

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Физический факультет
Кафедра физики Земли

Методы аппроксимации годографа общей центральной точки

Магистерская работа студента
дневного отделения
Гонтаря Юрия Станиславовича

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., проф. **Каштан Б. М.**

Рецензент:
профессор кафедры геофизических и
геохимических методов разведки
месторождений полезных ископаемых
Национального минерально-сырьевого
университета «Горный» **Телегин А.Н.**

Санкт-Петербург
2016 г.

Содержание

1	Введение	2
1.1	Метод общей центральной точки	2
1.2	Формулы для годографов в случае симметричных отражений	4
1.3	Влияние анизотропии	6
1.4	Годограф ОПВ однократно отраженных волн	7
1.5	Годограф ОЦТ однократно отраженных волн	9
2	NIP теорема	12
2.1	Введение	12
2.2	Вывод уравнений NIP теоремы	12
3	Аппроксимация годографа ОЦТ волной NIP в изотропном случае	14
3.1	Вывод формул	14
3.2	Численное моделирование и выводы	17
4	Аппроксимация годографа ОЦТ волной NIP в анизотропном случае	17
4.1	Определение координат точки основания центрального луча	20
4.2	Определение координат точки отражения	22
4.3	Численное моделирование и выводы	23
5	Отражение от окружности	24
5.1	Постановка задачи	24
5.2	Численное моделирование и выводы	28
6	Приложения	32
6.1	Понятие анизотропии	32
6.2	Уравнение Кристоффеля и свойства плоских волн	33
6.3	Групповая (лучевая) скорость	35
6.4	Анизотропные системы симметрии	36
6.5	Трансверсально-изотропная среда	36
6.6	Распространение волн в трансверсально-изотропной среде	37
7	Заключение	41

1 Введение

1.1 Метод общей центральной точки

Одним из главных достоинств метода общей центральной точки (ОЦТ), также известного как метод общей средней точки (ОСТ), по сравнению с традиционным методом однократного профилирования по методу отраженных волн (МОВ) является то, что он позволяет решать задачи выделения однократно - отраженных волн на фоне различного рода помех (как регулярных, так и нерегулярных). Одной из самых серьезных проблем современной сейсморазведки является присутствие в записи многократно - отраженных волн. Их влияние на сейсмическую запись растет с увеличением времени регистрации. Поскольку ставится задача как повышения глубинности исследований, так и повышения качества волновой картины, что связано с прослеживанием полезных однократно - отраженных волн на больших временах ($t > 3 - 4$ с) и уменьшения кратных, использование метода ОЦТ в ряде случаев становится более предпочтительным.

Специфические особенности метода ОЦТ основываются на направленности системы наблюдения и статистическим эффектом суммирования трасс [1]. Суть метода заключается в том, что сейсмические колебания, возбужденные в n источниках, регистрируются в n приемниках, расположенных таким образом по отношению к источникам, чтобы при условии горизонтального залегания границ раздела выполнялась регистрация отраженных волн от общей для каждой границы раздела точки. В процессе выполнения обработки, исправленная на величину статических и кинематических поправок, запись суммируется. Поскольку определение кинематических поправок происходит на основании приращении времен годографов полезных волн (в силу так называемого сейсмического сноса), оси синфазности последних трансформируются в прямые линии $t_0 = const$, что обеспечивает суммирование колебаний практически исключая фазовые сдвиги. Отличающиеся по кинематике регулярные волны-помехи суммируются с фазовыми сдвигами и, соответственно, ослабляются.

Вопросы, связанные с построением моделей, описывающих данные метода отраженных волн (МОВ) как базы для метода ОЦТ, занимают центральное место в сейсморазведке. Начиная с пионерских работ [2, 15] были разработаны различные аппроксимационные формулы, описывающие времена прихода отраженных волн, включающие в себя члены второго и четвертого порядка разложения времени в ряд Тейлора (по параметру выноса наблюдений) в предположении геометрии наблюдения

ОЦТ и монотипных волн. Существенным ограничением является то, что все эти формулы применимы только для небольших выносов. С тех пор, для тех же условий наблюдения с целью использования больших выносов и учета эффекта возможной анизотропии среды, был предложен целый ряд улучшенных формул (аппроксимаций), уже включающих в себя следующие члены разложения в ряд Тейлора [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Похожие формулы, только с другим подходом к интерпретации негиперболических членов были предложены в работе [11] для анализа времен прихода отраженных волн в случае азимутально-анизотропных сред. Всеобъемлющий анализ различных аппроксимационных формул может быть найден в монографии [12].

Общей чертой, присущей большинству аппроксимационных формул, является то, что они так или иначе выражены через параметры центрального луча (луч, выпущенный к границе из центральной точки). Эти параметры связаны со степенью отклонения (которая определяет соответствующий порядок производных) времени хода волны по произвольной траектории по отношению к времени хода волны вдоль центрального луча. Выбор конкретных параметров и их количество зависит от условий задачи для которых строится аппроксимация (прямая задача, обратная задача, миграция и др.)

Модель в которой центральный луч совпадает с лучом нулевого выноса (*zero-offset ray*) играет фундаментальную роль в сейсморазведке. В этом случае центральный луч является нормальным лучом к отражающей границе (для изотропных сред), а лучи, находящиеся в непосредственной близости центрального носят название параксиальных. Система этих лучей образует так называемый "нормальный сейсмический снос" (*normal moveout*) и известна как параксиальное приближение.

Важно отметить следующее. Несмотря на то, что поверхностные данные наблюдений (записи сейсмограмм) содержат наряду с временами прихода сигналов также информацию об их амплитудах и фазах, все дальнейшие выводы и предположения будут учитывать только времена прихода, так как базируются на высокочастотном приближении [13]. В данном приближении по аналогии с геометрической оптикой, распространение сейсмической энергии описывается с помощью лучей и волновых фронтов, пренебрегая информацией о фазе и амплитуде сигнала. Поскольку луч можно рассматривать как интегральную характеристику волнового процесса, содержащую всю информацию о его прошлом, то его очень удобно использовать именно для описания времен прихода различных типов волн.

1.2 Формулы для годографов в случае симметричных отражений

Для заданного положения рефлектора элементарное симметричное отражение - это процесс распространения волны при котором ход луча от источника до рефлектора полностью совпадает с ходом луча от рефлектора до приемника в обратном порядке. Рассматривая время прихода волны как функцию от координаты центральной точки и выноса (половины базы наблюдений равной расстоянию между источником и приемником), легко заметить, что на основании принципа взаимности данная функция обязательно должна быть четной. Как следствие, любое разложение данной функции в ряд (по отношению к выносу) будет содержать только четные степени. Очевидно, что это условие выполняется для первично отраженных волн. При этом, в процессе распространения могут происходить многократные отражения и образовываться обменные волны как показано на Рис. 1.

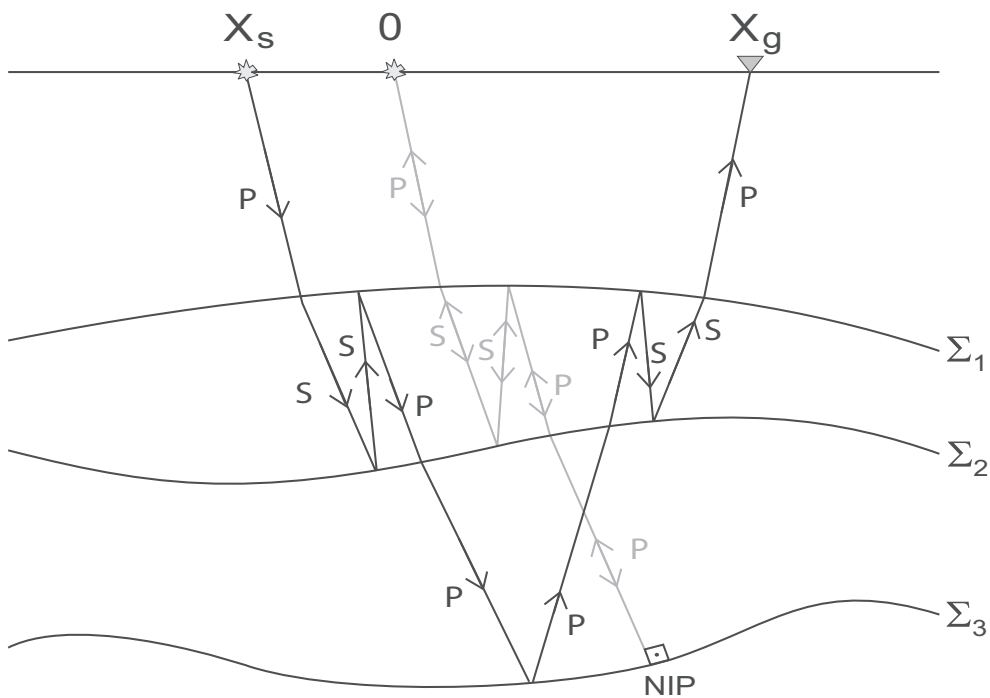


Рис. 1: Симметричные отражения с образованием обменных волн (черная линия) и центральный луч, соответствующий нулевому выносу (серая траектория), приходящий в точку нормального падения (Normal Incidence Point - NIP). Из работы [14].

В случае монотипных, однократно отраженных P - волн и горизонтальной отражающей границы наиболее простым и известным выражением, описывающим сейсмический снос в геометрии ОЦТ, является так называемое уравнение нормального сейсмического сноса (Normal moveout equation):

$$T(h)^2 = T_0^2 + Ch^2, \quad (1.1)$$

где T - время хода, соответствующее пути источник-рефлектор-приемник, T_0 - двойное время хода вдоль центрального луча, выпущенного из средней точки и h - вынос (положительный или отрицательный в зависимости от выбора системы координат) равный половине расстояния между источником и приемником. Постоянная C равна:

$$C = \frac{4}{V_{nmo}^2}, \quad (1.2)$$

где V_{nmo} - скоростной параметр. Уравнение (1.1) представляет собой разложение времени прихода волны в ряд Тейлора по параметру h с точностью до члена второго порядка. В данном случае это уравнение является гиперболической аппроксимацией времени и есть точное выражение для годографа в случае плоской, горизонтальной границы и однородной, изотропной среды.

Для больших выносов (превышающих расстояние до рефлектора) и случаев, где поведение годографа отличается от гиперболического, необходимо учитывать следующие члены разложения [15]:

$$T(h)^2 = T_0^2 + Ch^2 + Dh^4, \quad (1.3)$$

где коэффициент D отвечает за отклонение зависимости от гиперболической. Подробный анализ влияния члена четвертого порядка в случае слоистой изотропной среды может быть найден в [16].

Дальнейшая модификация уравнения (1.3) была представлена в работе [17] в виде следующего выражения:

$$T(h)^2 = T_0^2 + Ch^2 + \frac{Dh^4}{1 + Eh^2}, \quad (1.4)$$

где C , D известные ранее коэффициенты, а E - вновь введенный параметр. Цель введения дополнительных параметров - улучшить результаты суммирования трасс при условии больших выносов, а также учета влияния анизотропии.

Также следует упомянуть, что в последнее время достаточно много внимания уделяется вопросу аппроксимации поверхностных годографов

отраженных волн не обязательно ограничиваясь геометрией ОЦТ (Non-SMP moveout). Это связано с тем, что данный подход позволяет использовать всю информацию, накопленную в процессе наблюдений, для целей суммирования и последующей обработки [18]. В данном случае формула для годографа в предположении гиперболической аппроксимации и монотипных волн может быть представлена в виде:

$$T(m, h) = (T_0 + Am)^2 + Bm^2 + Ch^2, \quad (1.5)$$

где m обозначает координату центральной точки. Уравнение (1.5) справедливо для произвольного расположения источника и приемника. Легко заметить, что оно преобразуется в уравнение (1.1) для конфигурации ОЦТ при $m = 0$.

1.3 Влияние анизотропии

Метод отраженных волн и его модификация в виде метода ОЦТ позволяет получать наиболее надежные и достоверные сведения для построения скоростных моделей с использованием данных поверхностных наблюдений как в изотропном, так и в анизотропном случаях. Если среда является анизотропной, то попытка аппроксимации годографа с использованием изотропных параметров может привести к ошибкам в суммировании трасс и искажению сейсмических изображений (данный вопрос подробно обсуждается в работе [12]). Как следствие, понимание того каким образом анизотропия влияет на кинематику отраженных волн играет существенную роль в анализе и обработке сейсмических данных.

По аналогии с предыдущим разделом общее представление для времени прихода отраженной волны можно записать в виде ряда:

$$t^2 = A_0 + A_2h^2 + A_4h^4 + \dots, \quad (1.6)$$

где h - вынос, а соответствующие коэффициенты даются формулами:

$$A_0 = t_0^2; \quad A_2 = \left. \frac{d(t^2)}{d(h^2)} \right|_{h=0}; \quad A_4 = \frac{1}{2} \left. \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{d(t^2)}{d(h^2)} \right] \right|_{h=0}, \quad (1.7)$$

Как говорилось ранее, наиболее часто употребляемым параметром, характеризующим величину сейсмического сноса, является V_{nmo} (normal - moveout velocity), который определяет гиперболическую форму годографа отраженной волны на небольших выносах (не превышающих глу-

бину залегания рефлектора).

$$t_{hyp}^2 = t_0^2 + \frac{h^2}{V_{nmo}^2} \quad (1.8)$$

$$V_{nmo}^2 = \left. \frac{d(h^2)}{d(t^2)} \right|_{h=0} \quad (1.9)$$

Если построить график времени прихода отраженной волны в координатах $t^2 - h^2$, то коэффициент $1/V_{nmo}^2$ будет определять начальный наклон кривой. С увеличением выноса $t^2(h^2)$ будет все более отличаться от прямой линии в силу влияния следующих членов разложения - члена четвертой степени ($A_4 h^4$) и следующих членов более высокого порядка.

Сейсмическая анизотропия вносит два главных вклада во временную картину отраженных волн. Первый - в отличие от изотропной среды скорость V_{nmo} может отличаться от вертикальной скорости (для одного слоя) или от эффективной скорости V_{rms} для слоисто-однородной среды. Это становится одной из основных причин получения искаженной информации при применении миграционных процедур по глубине и возникновению ошибок в определении глубин залегания сейсмических границ. Второй - анизотропия может существенно увеличить отклонения поверхностного годографа от гиперболической зависимости, поскольку даже в одном однородном, анизотропном слое годограф $t(h)$ уже не описывается гиперболической зависимостью [12].

1.4 Годограф ОПВ однократно отраженных волн

Так как, сейсмограммы, обрабатываемые по методу ОЦТ, представляют собой выборку каналов с сейсмограмм общего пункта возбуждения (ОПВ), полученных в процессе многократного профилирования МОВ, рассмотрим известное уравнение годографа однократно отраженной волны для двухслойной модели среды с плоской отражающей границей. Скорость будем считать постоянной. Наблюдения проводятся в конфигурации ОПВ. В соответствии с [19] можно записать:

$$t(x) = \frac{1}{V_1} \sqrt{x^2 + 4dx \sin \phi + 4d^2}, \quad (1.10)$$

где V_1 - скорость, x - расстояние между источником и приемником, d - глубина залегания отражающей границы, определенная из центральной точки, ϕ - угол наклона границы. Данное уравнение есть уравнение годографа отраженной монотипной волны от плоской, наклонной границы, играющее важную роль в сейсморазведке. Его принято называть годографом общего пункта возбуждения (ОПВ). Оно представляет собой в

координатах $t - x$ уравнение гиперболы с осью симметрии в виде прямой линии: $x = -2d \sin \phi$. Уравнениями асимптот этой гиперболы будут две прямые линии:

$$t = \pm \frac{x}{V_1} \quad (1.11)$$

Для точек наблюдения, расположенных сравнительно близко к источнику ($x < d$) уравнение (1.10) может быть представлено в виде ряда по степеням x :

$$t(x) = t_0 + \frac{\sin \phi}{V_1} x + \frac{\cos \phi}{2V_1^2 t_0} x^2 + \frac{\sin 2\phi \cos 2\phi}{4V_1^3 t_0^2} x^3 + \dots \quad (1.12)$$

Обычно бывает достаточно ограничиться первыми тремя членами ряда, аппроксимируя гиперболический годограф квадратичной параболой.

Также при небольших углах падения отражающей границы ($\phi \approx 0$) справедливо приближение:

$$t(x) = t_0 + \frac{\sin \phi}{V_1} x + \frac{1}{2V_1^2 t_0} x^2 + \dots \quad (1.13)$$

Точка минимума годографа, соответствующая минимальному времени пробега волны от границы и обратно, определяется координатами:

$$x_{min} = -\frac{2d}{\sin \phi}; \quad t_{min} = \frac{2d \cos \phi}{V_1}$$

Важную роль в сейморазведке МОВ играет время пробега волны от источника по нормали до границы и обратно, которое принято называть временем нормального отражения:

$$t(x) \Big|_{x=0} = t_0 = \frac{2d}{V_1} \quad (1.14)$$

Важно отметить, что время нормального отражения будет минимальным временем годографа только для случая горизонтального залегания отражающей границы ($\phi = 0$)

С учетом введенного обозначения для плоской горизонтальной границы ($\phi = 0$) уравнение годографа можно записать:

$$t(x) = \frac{1}{V_1} \sqrt{x^2 + 4d^2} = \sqrt{t_0^2 + \frac{x^2}{V_1^2}} \quad (1.15)$$

В этом случае годограф отраженной волны имеет вид гиперболы, симметричной относительно начала координат.

Приведенное уравнение годографа общего пункта возбуждения совершенно аналогично по виду годографу общей точки приема в силу действия известного принципа взаимности, утверждающего, что замена источников и приемников не влияет на время распространения волны.

Годограф ОПВ приобретает более сложную форму, отличную от гиперболы, когда отражающая граница имеет криволинейную форму [21]. Наименьшие искажения формы годографа отраженной волны наблюдаются для выпуклых (в сторону поверхности наблюдений) сейсмических границ. Как правило, в этом случае нарушается гиперболическая форма годографа. Существенно большие искажения наблюдаются для случая вогнутых сейсмических границ. Степень этих искажений и их характер зависит от соотношения средней глубины залегания границы и радиуса ее кривизны. Когда радиус кривизны приблизительно равен средней глубине залегания границы или меньше ее, то возникают сильные осложнения на годографе в виде появления на нем петель, скачков, разрывов и т.п. явлений.

1.5 Годограф ОЦТ однократно отраженных волн

Аналогично предыдущему разделу рассмотрим плоскую отражающую границу, залегающую под углом ϕ к горизонту. Покрывающая толща однородна и характеризуется постоянной скоростью V_1 .

В отличие от геометрии ОПВ начало координат поместим на поверхности наблюдений в точке O , которую будем называть общей средней точкой - ОСТ. Линию наблюдений на поверхности определяется осью Ox . Положительное направление оси Ox направим параллельно проекции линии падения отражающей границы на плоскость наблюдений. Глубина по нормали из центра системы координат до границы раздела равна d . В произвольной точке O на профиле наблюдений, имеющей координату $-l/2$, поместим источник колебаний. В точке профиля с координатой $l/2$ (расположенной симметрично относительно ОСТ) поместим приемник колебаний.

Уравнение годографа ОЦТ может быть получено из уравнения ОПВ путем сдвига системы координат. Временно совместим начало новой системы координат с пунктом взрыва O_1 . Глубина по нормали в этой точке профиля будет равна:

$$d_1 = d_0 - \frac{x}{2} \sin \phi \quad (1.16)$$

Как было показано в предыдущем разделе годографа уравнение ОПВ (1.10), определяющее время пробега волны по траектории O_1DM в этой

системе координат примет вид:

$$t(x) = \frac{1}{V_1} \sqrt{x^2 + 4d_1 x \sin \phi + 4d_1^2} \quad (1.17)$$

Подставим выражение для d_1 из (1.16):

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{1}{V_1} \sqrt{x^2 + 4x(d_0 - \frac{x}{2} \sin \phi) + 4(d_0 - \frac{x}{2} \sin \phi)^2} = \\ &= \frac{1}{V_1} \sqrt{x^2 - x^2 \sin^2 \phi + 4d_0^2} = \frac{1}{V_1} \sqrt{4d_0^2 + x^2 \cos^2 \phi} \end{aligned} \quad (1.18)$$

С учетом следующих обозначений:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{2d_0}{V_1} \\ V_{cmp} &= \frac{V_1}{\cos \phi} \end{aligned}$$

Выражение (1.18) преобразуется к виду:

$$t(x) = \sqrt{t_0^2 + \frac{x^2 \cos^2 \phi}{V_1^2}} = \sqrt{t_0^2 + \frac{x^2}{V_{cmp}^2}} \quad (1.19)$$

Формула (1.19) представляет собой аналитическое выражение для годографа ОЦТ в случае плоской отражающей границы и однократно отраженной, монотипной волны.

Анализ данного уравнения показывает, что годограф представляет собой гиперболу, симметричную относительно центральной точки. При фиксированном значении времени нормального отражения t_0 форма (крутизна) годографа определяется единственным параметром V_{cmp} (сmp - common midpoint). Он имеет размерность скорости, но существенно отличается от истинной скорости: V_{cmp} - является фиктивным скоростным параметром, поскольку зависит от кажущегося угла падения границы вдоль линии наблюдения. Также следует заметить, что ввиду принципа взаимности форма годографа ОЦТ не зависит от знака угла.

При условии, что $\frac{x^2 \cos^2 \phi}{V_1^2 t_0^2} \leq 1$ выражение (1.19) может быть разложено в ряд по степеням x :

$$t(x) = t_0 + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \phi}{V_1^2 t_0^2} x^2 - \frac{1}{8} \frac{\cos^4 \phi}{V_1^4 t_0^4} x^4 + \dots \quad (1.20)$$

При горизонтальном залегании отражающей границы отражение происходит от одной общей глубинной точки для каждой пар "источник -

приемник". В то же время, при наклонном залегании границы для каждой пары "источник - приемник" положение точки отражения меняется. Действительно, когда источник и приемник совпадают, то отражение происходит от точки, определяемой основанием нормали к границе, проведенной из общей центральной точки. При ином расположении источника и приемника точка отражения будет смещаться по отражающей границе в сторону ее восстания. Рис.2 иллюстрирует сказанное выше.

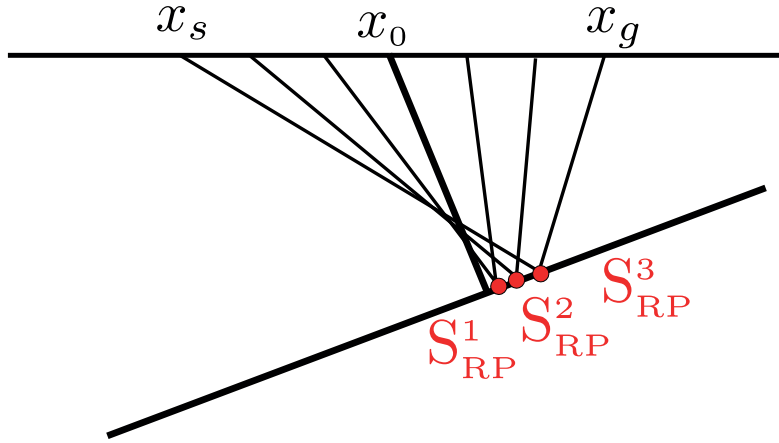


Рис. 2: Ход лучей при отражении от наклонной границы в геометрии ОЦТ. Отмечены различные точки отражения, соответствующие различному расстоянию между источником и приемником.

Как показано в [19, 20] для оценки смещения точки отражения от основания центрального луча с использованием только геометрических соображений могут быть получены координаты фактической точки отражения для наклонной границы. Приведем здесь эти выражения:

$$x_D = -\left(d + \frac{x^2}{4d} \cos^2 \phi\right) \sin \phi \quad (1.21)$$

$$z_D = d \cos \phi - \frac{x^2}{4d} \sin^2 \phi \cos \phi \quad (1.22)$$

В тоже время величина смещения точки отражения относительно точки основания центрального луча согласно [21] пропорционально h^2 и определяется формулой:

$$\Delta\rho = \frac{h^2 \sin 2\phi}{8d}, \quad (1.23)$$

где $\Delta\rho$ - смещение относительно точки нормального отражения, h - вынос, ϕ - угол наклона границы, d - глубина.

2 NIP теорема

2.1 Введение

При интерпретации параметров ОЦТ в случае сложно-построенных сред достаточно эффективным может оказаться подход, при котором годограф ОЦТ сопоставляется с годографом фиктивной волны, распространяющейся от основания центрального луча как от источника. Основная идея данного способа заключается в следующем – годограф ОЦТ (в малой окрестности его центральной точки) может быть аппроксимирован параметрами некоторой фиктивной волны, пришедшей от основания центрального луча как от источника. Сказанное выше позволяет перейти от рассмотрения траектории волны по пути пункт взрыва — отражающая граница — поверхность наблюдений к траектории волны фиктивный источник - поверхность наблюдений. Правомерность указанного подхода к интерпретации параметров годографа ОЦТ непосредственно следует из известного факта совпадения в центральной точке второй производной годографа ОЦТ и половины второй производной годографа волны от фиктивного источника на отражающей границе. Это соотношение известно как NIP (normal incidence point) теорема [22, 23, 24]

Таким образом, следуя работам [23, 24] можно ввести понятие виртуального источника NIP-волны. Поскольку описание распространения истинного волнового фронта является достаточно сложной задачей даже в изотропном и однородном случае, так как волновой фронт может существенно менять свою форму при взаимодействии с границей (преломление, дифракция), то переход к рассмотрению одной фиктивной волны от границы может существенно упростить задачу. Эта концепция вместе с использованием принципа взаимности и симметричных отражений, упомянутых ранее, позволяет рассматривать значительно более простую задачу на распространение одной фиктивной волны от границы вместо достаточно сложной геометрии, включающей в себя падающую и отраженную волны, что проиллюстрировано на Рис. 3

2.2 Вывод уравнений NIP теоремы

Основываясь на результатах работ [22, 25] приведем краткий вывод уравнений, связывающих производные от времени прихода отраженной волны, и волны, распространяющейся от фиктивного источника на отражающей границе. Время пробега отраженной волны может быть описано как функция от координат, задающих положение источника и приемни-

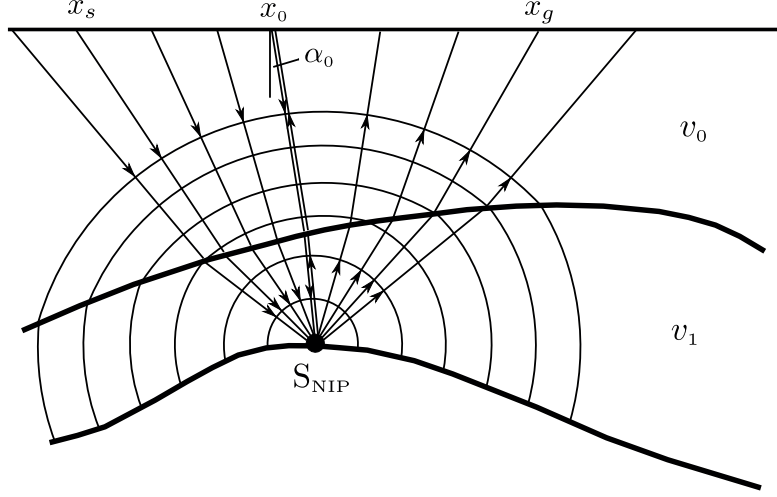


Рис. 3: Виртуальный источник NIP-волны в общей точке отражения

ка: s и r , а также местоположения точки отражения x на границе:

$$t(y, h) = F(y, h, x(y, h)), \quad (2.1)$$

где y - координата серединной точки ($y = \frac{s+r}{2}$), h - половина выноса ($h = \frac{s-r}{2}$), а функция F представляет собой разложение времени пробега на два слагаемых, отвечающих временам хода падающей и отраженной волны соответственно:

$$F(y, h, x) = T(y - h, x) + T(y + h, x) \quad (2.2)$$

Очевидно, что в центральной точке ($h = 0$):

$$t(y, 0) = 2T(y, x), \quad (2.3)$$

где $x = x(y, 0)$ соответствует точке отражения центрального луча. Дифференцируя уравнение (2.1) по h получим:

$$\frac{\partial t}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial x}{\partial h} \quad (2.4)$$

В соответствии с принципом Ферма траектория луча отраженной волны соответствует минимальному значению времени хода. Траектория этого луча будет определяться положением на границе точки отражения x , следовательно, предполагая функцию F гладкой функцией от x , мы можем записать принцип Ферма в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) должно выполняться для всех значений x и h . Используя это выражение в уравнении (2.4) получим:

$$\frac{\partial t}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial h} \quad (2.6)$$

Дифференцируем уравнение (2.6) по h еще раз приходим к уравнению:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial h^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial h \partial x} \frac{\partial x}{\partial h} \quad (2.7)$$

В соответствии с принципом взаимности замена источника и приемника не должна повлиять на положение точки отражения из чего следует, что x должна быть четной функцией по h . Таким образом, уравнение (2.7) может быть записано следующим образом:

$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \right|_{h=0} \quad (2.8)$$

Подставляя выражение для функции F из (2.2) приходим к выражению:

$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial h^2} \right|_{h=0} \quad (2.9)$$

Формула (2.9) представляет собой математическую формулировку NIP теоремы, которая утверждает, что вторая производная от времени хода отраженной волны по h равна второй производной прямой волны по h , распространяющейся от основания центрального луча как от источника. Так как при выводе этих уравнений использовались только принцип Ферма, принцип взаимности и правила дифференциального исчисления, можно утверждать, что этот подход применим и в случае анизотропных сред при условии, что время хода также описывается гладкой функцией.

В работах [25, 26] практически аналогичным способом получены формулы для производных четвертого порядка, а также рекуррентные алгебраические соотношения для расчета производных любого порядка.

3 Аппроксимация годографа ОЦТ волной NIP в изотропном случае

3.1 Вывод формул

Проверим точность аппроксимации годографа ОЦТ NIP-волной в случае изотропной, однородной среды с плоской границей. Для этого сравним производные от полного времени хода отраженной волны, проходящей путь источник - отражающая граница - приемник и времени хода

фиктивной волны (NIP-волны), распространяющейся от основания центрального луча как от источника до поверхности наблюдений. Схема хода лучей, упомянутых выше волн, представлена на Рис. 5.

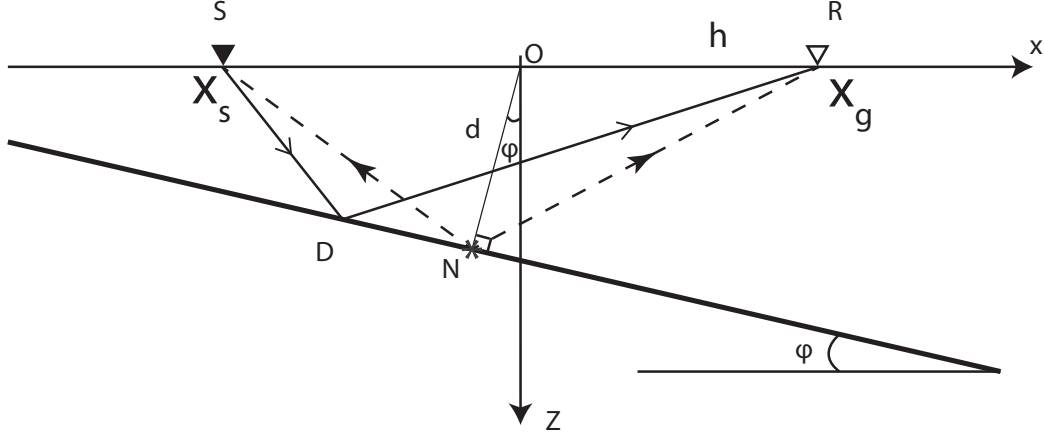


Рис. 4: Схема наблюдения отраженной и NIP волн.

Пусть задана плоская границе с глубиной залегания d (определяется по нормали к границе из начала координат) и углом наклона ϕ . Однородная среда задается постоянной скоростью v . Обозначим точкой $N(x_N, z_N)$ основание центрального луча на границе. В рассматриваемом изотропном случае луч будет перпендикулярен к границе. Положение источника, приемника и вынос определяются следующим образом:

$$x_s = -\frac{x}{2}, \quad x_g = \frac{x}{2}, \quad h = \frac{x}{2}, \quad (3.1)$$

где x - расстояние между источником и приемником (база наблюдения). С учетом геометрии модели координаты точки N могут быть определены следующим образом:

$$x_N = -d \sin \phi, \quad z_N = d \cos \phi \quad (3.2)$$

Тогда расстояние $|NS|$ и $|NR|$ равны соответственно:

$$|NS| = \sqrt{\left(-\frac{x}{2} + d \sin \phi\right)^2 + (d \cos \phi)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} - xd \sin \phi + d^2} \quad (3.3)$$

$$|NR| = \sqrt{\left(\frac{x}{2} + d \sin \phi\right)^2 + (d \cos \phi)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + xd \sin \phi + d^2} \quad (3.4)$$

Следовательно, полное время для волны, распространяющейся от N точки, равно:

$$T_N(x) = \frac{1}{v}(|NS| + |NR|) = \frac{1}{v} \left(\sqrt{\frac{x^2}{4} - xd \sin \phi + d^2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + xd \sin \phi + d^2} \right) \quad (3.5)$$

Перейдем к обозначениям через вынос ($x \equiv 2h$):

$$T_N(h) = \frac{1}{v} \left(\sqrt{h^2 - 2hd \sin \phi + d^2} + \sqrt{h^2 + 2hd \sin \phi + d^2} \right) \quad (3.6)$$

Сосчитаем первую и вторую производную по h от выражения (3.6):

$$\frac{\partial T_N}{\partial h} = \frac{1}{v} \left(\frac{h - d \sin \phi}{\sqrt{h^2 - 2hd \sin \phi + d^2}} + \frac{h + d \sin \phi}{\sqrt{h^2 + 2hd \sin \phi + d^2}} \right) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 T_N}{\partial h^2} = \frac{2}{v} \frac{d^2 \cos^2 \phi}{(h^2 + 2hd \sin \phi + d^2)^{3/2}} \quad (3.8)$$

Значение второй производной в точке $h = 0$:

$$\left. \frac{\partial^2 T_N}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \frac{2 \cos^2 \phi}{dv} \quad (3.9)$$

Теперь сравним полученные результаты с точной формулой для годографа ОЦТ (common midpoint) (1.19):

$$t_{cmp}(x) = \frac{1}{v} \sqrt{4d^2 + x^2 \cos^2 \phi} \quad (3.10)$$

Также перейдем к обозначениям через вынос:

$$t_{cmp}(h) = \frac{2}{v} \sqrt{d^2 + h^2 \cos^2 \phi} \quad (3.11)$$

Сосчитаем первую и вторую производную по h от выражения (1.19)

$$\frac{\partial t_{cmp}}{\partial h} = \frac{2}{v} \frac{h \cos^2 \phi}{\sqrt{d^2 + h^2 \cos^2 \phi}} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 t_{cmp}}{\partial h^2} = \frac{2}{v} \frac{d^2 \cos^2 \phi}{(d^2 + h^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (3.13)$$

Значение второй производной в точке $h = 0$:

$$\left. \frac{\partial^2 t_{cmp}}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \frac{2 \cos^2 \phi}{dv} \quad (3.14)$$

Таким образом, мы убедились, что в окрестности центрального луча $h = 0$ вторая производная от точного времени хода отраженной волны, выраженная через формулу годографа ОЦТ, и вторая производная от времени хода фиктивной волны из N точки совпадают :

$$\left. \frac{\partial^2 t_{cmp}}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \left. \frac{\partial^2 T_N}{\partial h^2} \right|_{h=0} \quad (3.15)$$

Данное равенство позволяет говорить о том, что годограф ОЦТ может быть аппроксимирован годографом NIP волны в окрестности центрального луча с точностью до второго порядка при разложении времен прихода соответствующих волн в ряд по параметру h .

3.2 Численное моделирование и выводы

Ниже представлено сравнение годографов отраженной и NIP волн в зависимости от соотношения вынос/глубина и различных углов наклона (15 и 30 градусов).

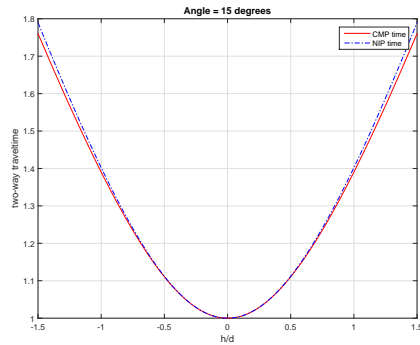


Рис. 5: Наклон границы 15 градусов.

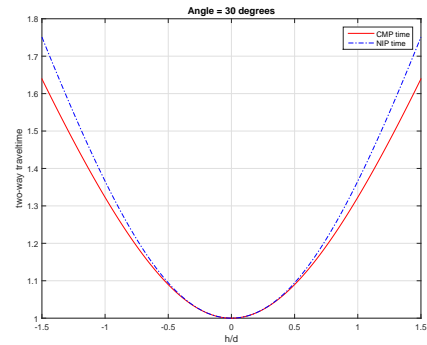


Рис. 6: Наклон границы 30 градусов.

4 Аппроксимация годографа ОЦТ волной NIP в анизотропном случае

Понятие анизотропии и основные формулы необходимые для дальнейшего рассмотрения представлены в приложении. Ситуация в которой поверхность медленности (график вектора медленности в зависимости от угла наблюдений) имеет форму эллипса носит название эллиптической анизотропии.

Данная ситуация реализуется в случае распространения SH -волны в двумерной анизотропной, однородной среде. Скоростные характеристики среды определяются следующими анизотропными параметрами: (a_1, a_3) . Ось симметрии задачи совпадает с осью z , направленной вертикально вниз. Таким образом, можно построить вектор медленности, который будет удовлетворять уравнению эйконала в анизотропном случае:

$$p_1 = \frac{\sin(\theta)}{v(\theta)}$$

$$p_3 = \frac{\cos(\theta)}{v(\theta)}$$

$$a_1^2 p_1^2 + a_3^2 p_3^2 = 1, \quad (4.1)$$

где $v(\theta)$ – фазовая скорость в зависимости от фазового угла, который представляет собой угол между нормалью к фронту волны и направлением оси z .

Групповая скорость для данного типа волн удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\xi_1 = a_1^2 p_1$$

$$\xi_3 = a_3^2 p_3$$

$$\left(\vec{p}, \vec{\xi}\right) = 1$$

Далее получим связь между значениями фазовой и групповой скоростей:

$$v(\theta) = a_1^2 \sin^2(\theta) + a_3^2 \cos^2(\theta)$$

$$|\vec{\xi}|^2 = \frac{a_1^4 \sin^2(\theta) + a_3^4 \cos^2(\theta)}{a_1^2 \sin^2(\theta) + a_3^2 \cos^2(\theta)} = \frac{a_1^4 \tan^2(\theta) + a_3^4}{a_1^2 \tan^2(\theta) + a_3^2} \quad (4.2)$$

Предположим, что групповая скорость определяется углом между направлением сейсмического луча и осью z . Тогда выражение (4.2) примет вид:

$$\tan(\psi) = \frac{\xi_1}{\xi_3} = \frac{a_1^2 p_1}{a_3^2 p_3} = \frac{a_1^2}{a_3^2} \tan(\theta) \quad (4.3)$$

С учетом этого полный вектор групповой скорости может быть записан как:

$$|\vec{\xi}|^2 = \frac{a_1^2 a_3^2}{a_1^2 \sin^2(\psi) + a_3^2 \cos^2(\psi)}$$

$$\frac{1}{|\vec{\xi}|^2} = \frac{\sin^2(\psi)}{a_1^2} + \frac{\cos^2(\psi)}{a_3^2} \quad (4.4)$$

С использованием полученных формул можно сосчитать время распространения волны от точки, расположенной на границе, до поверхности наблюдений следующим образом. Пусть точка наблюдений на границе определяется координатами (x_0, z_0) , а поверхность наблюдений задается выражением $x_3 = z = 0$, тогда направление распространения волны будет определяться единичным вектором:

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + z_0^2}} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ -z_0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Пусть ось симметрии задачи составляет угол α с вертикальной осью z и определяется единичным вектором $\vec{e}_s = (\sin \alpha, \cos \alpha)$, тогда групповой угол между осью симметрии и направлением распространения волны может быть определен как:

$$\cos(\psi) = (\vec{e}, \vec{e}_s) = [(x-x_0) \sin(\alpha) - z_0 \cos(\alpha)] \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + z_0^2}}$$

$$\cos^2(\psi) = [(x-x_0) \sin(\alpha) - z_0 \cos(\alpha)]^2 \frac{1}{(x-x_0)^2 + z_0^2}$$

$$\sin^2(\psi) = [(x-x_0) \cos(\alpha) + z_0 \sin(\alpha)]^2 \frac{1}{(x-x_0)^2 + z_0^2}$$

Используя полученную ранее формулу для групповой скорости (4.4) время распространения волны от точки x на границе до поверхности наблюдений дается выражением:

$$\tau^2 = \frac{(x-x_0)^2 + z_0^2}{|\vec{\xi}|^2} \quad (4.6)$$

$$\tau^2 = (x-x_0)^2 \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{a_3^2} + \frac{\cos^2(\alpha)}{a_1^2} \right) + z_0^2 \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{a_3^2} + \frac{\cos^2(\alpha)}{a_1^2} \right) +$$

$$2z_0(x-x_0) \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_3^2} \right) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (4.7)$$

Вводя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{a_3^2} + \frac{\cos^2(\alpha)}{a_1^2} \right) \\ b &= 2(x - x_0) \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_3^2} \right) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ c &= z_0^2 \left(\frac{\sin^2(\alpha)}{a_3^2} + \frac{\cos^2(\alpha)}{a_1^2} \right) \end{aligned}$$

Формула для полного времени может быть записана в следующем виде:

$$\tau = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0)z_0 + c, \quad (4.8)$$

где коэффициенты a, b, c зависят от параметров анизотропии и ориентации оси симметрии.

Таким образом, полное время пробега отраженной волны, проходящей путь: источник $(x_s, 0)$ - точка отражения (x_0, z_0) - приемник $(x_g, 0)$ определяется выражением:

$$\tau(x_s, x_g | x_0, z_0) = \sqrt{a(x_s - x_0)^2 + b(x_s - x_0)z_0 + c} + \sqrt{a(x_g - x_0)^2 + b(x_g - x_0)z_0 + c} \quad (4.9)$$

4.1 Определение координат точки основания центрального луча

Для того, чтобы рассчитать положение источника фиктивной волны на отражающей границе необходимо определить координаты основания центрального луча $N(x_r, z_r)$. Чтобы решить эту задачу воспользуемся принципом Ферма, который утверждает, что время пробега вдоль центрального луча будет наименьшим, следовательно, искомые координаты могут быть найдены через минимизацию соответствующего времени хода:

$$\frac{\partial \tau_{zo}}{\partial x_r} = 0, \quad (4.10)$$

где τ_{zo} - время хода центрального луча (zo - zero offset), x_r - координата неизвестной точки на границе.

Тогда вектор, определяющий направление распространения, примет вид:

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{x_r^2 + z_r^2}} \begin{pmatrix} -x_r \\ -z_r \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Предположим, что ось симметрии задачи совпадает с вертикальной координатной осью ($\alpha = 0$) и определяется вектором:

$$\vec{e}_s = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Также предположим, что отражающая граница является плоской с углом падения ϕ и глубиной залегания d (определенной из начала координат $(0,0)$ по нормали к границе), т.е. связь между x_r и z_r линейна и может быть параметризована уравнением прямой в координатах (z, x) следующим образом:

$$z_r = kx_r + b \quad (4.13)$$

$$k = \tan(\phi), \quad b = \frac{d}{\cos(\phi)} \quad (4.14)$$

Следовательно, время хода (4.8) для центрального луча примет вид:

$$\begin{aligned} \tau_{zo}^2 &= \frac{x_r^2 + z_r^2}{|\vec{\xi}|^2} = \frac{x_r^2}{a_1^2} + \frac{z_r^2}{a_3^2} \\ \tau_{zo} &= \sqrt{\frac{x_r^2}{a_1^2} + \frac{z_r^2}{a_3^2}} = \sqrt{\frac{x_r^2}{a_1^2} + \frac{(kx_r + b)^2}{a_3^2}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Проводя упрощение выражения (4.15) получим:

$$\tau_{zo} = \sqrt{x_r^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{k^2}{a_3^2} \right) + x_r \frac{2kb}{a_3^2} + \frac{b^2}{a_3^2}} \quad (4.16)$$

Применяя условие (4.10) для поиска минимума времени получим линейное алгебраическое уравнение из которого можно определить x_r :

$$\begin{aligned} x_r \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{k^2}{a_3^2} \right) + \frac{kb}{a_3^2} &= 0 \\ x_r &= \frac{-kba_1^2}{a_3^2 + a_1^2 k^2} \end{aligned}$$

Используя принятые ранее обозначения (4.13), (4.14) получим координаты основания центрального луча на границе:

$$x_r = \frac{-da_1^2 \sin(\phi)}{a_1^2 \sin^2(\phi) + a_3^2 \cos^2(\phi)} \quad (4.17)$$

$$z_r = kx_r + b = \frac{da_3^2 \cos(\phi)}{a_1^2 \sin^2(\phi) + a_3^2 \cos^2(\phi)} \quad (4.18)$$

4.2 Определение координат точки отражения

Координаты точки истинного отражения $D(x_0, z_0)$ также могут быть найдены из условия минимума времени хода отраженной волны только на это раз будем минимизировать полное время хода, которое дается выражением (4.9), полагая, что $x_s \neq 0, x_g \neq 0$.

На основании формулы (4.8) время прихода волны от точки $D(x_0, z_0)$ в источник $(x_s, 0)$ и приемник $(x_g, 0)$ может быть записано:

$$\begin{aligned}\tau_s^2 &= a(x_s - x_0)^2 + b(x_s - x_0)z_0 + c \\ \tau_g^2 &= a(x_g - x_0)^2 + b(x_g - x_0)z_0 + c\end{aligned}$$

При условии, что ось симметрии задачи совпадает с вертикальной осью симметрии ($\alpha = 0$) полное время примет вид:

$$T = \sqrt{\frac{1}{a_1^2}(x_s - x_0)^2 + \frac{1}{a_3^2}(kx_0 + b)^2} + \sqrt{\frac{1}{a_1^2}(x_g - x_0)^2 + \frac{1}{a_3^2}(kx_0 + b)^2} \quad (4.19)$$

Введем следующие обозначения: $x_s = -h, x_g = h$, где h - вынос. Аналогично (4.10) применим условие для поиска минимума полного времени:

$$\frac{\partial T}{\partial x_0} = 0 \quad (4.20)$$

После применения указанного условия получим алгебраическое уравнение из которого можно найти координаты истинной точки отражения $D(x_0, z_0)$:

$$\begin{aligned}& \left[a_3^2(x + h) + a_1^2 k(kx + b) \right]^2 (a_1^2 a_3^4 (x - h)^2 + a_1^4 a_3^2 (kx + b)^2) - \\ & \left[a_3^2(x - h) + a_1^2 k(kx + b) \right]^2 (a_1^2 a_3^4 (x + h)^2 + a_1^4 a_3^2 (kx + b)^2) = 0 \\ & a_1 a_3 h (b + kx) (a_3^2 (h^2 k + bx) + a_1^2 b k (b + kx)) = 0\end{aligned} \quad (4.21)$$

Корни этого уравнения:

$$x_0^{(1)} = -\frac{b}{k}; \quad x_0^{(2)} = -\frac{k(a_1^2 b^2 + a_3^2 h^2)}{b(a_1^2 k^2 + a_3^2)} \quad (4.22)$$

Корень $x_0^{(1)} = -\frac{b}{k} = -\frac{d}{\sin(\phi)}$ должен быть отброшен как не имеющий смысла при $\phi = 0$ Тогда выражение для координаты точки $D(x_0, z_0)$ примут вид:

$$\begin{aligned}x_0 &= -\frac{k(a_1^2 b^2 + a_3^2 h^2)}{b(a_1^2 k^2 + a_3^2)} \\ z_0 &= \frac{a_3^2 (b^2 - k^2 h^2)}{b(a_1^2 k^2 + a_3^2)}\end{aligned} \quad (4.23)$$

Для проверки указанных формул рассмотрим частный случай эллиптической анизотропии $a_1 = a_3$, т.е. случай изотропной среды. После подстановки значений параметров k и b из (4.14) в формулы (4.23) получим:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{k(b^2 + h^2)}{b(k^2 + 1)} = -d \sin(\phi) - \frac{h^2}{d} \cos^2(\phi) \sin(\phi) \\ z_0 &= -\frac{k(b^2 + h^2)}{b(k^2 + 1)} + b = d \cos(\phi) - \frac{h^2}{d} \sin^2(\phi) \cos(\phi) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Данные выражения совпадают с соответствующими значениями для координат точки отражения, полученными для случая изотропной упругой среды и плоской отражающей границы. См. формулы (1.21).

4.3 Численное моделирование и выводы

Чтобы оценить применимость NIP теоремы к задачам аппроксимации годографов ОЦТ выполнено численное моделирование времен прихода отраженных волн для случая SH -волны и плоской двумерной отражающей границы с известной глубиной залегания и углом падения. Проведено сравнение времен прихода фиктивной волны, распространяющейся от точки N (основание центрального луча) как от источника и волны, пробегающей по траектории источник – точка отражения D – приемник при различных значениях угла залегания отражающей границы и соотношениях h/d (вынос/глубина).

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что аппроксимация годографа отраженной волны фиктивной волной распространяющейся от основания центрального луча, может быть использована с достаточной степенью точности в диапазоне соотношений вынос/глубина от 0 до 1.5 ед. При выходе за эти пределы различие становится намного более существенным поскольку положение истинной точки отражения и основания центрального луча существенно различаются.

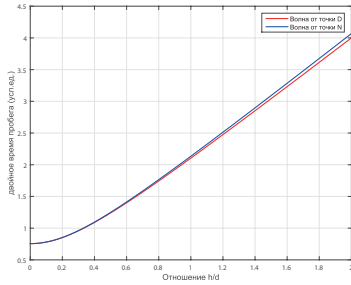


Рис. 7: Наклон границы 30 градусов.

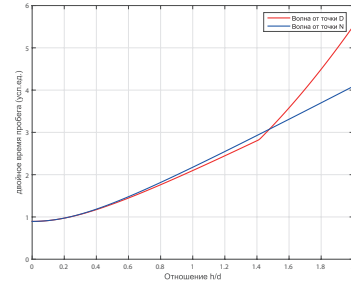


Рис. 8: Наклон границы 45 градусов.

5 Отражение от окружности

5.1 Постановка задачи

Задача поиска точки отражения светового луча на сферическом зеркале (также известная как проблема Альхацена, Dogtie 1965) имеет длинную историю. Как следует из письменных источников впервые данная проблема упомянута в трудах Птолемея [30]. С тех пор в работах различных авторов показано, что задача поиска координат точки отражения при заданном расположении источника и приемника может быть сведена к нахождению корней полиномов четвертой степени (например, в работе [31]).

Исходя из простых геометрических рассуждений и применении принципа наименьшего времени Ферма будет рассмотрен подход к решению данной задачи, позволяющий с использованием итерационной процедуры определить положение точки отражения. Данная задача будет решаться в предположении изотропной, однородной среды с постоянной скоростью и одной отражающей границей в форме окружности с заданными параметрами. Рис. 9 иллюстрирует постановку задачи и схему наблюдений. С учетом геометрии задачи положение точки отражения на окружности может быть параметризовано через параметры окружности:

$$x_r = x_r(x_c, H, R, \theta),$$

где x_c - координата центра окружности, H - глубина залегания центра окружности, R - радиус окружности, θ - полярный угол, задающий положение точки отражения и отсчитываемый по вертикали.

Координаты точек, принадлежащих окружности, связаны между со-

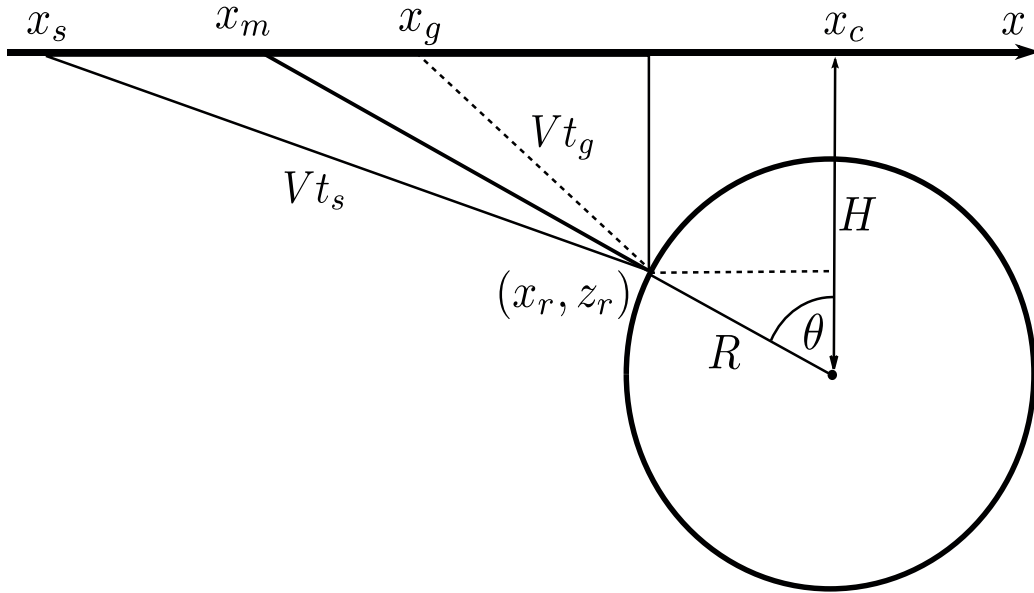


Рис. 9: Схема наблюдений при рассмотрении задачи отражения от окружности.

бой следующим уравнением:

$$(x_r - x_c)^2 + (H - z_r)^2 = R^2 \quad (5.1)$$

Также эту же самую окружность с учетом принятой геометрии наблюдений можно описать параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x_r &= x_c + R \sin(\theta) \\ z_r &= H - R \cos(\theta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Зададим положение источника x_s , приемника x_g и центральной точки

x_m :

$$x_m = \frac{x_s + x_g}{2} \quad (5.3)$$

$$x_s = x_m - h \quad (5.4)$$

$$x_g = x_m + h$$

$$\Delta x_m = x_m - x_0$$

$$\Delta x_c = x_c - x_0,$$

где h - вынос, а x_0 - определяет начало координат. Таким образом, соответствующие расстояния примут вид:

$$(vt_s)^2 = (x_s - x_r)^2 + z_r^2 \quad (5.5)$$

$$(vt_g)^2 = (x_g - x_r)^2 + z_r^2$$

Как и в предыдущих случаях полное время T может быть разделено на два слагаемых:

$$T = t_s + t_g, \quad (5.6)$$

где t_s - время из источника до точки отражения и t_g - время от точки отражения до приемника.

Подставляя представления (5.2) и (5.3) в (5.5) выражения для слагаемых t_s и t_g , определяющих время хода волны в источник и приемник соответственно, могут быть записаны в следующем виде:

$$t_s = \frac{1}{v} \sqrt{(\Delta x_m - h - \Delta x_c - R \sin(\theta))^2 + (H - R \cos(\theta))^2}$$

$$t_g = \frac{1}{v} \sqrt{(\Delta x_m + h - \Delta x_c - R \sin(\theta))^2 + (H - R \cos(\theta))^2}$$

Тогда полное время:

$$T = \frac{1}{v} \left(\sqrt{(\Delta x_m - h - \Delta x_c - R \sin(\theta))^2 + (H - R \cos(\theta))^2} + \sqrt{(\Delta x_m + h - \Delta x_c - R \sin(\theta))^2 + (H - R \cos(\theta))^2} \right) \quad (5.7)$$

Принцип наименьшего времени Ферма требует, чтобы в точке отражения, положение которой задается углом θ , полное время хода было минимальным. Для отыскания этой точки необходимо решить уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (5.8)$$

После подстановки выражения для T и с учетом формул для t_s и t_g это уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{R \sin \theta (H - R \cos \theta) - R \cos \theta (\Delta x_m - h - \Delta x_c - R \sin \theta)}{t_s} + \frac{R \sin \theta (H - R \cos \theta) - R \cos \theta (\Delta x_m + h - \Delta x_c - R \sin \theta)}{t_g} = 0$$

При условии, что $t_s \neq 0$, $t_g \neq 0$ и $\theta \neq \frac{\pi}{2}$:

$$[R \sin \theta (H - R \cos \theta) - R \cos \theta (\Delta x_m - h - \Delta x_c - R \sin \theta)] t_g + [R \sin \theta (H - R \cos \theta) - R \cos \theta (\Delta x_m + h - \Delta x_c - R \sin \theta)] t_s = 0$$

$$[HR \tan \theta - R(\Delta x_m - h - \Delta x_c)] t_g + [HR \tan \theta - R(\Delta x_m + h - \Delta x_c)] t_s = 0$$

При условии, что $R \neq 0$:

$$[H \tan \theta - (\Delta x_m - h - \Delta x_c)] t_g + [H \tan \theta - (\Delta x_m + h - \Delta x_c)] t_s = 0$$

$$H \tan \theta (t_s + t_g) = (\Delta x_m + h - \Delta x_c) t_s + (\Delta x_m - h - \Delta x_c) t_g$$

Приходим к выражению для $\tan \theta$:

$$\tan \theta = \frac{\Delta x_m - \Delta x_c}{H} + \frac{h t_s - t_g}{H t_s + t_g} \quad (5.9)$$

Следует отметить, что несмотря на разделение переменных в этом выражении, оно представляет собой неявную зависимость, поскольку угол θ зависит от времен t_s, t_g и сами времена t_s, t_g зависят от угла θ .

Рассмотрим важный частный случай формулы (5.9) - случай нулевого выноса $h = 0$, т.е. когда источник совпадает с приемником. В данном случае (5.9) становится явным выражением, связывающим угол θ_0 с параметрами задачи:

$$\tan \theta_0 = \frac{\Delta x_m - \Delta x_c}{H} \quad (5.10)$$

Так как $\tan \theta_0$ зависит от координаты центральной точки, которой определяются параметры центрального луча, то представляется возможным для небольших значений $\theta \approx \theta_0$ аппроксимировать выражение (5.9) итерационной формулой, представленной ниже [32]:

$$\tan \theta_n = \tan \theta_0 + \frac{h t_s(\theta_{n-1}) - t_g(\theta_{n-1})}{H t_s(\theta_{n-1}) + t_g(\theta_{n-1})} \quad (5.11)$$

Таким образом, указанная выше рекуррентная формула может быть использована для численного определения угла θ итерационным способом с заранее заданными параметрами точности. Как утверждается в работах [32, 33] справедливо соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta \quad (5.12)$$

С другой стороны, для поиска точки отражения можно применить следующую численную схему:

1. При заданных параметрах наблюдения вычислить значения функции T в зависимости от угла θ : $T = T(\theta|x_c, x_m, H, R)$
2. Численно определить минимальное значение T и значение угла θ при котором оно достигается
3. Прodelать аналогичную операцию для различных параметров задачи

Целью следующего раздела является сравнение результатов работы двух упомянутых ранее процедур нахождения координат точки отражения.

5.2 Численное моделирование и выводы

При заданных параметрах наблюдения определена точка отражения на окружности, которая соответствует минимальному времени хода отраженной волны (5.6). Обозначим эту точку D . Вид функции $T = T(\theta)$ представлен на Рис. 10

Затем с использованием формулы (5.10) определена точка на окружности, соответствующая основанию центрального луча. Обозначим эту точку N .

Далее по формуле (5.7) для двух точек D и N определено полное время прихода отраженной волны T на поверхность наблюдений как функция от выноса h , т.е. получены соответствующие поверхностные годографы для двух типов волн.

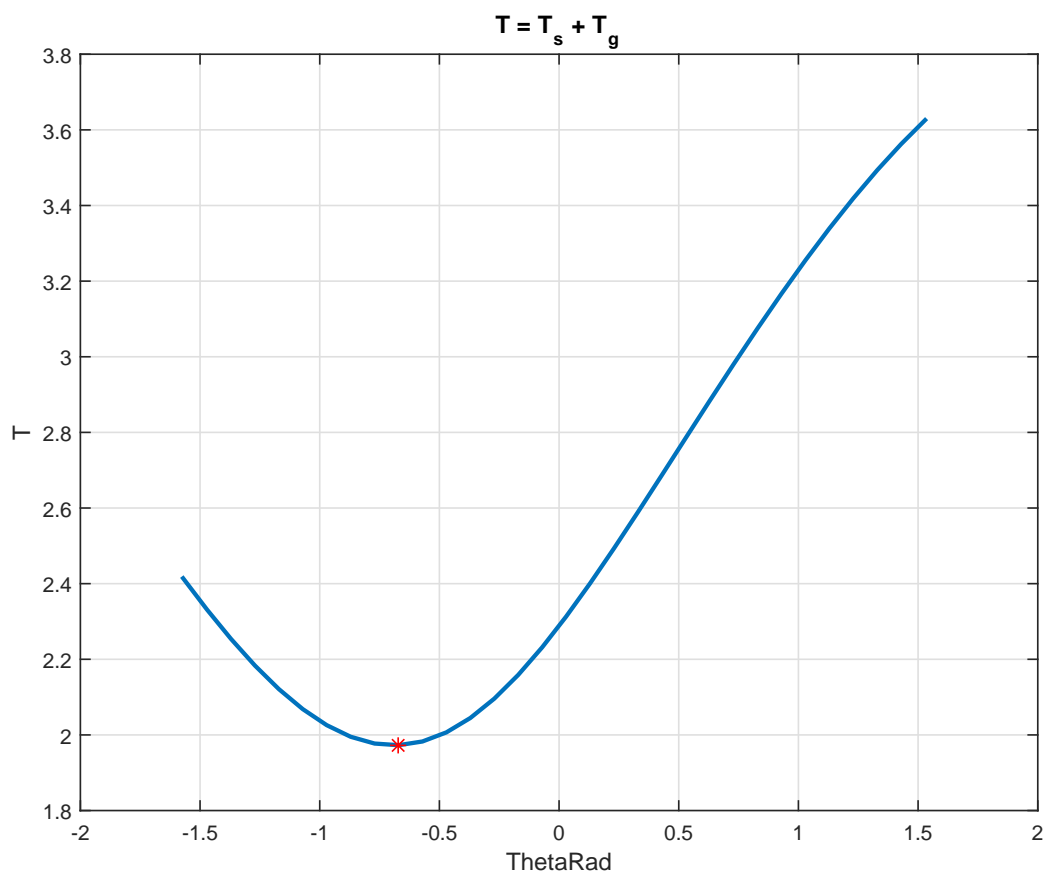


Рис. 10: График зависимости полного времени хода отраженной волны T в зависимости от угла, определяющего положение точки отражения.

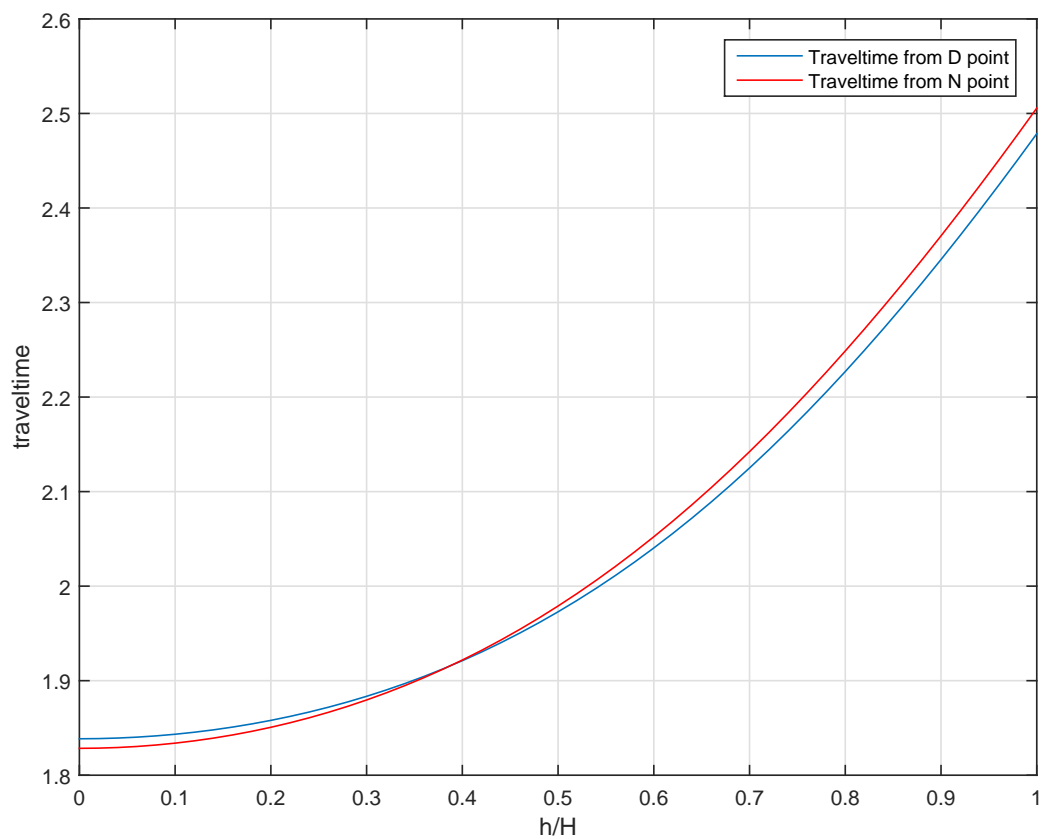


Рис. 11: График зависимости полного времени хода отраженной волны и времени хода фиктивной волны от N точки в зависимости от соотношения вынос/глубина.

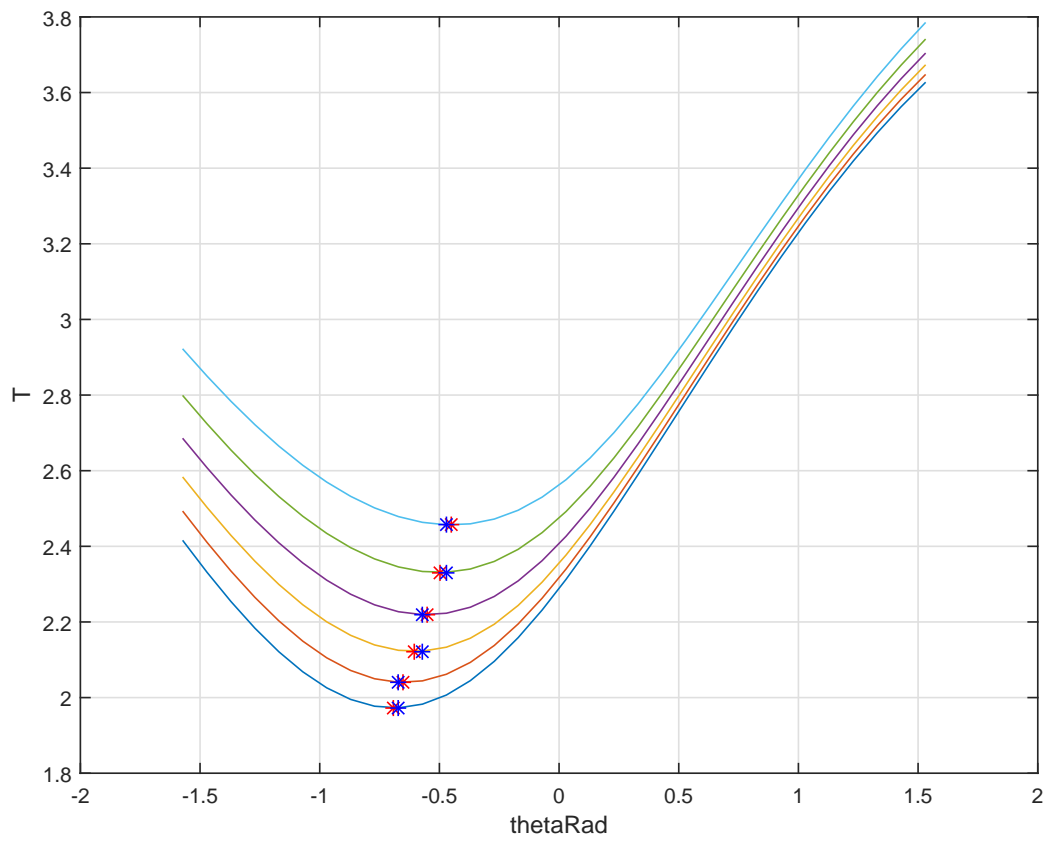


Рис. 12: Графики $T = T(\theta)$ для различных значений выноса.

6 Приложения

6.1 Понятие анизотропии

Рассматриваемая среда называется анизотропной по отношению к выбранному параметру в том случае, если этот параметр меняется в зависимости от направления его измерения. В случае анизотропной упругой среды это означает, что сейсмические волны будут распространяться в различных направлениях с различными скоростями, что приводит к появлению так называемой анизотропии скоростей. Этот вид анизотропии указывает на то, что в рассматриваемой среде существует некоторый структурный порядок масштаба длины волны, возникающий благодаря различным физическим процессам.

Волновое уравнение для произвольно анизотропной, неоднородной среды может быть записано в следующем виде [34, 35]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad (6.1)$$

где ρ - плотность, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ вектор смещения, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ - плотность внешней силы, t - время, x_j - декартовы координаты, τ_{ij} - тензор напряжений.

Для среды с заданной плотностью и известным пространственным распределением внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в уравнение (6.1) входит два неизвестных: поле смещения \mathbf{u} и тензор деформаций τ_{ij} . Таким образом, для решения данного волнового уравнения необходимо определить связь между напряжением и деформацией (или напряжением и смещением). При условии бесконечно малых смещений такая связь между напряжением и деформацией линейна и описывается законом Гука в обобщенном виде:

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}, \quad (6.2)$$

где c_{ijkl} - тензор упругих постоянных, определяющих материальные свойства среды, а e_{kl} - тензор деформаций, который определяется следующим образом:

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (6.3)$$

Подставляя выражение для закона Гука (6.2) и определение для тензора деформаций (6.3) в волновое уравнение (6.1) и предполагая, что упругие параметры практически не меняются по пространству приходим к следующему уравнению движения:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = f_i \quad (6.4)$$

Данное уравнение описывает линейно упругую, произвольно анизотропную, неоднородную (или слабо неоднородную) среду.

6.2 Уравнение Кристоффеля и свойства плоских волн

Для того, чтобы получить аналитические выражения для описания плоских волн в анизотропной среде положим в уравнении (6.4) $\vec{f} = 0$, т.е. перейдем к рассмотрению однородного уравнения.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = 0 \quad (6.5)$$

С физической точки зрения, однородное волновое уравнение описывает среду без источников упругой энергии. В качестве тривиального решения уравнения (6.5) будем использовать гармоническую волну в следующем представлении:

$$u_k = U_k e^{i\omega(n_j x_j / V - t)}, \quad (6.6)$$

где U_k компоненты вектора поляризации \vec{U} , ω круговая частота, V скорость распространения волны (обычно называемая фазовой скоростью) и \vec{n} единичный вектор, ортогональный волновому фронту. Сам волновой фронт определяется уравнением $n_j x_j - Vt = const$.

Подставляя выражение для плоской волны (6.6) в волновое уравнение (6.5) приходим к так называемому уравнению Кристоффеля для фазовой скорости V и вектора поляризации \vec{U} :

$$\begin{pmatrix} G_{11} - \rho V^2 & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} - \rho V^2 & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} - \rho V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.7)$$

Здесь G_{ik} обозначает матрицу Кристоффеля, элементы которой зависят от свойств среды через упругие параметры и направления распространения волны.

$$G_{ik} = c_{ijkl} n_j n_l \quad (6.8)$$

Как следует из известных свойств симметрии тензора упругих параметров:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$$

матрица Кристоффеля является симметричной матрицей $G_{ik} = G_{ki}$. Таким образом, уравнение (6.7) может быть переписано в следующем компактном виде:

$$[G_{ik} - \rho V^2 \delta_{ik}] U_k = 0, \quad (6.9)$$

где δ_{ik} символ Кронекера ($\delta_{ik} = 1$ для $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ для $i \neq k$)

Уравнение Кристоффеля представляет собой стандартную задачу на собственные значения (ρV^2) и собственный вектор \vec{U} . Поскольку матрица G_{ik} является положительно определенной [35], то ее три собственных значения вещественны и положительны. Собственные значения могут быть найдены как решения следующего уравнения:

$$\det[G_{ik} - \rho V^2 \delta_{ik}] = 0 \quad (6.10)$$

Данное выражение приводит к кубическому уравнению на ρV^2 . Для каждого направления \vec{n} в анизотропной среде уравнение Кристоффеля дает три положительных значения скорости V , которые соответствуют P -волне и двум S -волнам. Таким образом, анизотропия разделяет волны сдвига на две моды с различными скоростями и поляризациями.

Если построить график фазовой скорости конкретной волны в зависимости от радиуса-вектора для всех возможных направлений распространения, то мы получим поверхность фазовой скорости. Аналогично, если отложить обратное значение $1/V$ (медленность), то мы получим поверхность медленности форма которой напрямую связана с формой волнового фронта от точечного источника.

После того, как определены собственные значения, могут быть найдены соответствующие собственные вектора \vec{U} для каждой моды. Несмотря на то, что величина каждого собственного вектора определяется с точностью до константы, их направление будет определять поляризацию плоских волн (6.6), распространяющихся в направлении \vec{n} . В случае изотропной среды вектор поляризации либо параллелен вектору медленности (P -волна), либо ортогонален ему (S -волны). Однако, в случае наличия анизотропии, вектор поляризации определяется не только направлением \vec{n} , но и упругими постоянными среды, которые в свою очередь определяют вид матрицы Кристоффеля G_{ik} .

Поскольку, как утверждалось ранее, матрица G_{ik} вещественна и симметрична, то вектора поляризации для трех мод всегда взаимно ортогональны, но ни один из них не обязан быть параллельным или перпендикулярным к вектору \vec{n} . Следовательно, за исключением специфических направлений распространения, в анизотропной упругой среде отсутствуют чисто продольные и поперечные волны. По этой причине, в

присутствии анизотропии, рассмотренные выше моды называются "квази - P " для самой быстрой моды и "квази - S_1 " "квази - S_2 " для более медленных мод.

6.3 Групповая (лучевая) скорость

Вектор групповой (лучевой) скорости определяет направление и скорость распространения энергии и как следствие играет первостепенную роль в кинематических задачах. Различие между фазовой и групповой скоростью может возникать как из-за зависимости скорости от частоты (дисперсия скорости), так и из-за зависимости скорости от направления распространения (анизотропия). Как показано на Рис. 13 вектор групповой скорости в однородной среде направлен по линии от источника к приемнику (определяется углом θ), а вектор фазовой скорости или медленности направлен по нормали к волновому фронту (определяется углом ϕ). Поскольку, в случае анизотропии форма волнового фронта отличается от сферической, то вектора групповой и фазовой скорости в общем случае различаются.

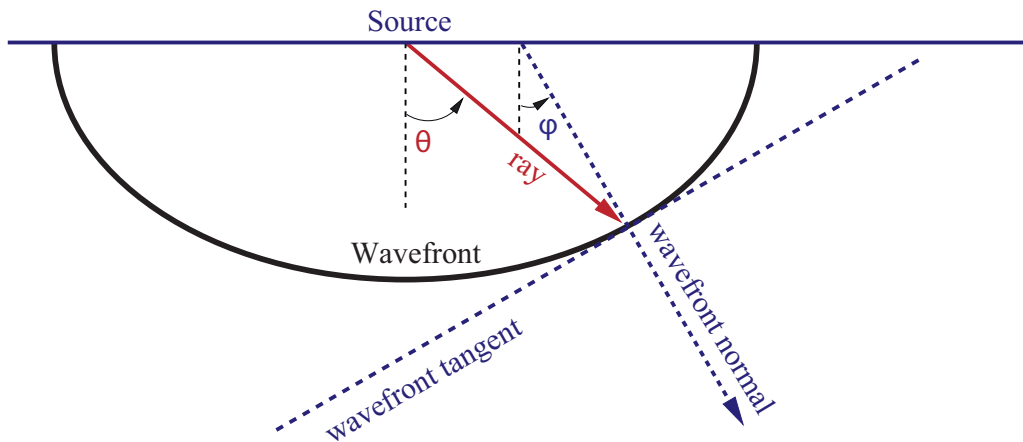


Рис. 13: Изображен вид волнового фронта в случае эллиптической анизотропии и однородной среды, а также вектора фазовой и групповой скорости. Из работы [12].

В отличие от фазовой скорости, которая может быть получена напрямую из уравнения Кристоффеля, групповая скорость зависит от тензора упругих постоянных, вектора поляризации и направления распространения. В наиболее общем виде эту зависимость можно представить как:

$$\xi_j = \frac{1}{\rho V} c_{ijkl} U_i U_k n_l, \quad (6.11)$$

где вектор поляризации \vec{U} нормирован на единицу.

6.4 Анизотропные системы симметрии

Вклад симметрии среды определяется тензором упругих постоянных c_{ijkl} , который входит в волновое уравнение (6.4) и в уравнение Кристоффеля (6.7) через матрицу Кристоффеля (6.8). Таким образом, вид симметрии определяет скорость и поляризацию плоских волн в зависимости от направления распространения.

В общем случае тензор упругих постоянных c_{ijkl} содержит $3^4 = 81$ элемент. Благодаря известным соотношениям симметрии этого тензора [34], а также симметрии тензоров деформации и напряжения число независимых элементов тензора упругих постоянных может быть уменьшено до 21.

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij} \quad (6.12)$$

Используя так называемые обозначения Фойгта тензор c_{ijkl} может быть представлен в виде симметричной матрицы $C_{\alpha\beta}$ размерности 6 x 6 индексы элементов которой определяются по следующим правилам замены индексов:

$$11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6 \quad (6.13)$$

В виду соотношений симметрии (6.12) получившаяся матрица $C_{\alpha\beta}$ будет также симметричной.

Каждая система симметрии определяется специфической структурой тензора упругих постоянных, при этом число независимых элементов тензора будет уменьшаться с ростом степени симметрии.

6.5 Трансверсально-изотропная среда

Подавляющее большинство существующих исследований сейсмической анизотропии выполняется в классе моделей, описываемых в приближении трансверсально изотропной среды, состоящей из плоскости (или плоскостей) изотропии и оси вращательной симметрии. Таким образом, свойства среды, обладающей трансверсальной изотропией, остаются неизменными при повороте на произвольный угол относительно некоторой оси симметрии (например, третьей) и при любом отражении относительно плоскости (плоскости зеркальной симметрии), содержащей эту ось.

С помощью модели трансверсальной изотропии могут быть достаточно хорошо описаны физические свойства пород, слагающих седиментационные бассейны, а также различные типы сланцев [12]. По этой при-

чине данный тип симметрии наиболее распространен при выполнении моделирования распространения упругих волн в сейсморазведке.

Матрица упругих постоянных для случая трансверсально изотропной среды в случае, когда ось симметрии совпадает с вертикальной осью, имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu - p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

В дополнении к параметрам λ и μ изотропной среды, трансверсально-изотропная среда характеризуется еще тремя новыми упругими параметрами l, m, p , введенными таким образом, чтобы переход к случаю изотропии осуществлялся при значениях $l = m = p = 0$. Последнее обстоятельство позволяет упростить сопоставление явлений распространения волн в трансверсально-изотропной и изотропной упругих средах. Также данный выбор удобен при анализе сред со слабо выраженной степенью анизотропии.

6.6 Распространение волн в трансверсально-изотропной среде

Фазовые скорости плоских волн и их поляризации в случае трансверсально-изотропной среды могут быть получены из уравнения Кристоффеля (6.7) для случая тензора упругих постоянных (6.14). Несмотря на то, что вид этого тензора приведен для случая вертикальной трансверсальной изотропии (ось симметрии совпадает с вертикальной осью) ориентация оси симметрии по отношению к системе координат может быть выбрана произвольно, поскольку рассматриваемая среда предполагается однородной.

Выпишем компоненты матрицы Кристоффеля с учетом выражения

(6.14):

$$\begin{aligned}
G_{11} &= c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2 \\
G_{22} &= c_{66}n_1^2 + c_{11}n_2^2 + c_{55}n_3^2 \\
G_{33} &= c_{55}(n_1^2 + n_2^2) + c_{33}n_3^2 \\
G_{12} &= (c_{11} - c_{66})n_1n_2 \\
G_{13} &= (c_{13} + c_{55})n_1n_3 \\
G_{23} &= (c_{13} + c_{55})n_2n_3
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Поскольку, в случае трансверсальной симметрии все плоскости, содержащие ось симметрии эквивалентны, то достаточно рассмотреть распространение волн только в одной вертикальной плоскости. Для этого выберем плоскость ($n_2 = 0$) и подставим выражения для компонент матрицы Кристоффеля (6.15) в уравнение (6.7). Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} c_{11}n_1^2 + c_{55}n_3^2 - \rho V^2 & 0 & (c_{13} + c_{55})n_1n_3 \\ 0 & c_{66}n_1^2 + c_{55}n_3^2 - \rho V^2 & 0 \\ (c_{13} + c_{55})n_1n_3 & 0 & c_{11}n_1^2 + c_{55}n_3^2 - \rho V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{6.16}$$

В плоскости $[x_1, x_3]$: $G_{12} = G_{23} = 0$, следовательно, указанная выше система уравнений разделяется на независимые уравнения, описывающие чисто трансверсальное движение ($U_1 = U_3 = 0$) и движения в плоскости ($U_2 = 0$) соответственно. Фазовая скорость как собственное значение может быть найдена через решение уравнения:

$$\det[G_{ik} - \rho V^2 \delta_{ik}] = 0 \tag{6.17}$$

Выразим единичный вектор нормали \vec{n} через фазовый угол θ с осью симметрии:

$$n_1 = \sin \theta, \quad n_3 = \cos \theta$$

Тогда фазовую скорость для трансверсально-поляризованной моды со следующими значениями вектора поляризации: $U_2 \neq 0, U_1 = U_3 = 0$ можно представить в виде:

$$V_{SH}(\theta) = \sqrt{\frac{c_{66} \sin^2 \theta + c_{55} \cos^2 \theta}{\rho}} \tag{6.18}$$

Уравнение (6.18) есть выражение для скорости SH -волны с вектором поляризации, лежащим в горизонтальной плоскости. Для вертикального распространения ($\theta = 0$) скорость SH -волны равна $\sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}$, а для горизонтального распространения $\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}$. Таким образом, величина скорости будет определяться соотношением упругих параметров c_{55} и c_{66} .

Если отложить медленность (величина, обратно пропорциональная скорости) $1/V_{SH}$ как радиус-вектор в зависимости от угла θ , то как следует из выражения (6.18) будет получена так называемая поверхность медленности, имеющая эллиптическую форму с главными осями вдоль вертикального и горизонтального направлений. Также можно показать [12, 35], что эллиптическая форма поверхности медленности приводит к эллипсоидальному волновому фронту от точечного источника. По этой причине, анизотропия скорости SH -волны в трансверсально изотропной среде называется эллиптической. В тоже время, следует отметить, что анизотропия P - и SV -волн таковой не является.

В свою очередь волны, поляризованные в плоскости ($P - SV$) описываются первым и третьим уравнениями системы (6.16):

$$\begin{pmatrix} c_{11} \sin^2 \theta + c_{55} \cos^2 \theta - \rho V^2 & (c_{13} + c_{55}) \sin \theta \cos \theta \\ (c_{13} + c_{55}) \sin \theta \cos \theta & c_{55} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta - \rho V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.19)$$

Отсюда видно, что фазовые скорости и поляризации P - и SV - волн зависят уже от четырех упругих параметров - c_{11} , c_{33} , c_{55} , c_{13} , пятый параметр c_{66} влияет только на распространение SH -волны.

К сожалению, несмотря на сравнительную простоту уравнения Кристоффеля явные выражения для фазовых скоростей P - и SV - волн в зависимости от произвольного направления распространения описываются достаточно сложно. Поэтому, имеет смысл рассмотреть простейшие частные случаи.

Распространение вдоль оси симметрии $\theta = 0$. В данном случае система (6.19) преобразуется к виду:

$$\begin{pmatrix} c_{55} - \rho V^2 & 0 \\ 0 & c_{33} - \rho V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.20)$$

Одно из решений системы (6.20) соответствует P -волне поляризованной в направлении распространения:

$$\begin{aligned} V_P(\theta = 0) &= \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}} \\ U_1 &= 0, \quad U_3 = 1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

Другое решение соответствует SV - волне с горизонтальной поляризацией в плоскости:

$$\begin{aligned} V_{SV}(\theta = 0) &= \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}} \\ U_1 &= 1, \quad U_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Сравнивая выражения для скоростей SV - и SH - волн можно заметить их количественное совпадение, что является причиной возникновения так называемой сингулярности волн сдвига (shear-wave singularity) в направлении оси симметрии [12]. Несмотря на то, что собственные значения (скорости) для SV - и SH - волн равны из этого не следует, что будут совпадать вектора их поляризаций. Можно показать [?], что вектора поляризации этих волн могут иметь любое направление в горизонтальное плоскости.

Распространение в плоскости изотропии ($\theta = 90^\circ$). В этой плоскости система уравнений (6.19) приводит к следующим значениям скоростей:

$$\begin{aligned} V_P(\theta = 90^\circ) &= \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} \\ U_1 &= 1, \quad U_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} V_{SV}(\theta = 90^\circ) &= \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}} \\ U_1 &= 0, \quad U_3 = 1 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ввиду наличия оси симметрии вращения уравнения (6.23) и (6.24) верны для произвольно выбранного горизонтального направления распространения.

Важно отметить следующее - несмотря на то, что скорости каждой моды в плоскости изотропии не зависят от направления, как следует из уравнений выше, SV - и SH -волны будут распространяться с различной скоростью, что и является причиной известного расщепления волн сдвига на две моды (shear-wave splitting) в присутствии анизотропии.

7 Заключение

В ходе выполнения данной работы исследовалась применимость NIP теоремы к задачам аппроксимации поверхностного годографа отраженной волны как для различных типов границ: двумерная плоская и криволинейная (аппроксимация окружностью), так и различных типов однородных сред: изотропная и анизотропная, описываемая моделью трансверсально - изотропной среды (Vertical Transverse Isotropy, VTI). Выбор этой модели обусловлен тем, что широко распространенные в природе осадочные породы, сложенные чередованием слоев с различными упругими свойствами, проявляют заметную анизотропию, которая достаточно хорошо описывается именно в этом классе моделей.

На основании полученных в работе результатов можно сделать вывод, что аппроксимация годографа отраженной волны фиктивной волной распространяющейся от основания центрального луча как от источника, может быть использована с достаточной степенью точности для плоских двумерных отражающих границ как в изотропном случае, так и в случае эллиптической анизотропии. С целью количественно оценить применимость этого подхода было выполнено численное моделирование времен прихода отраженных волн для случая SH -волны и плоской двумерной отражающей границы с известной глубиной залегания и углом падения. Проведено сравнение времен прихода фиктивной волны, распространяющейся от точки N (основание центрального луча) как от источника и волны, пробегающей по траектории источник – точка отражения D – приемник при различных значениях угла залегания отражающей границы и соотношениях h/d . Результаты моделирования позволяют утверждать, что предлагаемая аппроксимация годографа отраженной волны может быть использована с достаточной степенью точности в диапазоне соотношений вынос/глубина от 0 до 1.5 ед.

С целью обобщения данного метода на случай криволинейных отражающих границ решалась задача по определению времен прихода отраженных от окружности волн, поскольку криволинейная отражающая граница может быть локально аппроксимирована соприкасающейся окружностью с конечным радиусом кривизны. В результате этой работы предложен итерационный метод, позволяющий аппроксимировать время хода отраженной волны используя параметры центрального луча в качестве начального приближения. Для проверки применимости данного подхода было выполнено численное моделирование, из результатов которого следует, что данный метод демонстрирует хорошую точность и сходимость, а также может быть достаточно эффективно реализован в виде вычислительного алгоритма.

Наряду с этим, одним из важных преимуществ предлагаемого подхода является то, что он позволяет перейти к рассмотрению одной фиктивной волны от мнимого источника на границе вместо описания достаточно сложного процесса взаимодействия падающей волны с границей (эффекты дифракции, преломления и др.)

Сказанное выше позволяет утверждать, что предложенный подход может быть использован с достаточной степенью точности для аппроксимации поверхностных голографов отраженных волн как для различных типов границ (плоских и криволинейных), так и для различных типов сред: изотропных и анизотропных.

В заключении хочу поблагодарить своего научного руководителя, профессора кафедры физики Земли СПбГУ, заведующего Лабораторией динамики упругих сред Каштана Бориса Марковича за неоценимую помощь при подготовке данной работы, а также аспиранта кафедры физики Земли СПбГУ Павла Знака за ценные консультации и предложения.

Список литературы

- [1] Мешбей В. И. Сейсморазведка методом общей глубинной точки. М., "Недра 1973.
- [2] Dix С.Н., 1955. Seismic velocities from surface measurements. *Geophysics*, 20, 68-86.
- [3] Irvine B., Townsend D. How to evaluate stacking velocities. - "Oil and Gas Journal 1971, vol. 69, No. 7
- [4] Tsvankin I. and Thomsen L., 1994. Nonhyperbolic reflection moveout in anisotropic media. *Geophysics*, 59, 1290-1304.
- [5] Alkhalifah T., 1997. Velocity analysis using nonhyperbolic moveout in transversely isotropic media. *Geophysics*, 62, 1839-1854.
- [6] Alkhalifah T., 2000. The offset-midpoint traveltime pyramid in transversely isotropic media. *Geophysics*, 65, 1316-1325.
- [7] Pech A., Tsvankin I. and Grechka V., 2003. Quartic moveout coefficient: 3D description and application to tilted TI media. *Geophysics*, 68, 1600-1610.
- [8] Pech A., Tsvankin I. and Grechka V., 2004. Quartic moveout coefficient for a dipping azimuthally anisotropic layer. *Geophysics*, 69, 699-707.
- [9] Fomel S., 2004. On anelliptic approximations for qP velocities in VTI media. *Geophys. Prospect.*, 52, 247-259.
- [10] Ursin B. and Stovas A., 2006. Traveltime approximations for a layered transversely isotropic medium. *Geophysics*, 71, D23-D33.
- [11] Sayers C.M. and Ebrom D.A., 1997. Seismic traveltime analysis for azimuthally anisotropic media: Theory and experiment. *Geophysics*, 62, 1570-1582.
- [12] Tsvankin I., 2001. *Seismic Signatures and Analysis of Reflection Data in Anisotropic Media*. Elsevier Science Publ., Amsterdam, The Netherlands.
- [13] Cerveny, V. (2001). *Seismic ray theory*. Cambridge University Press.
- [14] M. Tygel and L.T. Santos, 2007, Quadratic normal moveouts of symmetric reflections in elastic media: A quick tutorial. *Studia Geophysica et Geodaetica* 51 (1), 185-206

- [15] Taner M.T. and Koehler F., 1969. Velocity spectra - digital computer derivation and applications of velocity functions. *Geophysics*, 34, 859-881.
- [16] Al-Chalabi M., 1973. Series approximation in velocity and traveltime computations. *Geophys. Prospect.*, 21, 783-795.
- [17] Tsvankin I. and Thomsen L., 1994. Nonhyperbolic reflection moveout in anisotropic media. *Geophysics*, 59, 1290-1304.
- [18] Tygel M., Müller T., Hubral P. and Schleicher J., 1997. Eigenwave based multiparameter traveltime expansions. *SEG Expanded Abstracts*, 16, 1770-1773.
- [19] Бондарев В.И., 2003. Основы сейсморазведки. Екатеринбург: Издательство УГГГА.
- [20] Шпеерсон М.Б. Особенности годографов отраженных волн в методе общей глубинной точки при негоризонтальных границах раздела. — В кн.: Разведочная геофизика, вып. 53. М., «Недра», 1972.
- [21] Боганик Г.Н., Гурвич И.И., 2006. Сейсморазведка. Тверь: Издательство АИС
- [22] Черняк В. С, Гриценко С. А. Интерпретация эффективных параметров ОЦТ для пространственной системы однородных слоев с криволинейными границами.— *Геол. и геофиз.*, 1979, № 12
- [23] Hubral, P., and T. Krey, 1980, Interval velocities from seismic reflection time measurements: SEG.
- [24] Hubral, P., 1983, Computing true amplitude reflections in a laterally inhomogeneous earth: *Geophysics*, 48, 1051-1062.
- [25] Fomel S. and Grechka V., 2013, Nonhyperbolic reflection moveout of P-waves: An overview and comparison of reasons: *Center for Wave Phenomena*, 2013
- [26] Fomel, S., 1994, Recurrent formulas for derivatives of a CMP traveltime curve: *Russian Geology and Geophysics*, 35, 118-126.
- [27] Benjamin Schwarz, Claudia Vanelle, Dirk Gajewski, and Boris Kashtan, 2014, Curvatures and inhomogeneities: An improved common-reflection-surface approach: *GEOPHYSICS, VOL. 79, NO. 5*

- [28] Höcht, G., E. de Bazelaire, P. Majer, and P. Hubral, 1999, Seismics and optics: Hyperbolae and curvatures: *Journal of Applied Geophysics*, 42, 261–281
- [29] Landa, E., S. Keydar, and T. J. Moser, 2010, Multifocusing revisited: Inhomogeneous media and curved interfaces: *Geophysical Prospecting*, 58, 925–938
- [30] Neumann, P. M., 1998, Reflections on reflection in a spherical mirror: *American Mathematical Monthly*, 105, 523–528
- [31] Drexler, M., and M. J. Gander, 1998, Circular billiard: *SIAM Review*, 40, 315–323
- [32] Vanelle, C., M. Bobsin, P. Schemmert, B. Kashtan, and D. Gajewski, 2012, i-CRS: A new multiparameter stacking operator for anisotropic media: 82nd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts
- [33] Schwarz, B., C. Vanelle, B. Kashtan, and D. Gajewski, 2012, i-CRS: Application of a new multi-parameter stacking approach to complex media: 82nd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts
- [34] Aki, K. and Richards, P.G., 1980, *Quantitative seismology*. W.N. Freeman and Co.
- [35] Каштан Б.М. Основы теории распространения волн в анизотропных упругих средах. Издательство СПбГУ, 1996.