\lambda \lambda_x} &= \operatorname{tg} \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \operatorname{tg} \frac{\pi(1-x_0)}{\lambda_x} \implies \frac{1-x_0}{\lambda_x} = \frac{x_0}{\lambda_x} + k \implies x_0 = \frac{1-k\lambda_x}{2}.$$

$$-\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon^4 + 4A}}{2} = \left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2.$$

$$\sqrt{\varepsilon^4 + 4A} = 2\left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2 + 2\left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2 + \varepsilon^2 \implies \lambda = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2 + 2\left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2 + \varepsilon^2}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{\lambda \lambda_x} \implies \operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{\lambda_x \sqrt{(\pi/\lambda_x)^2 + 2(\pi m a/b)^2 + \varepsilon^2}}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \left(2\left(\frac{\lambda_x m a}{b}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_x^2}{\pi^2} + 1\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \left(\frac{\lambda_x m a}{b}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_x^2}{\pi^2} \right) \approx 1 \implies \frac{\pi x_0}{\lambda_x} = \frac{\pi}{4} + \pi l.$$

$$\frac{\pi(1-k\lambda_x)}{2\lambda_x} = \frac{\pi}{4} + \pi l \implies \frac{\pi}{\lambda_x} = \frac{\pi}{2} + \pi(2l+k).$$

Обозначим  $n = 2l + k$ . Тогда

$$\frac{\pi}{\lambda_x} = \frac{\pi}{2} + \pi n \implies \lambda_x = \frac{1}{1/2 + n}.$$

$$A = (\pi/2 + \pi n)^4 + 2(\pi/2 + \pi n)^2 \left( \left(\frac{\pi a}{b}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + \left(\frac{\pi a}{b}\right)^4 + \varepsilon^2 \left(\frac{\pi a}{b}\right)^2.$$

Воспользуемся тем, что  $\mu = 1/\varepsilon$  и  $A = \Lambda/\mu^2$ . Тогда

$$A = (\pi/2 + \pi n)^4 + 2(\pi/2 + \pi n)^2 \left( \left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + \left(\frac{\pi m a}{b}\right)^4 + \varepsilon^2 \left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2.$$

$$\Lambda = \mu^2 (\pi/2 + \pi n)^4 + 2(\pi/2 + \pi n)^2 \left( \mu^2 \left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} \right) + \mu^2 \left(\frac{\pi m a}{b}\right)^4 + \left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2. \quad (19)$$

Для случая растяжения в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^{IV} - \lambda^2 \left( 2\left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2 + \frac{Ta^2}{D} \right) + \left(\frac{\pi m a}{b}\right)^4 - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D} = 0.$$

$$\lambda_1^2 = \frac{2(\pi ma/b)^2 + Ta^2/D + \sqrt{T^2 a^4/D^2 + 4(\pi ma/b)^2 Ta^2/D + 4\rho h\omega^2 a^4/D}}{2},$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{2(\pi ma/b)^2 + Ta^2/D - \sqrt{T^2 a^4/D^2 + 4(\pi ma/b)^2 Ta^2/D + 4\rho h\omega^2 a^4/D}}{2}.$$

Пусть далее  $\varepsilon^2 = a^2 T/D$  и  $A = \rho S \omega^2 a^4/D$  тогда

$$\lambda_1^2 = \frac{2(\pi ma/b)^2 + \varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^4 + 4(\pi ma/b)^2 \varepsilon^2 + 4A}}{2},$$

$$\lambda_2^2 = \frac{-2(\pi ma/b)^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{\varepsilon^4 + 4(\pi ma/b)^2 \varepsilon^2 + 4A}}{2}$$

Далее, поступая также как и выше в этом разделе, получаем

$$\Lambda = \mu^2 (\pi/2 + \pi n)^4 + 2(\pi/2 + \pi n)^2 \left( \mu^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) + \mu^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^4. \quad (20)$$

## 2.4 Решение задачи по методу Вишика и Люстерника

После замен  $\mu^2 = D/a^2 T$  и  $\Lambda = \rho h \omega^2 a^2$  в уравнении (15) получаем

$$-\mu^2 X^{IV} + X'' \left( 2\mu^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + 1 \right) + X \left( -\mu^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^4 - \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + \Lambda \right) = 0.$$

$$-\lambda^2 + 1 - 2\mu^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 = 0 \implies -\lambda^2 + 1 = 0.$$

Нулевое приближение:

$$X_0'' \left( 2\mu^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + 1 \right) + X_0 \left( -\mu^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^4 - \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + \Lambda_0 \right) = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 \left( 2\mu^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + 1 \right) - \mu^2 \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^4 - \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2 + \Lambda_0 = 0.$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{-\mu^2 (\pi ma/b)^4 - (\pi ma/b)^2 + \Lambda_0}{2\mu^2 (\pi ma/b)^2 + 1}} \implies \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\Lambda_0 - \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2}.$$

$$X_0 = C_1 \sin \sqrt{\Lambda_0 - \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2} x + C_2 \cos \sqrt{\Lambda_0 - \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2} x.$$

$$X_0(0) = 0 \implies C_2 = 0.$$

$$X_0(1) = 0 \implies \sqrt{\Lambda_0 - \left( \frac{\pi ma}{b} \right)^2} = \pi n \implies \Lambda_0 = \pi^2 \left( n^2 + \left( \frac{ma}{b} \right)^2 \right).$$

Тогда  $X_0 = \sin \pi n x$ .  $Z_0^{(1)}$  и  $Z_0^{(2)}$  получаются те же значения как и для стержня.

Если  $X = X_0 + \mu X_1$ ,  $\Lambda = \Lambda_0 + \mu \Lambda_1$ , то получаем уравнение

$$X_1'' + \left( -\left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2 + \Lambda_0 \right) X_1 = -\Lambda_1 X_0.$$

Так как  $-\left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2 + \Lambda_0 = \pi^2 n^2$ , то мы получаем то же самое уравнение и те же граничные условия, что и для стержня. Следовательно  $\Lambda_1 = 4\pi^2 n^2$ . Тогда

$$\Lambda = \pi^2 \left( n^2 + \left(\frac{m a}{b}\right)^2 \right) + 4\mu \pi^2 n^2. \quad (21)$$

Рассмотрим случай растяжения в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления. После замен  $\mu^2 = D/a^2 T$  и  $\Lambda = \rho h \omega^2 a^2$  в уравнении (16) получаем

$$\lambda^{IV} - \lambda^2 \left( 2 \left(\frac{\pi m a}{b}\right)^2 + \frac{T a^2}{D} \right) + \left(\frac{\pi m a}{b}\right)^4 - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D} = 0.$$

Далее, поступая также как и выше в этом разделе, получаем

$$\Lambda = \pi^2 n^2 + 4\mu \pi^2 n^2. \quad (22)$$

## 2.5 Сравнение результатов при числе волн $n=1$ и $n=5$ , $m=1$ и $m=5$

В таблицах №3,4 и на рис.4,5 приведены частоты, полученные численно, методом динамического краевого эффекта и методом Вишика и Люстерника, для разных  $\mu$  при  $n = 1$  и  $n = 5$ .  $\Lambda_{\text{числ}}$  — безразмерная частота, полученная при решении системы уравнений (18),  $\Lambda_{\text{ВиЛ}}$  — частота, полученная при решении уравнения (21),  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  — частота, полученная при решении уравнения (19).  $\Lambda = \rho S \omega^2 l^2 / T$ ,  $\mu^2 = EJ / l^2 T$ . Результаты приведены для квадратной пластинки, т.е.  $a/b = 1$ , число волн по оси  $y$  равно 1, т.е.  $m = 1$ . Результаты для  $m = 5$  представлены в таблицах №5,6 и на рис.6,7.

**Таблица 3. Сравнение результатов при  $n=1$ ,  $m=1$**

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	19.949	19.937	32.102
0.00625	160	20.006	19.986	32.117
0.01	100	20.186	20.134	32.179
0.02	50	20.741	20.529	32.488
0.04	25	22.208	21.318	33.562
0.1	10	29.9	23.687	42.365
0.125	8	34.728	24.674	48.153
<b>0.1485</b>	<b>6.73415</b>	<b>40.183</b>	<b>25.602</b>	<b>54.764</b>
0.4	2.5	155.984	35.531	196.698

Видно, что при  $n = 1$  и  $\mu = 0.1485$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 36.3%.

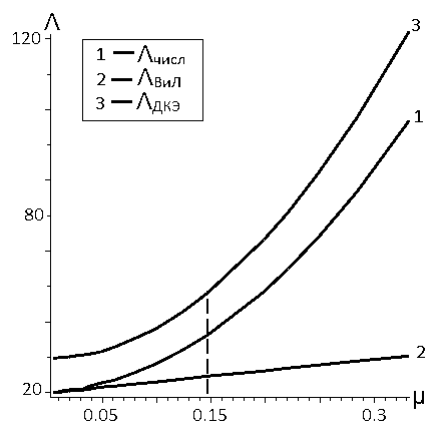


Рис. 4: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 1$ ,  $\mu = 0 \dots 0.3$ ,  $a/b = 1$ ,  $m = 1$

Таблица 4. Сравнение результатов при  $n=5$ ,  $m=1$

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	263.303	261.545	310.803
0.008	125	269.064	264.505	314.513
0.01	100	273.662	266.479	317.938
<b>0.02289</b>	<b>43.68891</b>	<b>318.732</b>	<b>279.2</b>	<b>358.263</b>
0.04	25	423.03	296.088	460.627
0.05	20	508.699	305.958	546.24
0.0625	16	641.967	318.295	680.011

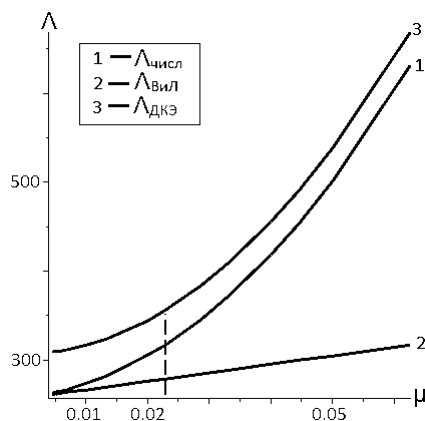


Рис. 5: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 5$ ,  $\mu = 0 \dots 0.06$ ,  $a/b = 1$ ,  $m = 1$

При  $n = 5$  и  $\mu = 0.02289$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 12.4%.

Можно заметить, что для случая растяжения в обоих направлениях при фиксированном  $m = 1$  и при увеличении числа  $n$  было получено уменьшение области применимости метода Вишика и Люстерника и увеличение - метода динамического краевого эффекта, также как при растяжении стержней.

**Таблица 5. Сравнение результатов при  $n=1, m=5$**

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	258.457	256.807	270.755
0.00625	160	259.436	256.856	271.772
0.01	100	263.611	257.004	276.18
<b>0.014</b>	<b>71.2924</b>	<b>270.171</b>	<b>257.163</b>	<b>283.178</b>
0.02	50	283.866	257.399	297.88
0.04	25	364.308	258.189	384.678
0.1	10	926.233	260.558	992.27
0.125	8	1302.451	261.545	1399.14

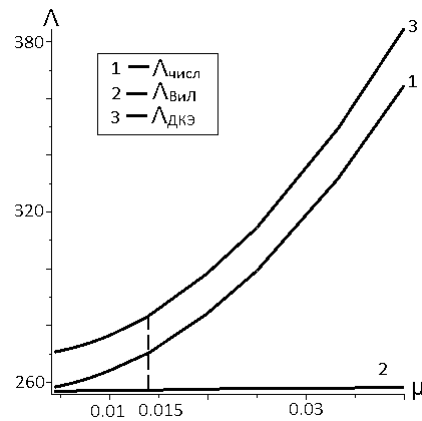


Рис. 6: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 1, \mu = 0 \dots 0.3, a/b = 1, m = 5$

Видно, что при  $n = 1, m = 5$  и  $\mu = 0.014$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 4.8%.

**Таблица 6. Сравнение результатов при  $n=5, m=5$**

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	504.644	498.415	552.729
0.008	125	517.422	501.376	564.326
0.01	100	528.524	503.35	575.03
<b>0.0135</b>	<b>73.8371</b>	<b>553.341</b>	<b>506.847</b>	<b>599.836</b>
0.04	25	953.7	532.959	1021.051
0.05	20	1205.779	542.828	1288.663
0.0625	16	1599.262	555.165	1706.809

При  $n = 5, m = 5$  и  $\mu = 0.0135$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 8.4%.

Можно заметить, что для случая растяжения в обоих направлениях при фиксированном  $m$  и при увеличении числа  $n$  получено уменьшение области применимости метода Вишика и Люстерника и

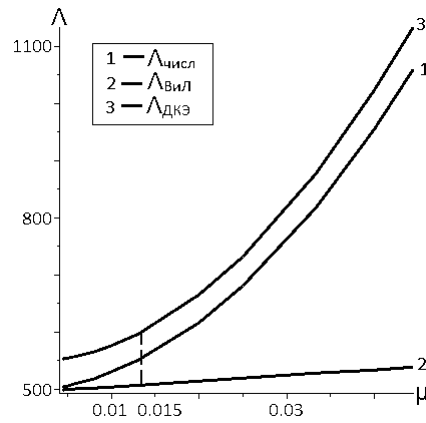


Рис. 7: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 5$ ,  $\mu = 0 \dots 0.06$ ,  $a/b = 1$ ,  $m = 5$

увеличение - метода динамического краевого эффекта. Тоже самое и для фиксированного  $n$  и при увеличении числа  $n$ . Но если зафиксированное число  $m$  достаточно большое, то при увеличении числа  $n$  изменение того или иного метода будет незначительным. Если же зафиксированное число  $n$  достаточно большое, то при увеличении числа  $m$  изменение того или иного метода будет на много больше, чем при случае, описанном в предыдущем предложении.

Случаю растяжения в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления, соответствуют в тех же обозначениях таблицы №7,8 и графики 10,11.

**Таблица 7. Сравнение результатов при  $n=1$ ,  $m=1$**

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	10.08	10.067	22.232
0.00625	160	10.136	10.116	22.247
0.01	100	10.316	10.264	22.309
0.02	50	10.872	10.659	22.618
0.04	25	12.338	11.449	23.853
0.1	10	20.031	13.817	32.495
0.125	8	24.858	14.804	38.283
<b>0.1485</b>	<b>6.73415</b>	<b>30.313</b>	<b>15.732</b>	<b>44.895</b>
0.4	2.5	146.115	25.661	186.828

Видно, что при  $n = 1$ ,  $m = 1$  и  $\mu = 0.1485$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 48.1%.

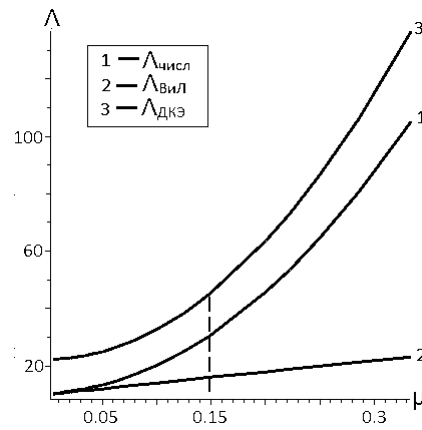


Рис. 8: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 1$ ,  $\mu = 0 \dots 0.3$ ,  $a/b = 1$ ,  $m = 1$

Таблица 8. Сравнение результатов при  $n=5$ ,  $m=1$

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	253.433	251.675	300.934
0.008	125	259.194	254.636	304.644
0.01	100	263.792	256.61	308.068
<b>0.02289</b>	<b>43.68891</b>	<b>308.862</b>	<b>269.331</b>	<b>348.393</b>
0.04	25	413.16	286.219	450.757
0.05	20	498.829	296.088	536.371
0.0625	16	632.097	308.425	670.141

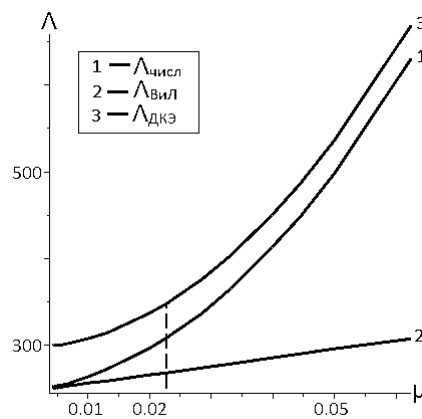


Рис. 9: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 5$ ,  $\mu = 0 \dots 0.06$ ,  $a/b = 1$ ,  $m = 1$

При  $n = 5$ ,  $m = 1$  и  $\mu = 0.0229$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 12,8%.

Можно заметить, что для случая растяжения в обоих направлениях при фиксированном  $m = 1$  и при увеличении числа  $n$  было получено уменьшение области применимости метода Вишика и Люстерника и увеличение - метода динамического краевого эффекта, также как при растяжении стержней. Для случаев растяжения в обоих направлениях и растяжения в направлении, которому соответству-



ют граничные условия жёсткого закрепления, области применимости обоих методов не меняются при различных параметрах  $n$  и фиксированном  $m = 1$ .

Результаты для  $m = 5$  представлены в таблицах №9,10 и на рис.10,11.

**Таблица 9. Сравнение результатов при  $n=1, m=5$**

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	11.717	10.067	24.015
0.00625	160	12.696	10.116	25.032
0.01	100	16.871	10.264	29.44
<b>0.014</b>	<b>71.2924</b>	<b>23.43</b>	<b>10.423</b>	<b>36.438</b>
0.02	50	37.126	10.659	51.14
0.04	25	117.568	11.449	137.938
0.1	10	679.493	13.817	745.53
0.125	8	1055.71	14.804	1152.4

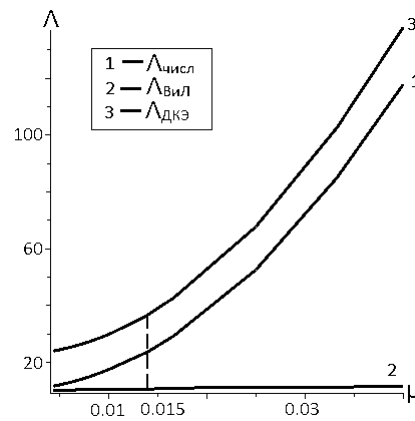


Рис. 10: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ1}}$ ,  $\Lambda_{\text{ВиЛ2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 1, \mu = 0 \dots 0.3, a/b = 1, m = 5$

Видно, что при  $n = 1, m = 5$  и  $\mu = 0.014$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 55.5%.

**Таблица 10. Сравнение результатов при  $n=5, m=5$**

$\mu$	$\varepsilon$	$\Lambda_{\text{числ}}$	$\Lambda_{\text{ВиЛ}}$	$\Lambda_{\text{ДКЭ}}$
0.005	200	257.904	251.675	305.989
0.008	125	270.682	254.636	317.586
0.01	100	281.784	256.61	328.29
<b>0.0135</b>	<b>73.837</b>	<b>306.601</b>	<b>260.107</b>	<b>353.095</b>
0.04	25	706.96	286.219	774.311
0.05	20	959.039	296.088	1041.924
0.0625	16	1352.522	308.425	1460.069

При  $n = 5, m = 5$  и  $\mu = 0.0135$  погрешности, и решения, построенного по первому приближению метода Вишика и Люстерника, и решения, построенного по методу динамического краевого эффекта, равны 15.16%.

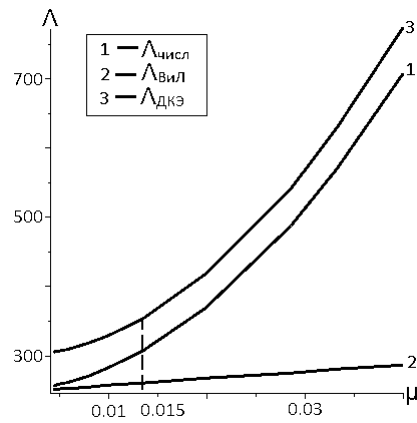


Рис. 11: Сравнение  $\Lambda_{\text{числ}}$ ,  $\Lambda_{\text{Виш1}}$ ,  $\Lambda_{\text{Виш2}}$  и  $\Lambda_{\text{ДКЭ}}$  при  $n = 5$ ,  $\mu = 0 \dots 0.06$ ,  $a/b = 1$ ,  $m = 5$

Для случаев растяжения в обоих направлениях и растяжения в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления, области применимости обоих методов не меняются при различных параметрах  $n$  и фиксированном  $m = 5$ . Так как тоже самое было получено при  $m = 1$ , то можно сделать вывод, что области применимости того или иного метода совпадают в двух этих случаях при различных параметрах  $n$  и  $m$ . Следовательно, все выводы, справедливые для случая растяжения в обоих направлениях справедливы и для случая растяжения в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления.

## 2.6 Заключение

Рассмотрены задача о колебаниях растянутой пластинки в обоих направлениях при граничных условиях шарнирного опирания по 2-м противоположным краям и жёсткого закрепления по двум другим краям. Также рассмотрена задача о колебаниях растянутой пластинки в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления. Для данных задач сравниваются

- 1) численное решение,
- 2) решение по первому приближению метода Вишика и Люстерника,
- 3) решение по методу динамического краевого эффекта.

Проведена оценка области применимости первого приближения метода Вишика и Люстерника и метода динамического краевого эффекта.

При  $n = 1$ ,  $m = 1$  и  $\mu \leq 0.1485$  решение, построенное по первому приближению метода Вишика и Люстерника, ближе к точному решению, а при  $\mu > 0.1485$  более точным является решение по методу динамического краевого эффекта. Вблизи точки  $\mu = 0.1485$  погрешности как решения, полученного по методу Вишика и Люстерника, так и решения полученного методом динамического краевого эффекта, равны 36.3%.

При  $n = 5$ ,  $m = 1$  и  $\mu \leq 0.02289$  более точным является решение по первому приближению метода Вишика и Люстерника, а при  $\mu > 0.02289$  — решение по методу динамического краевого эффекта. Вблизи точки  $\mu = 0.02289$  погрешности как решения, полученного по методу Вишика и Люстерника,

так и решения, полученного методом динамического краевого эффекта, равны 12.4%.

При  $n = 1$ ,  $m = 5$  и  $\mu \leq 0.014$  решение, построенное по первому приближению метода Вишика и Люстерника, ближе к точному решению, а при  $\mu > 0.014$  более точным является решение по методу динамического краевого эффекта. Вблизи точки  $\mu = 0.014$  погрешности как решения, полученного по методу Вишика и Люстерника, так и решения полученного методом динамического краевого эффекта, равны 4.8%.

При  $n = 5$ ,  $m = 5$  и  $\mu \leq 0.0135$  более точным является решение по первому приближению метода Вишика и Люстерника, а при  $\mu > 0.0135$  — решение по методу динамического краевого эффекта. Вблизи точки  $\mu = 0.0135$  погрешности как решения, полученного по методу Вишика и Люстерника, так и решения, полученного методом динамического краевого эффекта, равны 8.4%.

Можно заметить, что первое приближение метода Вишика и Люстерника для пластин в случае растяжения в обоих направлениях при  $m = 1$  работает хуже, чем первое приближение метода Вишика и Люстерника для стержней.

Было показано, что области применимости того или иного метода в случае растяжения в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления, достаточно близки к областям применимости для случая растяжения в обоих направлениях. Тогда выводы, справедливые для случая растяжения в обоих направлениях справедливы и для случая растяжения в направлении, которому соответствуют граничные условия жёсткого закрепления.

## Список литературы

- [1] Бидерман В. Л. Теория Механических колебаний, М., «Высшая школа», 1980, 408.
- [2] Болотин В.В. Асимптотический метод в теории колебаний упругих пластин и оболочек, Тр. конф. по теории пластин и оболочек 1961, выпуск 1, 21-25
- [3] Болотин В.В. Динамический краевой эффект при колебаниях пластинок. Инж. сборн., т.31, Изд. АН СССР, 1960.
- [4] Болотин В.В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. Прикл. матем. мех., т.24, №5 Изд. АН СССР, 1960.
- [5] Кудрявцев Е.П. О влиянии сдвигов и инерции вращения на изгибные колебания упругих стержней. Известия АН СССР, ОТН, Мехатроника и машиностроение, №5, 1960.
- [6] Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций, М. Машиностроение, 1991, 429.
- [7] Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике твёрдого тела, М.-И.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований 2007. 360