

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Федеральное государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный
университет»

Механика и математическое моделирование

Механика деформируемого твердого тела

Меркушев Евгений Сергеевич

Влияние напряженного состояния на материал с переменной структурой

Магистерская диссертация

Допущена к защите.

Зав. кафедрой:

док. физ.-мат. наук, проф. Морозов Н. Ф.

Научный руководитель:

док. физ.-мат. наук, проф. Индейцев Д. А.

Рецензент:

канд. физ.-мат. наук, ст. н. с. Мочалова Ю. А.

Санкт-Петербург

2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mechanics and mathematical modelling

Solid mechanics

Evgenii Merkushev

Effect of stress state on a material with variable structure

Master's Dissertation

Admitted for defence.

Head of the chair:

academician of RAS, prof. Nikita Morozov

Scientific supervisor:

corresponding member of RAS Dmitry, prof. Indeitsev

Reviewer:

Ph.D. Yulia Mochalova

Saint-Petersburg

2016

Оглавление

Введение	4
Содержание	7
1 Динамика продольных колебаний стержня с водородом	8
1.1 Двухкомпонентная модель	8
1.2 Система уравнений двухкомпонентной модели	10
1.3 Обобщенное уравнение диффузии	13
1.4 Постановка задачи	16
1.5 Безразмерная система определяющих уравнений	17
2 Метод решения	18
2.1 Однородный стержень	18
2.2 Установившаяся стадия колебаний	19
2.3 Усреднение	22
2.4 Решение обобщенного уравнения диффузии	22
2.5 Численный эксперимент	25
2.6 Обобщенная жесткость стержня	26
3 Заключение	29

Введение

Технические металлы не бывают чистыми, они всегда содержат примеси. Одни из них могут положительно влиять на свойства материала, другие — отрицательно. Даже небольшое присутствие в металле таких примесей, как водород, кислород и азот оказывает резко отрицательное воздействие на его свойства. Негативные воздействия примесей на материал под нагрузкой — это одна из наиболее важных проблем физики и механики материалов [1, 2].

Водородная хрупкость является причиной многих катастроф, поэтому ее механизмы тщательно исследуются [3, 4, 5]. Современная конструкторская деятельность невозможна без предварительных точных расчетов на прочность. Поскольку водород сильно влияет на механические характеристики металлов, моделированию такого влияния посвящено множество работ.

Можно выделить несколько основных подходов: учет влияния водорода на зарождение и движение дислокаций [6], учет влияния водорода на развитие трещин [7], учет внутреннего давления водорода [8] в металле и физические подходы. Перечисленные подходы имеют ряд недостатков: изменение механических характеристик металла в них становится заметным только при больших концентрациях водорода, которые совершенно невозможно получить в конструкционных материалах; некоторые подходы требуют огромных вычислительных ресурсов при решении прикладных задач; большинство упомянутых моделей являются локальными.

Таким образом, для прогнозирования поведения конструкций, содержащих водород, необходима нелокальная модель, учитывающая влияние малых концентраций водорода на механические характеристики материалов.

Для того чтобы понять, как внутренняя структура материала влияет

на его механические свойства, в нашей работе используется другой известный подход, предложенный в [9]: построенная на основе принципов рациональной механики двухкомпонентная модель, описывающая поведение материалов со сложной внутренней структурой.

Примесь, содержащуюся в материале, можно разделить на две части: с высокой и низкой энергиями взаимодействия. Частицы примеси с низкой энергией связей диффундируют, они очень слабо взаимодействуют с материалом (подвижная часть примеси). Частицы примеси с высокой энергией связей взаимодействуют с металлом очень интенсивно (присоединенный водород, встроившийся в кристаллическую решетку). Механические свойства материала ухудшаются именно из-за сильно взаимодействующей компоненты.

Влияние напряженного состояния материала на коэффициент диффузии подвижной части примеси предлагается учесть с помощью включения в основные уравнения диссипативного слагаемого с коэффициентом сопротивления, зависящего от шаровой части тензора деформаций. Это позволяет описывать динамику примеси в металлах и оценивать переход примеси из подвижного в сильно взаимодействующее состояние под влиянием напряженного состояния.

В бакалаврской работе [10] был рассмотрен принцип построения двухкомпонентной континуальной модели, используемой в [1, 9, 11]. С помощью предложенной модели было исследовано статическое напряженное состояние одномерного наводороженного металлического стержня. Было показано, что уравнение состояния напряжение–деформация для материала с растворенным водородом имеет петлеобразный вид, схожий с петлей Ван-дер-Вальса, т. е. описывает фазовый переход первого рода.

Данная работа является продолжением бакалаврской работы и целью

ее является исследование связанной динамической задачи, которая позволит определить, как характер нагружения образца влияет на перераспределение водорода в стержне, а также как, в свою очередь, перераспределение водорода (внутренний диффузионный процесс) влияет на механические макрохарактеристики образца. А именно, будет изучено поведение одномерного наводороженного стержня при низкочастотном циклическом воздействии на его границы, будет получено обобщенное уравнение диффузии примеси, учитывающее влияние деформации материала и сил инерции. Для уравнения диффузии примеси будет построено приближенное аналитическое решение, для этой граничной задачи будет проведен численный эксперимент, результаты которого будут сопоставлены с результатами аналитического решения. Также будет выведено и проанализировано выражение для обобщенной жесткости стержня.

Содержание

Первая глава посвящена постановке задачи: обсуждается использованная двухкомпонентная модель; выводится обобщенное уравнение диффузии примеси в материале, позволяющее учитывать влияние внутренней структуры материала на его механические характеристики; получена определяющая система уравнений, которая полностью описывает движение металлического стержня с растворенным водородом.

Во второй части работы изложен метод решения определяющей системы уравнений: рассмотрено поведение однородного стержня без учета его внутренней структуры; исследована установившаяся стадия колебаний стержня с растворенным водородом; применена методика усреднения, развитая Крыловым и Боголюбовым [12]; получено приближенное решение обобщенного диффузионного уравнения; проведен численный эксперимент, результаты которого сопоставлены с полученным приближенным аналитическим решением; влияние диффузионного процесса и перераспределения водорода на механические характеристики материала проиллюстрировано на примере поведения обобщенной жесткости образца.

В заключении приведены основные результаты, полученные в магистерской диссертации.

1 Динамика продольных колебаний стержня с водородом

Изучим динамику перераспределения водорода в металлическом стержне длины l со следующими граничными условиями: на левом конце стержень жестко заделан, к правому концу приложена низкочастотная (~ 1 Гц) гармоническая сила.

1.1 Двухкомпонентная модель

Рассмотрим одномерную модель двухкомпонентного континуума (см. например, [1, 9]). Роль первой компоненты играет кристаллическая решетка материала вместе со встроенными в нее частицами водорода; вторая компонента — свободный подвижный водород, растворенный в металле. Движение слабовзаимодействующих частиц водорода будем считать одномерным потоком идеальной баротропной жидкости: тензор напряжений содержит только изотропную часть, нет девиаторной части.

Пусть N — общее число частиц первой компоненты в элементарном объеме; N_0 — число частиц металла в элементарном объеме; N^+ — число частиц примеси, уже встроенных в кристаллическую решетку материала, в элементарном объеме; N^- — число свободных частиц примеси в элементарном объеме. Кроме того, n_0 , n^+ , n^- — соответствующие концентрации частиц.

Первая компонента — кристаллическая решетка металла с осажденными частицами примеси. Она характеризуется напряжением σ_s , деформацией ε_s , плотностью $\rho_s = \rho_{s0} + \rho_H^+$, перемещениями u и скоростями v_s . Здесь $\rho_{s0} = n_0 m_0$ — плотность кристаллической решетки, m_0 — масса атомов решетки; $\rho_H^+ = n^+ m_H$ — плотность сильно взаимодействующих с решеткой частиц водорода, m_H — масса атомов примеси. Вторая компонента представляет собой поток свободных частиц примеси (сжимаемая жидкость), ее

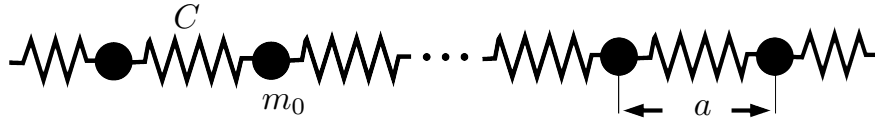


Рис. 1: Одномерная цепочка атомов

состояние определяется плотностью $\rho_H^- = n^- m_H$, давлением p и скоростью v_H .

Уравнение состояния

Будем считать кристаллическую решетку одномерной цепочкой, состоящей из одинаковых частиц массы m_0 , которые соединены с соседними одинаковыми нелинейными пружинами длины a (см. Рис. 1). В этом случае уравнение движения будет выглядеть следующим образом [13]:

$$m_0 \ddot{u} = -a[f(a(1 + u'))]'. \quad (1)$$

Для малых деформаций $\varepsilon = \partial u / \partial x$ мы получим

$$\ddot{u} - v_0^2 u'' = 0, \quad v_0^2 = \sqrt{\frac{C}{m_0}} a,$$

поскольку нелинейная сила $f(a(1 + \varepsilon)) \approx -Ca\varepsilon$.

Известно, что, когда примесь растворена в материале, некоторые частицы примеси встраиваются в атомарные связи решетки, нарушают их и создают новые менее жесткие, чем начальные.

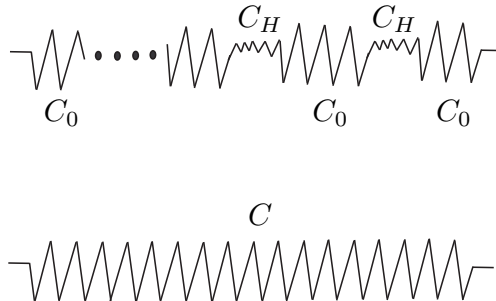


Рис. 2: Модель цепочки с осажденными на связи атомами примеси

Аналогичный эффект возникает в местах скопления дефектов решетки: вакансий, дислокаций и пр. $m_H \ll m_0$. В этом случае пружинку, на которую

осел атом примеси, можно заменить менее жесткой пружиной, не учитывая массу атома примеси из-за ее малости. Теперь, соединяя элементы со старыми и новыми связями последовательно, мы получаем модель решетки с осажденными частицами примеси (см. Рис. 2). Эквивалентная жесткость новой связи C может быть найдена из уравнений

$$\frac{N}{C} = \frac{N^+}{C_H} + \frac{N_0}{C_0}, \quad N = N_0 + N^+,$$

где C_0 — жесткость чистого материала без примеси, а C_H — жесткость материала, все связи которого ослаблены частицами примеси [1]. Нелинейная сила f в (1) при малых деформациях может быть представлена в виде

$$f = -Ca\varepsilon = -E\varepsilon.$$

Используя концентрации $n_0 = N_0/N$ и $n^+ = N^+/N$, мы получаем уравнение состояния для решетки с осажденными частицами примеси

$$\sigma = E\varepsilon, \quad E = \frac{E_0 E_H}{n_0 E_H + n^+ E_0}. \quad (2)$$

Эквивалентный модуль упругости E может существенно уменьшаться ввиду сильной зависимости от концентрации осажденных частиц n^+ и того, что $E_H \ll E_0$ ($C_H \ll C_0$). Число осажденных частиц примеси зависит от напряженного состояния решетки в каждой точке и, в общем случае, от времени. Неизвестную зависимость $n^+ = n^+(x, t, \varepsilon)$ определим далее из модели двухкомпонентной сплошной среды.

Заметим, что аналогичное уравнение состояния (2) получено в [5] с использованием статистической модели образования гидридной фазы в металлах.

1.2 Система уравнений двухкомпонентной модели

Вывод системы уравнений двухкомпонентного континуума приведен, например, в [9], поэтому запишем здесь только окончательные соотношения

для одномерного случая. Уравнение баланса массы для первой и второй компоненты имеют вид

$$\frac{\partial \rho_H^+}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_H^+ v_s)}{\partial x} = J, \quad \frac{\partial \rho_H^-}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_H^- v_H)}{\partial x} = -J$$

или в терминах концентраций

$$\frac{\partial n^+}{\partial t} + \frac{\partial(n^+ v_s)}{\partial x} = J/m_H, \quad \frac{\partial n^-}{\partial t} + \frac{\partial(n^- v_H)}{\partial x} = -J/m_H. \quad (3)$$

В правых частях уравнений (3) стоит источниковый член J , который позволяет учесть возможность обмена частиц между компонентами. Предполагаем, что водород может только встраиваться в кристаллическую решетку, тогда источниковый член имеет вид

$$J/m_H = \alpha n^-.$$

Здесь α — положительный параметр, характеризующий скорость, с которой свободные частицы встраиваются в решетку.

Определим физический смысл коэффициента α , для этого предположим, что скорости v_s и v_H малы. Это позволяет пренебречь слагаемыми $\partial(n^+ v_s)/\partial x$ и $\partial(n^- v_H)/\partial x$ в уравнениях баланса масс для первой и второй компонент соответственно и (3) можно записать как

$$\frac{dn^+}{dt} = \alpha n^-, \quad \frac{dn^-}{dt} = -\alpha n^-$$

с начальными условиями $n^+|_{t=0} = 0$, $n^-|_{t=0} = \psi$. Тогда

$$n^+ = \psi(1 - e^{-\alpha t}), \quad n^- = \psi e^{-\alpha t}.$$

Рассмотренный частный случай показывает, что коэффициент α определяет скорость осаждения примеси, его можно определить из эксперимента.

Уравнения баланса импульса для первой и второй компонент имеют вид [9]

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = \rho_s \frac{\partial v_s}{\partial t} + J v_s + R, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_H^- \frac{\partial v_H}{\partial t} - J v_H - R. \quad (4)$$

В правых частях (4) имеются новые силовые слагаемые. Осаждение частиц водорода на кристаллическую решетку не меняет внутренних характеристик решетки, ввиду того, что $\rho_H^+ \ll \rho_{s0}$, однако скорость изменения этих величин J ведет к появлению реактивных сил Jv_s, Jv_H . Слагаемое R определяет силу взаимодействия между первой и второй компонентами и зависит от внутренних процессов в материале.

Взаимодействие между решеткой и свободными подвижными частицами водорода описывается аналогично потоку сжимаемой жидкости. В нашем случае основной структурой является решетка металла, поэтому относительная скорость подвижного водорода — малая величина. Это позволяет рассматривать линейное приближение и считать, что сила взаимодействия R пропорциональна разности скоростей компонент:

$$R = \mu(\varepsilon_s) (v_H - v_s). \quad (5)$$

Здесь $\mu(\varepsilon_s)$ — коэффициент, зависящий от деформации основной структуры ε_s , будет определен ниже. Уравнение состояния первой компоненты определяется (2). Уравнение состояния второй компоненты имеет следующий вид:

$$p = p(\rho_H^-), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho_H^-} \frac{\partial \rho_H^-}{\partial x} \quad (6)$$

Будем предполагать, что скорость звука в среде $c_H^2 = \partial p / \partial \rho_H^-$ мало меняется и ее можно считать почти постоянной. Следует отметить, что содержание водорода в технических металлах контролируется при производстве. Для сталей его должно быть не более 10 млн^{-1} по массе, что соответствует одному атому водорода на сотни тысяч атомов металлической матрицы [14]. Столь малая концентрация водорода в металлах позволяет считать

$$n^+, n^- \ll n_0, \quad n_0 \approx 1 \quad \text{или} \quad \rho_H^+, \rho_H^- \ll \rho_{s0}, \quad \rho_s \approx \rho_{s0}. \quad (7)$$

Тогда полная система уравнений, описывающая динамику стержня с рас-

творенным в нем водородом, имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = \rho_{s0} \frac{\partial v_s}{\partial t} + Jv_s + R, \quad \sigma = \frac{E_0 E_H}{n_0 E_H + n^+ E_0} \varepsilon_s, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = m_H n^- \frac{\partial v_H}{\partial t} - Jv_H - R, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = m_H c_H^2 \frac{\partial n^-}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial n^+}{\partial t} + \frac{\partial (n^+ v_s)}{\partial x} = J/m_H, \quad \frac{\partial n^-}{\partial t} + \frac{\partial (n^- v_H)}{\partial x} = -J/m_H \quad (10)$$

$$R = \mu(\varepsilon_s) (v_H - v_s), \quad J/m_H = \alpha n^-, \quad (11)$$

Система должна быть дополнена начальными и граничными условиями. Система определяющих уравнений (8)-(11) слишком сложна для прямого математического анализа, поэтому попробуем упростить задачу.

1.3 Обобщенное уравнение диффузии

Рассмотрим сначала динамику перераспределения свободного водорода в металлическом стержне и для этого выведем обобщенное уравнение диффузии примеси, учитывающее влияние деформации и сил инерции на диффузионные процессы.

Будем считать, что частицы свободного водорода (вторая компонента) представляют собой одномерный поток идеальной баротропной жидкости (тензор напряжений содержит только изотропную часть, нет девиаторной части, т.е. касательных напряжений).

Введем относительную скорость подвижного водорода $\vartheta = v_H - v_s$. Уравнения баланса массы и баланса импульса второй компоненты примут вид

$$\frac{\partial n^-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n^- \vartheta) + \frac{\partial}{\partial x} (n^- v_s) = -J/m_H, \quad (12)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = m_H n^- \frac{\partial v_s}{\partial t} + m_H n^- \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + Jv_H + R. \quad (13)$$

Относительными силами инерции $m_H n^- \partial \vartheta / \partial t$ и реактивными силами Jv_H в (13) допустимо пренебречь, поскольку в случае динамического нагруже-

ния они значительно меньше сил взаимодействия R :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = m_H n^- \frac{\partial v_s}{\partial t} + R. \quad (14)$$

Определим коэффициент $\mu(\varepsilon_s)$ в (5). Следует учесть, что сила взаимодействия компонент R непосредственно зависит не только от деформации, но и от давления примеси: при $p = 0$ подвижной водород не будет взаимодействовать с основной структурой материала. Поэтому положим, что

$$\mu(\varepsilon_s) = \frac{p}{D(\varepsilon_s)} = \frac{c_H^2 m_H n^-}{D(\varepsilon_s)}.$$

Здесь $D(\varepsilon_s)$ — эффективный размер поперечного сечения потока второй компоненты. При увеличении деформации значение D уменьшается, подвижной водород интенсивнее взаимодействует с кристаллической решеткой металла.

Относительную скорость движения примеси ϑ можно выразить из уравнения движения второй компоненты (14) и соотношения (5):

$$\vartheta = -\frac{D(\varepsilon_s)}{c_H^2 m_H n^-} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + m_H n^- \frac{\partial v_s}{\partial t} \right).$$

Дифференцируя уравнение состояния второй компоненты (6), получим

$$\vartheta = -\frac{D(\varepsilon_s)}{n^-} \left(\frac{\partial n^-}{\partial x} + \frac{n^-}{c_H^2} \frac{\partial v_s}{\partial t} \right). \quad (15)$$

Тогда уравнение баланса массы для свободного водорода (12) можно переписать в виде

$$\frac{\partial n^-}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\varepsilon_s) \left(\frac{\partial n^-}{\partial x} + \frac{n^-}{c_H^2} \frac{\partial v_s}{\partial t} \right) - n^- v_s \right] = -\frac{J}{m_H}. \quad (16)$$

Рассматривается случай малых деформаций $\varepsilon_s = \partial u / \partial x$, поэтому раскладывая $D(\varepsilon_s)$ в ряд Тейлора, можно ограничиться двумя первыми членами ряда

$$D(\varepsilon_s) \approx D_0 - D_1 \varepsilon_s, \quad D_0 > 0, \quad D_1 > 0.$$

При отсутствии деформаций D_0 является классическим коэффициентом диффузии ($D_0 > 0$), а при положительных деформациях размер поперечного сечения потока подвижного водорода должен уменьшаться ($D_1 > 0$).

Заметим, что в отсутствии деформаций (16) сводится к классическому уравнению диффузии с коэффициентом диффузии $D_0 = D(0)$

$$\frac{\partial n^-}{\partial t} - D_0 \nabla^2 n^- = f(x, t).$$

Поэтому в первом приближении D определяется экспериментальными значениями, полученными в статике.

Краевые условия

Частицы примеси (подвижного водорода) не проникают через торцы стержня и поток примеси через границы образца равен нулю, поэтому граничные условия для n^- можно записать

$$D(\varepsilon_s) \left(\frac{\partial n^-}{\partial x} + \frac{n^- \partial v_s}{c_H^2 \partial t} \right) - n^- v_s \Big|_{x=0,l} = 0.$$

Рассмотрим подробнее слагаемые в квадратных скобках (16). Первое слагаемое — часть классического диффузионного уравнения, благодаря которой происходит плавное сглаживание возмущенной плотности подвижного водорода; второе — переносные силы инерции, которые, конкурируя с диффузионным процессом, стремятся осуществить перенос имеющихся возмущений; наличие третьего слагаемого обусловлено движением стержня, как твердого целого. Далее будет показано, что последнее слагаемое не влияет на характер поведения подвижного водорода.

Итак, соотношение (16) — обобщенное уравнение диффузии для свободного водорода, учитывающее влияние деформации материала на изменение плотности частиц за счет их перехода в состав первой компоненты (частицы водорода, встроившегося в кристаллическую решетку металла). Уравнение описывает два конкурирующих процесса: с одной стороны,

диффузию, стремящуюся выровнять распределение примеси в материале, с другой, процесс переноса примеси, определяемый стоячей волной (формой колебаний стержня).

1.4 Постановка задачи

В уравнении движения основной структуры (4) вклад реактивной силы Jv_s и силы взаимодействия между компонентами R нивелируется главным инерциальным слагаемым, поскольку R и J пропорциональны плотности подвижного водорода, которая существенно меньше плотности основной структуры материала (см. (7), (5))

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = \rho_{s0} \frac{\partial v_s}{\partial t}. \quad (17)$$

На левом конце стержень жестко заделан, к правому приложена продольная гармоническая сила

$$u|_{x=0} = 0, \quad \sigma_s|_{x=l} = \frac{F_0}{S} \sin \omega t,$$

здесь S — площадь сечения стержня (постоянная величина). Второе условие жесткой заделки ($v_s|_{x=0} = 0$) было использовано в прошлом разделе.

Уравнение состояния основной структуры (2) можно переписать, учитывая (7),

$$\sigma_s = \frac{E_0}{1 + \kappa n^+} \varepsilon_s, \quad \kappa = \frac{E_0}{E_H}, \quad (18)$$

где E_0 , E_H — модуль Юнга чистого металла, модуль Юнга металла, связи которого ослаблены частицами водорода.

Для концентрации частиц водорода, осажденных на основную структуру материала, будем использовать имеющееся уравнение баланса массы (3):

$$\frac{\partial n^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n^+ v_s) = \frac{J}{m_H}. \quad (19)$$

Пусть в начальный момент времени подвижной водород распределен почти равномерно, а плотность встроившегося водорода ничтожно мала, тогда

$$n^-|_{t=0} = \hat{n}, \quad n^+|_{t=0} = 0.$$

Переходя к перемещениям ($v_s = \partial u / \partial t$, $\varepsilon_s = \partial u / \partial x$), можно переписать уравнения (16)–(19) в виде

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = \rho_{s0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \sigma_s = \frac{E_0}{1 + \kappa n^+} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial n^-}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(D_0 - D_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial n^-}{\partial x} + \frac{n^-}{c_H^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - n^- \frac{\partial u}{\partial t} \right] = -\alpha n^-, \quad (21)$$

$$\frac{\partial n^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(n^+ \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \alpha n^-, \quad (22)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями

$$\left(D_0 - D_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial n^-}{\partial x} + \frac{n^-}{c_H^2} \frac{\partial v_s}{\partial t} \right) - n^- v_s \Big|_{x=0,l} = 0,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \sigma_s|_{x=l} = \frac{F_0}{S} \sin \omega t,$$

$$n^-|_{t=0} = \hat{n}, \quad n^+|_{t=0} = 0.$$

Полученная система уравнений (21)–(22) с указанными начальными и граничными условиями полностью описывает движение металлического стержня с растворенным водородом.

1.5 Безразмерная система определяющих уравнений

Приведем систему (21)–(22) к безразмерному виду. Введем следующие безразмерные величины

$$x_1 = \frac{x}{l}, \quad t_1 = \frac{c}{l} t, \quad u_1 = \frac{u}{l},$$

$$\Omega = \frac{l\omega}{c}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{l\alpha}{c}, \quad \nu = \frac{D_0}{cl}, \quad \beta = D_1/D_0,$$

здесь $c = \sqrt{E_0/\rho_{s0}}$ — скорость звука в металле и $c_0 = c/c_H$. Тогда система уравнений (21)-(22) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{1 + \kappa n^+} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial n^-}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\nu \left(1 - \beta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial n^-}{\partial x_1} + c_0^2 n^- \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} \right) - n^- \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \right] = -\tilde{\alpha} n^-, \quad (24)$$

$$\frac{\partial n^+}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[n^+ \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \right] = \tilde{\alpha} n^-, \quad (25)$$

и начальные и краевые условия определяются следующим образом

$$\nu \left(1 - \beta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial n^-}{\partial x_1} + c_0^2 n^- \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} \right) - n^- \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \Big|_{x=0,l} = 0,$$

$$u_1|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_1|_{x_1=1} = \hat{\sigma} \sin \Omega t_1,$$

$$n^-|_{t_1=0} = \hat{n}, \quad n^+|_{t_1=0} = 0,$$

здесь $\hat{\sigma} = F_0/S$.

Безразмерная система уравнений (24)-(25) с указанными начальными и краевыми условиями полностью описывает движение стержня с растворенным водородом.

2 Метод решения

Перед тем как перейти к решению поставленной задачи (24)-(25) рассмотрим некоторые частные случаи.

2.1 Однородный стержень

Если в уравнении состояния и уравнении баланса импульса основной структуры положить $n^+ \equiv 0$ (т. е. рассматривать стержень без учета его внутренней структуры), получим задачу о колебаниях одномерного стержня в классической постановке:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

$$u|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{F_0}{SE} \sin \omega t.$$

Решение которой имеет вид

$$u(x, t) = A \sin \frac{\omega x}{c} \sin \omega t, \quad A = \frac{F_0}{SE \cos(\omega l/c)} \frac{\omega}{c},$$

а собственные частоты колебаний стержня определяются из условия $\cos \omega l/c = 0$. Первая частота $\omega_1 = \pi c/2l$.

В экспериментах [14], [15] исследовались стальные образцы длиной $l = 0.3 - 0.5$ м. Частота возбуждающей силы $\nu = 1$ Гц, соответствующая угловая частота $\omega = 2\pi\nu \approx 6 \text{ с}^{-1}$. Скорость звука в сталях (c) можно считать равной $6 \cdot 10^3$ м/с. Таким образом, частота возбуждающей силы много меньше первой собственной частоты колебаний стержня и собственную форму можно считать пропорциональной x , а именно, $\omega x/c$.

Относительная погрешность при использовании линейного приближения ($\omega x/c$) вместо точной формы колебаний стержня ($\sin \omega x/c$) будет тем больше, чем дальше мы удалимся от начала координат, поэтому максимальная относительная погрешность соответствует $x = l$

$$\frac{\sin \frac{\omega l}{c} - \frac{\omega l}{c}}{\sin \frac{\omega l}{c}} \cdot 100\% \approx 4 \cdot 10^{-6}\%.$$

Относительная погрешность ничтожно мала, это говорит о том, что предлагаемый вид решения (26) является оправданным для имеющихся экспериментальных данных. Однако следует отметить, что такую форму нельзя использовать в случаях, когда не выполнено условие $\frac{\omega l}{c} \ll 1$ (высокочастотные колебания и пр.).

2.2 Установившаяся стадия колебаний

Эксперименты подтверждают: перераспределение водорода в металлах — очень длительный процесс, изменение механических характеристик исследу-

дуремых образцов становится заметным (или вообще определимым) после порядка 10^6 циклов [15]. Поэтому, не умолая общности, будем изучать установившуюся стадию процесса колебаний стержня.

Используя результаты параграфа 2.1, будем искать решение уравнения движения (23) в перемещениях в виде

$$u_1(x_1, t_1) = A(t_1)x_1, \quad (26)$$

где $A(t_1)$ — неизвестная функция, подлежащая определению. В этом случае деформации, скорости и ускорения основной структуры материала будут иметь следующий вид

$$\varepsilon_s(t_1) = A(t_1), \quad v_s(x_1, t_1) = \dot{A}(t_1)x_1, \quad \frac{\partial v_s(x_1, t_1)}{\partial t_1} = \ddot{A}(t_1)x_1.$$

Домножим уравнение движения (23) на выбранную форму x_1 , проинтегрируем по длине стержня (от 0 до 1). С учетом соответствующих граничных условий и уравнения состояния (23) получим

$$\ddot{A}(t_1) + G(t_1)A(t_1) = \hat{\sigma} \sin \Omega t_1, \quad G(t_1) = 3 \int_0^1 \frac{dx_1}{1 + \kappa n^+(x_1, t_1)}. \quad (27)$$

Здесь и далее $3\hat{\sigma}$ переобозначена $\hat{\sigma}$. Полученное уравнение определяет поведение $A(t_1)$, а коэффициент $G(t_1)$ — обобщенная жесткость стержня.

Для концентрации частиц водорода, встроившихся в решетку металла, будем использовать упрощенное уравнение баланса массы. Учитывая (26), перепишем систему уравнений в виде

$$\ddot{A}(t_1) + G(t_1)A(t_1) = \hat{\sigma} \sin \Omega t_1, \quad G(t_1) = 3 \int_0^1 \frac{dx_1}{1 + \kappa n^+(x_1, t_1)}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial n^-}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\nu (1 - \beta A) \left(\frac{\partial n^-}{\partial x_1} + c_0^2 \ddot{A} x_1 n^- \right) - \dot{A} x_1 n^- \right] = -\tilde{\alpha} n^-, \quad (29)$$

$$\frac{\partial n^+}{\partial t_1} = \tilde{\alpha} n^-, \quad (30)$$

и необходимые начальные и краевые условия

$$\nu (1 - \beta A) \left(\frac{\partial n^-}{\partial x_1} + c_0^2 \ddot{A} x_1 n^- \right) - \dot{A} x_1 n^- \Big|_{x=0,l} = 0,$$

$$n^-|_{t_1=0} = \hat{n}, \quad n^+|_{t_1=0} = 0.$$

Здесь точка (\cdot) обозначает производную по t_1 .

Амплитуда

В 2.1 показано, что без учета примеси для установившейся стадии колебаний решение в перемещениях находится в виде (26) и $A(t_1) = A_0 \sin \Omega t_1$. Для задачи с примесью необходимо искать решение в более общем виде.

Наличие водорода влияет на механические свойства образца, поэтому даже во время установившейся стадии колебаний можно ожидать зависимость амплитуды колебаний от времени, связанного с диффузионным процессом в материале. Предлагается искать решение в виде:

$$A(t_1) = A_0(t_1) \sin(\Omega t_1), \quad (31)$$

здесь $A_0(t_1)$ — медленно меняющаяся часть амплитуды.

Будем считать, что концентрация n^- мало меняется за характерный период колебаний стержня $2\pi/\Omega$, поскольку поток подвижного водорода представляет собой свободные частицы примеси, они реагируют на вибрационное воздействие намного медленнее, чем кристаллическая решетка материала:

$$\langle n^-(x_1, t_1) \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} n^-(x_1, t_1) dt_1 \approx n^-(x_1, t_1).$$

Концентрации обеих компонент водорода перевязаны источниковым членом в уравнениях баланса масс, значит можно полагать, что $n^+(x_1, t_1)$ также медленно меняется за характерный период времени $2\pi/\Omega$

$$\langle n^+(x_1, t_1) \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} n^+(x_1, t_1) dt_1 \approx n^+(x_1, t_1).$$

Концентрации будем считать медленно изменяющимися функциями времени. Они меняются на масштабах времени, связанных с диффузионным процессом.

2.3 Усреднение

Поиск решения в виде (31) соответствует методике усреднения, развитой Крыловым и Боголюбовым и изложенной, например, в [12]. Будем считать, что n^- , n^+ и A_0 мало меняются за время $2\pi/\Omega$, равное периоду вибрационного воздействия на стержень. Подставим (31) в систему (29)-(30) и усредним получившиеся уравнения по интервалу $[t_1, t_1 + 2\pi/\Omega]$, в течение которого концентрации обеих компонент водорода и амплитуда $A_0(t_1)$ могут считаться постоянными. Получим следующую систему уравнений

$$\ddot{A}_0(t_1) + \left[3 \int_0^1 \frac{dx_1}{1 + \kappa n^+(x_1, t_1)} - \Omega^2 \right] A_0(t_1) = \hat{\sigma}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial n^-}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial n^-}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \beta c_0^2 \left(\Omega^2 A_0^2 - \ddot{A}_0 A_0 \right) x_1 n^- \right] = -\tilde{\alpha} n^-, \quad (33)$$

$$\frac{\partial n^+}{\partial t_1} = \tilde{\alpha} n^-, \quad (34)$$

а также необходимые начальные и краевые условия

$$\left. \frac{\partial n^-}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial n^-}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \beta c_0^2 \left(\Omega^2 A_0^2 - \ddot{A}_0 A_0 \right) x_1 n^- \right] \Big|_{x_1=1} = 0,$$

$$n^-|_{t_1=0} = \hat{n}, \quad n^+|_{t_1=0} = 0.$$

2.4 Решение обобщенного уравнения диффузии

Будем считать, что амплитуда A_0 мало меняется со временем, тогда обобщенное уравнение диффузии (33) можно записать в виде

$$\frac{\partial n^-}{\partial t_1} - \nu \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial n^-}{\partial x_1} + \gamma x_1 n^- \right] = -\tilde{\alpha} n^-, \quad (35)$$

$$\left. \frac{\partial n^-}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial n^-}{\partial x_1} + \gamma x_1 n^- \right) \Big|_{x_1=1} = 0, \quad (36)$$

$$n^-|_{t_1=0} = \hat{n}.$$

здесь $\gamma = \beta(c_0 A_0 \Omega)^2/2$. Уравнение (35) представляет собой обобщенное уравнение диффузии свободного водорода, учитывающее влияние дефор-

мации, и описывает два конкурирующих процесса: с одной стороны, диффузию стремящуюся выровнять распределение примеси в материале, с другой, процесс переноса примеси, определяемый стоячей волной (формой колебаний стержня).

Коэффициент γ содержит $A_0 = A_0(t_1)$, однако при решении обобщенного уравнения диффузии мы этим будем пренебрегать и считать $A_0 = \text{const}$.

Построение приближенного решения (35) в виде ряда

Здесь и далее индексы безразмерных переменных опускаются. Представление решения в виде

$$n^-(x, t) = e^{-\frac{\gamma}{2}x^2 - \tilde{\alpha}t} \phi(x, t)$$

позволяет перейти к задаче для $\phi(x, t)$ с однородными граничными условиями Неймана:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \gamma x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right], \quad (37)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0,1} = 0, \quad (38)$$

$$\phi|_{t=0} = \hat{n} e^{\frac{\gamma}{2}x^2}. \quad (39)$$

Рассмотрим вспомогательную спектральную задачу:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\lambda \phi$$

с граничными условиями (38). Решение данной задачи известно:

$$\phi_k(x) = \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad \lambda_k = \pi^2 k^2, \quad k = 1, 2, 3..$$

Вернемся к исходной задаче, будем искать решение (37) в виде разложения по собственным функциям вспомогательной задачи:

$$\phi(x_1, t) = q_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} q_k(t) \cos \pi k x_1 \quad (40)$$

Подставим данное разложение в уравнение (37) и начальные условия (39), умножим последовательно на соответствующие собственные функции и проинтегрируем. Таким образом мы получили однородную систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов разложения $q_k(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 + \nu\gamma \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k q_k &= 0 \\ q\dot{q}_m + \nu \left((\pi m)^2 + \frac{\gamma}{2} \right) q_m - 2\nu\gamma \sum_{k=1, k \neq m}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+m} k^2}{m^2 - k^2} q_k &= 0 \\ q_0(0) &= \hat{n} \int_0^1 e^{\frac{\gamma}{2}x^2} dx \\ q_m(0) &= 2\hat{n} \int_0^1 e^{\frac{\gamma}{2}x^2} \cos \pi m x dx \\ m &= 1, 2, 3... \end{aligned}$$

Поскольку получена бесконечномерная система уравнений, встает вопрос о сходимости ряда. Ограничимся первыми N членами ряда, запишем систему дифференциальных уравнений в матричной форме

$$\dot{Q} = \nu A(\gamma)Q, \quad Q(0) = Q_0,$$

здесь $Q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))^T$ — вектор неизвестных, $A(\gamma) = \{a(\gamma)_{ij}\}_{i,j=1}^N$ — квадратная матрица $N \times N$, элементы которой зависят от параметра γ . Матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\gamma & \gamma & -\gamma & \dots \\ 0 & -\pi^2 - \frac{\gamma}{2} & \frac{8}{3}\gamma & -\frac{9}{4}\gamma & \frac{32}{15}\gamma & \\ 0 & -\frac{2}{3}\gamma & -4\pi^2 - \frac{\gamma}{2} & \frac{18}{5}\gamma & -\frac{8}{3}\gamma & \\ 0 & \frac{1}{4}\gamma & -\frac{8}{5}\gamma & -9\pi^2 - \frac{\gamma}{2} & \frac{32}{7}\gamma & \\ 0 & -\frac{2}{15}\gamma & \frac{2}{3}\gamma & -\frac{18}{7}\gamma & -16\pi^2 - \frac{\gamma}{2} & \\ 0 & \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

При $\gamma \ll 1$ матрица приобретает диагональный вид, причем $a_{11} = 0$, $a_{ii} < 0$ для $\forall i > 1$, $a_{ii} > a_{i+1i+1}$. Это означает, что при малых γ основной вклад вносит первый член разложения.

Для $\gamma < 5$ можно ограничиться двумя первыми слагаемыми в разложении (проверено численно). В этом случае концентрация подвижного водорода представляется в виде:

$$n^-(x, t) \approx \hat{n} e^{-\frac{\gamma}{2}x^2 - \tilde{\alpha}t} \left(I_0 + \frac{I_1 \gamma}{\pi^2 + \frac{\gamma}{2}} \left(1 - e^{-\nu(\pi^2 + \frac{\gamma}{2})t} \right) + I_1 e^{-\nu(\pi^2 + \frac{\gamma}{2})t} \cos \pi x \right), \quad (41)$$

$$I_0 = \int_0^1 e^{\frac{\gamma}{2}x^2} dx, \quad I_1 = 2 \int_0^1 e^{\frac{\gamma}{2}x^2} \cos \pi x dx.$$

Однако с увеличением γ необходимо удерживать все больше членов разложения для того, чтобы сохранить состоятельность полученного приближенного решения.

2.5 Численный эксперимент

Чтобы оценить состоятельность полученного приближенного решения (41), проведем численный эксперимент: решим обобщенное уравнение диффузии (35), используя явную разностную схему, предложенную ниже.

Введем на стержне ($x \in [0, 1]$) равномерную сетку с шагом $\Delta x = 1/N$ (N узлов, $N - 1$ элемент), произведем дискретизацию по времени $t_k = k\Delta t$ (шаг по времени Δt выбирается из условий сходимости, поскольку используется явная схема). Сеточную функцию концентрации подвижного водорода будем обозначать следующим образом

$$n^-(x_m, t_k) = n_m^k, \quad (m = 0, 1, \dots, N; \quad k = 0, 1, \dots).$$

Простейшее уравнение в конечных разностях, соответствующее обобщенному уравнению диффузии (35), имеет вид

$$\frac{n_m^{k+1} - n_m^k}{\Delta t} - \nu \left(\frac{n_{m+1}^k - 2n_m^k + n_{m-1}^k}{(\Delta x)^2} + \gamma x_m \frac{n_{m+1}^k - n_{m-1}^k}{2\Delta x} \right) = -\alpha n_m^{k+1}.$$

Очевидно, что предложенная разностная схема — явная: неизвестное значение сеточной функции можно явно выразить через известные значения предыдущего временного шага.

Для реализации полученной схемы была написана программа на языке C++, используя IDE MS Visual Studio 2008. Данная программа требует задать Δt , N (или Δx), α , γ , после чего для каждого дискретного момента времени последовательно вычисляет значения сеточной функции (численное решение) и значения полученного ранее аналитического решения в виде двух слагаемых разложения.

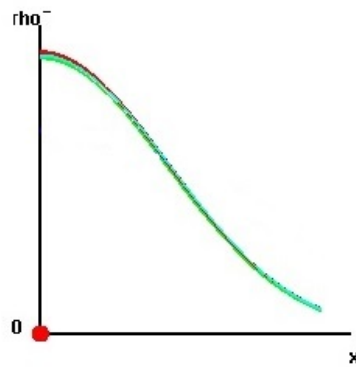


Рис. 3: Численный эксперимент при $\Delta t = 1e^{-007}$, $N = 2000$, $\alpha = 0$, $\gamma = 5$, $t_k \gg 1$.

На Рис (3) изображены результаты численного эксперимента: зеленая кривая — график аналитического решения, красная — численного. Для $\gamma \leq 5$, численное решение качественно совпадает с аналитическим решением при больших временах. Полученный результат позволяет считать приближенное аналитическое решение (41) состоятельным при указанных выше условиях.

2.6 Обобщенная жесткость стержня

Итак, ограничимся случаем $\gamma < 5$. Используя полученное в прошлом параграфе приближенное решение для концентрации подвижного водорода в виде двух первых членов ряда (41), проинтегрируем упрощенное уравнение баланса массы для первой компоненты (34) с соответствующими начальными условиями, что позволит нам получить приближенное соотношение

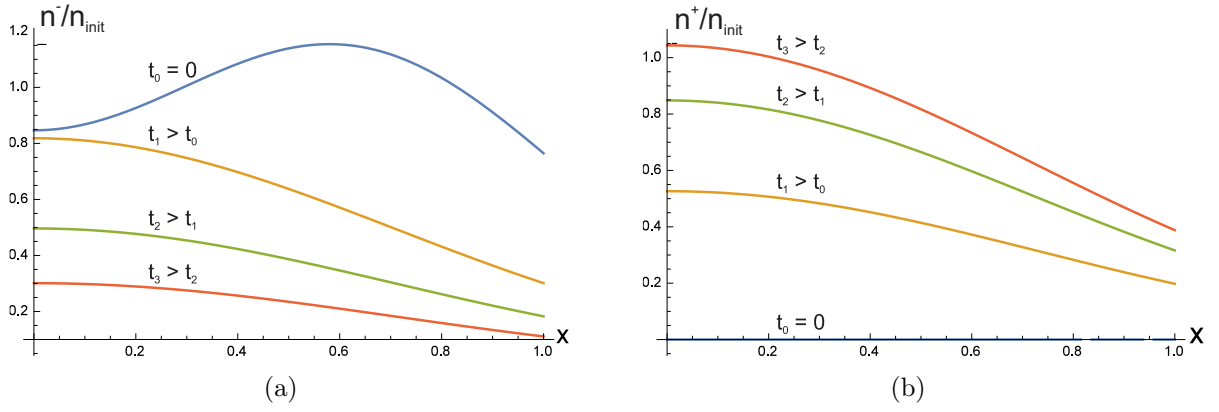


Рис. 4: Осаждение водорода на основную структуру материала: (a) — изменение концентрации потока подвижного водорода, (b) — изменение концентрации сильно взаимодействующих частиц примеси.

для концентрации встроившегося в решетку водорода:

$$n^+(x, t) \approx \hat{n} e^{-\frac{\gamma}{2}x^2} \left[\left(I_0 + \frac{I_1 \gamma}{\pi^2 + \gamma/2} \right) (1 - e^{-\tilde{\alpha}t}) + \frac{\tilde{\alpha} I_1}{\tilde{\alpha} + \nu (\pi^2 + \gamma/2)} \left(\cos \pi x - \frac{\gamma}{\pi^2 + \gamma/2} \right) \left(1 - e^{-[\tilde{\alpha} + \nu (\pi^2 + \gamma/2)]t} \right) \right]. \quad (42)$$

Рис. (4) демонстрирует поведение полученных приближенных решений (41), (42), показывает, как слабо взаимодействующие частицы водорода постепенно встраиваются в кристаллическую решетку металла. Неравномерное начальное (при $t_0 = 0$) распределение n^- связано с тем, что поведение концентрации описывается двумя первыми слагаемыми разложения.

Особый интерес представляет обобщенная жесткость стержня (коэффициент при $A_0(t)$ в уравнении (32), обозн. $G(t)$)

$$G(t) = 3 \int_0^1 \frac{dx}{1 + \kappa n^+(x, t)} - \Omega^2, \quad (43)$$

которая существенно зависит от плотности осажденного водорода.

Полученное приближенное соотношение для $n^+(x, t)$ не позволяет точно проинтегрировать (43). Результат численного интегрирования представлен на Рис. (5), который показывает, что со временем (по мере осаждения подвижного водорода на решетку основной структуры) обобщенная жесткость образца падает и стремится к некоторому предельному значению. В

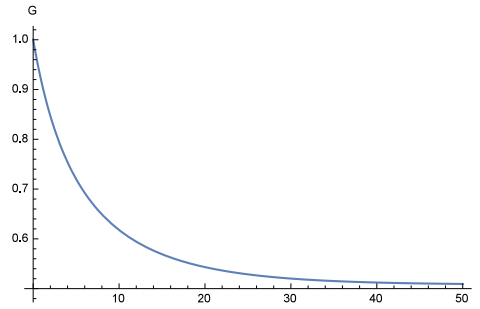


Рис. 5: Падение обобщенной жесткости стержня со временем

том случае, если предельное значение обобщенной жесткости меньше критического, прогнозируется разрушение материала.

Заметим, что параметр γ в выражении (42) содержит амплитуду колебаний стержня, которую мы в первом приближении считали постоянной и выражение для обобщенной жесткости (43) получено в предположении, что $A_0 = \text{const}$. Подставив $n^+(x, t, A_0)$ в уравнение (32) получим нелинейное уравнение относительно $A_0(t)$, решение которого позволит нам более точно определить поведение обобщенной жесткости стержня и вычислить амплитуду его колебаний.

3 Заключение

В данной работе изучали поведение одномерного наводороженного стержня при низкочастотном циклическом воздействии на его границы. Для того, чтобы понять, как внутренняя структура материала влияет на механические характеристики, использовалась построенная на основе принципов рациональной механики двухкомпонентная континуальная модель. Роль первой компоненты играет кристаллическая решетка материала вместе со встроившимися в нее частицами водорода; вторая компонента — свободный подвижной водород, растворенный в металле.

Предложенная модель приводит к системе нелинейных уравнений, описывающих динамику металлического наводороженного стержня. Получено обобщенное уравнение диффузии второй компоненты, которое учитывает влияние деформации материала на характер поведения примеси.

Предложен способ решения определяющей системы уравнений, основанный на методе многих масштабов и методике усреднения, развитой Крыловым и Боголюбовым. Для установившейся стадии колебаний стержня с растворенным водородом получено приближенное аналитическое решение диффузионного уравнения. Проведен численный эксперимент, результаты которого хорошо согласуются с полученным аналитическим решением.

Влияние диффузионного процесса и перераспределения водорода на механические макрохарактеристики материала проиллюстрировано на примере поведения обобщенной жесткости стержня. Показано, что со временем (по мере осаждения подвижного водорода на решетку основной структуры) обобщенная жесткость образца падает и стремится к некоторому предельному значению. В том случае, если предельное значение обобщенной жесткости меньше критического, прогнозируется разрушение

образца.

Литература

1. D.A. Indeitsev, B.N. Semenov *About a model of structural-phase transformations under hydrogen influence*, Acta Mech., pages 295–304, 2008.
2. Индейцев Д. А., Осипова Е. В. *Водородное охрупчивание под действием нагрузки как фазовый переход первого рода*, Физика твердого тела, Т.51, №.9, с.1790-1795, 2009.
3. G.P. Tiwari, A. Bose, J.K. Chakravartty, S.L. Wadekar, M.K. Totlani, R.N. Arya, R.K.Fotedar *A study of internal hydrogen embrittlement of steels*, Materials Science and Engineering: A, V.286, I.2, pages 269–281, 2000.
4. K. Takai, R. Watanuki *Hydrogen in trapping states innocuous to environmental degradation of high-strength steels*, ISIJ International, pages 520–526, 2003.
5. Индейцев Д. А., Осипова Е.В. *Статистическая модель образования гидридной фазы в наводороженных металлах под действием нагрузки*, Доклады академии наук, Т.440, №.4, с.472-475, 2011.
6. P. Sofronis, Y. Liang, N. Aravas *Hydrogen induced shear localization of the plastic flow in metals and alloys*, European Journal of Mechanics-A/Solids, V.20, I.6, pages 857–872, 2001.
7. A. Traidia; M. Alfano; G. Lubineau; S. Duval; A.M. Sherik *An effective finite element model for the prediction of hydrogen induced cracking in steel pipelines*, International Journal of Hydrogen Energy, V.37, I.21, pages 16214–16230, 2012.
8. J.P. Carrasco, N.C. Santos, A.A. Sliv *Numerical Simulation of the Hydrogen Effect on the Deformations of Test Body Models Loaded Under Tensile*

- Stress*, International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry, V.1, N.2, pages 55–62, 2007.
9. D.A. Indeitsev, Y.A. Mochalova *Mechanics of multi-component media with exchange of mass and non-classical supplies*, Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass, V.557, pages 165-194, 2014.
 10. Меркушев, Е. С. *Влияние напряженного состояния на материал с переменной структурой: бакалаврская работа.*: - СПб., 2014.
 11. Индейцев Д. А., Семенов Б. Н., Стерлин М. Д. *Явление локализации процесса диффузии в динамически деформируемом твердом теле*, Доклады академии наук, Т.443, №.5, с.1-3, 2012.
 12. Найфэ А., *Теория возмущений*, Москва: Мир, 1976.
 13. P.A. Zhilin, *Advanced problems in machanics*, Petersburg: Edition of the Institute For Problems in Mechanical Engineering of Russian Academy of Siences, 2006.
 14. Мерсон Д. Л., Полянский А. М., Полянский В. А., Черняева Е. В. *Связь механических характеристик стали 35Г2 с содержанием водорода и параметрами акустической эмиссии*, Заводская лаборатория. Диагностика материалов, т.74, №.2, с.57-60, 2008.
 15. Черняева Е. В., Хаймович П. А., Полянский А. М., Полянский В. А., Мерсон Д. Л., Замлер Е. Г. *Влияние барокриодеформирования на содержание водорода и акустическую эмиссию в техническом титане BT1-0*, Журнал технической физики, Т.81, №.4, с.131-134, 2011.