Санкт-Петербургский Государственный Университет

Чугунов Евгений Сергеевич

Методы решения задач управления запасами в случае нескольких поставщиков и продавцов.

05.13.15 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук,

профессор Захаров В.В.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение

Оптимизация процессов, будь то, оптимизация личных расходов или планирование технологических цепочек на производстве, является неотъемлемой частью в жизни практически любого человека в современном мире. Она подвергается постоянному изучению со стороны математиков, экономистов и программистов. Появляются новые постановки задач, математические модели и методы их решения, которые внедряются на производствах.

Одной из ключевых составляющих производственной оптимизации является логистика [13, 14], которая включает в себя:

- выбор поставщиков;
- выбор складов для хранения;
- выбор количества партий от поставщиков;
- выбор периодичности поставок;
- выбор маршрутов;
- выбор количества транспортных средств;
- и т.д.

Первые четыре пункта можно описать с помощью задач управления запасами.

Впервые задачу данного класса сформулировал Ф. Харрис в 1915 году [35]. Он предложил описание самой простой задачи управления запасами при детерминированном спросе. Позднее Р. Уилсон, введя термин «точка повторного заказа» [41], предложил формулу определения оптимального размера заказа при детерминированном спросе на один вид товаров. Данная формула получила название «формула Харриса-Уилсона» и легла в основу большого количества методов решения различных математических моделей задач управления запасами. После них Т. Уайтин опубликовал математическую модель для задачи управления запасами в случае стохастического спроса [23]. Также можно выделить ряд ученых, внесших значительный вклад в развитие методов решения задач управления запасами: Дж. Букан и Э. Кенисберг [1], Г. Б. Рубальский [18], Ю. А. Рыжиков [19], Ф. Хэнссменн [25], Хакс и Канди [36].

На данный момент задачи управления запасами можно классифицировать по следующим признакам [4, 9, 19, 1820, 21]:

- Способ пополнения запасов (релаксационный / двухуровневый / периодический);
- Количество товаров в партиях (один / несколько);
- Допустимость дефицита товаров у продавцов (есть / нет);
- Ограничение на количество товаров у поставщиков (есть / нет);
- Наличие скидок у поставщиков (есть / нет);
- Потребительский спрос у продавцов (детерминированный / стохастический);
- Количество складов у продавцов или поставщиков (один / несколько);
- Временные окна на поставку товаров продавцу (есть / нет);
- Пополнение запаса продавца (равномерно / мгновенно);
- Зависимость функции спроса (от цен / от общего объема товаров).

В рамках математических формулировок задачи управления запасами рассматривают как:

- Игровые модели (ценовая / количественная конкуренция продавцов / поставщиков) [2, 27, 28, 34, 38, 39, 40];
- Модели с различным видом спроса (стохастический / детерминированный, коррелированный / некоррелированный) [6, 11, 12, 18, 31];
- Динамические сетевые модели [8, 10, 22, 26];
- Модели с неопределённостью [3, 16, 25].

Для решения математических моделей управления запасами используются как точные методы [5, 7, 15, 17], так и эвристические [29, 30, 31, 33].

Проведенный анализ научной литературы показал, что ученые прикладывают много усилий для развития методов и технологий решения задач управления запасами, описано большое количество различных математических моделей и методов их решения для данного класса задач.

Но есть и мало изученные ситуации в задачах управления запасами, например, наличие нескольких поставщиков с ограниченным количеством товаров. В этом случае основной сложностью является оптимальный выбор поставщика определенного вида товаров для каждого продавца с учетом различных дополнительных условий (дефицит товаров, скидки, однономенклатурные и многономенклатурные партии). Данный класс задач вызывает особый интерес для исследователей, так как максимально приближен к реальному экономическому миру.

Настоящая выпускная квалификационная работа посвящена рассмотрению задач управления запасами данного типа (несколько поставщиков и продавцов) и состоит из введения, основного текста, заключения и списка литературы. Основной текст состоит из двух глав.

В первой главе рассматривается 6 математических моделей и методы их решения для задач управления запасами с детерминированным потребительским спросом у продавцов при наличии нескольких поставщиков (с ограниченным количеством товаров) и дополнительными условиями:

- Количество товаров партии от поставщика к продавцу (один / несколько);
- Допустимость дефицита товаров у продавцов (есть / нет);
- Наличие скидок на закупочную стоимость товаров у поставщиков (есть / нет);
- Наличие ценовой конкуренции между продавцами.

Для случаев с одним продавцом описаны альтернативные методы поиска оптимального решения.

Во второй главе приведены технические характеристики компьютерной программы, в которой были реализованы предложенные в первой главе методы решения математических моделей задач управления запасами. Также в данной главе приведено несколько численных примеров, подтверждающих работоспособность компьютерной программы.

Глава I. Методы решения задачи управления запасами

В данной главе рассматриваются математические модели и методы их решения для задач управления запасами в случае нескольких поставщиков и продавцов при детерминированном потребительском спросе и ценовой конкуренции продавцов.

§1. Постановка задачи

На рынке есть продавцов, которые заказывают у поставщиков товары различных видов в течение периода планирования .

Для каждого поставщика () известно:

- $\geq$ количество товаров вида , которые хранятся на его складе;
- $\geq$ цена, по которой поставщик будет продавать товар вида ;
- $\geq$ стоимость оформления заказа у поставщика на товар вида продавцом .

Общий объем поставок товаров вида () для продавца зависит от цен, по которым данные товары будут продавать все продавцы: , где $\geq$ цена, по которой продавец будет продавать товары вида . $\geq$ вектор цен на товары, которые устанавливает продавец .

Будем считать, что функция спроса является непрерывно дифференцируемой по .

Партии, которыми поставщики доставляют товары продавцам, могут быть однономенклатурными или многономенклатурными, на закупочную стоимость товаров у поставщиков могут предоставляться скидки, а также продавцы могут допускать дефицит товаров, который учитывается в виде денежных штрафов.

Будем считать, что все продавцы устанавливают цены на товары независимо друг от друга. Таким образом, случай кооперации продавцов не рассматривается.

Основной целью данной задачи является максимизация прибыли каждого продавца по отдельности.

§2. Однономенклатурная модель без учета дефицита товаров и скидок на них

Рассмотрим ситуацию, когда каждый из продавцов оформляет однономенклатурные заказы на различных видов товаров у поставщиков без учета дефицита и скидок на их закупочную стоимость в течение периода планирования .

В данном случае задача управления запасами решается для каждого товара в отдельности, т.к. поставщики доставляют товары продавцам однономенклатурными партиями. В данной задаче необходимо определить:

- цену , по которой продавец будет продавать товары вида ;
- $\geq$ потребительский спрос у продавца на товары вида ;
- количество партий с товарами вида от поставщика продавцу ;
- долю от спроса на товары вида , которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования .

Количество товаров вида , доставляемых в одной партии поставщиком для продавца можно получить из формулы:

,

, , . (1)

Если поставщик не доставляет товары продавцу, то .

В данной модели необходимо учесть ряд ограничений:

- количество партий с товарами вида от поставщика к продавцу должно быть не отрицательным:

,

, , . (2)

- Доля от спроса на товары вида , которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования , не может быть отрицательной:

,

, , . (3)

- Для поставщика количество заказанных всеми продавцами товаров вида не должно быть больше количества товаров вида имеющихся у данного поставщика

,

, . (4)

- Для продавца общее количество заказанных товаров вида у всех поставщиков должно равняться его спросу на данный вид товаров:

,

, . (5)

Функция издержек продавца на оформление заказов от всех поставщиков и хранение товаров на своем складе может быть выражена как:

(6)

.

где - стоимость оформления однономенклатурной партии для продавца и поставщика на товары вида .

Функция прибыли продавца может быть выражена как:

(7)

.

Необходимо максимизировать функции прибыли всех продавцов:

(8)

,

,

для этого воспользуемся теоремой Куна≥ Таккера [37].

Обозначим область допустимых значений для продавца как :

,

(9)

.

Если ограничения-неравенства (2), (3) или (4) в некоторой точке обращаются в равенства, то данные ограничения называют активными в данной точке, а совокупность всех таких индексов – множеством индексов активных ограничений.

Введем также дополнительные обозначения:

, , , ; (10)

, ; (11)

, , , ; (12)

, ; (13)

, , , ; (14)

, ; (15)

, , . (16)

Утверждение 1. Пусть и градиенты , , , при , , , , , образуют линейно независимую систему векторов. Тогда для того, чтобы точки были решением задачи (8), согласно теореме Куна≥ Таккера [37], необходимо, чтобы нашлись , , и произвольного знака, такие что

(17)

Систему (17) можно переписать как:

(18)

Определив частные производные получим:

(19)

Таким образом, нам необходимо решить систему:

(20)

Для каждого набора , , существует 2 варианта:

1.

2.

Всего будет варианта значений , и . Среди которых нужно выбрать вариант, обеспечивающий максимум функции прибыли продавца (7).

При этом не рассматривается случай, когда поставщики не доставляют продавцу товары, т.е. и при , , .

Поскольку задача (8) является NP-полной, ее невозможно решить точным алгоритмом за полиномиальное время. Поэтому для решения системы (20) можно использовать различные эвристические алгоритмы.

В качестве начального допустимого решения можно взять случай, когда первый поставщик отвозит все имеющиеся у него товары за одну партию, если при этом спрос продавца на какой-то вид товаров останется неудовлетворенным, то недостающий объем товаров будет доставлен продавцу следующим за первым продавцом и т.д.

После использования эвристического алгоритма мы получим приближенное к оптимальному решение.

2.1. Один продавец

В случае участия только одного продавца () можно воспользоваться альтернативным подходом для решения задачи управления запасами.

При этом задача будет решаться для каждого товара по отдельности, т.е. для товаров вида необходимо определить

- цену , по которой продавец будет продавать данный товар;
- $\geq$ потребительский спрос у продавца на данный товар;
- количество товаров вида в одной партии от поставщика .

При заказе товаров вида у поставщика функция издержек продавца будет иметь вид:

. (21)

Функция прибыли продавца от продажи товаров вида , купленных у поставщика , может быть выражена как:

(22)

.

Данную задачу можно решить в 2 этапа.

1. решается задача минимизации функции издержек продавца:

. (23)

Для решения данной задачи можно использовать формулу Харриса-Уилсона [66]:

. (24)

Подставив полученное значение в функцию прибыли, получим:

(25)

.

2. решается задача максимизации функции прибыли относительно :

. (26)

Если функция спроса - непрерывна и дифференцируема по , то и функция прибыли будет также непрерывной и дифференцируемой по . Таким образом, найти оптимальное значение можно из уравнения:

. (27)

Подставив найденное оптимальное значение в (24), (21) и (22), можно найти оптимальные значения , значения функций издержек и прибыли продавца от продажи товаров вида , купленных у поставщика .

После определения значений функций прибыли от продажи товаров вида , купленных у различных поставщиков, необходимо выбрать одного поставщика , который обеспечит продавцу максимальную прибыль:

. (28)

Если , то продавец купит товары вида у поставщика в полном объеме и получит максимальную прибыль от продажи товаров вида при , и . При этом задача управления запасами продавца относительно товаров вида будет решена.

Если , то поставщик не сможет полностью удовлетворить спрос продавца, и процесс оптимизации запасов продавца продолжится.

Количество поставок и объем партий товаров вида от поставщика изменится, т.к. продавец закупит у данного поставщика только штук данного товара.

Объем каждой партии при условии покупки фиксированного количества товаров можно найти по формуле:

. (29)

Функция издержек, при этом изменит свое значение, т.к. продавец купит у поставщика товары вида в меньшем объеме

(30)

При этом продавцу необходимо определить: у кого из оставшихся поставщиков ему выгоднее докупить недостающий объем товаров вида .

Для каждого поставщика (кроме поставщика) определяется - количество товаров вида , которые будут доставлены в одной партии, а также - суммарные затраты продавца на покупку и хранение товаров в фиксированном объеме :

,

, (31)

Среди всех поставщиков выбирается поставщик , обеспечивающий продавцу минимальные расходы на покупку и хранение товаров вида в объеме :

(32)

Если , то поставщики и полностью покроют спрос продавца на товары вида .

При этом прибыль продавца уменьшится за счет дополнительных расходов на покупку недостающего объема товаров вида у поставщика :

(33)

Если , т.е. поставщик не сможет полностью покрыть недостающий спрос продавца на товары вида , то процесс выбора поставщиков продолжится, но уже для фиксированного объема спроса и из множества поставщиков .

Процесс выбора поставщиков будет продолжаться до тех пор, пока спрос продавца не будет полностью покрыт:

,   (34)

где ≥ множество выбранных поставщиков, которые будут доставлять продавцу товары вида .

В данном случае прибыль продавца также уменьшится за счет расходов на покупку товаров вида у нескольких поставщиков:

.   (35)

Пусть ≥ последний поставщик, который полностью покрывает спрос продавца на товары вида :

(36)

После определения поставщиков, которые будут доставлять продавцу товары вида , и пересчета значения функции прибыли продавца от продажи данных товаров необходимо проверить условие:

(37)

Если данное условие выполнено, то прибыль продавца по-прежнему является самой большой из всех возможных вариантов, и задача управления запасами продавца относительно товаров вида является решенной.

Если условие (36) не выполнено, то это означает, что существует продавец , который обеспечит продавцу прибыль большую, чем . В данном случае выбирается поставщик и повторяется процесс проверки условия. Что данный поставщик полностью покроет спрос продавца:

(38)

Задача управления запасами продавца относительно товаров вида будет считаться решенной, когда функция прибыли с учетом затрат на покупку товаров у выбранных поставщиков будет являться максимальной из всех возможных. При этом и .

§3. Многономенклатурная модель без учета дефицита товаров и скидок на них

Рассмотрим ситуацию, когда каждый из продавцов оформляет многономенклатурные заказы на различных видов товаров у поставщиков без учета дефицита и скидок на их закупочную стоимость в течение периода планирования .

В данном случае задача управления запасами решается для всех видов товаров вместе, т.к. поставщики доставляют товары продавцам многономенклатурными партиями. В данной задаче необходимо определить:

- цену , по которой продавец будет продавать товары вида ;
- - потребительский спрос у продавца на товары вида ;
- количество партий от поставщика продавцу ;
- долю от спроса на товары вида , которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования .

Количество товаров вида , доставляемых в одной партии поставщиком для продавца можно получить из формулы:

, (39)

, , .

Если поставщик не доставляет товары продавцу, то .

В данной модели необходимо учесть ряд ограничений:

- количество партий от поставщика к продавцу должно быть не отрицательным:

, (40)

, .

- Доля от спроса на товары вида , которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования , не может быть отрицательной:

,
, , . (41)

- Для поставщика количество заказанных всеми продавцами товаров вида не должно быть больше количества товаров вида имеющихся у данного поставщика

,
, . (42)

- Для продавца общее количество заказанных товаров вида у всех поставщиков должно равняться его спросу на данный вид товаров:

,
, . (43)

Функция издержек продавца на оформление заказов от всех поставщиков и хранение товаров на своем складе может быть выражена как:

(44)
.

где - стоимость оформления многономенклатурной партии для продавца и поставщика .

Функция прибыли продавца может быть выражена как:

(45)
.

Необходимо максимизировать функции прибыли всех продавцов

(46)
,
,

для этого воспользуемся теоремой Куна≥ Таккера [37].

Обозначим область допустимых значений для продавца как :

,
. (47)

Если ограничения-неравенства (40), (41) или (42) в некоторой точке обращаются в равенства, то данные ограничения называют активными в данной точке, а совокупность всех таких индексов – множеством индексов активных ограничений.

Введем также дополнительные обозначения:

, , ; (48)

, ; (49)

, , , ; (50)

, ; (51)

, , , ; (52)

, ; (53)

, , . (54)

Утверждение 2. Пусть и градиенты , , , при , , , , , образуют линейно независимую систему векторов. Тогда для того, чтобы точки были решением задачи (28), согласно теореме Куна≥ Таккера [37], необходимо, чтобы нашлись , , и произвольного знака, такие что

(55)

Систему (55) можно переписать как:

(56)

Определив частные производные получим:

(57)

Таким образом, нам необходимо решить систему:

(58)

Для каждого набора , , существует 2 варианта:

1.

2.

Всего будет варианта значений , и . Среди которых нужно выбрать вариант, обеспечивающий максимум функции прибыли продавца (45).

При этом не рассматривается случай, когда поставщики не доставляют продавцу товары, т.е. и при , , .

Поскольку задача (46) является NP-полной, ее невозможно решить точным алгоритмом за полиномиальное время. Поэтому для решения системы (58) можно использовать различные эвристические алгоритмы.

В качестве начального допустимого решения можно взять случай, когда первый поставщик отвозит все имеющиеся у него товары за одну партию, если при этом спрос продавца на кокой-то вид товаров останется неудовлетворенным, то недостающий объем товаров будет доставлен продавцу следующим за первым продавцом и т.д.

После использования эвристического алгоритма мы получим приближенное к оптимальному решение.

§4. Однономенклатурная модель с дефицитом товаров

Рассмотрим ситуацию, когда каждый из продавцов оформляет однономенклатурные заказы на различных видов товаров у с учетом возможного дефицита товаров в течение периода планирования .

В данном случае задача управления запасами решается для каждого товара в отдельности, т.к. поставщики доставляют товары продавцам однономенклатурными партиями. В данной задаче необходимо определить:

- цену , по которой продавец будет продавать товары вида ;
- $\geq$ потребительский спрос у продавца на товары вида ;
- количество партий с товарами вида от поставщика продавцу ;
- долю от спроса на товары вида , которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования .
- допустимый уровень дефицита товаров вида у продавца .

Количество товаров вида , доставляемых в одной партии поставщиком для продавца можно получить из формулы:

, (59)
, , .

Если поставщик не доставляет товары продавцу, то .

В данной модели необходимо учесть ряд ограничений:

- количество партий с товарами вида от поставщика к продавцу должно быть не отрицательным:

, (60)
, , .

- Доля от потребительского спроса на товары вида , которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования , не может быть отрицательной:

, (61)
, , .

- Для поставщика количество заказанных всеми продавцами товаров вида не должно быть больше количества товаров вида имеющихся у данного поставщика

,

, .   (62)

- Для продавца общее количество заказанных товаров вида у всех поставщиков должно равняться его спросу на данный вид товаров:

,

, .   (63)

- Дефицит товаров вида у продавца должен быть не отрицательным:

,

, .   (64)

Функция издержек продавца на оформление заказов от всех поставщиков и хранение товаров на своем складе может быть выражена как:

(65)

.

где - стоимость оформления однономенклатурной партии для продавца и поставщика на товары вида .

Функция прибыли продавца может быть выражена как:

(66)

.

Необходимо максимизировать функции прибыли всех продавцов

(67)

,

,

для этого воспользуемся теоремой Куна≥ Таккера [37].

Обозначим область допустимых значений для продавца как :

(68)

,

.

Если ограничения-неравенства (60), (61), (62), (64) в некоторой точке обращаются в равенства, то данные ограничения называют активными в данной точке, а совокупность всех таких индексов – множеством индексов активных ограничений.

Введем также дополнительные обозначения:

, , , ; (69)

, ; (70)

, , , ; (71)

, ; (72)

, , , ; (73)

, ; (74)

, , ; (75)

, , ; (76)

, . (77)

Утверждение 3. Пусть и градиенты , , , , при , , , , , , образуют линейно независимую систему векторов. Тогда для того, чтобы точки были решением задачи (59), согласно теореме Куна≥ Таккера [37], необходимо, чтобы нашлись , , , и произвольного знака, такие что

(78)

Систему (78) можно переписать как:

(79)

Определив частные производные получим:

(80)

Для каждого набора , , существует 2 варианта:

1.

2.

Всего будет варианта значений , , и . Среди которых нужно выбрать вариант, обеспечивающий максимум функции прибыли продавца (66).

При этом не рассматривается случай, когда поставщики не доставляют продавцу товары, т.е. и при , , .

Поскольку задача (67) является NP-полной, ее невозможно решить точным алгоритмом за полиномиальное время. Поэтому для решения системы (81) можно использовать различные эвристические алгоритмы.

В качестве начального допустимого решения можно взять случай, когда первый поставщик отвозит все имеющиеся у него товары за одну партию, если при этом спрос продавца на какой-то вид товаров останется неудовлетворенным, то недостающий объем товаров будет доставлен продавцу следующим за первым продавцом и т.д.

После использования эвристического алгоритма мы получим приближенное к оптимальному решение.

4.1. Один продавец

В случае участия только одного продавца () можно воспользоваться альтернативным подходом для решения задачи управления запасами.

При этом задача будет решаться для каждого товара по отдельности, т.е. для товаров вида необходимо определить

- цену , по которой продавец будет продавать данный товар;
- $\geq$ потребительский спрос у продавца на данный товар;
- количество товаров вида в одной партии от поставщика ;
- допустимый уровень дефицита товаров вида у продавца.

При заказе товаров вида у поставщика функция издержек продавца будет иметь вид:

. (81)

Функция прибыли продавца от продажи товаров вида , купленных у поставщика , может быть выражена как:

(82)

.

Данную задачу можно решить в 2 этапа.

1. решается задача минимизации функции издержек продавца:

.

(83)

.

Если функция спроса - непрерывна и дифференцируема по , то и функция издержек будет также непрерывной и дифференцируемой по . Решив систему уравнений:

,

(84)

,

получим:

, (85)

.

Подставив полученные значение и в функцию прибыли, получим:

(86)

.

2. решается задача максимизации функции прибыли относительно :

(87)

.

Если функция спроса - непрерывна и дифференцируема по , то и функция прибыли будет также непрерывной и дифференцируемой по . Таким образом, найти оптимальное значение можно из уравнения:

(88)

,

Подставив найденное оптимальное значение в (85), (81) и (82), можно найти оптимальные значения и , значения функций издержек и прибыли продавца от продажи товаров вида , купленных у поставщика .

После определения значений функций прибыли от продажи товаров вида , купленных у различных поставщиков, необходимо выбрать одного поставщика , который обеспечит продавцу максимальную прибыль:

. (89)

Если , то продавец купит товары вида у поставщика в полном объеме и получит максимальную прибыль от продажи данного товара . При этом задача управления запасами продавца относительно товаров вида будет решена.

Если , то поставщик не сможет полностью удовлетворить спрос продавца, и процесс оптимизации запасов продавца продолжится.

В данном случае выбор множества поставщиков, которые будут доставлять продавцу товары вида , определяются аналогичным образом, как в однономенклатурной модели без учета дефицита товаров, описанной в пункте 2.1. данной главы.

§5. Многономенклатурная модель с дефицитом товаров

Рассмотрим ситуацию, когда каждый из продавцов оформляет многономенклатурные заказы на различных видов товаров у с учетом возможного дефицита товаров в течение периода планирования .

В данном случае задача управления запасами решается для всех видов товаров вместе, т.к. поставщики доставляют товары продавцам многономенклатурными партиями. В данной задаче необходимо определить:

- цену , по которой продавец будет продавать товары вида ;
- - потребительский спрос у продавца на товары вида ;
- количество партий от поставщика продавцу ;
- долю от спроса на товары вида m, которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования ;
- допустимый уровень дефицита товаров вида m у продавца .

Количество товаров вида m, доставляемых в одной партии поставщиком для продавца можно получить из формулы:

$$, \quad , , . \tag{90}$$

Если поставщик не доставляет товары продавцу, то .

В данной модели необходимо учесть ряд ограничений:

- количество партий от поставщика к продавцу должно быть не отрицательным:

$$, \quad , . \tag{91}$$

- Доля от спроса на товары вида , которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования , не может быть отрицательной:

$$, \quad , , . \tag{92}$$

- Для поставщика количество заказанных всеми продавцами товаров вида не должно быть больше количества товаров вида имеющихся у данного поставщика

$$, \quad , . \tag{93}$$

- Для продавца общее количество заказанных товаров вида m у всех L поставщиков должно равняться его спросу на данный вид товаров:

$$, \quad , . \tag{94}$$

- Дефицит товаров вида у продавца должен быть не отрицательным:

$$, \quad , . \tag{95}$$

Функция издержек продавца   на оформление заказов от всех поставщиков и хранение товаров на своем складе может быть выражена как:

(96)

.

где - стоимость оформления многономенклатурной партии для продавца и поставщика на товары вида .

Функция прибыли продавца может быть выражена как:

(97)

.

Необходимо максимизировать функции прибыли всех продавцов

(98)

,

,

для этого воспользуемся теоремой Куна≥ Таккера [37].

Обозначим область допустимых значений для продавца как :

, (99)

.

Если ограничения-неравенства (91), (92), (93), (95) в некоторой точке обращаются в равенства, то данные ограничения называют активными в данной точке, а совокупность всех таких индексов – множеством индексов активных ограничений.

Введем также дополнительные обозначения:

, , ; (100)

, ; (101)

, , , ; (102)

, ; (103)

, , , ; (104)

, ; (105)

, , ; (106)

, , ; (107)

, . (108)

Утверждение 4. Пусть и градиенты , , , , при , , , , , , образуют линейно независимую систему векторов. Тогда для того, чтобы точки были решением задачи (98), согласно теореме Куна≥ Таккера [37], необходимо, чтобы нашлись , , , и произвольного знака, такие что

(109)

Систему (109) можно переписать как:

(110)

Определив частные производные получим:

(111)

Для каждого набора , , существует 2 варианта:

1.

2.

Всего будет варианта значений , , и . Среди которых нужно выбрать вариант, обеспечивающий максимум функции прибыли продавца (97).

При этом не рассматривается случай, когда поставщики не доставляют продавцу товары, т.е. и при , , .

Поскольку задача (98) является NP-полной, ее невозможно решить точным алгоритмом за полиномиальное время. Поэтому для решения системы (111) можно использовать различные эвристические алгоритмы.

В качестве начального допустимого решения можно взять случай, когда первый поставщик отвозит все имеющиеся у него товары за одну партию, если при этом спрос продавца на какой-то вид товаров останется неудовлетворенным, то недостающий объем товаров будет доставлен продавцу следующим за первым продавцом и т.д.

После использования эвристического алгоритма мы получим приближенное к оптимальному решение.

§6. Однономенклатурная модель со скидками

Рассмотрим ситуацию, когда каждый продавец оформляет однономенклатурные заказы на различных видов товаров у поставщиков при наличии скидок на их закупочную стоимость в течение периода планирования .

Скидки предоставляются при объеме заказа большем заранее обозначенного количества.

Пусть $\geq$ количество скидок на закупочную стоимость товара вида поставщика :

- при закупочная стоимость будет равна (без скидок);

- при закупочная стоимость будет равна , ;
- при закупочная стоимость будет равна , ;

- при закупочная стоимость будет равна , .

В данной задаче необходимо определить:

- цену , по которой продавец будет продавать товары вида ;
- ≥   потребительский спрос у продавца   на товары вида ;
- количество партий с товарами вида от поставщика продавцу ;
- долю от спроса на товары вида , которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования ;
- допустимый уровень дефицита товаров вида у продавца .

Количество товаров вида , доставляемых в одной партии поставщиком для продавца можно получить из формулы (1). Если поставщик не доставляет товары продавцу, то .

6.1. Однономенклатурная модель с несколькими скидками и без учета дефицита

В случае если в однономенклатурной модели со скидками не учитывается дефицит товаров у продавцов, сначала решается однономенклатурная модель без учета скидок (см. §2). Полученное решение, обозначим как , , .

Далее для каждого набора , , , , необходимо определить, по какой цене с учетом скидок продавец будет покупать товары вида   у поставщика . Если, то данный набор не рассматривается.

Все скидки рассматриваются последовательно в порядке увеличения значений , . Для набора и скидки , выполняется следующая последовательность действий:

Шаг 1. Решается однономенклатурная модель с учетом скидки (см. §2), из которой получаем ≥ количество партий, ≥ долю от спроса на товары вида , которую доставит поставщик и ≥ цену, которую установит продавец за товары вида при .

Шаг 2. Определяем ≥ количество партий, при котором функция издержек продавца при , и принимает такое же значение, как при , и (полученных для скидки) с .

(112)

Шаг 3. Если , то скидка не учитывается, т.к. затраты продавца на покупку товаров вида у поставщика при закупочной цене будут больше затрат при . Проверка текущей -той скидки останавливается. Процесс проверки продолжается для следующих скидок.

Если условие не выполнено, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. В зависимости от значений , , , , , , возможны 4 варианта:

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене , а продавать товары вида продавец будет по цене .

6.2. Однономенклатурная модель со скидками и дефицитом товаров

В случае если в многономенклатурной модели со скидками также учитывается дефицит товаров у продавцов, сначала решается однономенклатурная модель без учета скидок, но с дефицитом товаров (см. §4). Полученное решение, обозначим как , , , .

Далее для каждого набора , , , , необходимо определить, по какой цене с учетом скидок продавец будет покупать товары вида у поставщика . Если, то данный набор не рассматривается.

Все скидки рассматриваются последовательно в порядке увеличения значений , . Для набора и скидки , выполняется следующая последовательность действий:

Шаг 1. Решается однономенклатурная модель с учетом скидки (см. §3), из которой получаем ≥ количество партий, ≥ долю от спроса на товары вида , которую доставит поставщик , ≥ допустимый уровень дефицита товаров вида у продавца и ≥ цену, которую установит продавец за товары вида при .

Шаг 2. Поскольку мы минимизируем функцию издержек продавца (65), которая непрерывно дифференцируема по , и , можно выразить через и , решив систему уравнений:

,

,

, (113)

,

, , .

Откуда получим

,

, . (114)

Шаг 3. Определяем ≥ количество партий и ≥ уровень дефицита товаров вида , при которых функция издержек продавца n при , и принимает такое же значение, как при , , и (полученных для скидки) с .

Выразив через и (114), получим:

(115)

.

Шаг 4. Если , то скидка не учитывается, т.к. затраты продавца на покупку товаров вида у поставщика при закупочной цене будут больше затрат при . Проверка текущей -той скидки останавливается. Процесс проверки продолжается для следующих скидок.

Если условие не выполнено, то переходим к шагу 5.

Шаг 5. В зависимости от значений , , , , , , , возможны 4 варианта:

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене и с допустимым дефицитом , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене и с допустимым дефицитом , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене и с допустимым дефицитом , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене и с допустимым дефицитом , а продавать товары вида продавец будет по цене .

§7. Многономенклатурная модель со скидками

Рассмотрим ситуацию, когда каждый продавец оформляет многономенклатурные заказы на различных видов товаров у поставщиков при наличии скидок на их закупочную стоимость в течение периода планирования .

Скидки предоставляются при объеме заказа большем заранее обозначенного количества.

Пусть $\geq$ количество скидок на закупочную стоимость товара вида поставщика :

- при закупочная стоимость будет равна (без скидок);
- при закупочная стоимость будет равна , ;
- при закупочная стоимость будет равна , ;
- при закупочная стоимость будет равна , .

В данном случае задача управления запасами решается для всех видов товаров вместе, т.к. поставщики доставляют товары продавцам многономенклатурными партиями. В данной задаче необходимо определить:

- цену , по которой продавец будет продавать товары вида ;
- ≥ потребительский спрос у продавца на товары вида ;
- количество партий от поставщика продавцу ;
- долю от спроса на товары вида , которую доставит поставщик продавцу за весь период планирования ;
- допустимый уровень дефицита товаров вида у продавца .

Количество товаров вида , доставляемых в одной партии поставщиком для продавца можно получить из формулы (1). Если поставщик не доставляет товары продавцу, то .

7.1. Многономенклатурная модель с несколькими скидками и без учета дефицита товаров

В случае если в многономенклатурной модели со скидками не учитывается дефицит товаров у продавцов, сначала решается многономенклатурная модель без учета скидок (см. §3). Полученное решение, обозначим как , , .

Далее для каждого набора , , , , необходимо определить, по какой цене с учетом скидок продавец будет покупать товары вида у поставщика . Если, то данный набор не рассматривается.

Все скидки рассматриваются последовательно в порядке увеличения значений , . Для набора и скидки , выполняется следующая последовательность действий:

Шаг 1. Решается однономенклатурная модель с учетом скидки (см. §2), из которой получаем ≥ количество партий, ≥ долю от спроса на товары вида , которую доставит поставщик и ≥ цену, которую установит продавец за товары вида при .

Шаг 2. Определяем ≥ количество партий, при котором функция издержек продавца n при , и принимает такое же значение, как при , и (полученных для скидки) с .

(116)

Шаг 3. Если , то скидка не учитывается, т.к. затраты продавца на покупку товаров вида у поставщика при закупочной цене будут больше затрат при . Проверка текущей -той скидки останавливается. Процесс проверки продолжается для следующих скидок.

Если условие не выполнено, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. В зависимости от значений , , , , , , , возможны 4 варианта:

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за однономенклатурных партий при закупочной цене , а продавать товары вида продавец будет по цене .

7.2. Многономенклатурная модель с несколькими скидками и с учетом дефицита товаров

В случае если в многономенклатурной модели со скидками также учитывается дефицит товаров у продавцов, сначала решается многономенклатурная модель без учета скидок, но с дефицитом товаров (см. §5). Полученное решение, обозначим как , , , .

Далее для каждого набора , , , , необходимо определить, по какой цене с учетом скидок продавец будет покупать товары вида у поставщика . Если, то данный набор не рассматривается.

Все скидки рассматриваются последовательно в порядке увеличения значений , . Для набора и скидки , выполняется следующая последовательность действий:

Шаг 1. Решается многономенклатурная модель с учетом скидки (см. §5), из которой получаем ≥ количество партий, ≥ долю от спроса на товары вида , которую доставит поставщик , ≥ допустимый уровень дефицита товаров вида у продавца и ≥ цену, которую установит продавец за товары вида при .

Шаг 2. Поскольку мы минимизируем функцию издержек продавца (65), которая непрерывно дифференцируема по , и , можно выразить через и , решив систему уравнений:

,
,
, (117)
, , .

Откуда получим

,
, . (118)

Шаг 3. Определяем ≥ количество партий и ≥ уровень дефицита товаров вида m, при которых функция издержек продавца n при , и принимает такое же значение, как при , , и (полученных для скидки) с .

Выразив через и (118), получим:

(119)

Шаг 4. Если , то скидка не учитывается, т.к. затраты продавца на покупку товаров вида у поставщика при закупочной цене будут больше затрат при . Проверка текущей -той скидки останавливается. Процесс проверки продолжается для следующих скидок.

Если условие не выполнено, то переходим к шагу 5.

Шаг 5. В зависимости от значений , , , , , , возможны 4 варианта:

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за многономенклатурных партий при закупочной цене и с допустимым дефицитом , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за многономенклатурных партий при закупочной цене и с допустимым дефицитом , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за многономенклатурных партий при закупочной цене и с допустимым дефицитом , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Если ,

то продавец закажет у поставщика товары вида в объеме с доставкой за многономенклатурных партий при закупочной цене и с допустимым дефицитом , а продавать товары вида продавец будет по цене .

Глава II. Компьютерная реализация методов

В данной главе приводятся технические характеристики компьютерной программы, в которой были реализованы предложенные в первой главе эвристические алгоритмы решения задач управления запасами. Также в главе приведен численный пример, подтверждающий работоспособность компьютерной программы

§1. Описание программы

Разработанная программа (см. рис. 1) позволяет решать следующие виды задач управления запасами с несколькими поставщиками и продавцами:

1. Однономенклатурные партии.
   - Без дефицита товаров у продавцов и скидок на закупочную стоимость.
   - С дефицитом товаров у продавцов, но без скидок на закупочную стоимость.
   - Без дефицита товаров у продавцов, но со скидками на закупочную стоимость.
   - С дефицитом товаров у продавцов и со скидками на закупочную стоимость.
2. Многономенклатурные партии.
   - Без дефицита товаров у продавцов и скидок на закупочную стоимость.
   - С дефицитом товаров у продавцов, но без скидок на закупочную стоимость.
   - Без дефицита товаров у продавцов, но со скидками на закупочную стоимость.
   - С дефицитом товаров у продавцов и со скидками на закупочную стоимость.

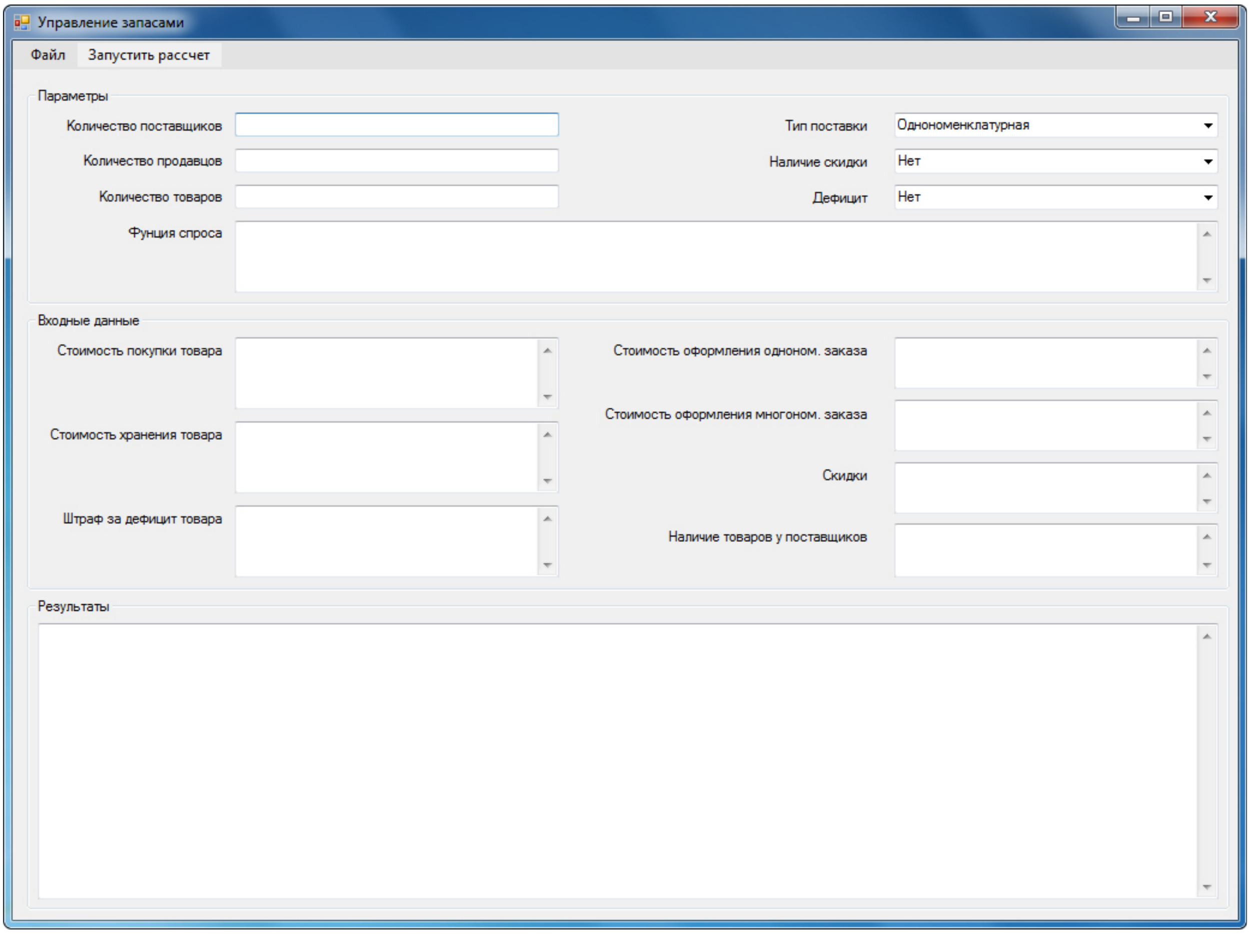

Рисунок 1. Скриншот главного экрана программы.

§2. Используемые технологии

Для реализации компьютерной программы использовался объектно-ориентированный язык программирования C#. Компьютерная программа была создана под операционную систему Microsoft Windows.

Для проведения различных математических операций использовалась система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

§3. Используемые технические ресурсы

Тестирование компьютерной программы производилось на компьютере со следующими параметрами:

- Процессор ≥ QuadCore AMD Phenom X4 9550, 2200 MHz (11 x 200)
- Системная плата ≥ Asus M4A78 Pro
- Оперативная память ≥ Patriot Memory 6400LL Series (x4)
- Видео-карта ≥ NVIDIA GeForce GT 640
- Жесткий диск ≥ HDD SAMSUNG HD502HJ
- Операционная система ≥ Microsoft Windows 7 Professional 64bit

§4. Входные данные

При запуске программы пользователь должен ввести исходные данные:

- ≥ количество поставщиков;
- ≥ количество продавцов;
- ≥ количество различных видов товаров;
- ≥ стоимость покупки продавцом одной единицы товара вида ;
- ≥ стоимость оформления однономенклатурной партии продавцом на товары вида , при выборе поставок однономенклатурными партиями;
- ≥ стоимость оформления многономенклатурной партии для продавца , при выборе поставок многономенклатурными партиями;
- ≥ стоимость хранения единицы товара вида m на складе продавца в течение всего периода планирования ;
- ≥ штраф за дефицит единицы товара вида в течение периода планирования , если допускается дефицит товаров.
- ≥ количество товаров вида у поставщика .

Также пользователь должен выбрать:

- тип партий (однономенклатурные, многономенклатурные;

- наличие скидок (представляются, не предоставляются);
- возможность дефицита товаров (допускается, не допускается).

§5. Выходные данные

Исходя из введенных пользователем данных, программа автоматически определяет математическую модель и применяет один из 6 методов, описанных в первой главе.

После запуска программы пользователь получит решение, которое будет содержать:

- ≥ количество товаров вида , которое заказывает продавец в одной партии у поставщика ;
- ≥ цена, по которой продавец будет продавать товары вида ;
- ≥ расходы продавца ;
- ≥ прибыль продавца ;
- ≥ временной промежуток между поставками товаров вида от поставщика для продавца ;
- ≥ дефицит товаров вида у продавца ;
- количество партий каждого вида товаров, которое будет доставлено от поставщика к продавцу .

§6. Числовой пример

Рассмотрим числовой пример для проверки работоспособности компьютерной программы.

Пусть 3 продавца покупают товары 4 видов у двух поставщиков. Входные данные для продавцов представлены в таблицах 1-3:

	Товар 1 пост 1 / пост 2	Товар 2 пост 1 / пост 2	Товар 3 пост 1 / пост 2	Товар 4 пост 1 / пост 2
Стоимость покупки,	180 / 190	380 / 360	320 / 300	240 / 260
Стоимость хранения,	18 / 18	20 / 22	25 / 28	50 / 45
Стоимость оформления однономенклатурной партии,	47 /52	45 / 47	76 / 70	100 / 90
Стоимость оформления многономенклатурной партии,	120 / 100			

Таблица 1. Входные данные для продавца 1.

	Товар 1 пост 1 / пост 2	Товар 2 пост 1 / пост 2	Товар 3 пост 1 / пост 2	Товар 4 пост 1 / пост 2
Стоимость покупки,	180 / 190	380 / 360	320 / 300	240 / 260
Стоимость хранения,	26 / 27	35 / 36	32 / 29	38 / 41
Стоимость оформления однономенклатурной партии,	29 /32	38 / 38	53 / 60	72 / 70
Стоимость оформления многономенклатурной партии,	110 / 120			

Таблица 2. Входные данные для продавца 2.

	Товар 1 пост 1 / пост 2	Товар 2 пост 1 / пост 2	Товар 3 пост 1 / пост 2	Товар 4 пост 1 / пост 2
Стоимость покупки,	180 / 190	380 / 360	320 / 300	240 / 260
Стоимость хранения,	21 / 24	18 / 17	24 / 22	23 / 26
Стоимость оформления однономенклатурной партии,	23 /21	34 / 35	43 / 42	53 / 55
Стоимость оформления многономенклатурной партии,	100 / 90			

Таблица 3. Входные данные для продавца 3.

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Товар 4
Наличие товаров у поставщика	25	24	23	25

1				
Наличие товаров у поставщика 2	27	23	24	22

Таблица 4. Входные данные для поставщиков.

Рассмотрим функцию спроса на товары следующего вида:

. (1)

При решении однономенклатурной модели задачи управления запасами без учета скидок на закупочную стоимость товаров и дефицита товаров у продавцов, получим следующее решение:

	Товар 1 пост 1 / пост 2	Товар 2 пост 1 / пост 2	Товар 3 пост 1 / пост 2	Товар 4 пост 1 / пост 2
Цена продажи товара,	1371.69	1559	1507.91	1441.86
Спрос	9.70 / 5.63	10.88 / 3.41	9.98 / 4.67	10.19 / 4.77
Количество партий	1.71387 / 1.6271	1.78696 / 1.84054	1.5529 / 1.71822	1.93435 / 1.89641
Количество товаров в одной партии,	5.65 / 3.46	6.08 / 1.85	6.42 / 2.71	5.26 / 2.51
Издержки,	17450.2			
Прибыль,	69681.8			

Таблица 5. Выходные данные для продавца 1.

	Товар 1 пост 1 / пост 2	Товар 2 пост 1 / пост 2	Товар 3 пост 1 / пост 2	Товар 4 пост 1 / пост 2
Цена продажи товара,	765.914	952.735	899.172	829.756
Спрос	8.26 / 4.08	7.69 / 2.46	7.46 / 3.49	8.19 / 3.84
Количество партий	2.42049 / 2.33363	2.16328 / 2.22277	1.81949 / 1.64826	1.78244 / 1.73977
Количество товаров в одной	3.41 /	3.55 /	4.10 /	4.59 /

партии,	1.74	1.10	2.11	2.20
Издержки,	13367			
Прибыль,	26175			

Таблица 6. Выходные данные для продавца 2.

	Товар 1 пост 1 / пост 2	Товар 2 пост 1 / пост 2	Товар 3 пост 1 / пост 2	Товар 4 пост 1 / пост 2
Цена продажи товара,	564.369	752.101	698.794	625.011
Спрос	7.03 / 4.08	5.41 / 1.73	5.54 / 2.59	6.60 / 3.09
Количество партий	2.25341 / 2.49495	1.37621 / 1.34947	1.50718 / 1.49501	1.45116 / 1.32103
Количество товаров в одной партии,	3.11 / 1.63	3.93 / 1.28	3.67 / 1.73	4.54 / 2.33
Издержки,	10135.7			
Прибыль,	13277			

Таблица 7. Выходные данные для продавца 3.

При решении многономенклатурной модели задачи управления запасами без учета скидок на закупочную стоимость товаров и дефицита товаров у продавцов, получим следующее решение:

	Товар 1 пост 1 / пост 2	Товар 2 пост 1 / пост 2	Товар 3 пост 1 / пост 2	Товар 4 пост 1 / пост 2
Цена продажи товара,	1365.2	1552.06	1497.41	1426.88
Спрос	9.67 / 5.70	10.80 / 3.59	9.91 / 4.81	10.12 / 4.94
Количество партий	2.18897 / 1.84661	2.04962 / 1.74638	2.0954 / 1.78349	2.14442 / 1.74229
Количество товаров в одной партии,	4.41 / 3.08	5.26 / 2.05	4.72 / 2.69	4.71 / 2.83

Издержки,	17535.4
Прибыль,	69378.1

Таблица 8. Выходные данные для продавца 1.

	Товар 1 пост 1 / пост 2	Товар 2 пост 1 / пост 2	Товар 3 пост 1 / пост 2	Товар 4 пост 1 / пост 2
Цена продажи товара,	760.704	944.024	888.698	817.024
Спрос	8.27 / 4.88	7.72 / 2.57	7.49 / 3.63	8.22 / 4.02
Количество партий	1.89947 / 2.08839	1.48589 / 1.69494	1.60658 / 1.83291	1.76835 / 1.69369
Количество товаров в одной партии,	4.35 / 2.33	5.19 / 1.51	4.66 / 1.98	4.64 / 2.37
Издержки,	13654.1			
Прибыль,	25973.9			

Таблица 9. Выходные данные для продавца 1.

	Товар 1 пост 1 / пост 2	Товар 2 пост 1 / пост 2	Товар 3 пост 1 / пост 2	Товар 4 пост 1 / пост 2
Цена продажи товара,	560.673	744.085	689.593	615.728
Спрос	7.04 / 4.15	5.47 / 1.82	5.59 / 2.71	6.64 / 3.25
Количество партий	2.82300 / 2.52316	1.83793 / 1.75833	2.09501 / 2.00264	2.49366 / 1.74979
Количество товаров в одной партии,	2.49 / 1.64	2.97 / 1.03	2.66 / 1.35	2.66 / 1.85
Издержки,	10323.8			
Прибыль,	13218.6			

Таблица 10. Выходные данные для продавца 1.

Заключение

В результате проделанной работы было рассмотрено 6 математических моделей для задач управления запасами с детерминированным потребительским спросом у продавцов при наличии нескольких поставщиков (с ограниченным количеством товаров) и дополнительными условиями:

- Количество товаров партии от поставщика к продавцу (один / несколько);
- Допустимость дефицита товаров у продавцов (есть / нет);
- Наличие скидок на закупочную стоимость товаров у поставщиков (есть / нет);
- Наличие ценовой конкуренции между продавцами.

Для каждой модели был предложен эвристический метод ее решения. Для случаев с одним продавцом были описаны альтернативные методы поиска оптимального решения.

Все методы были реализованы в виде компьютерной программы, написанной на объектно-ориентированном языке программирования C# с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Работоспособность программы была проверена на числовых примерах.

Список литературы

1. *Букан Дж., Кенисберг Э.* Научное управление запасами / Пер. с англ. М.: Наука, 1967. 432 с.
2. *Гасратов М. Г., Захаров В. В.* Теоретико-игровые модели оптимизации цепочки поставок для детерминированного спроса // Математическая теория игр и ее приложения, 2011, №1, с. 23–59.
3. *Гордиенко Е. И.* Адаптивное управление запасами при неизвестном распределении спроса // Известия АН СССР. Техн. Кибернетика, 1982, № 1, с. 56–60.
4. *Григорьев М. Н., Долгов А. П., Уваров С. А.* Управление запасами в логистике: методы, модели, информационные технологии: Учебное пособие. СПБ.: Изд. Дом «Бизнес-пресса», 2006. 368 с.
5. *Громенко В. М.* Применение методов управления запасами в экономических задачах. М.: МИУ, 1981. 58 с.
6. *Домбровский В. В., Чаусова Е. В.* Математическая модель управления запасами при случайном сезонном спросе и ненадежных поставщиках // Вестник Томского государственного университета, 2000, Т. 271, с. 141–146.
7. *Кукулиев Г. Ю.* Некоторые задачи управления запасами повторяющегося продукта // Автоматика и Телемеханика, 1987, № 12, с. 48–54.
8. *Лагуткин В. М.* Экономико-математические методы в снабжении. М.: Экономика, 1971. 368 с.
9. Логистика: Учебник / Под ред. Б. А. Аникина: 3-е издание, перераб. И доп. М.: ИНФРАМ, 2005. 368 с.

10. *Локшин Э. Ю.* Экономика материально-технического снабжения. Учеб. Пособие. М.: Госпланиздат, 1963. 511 с.

11. *Лотоцкий В. А.* Методы управления запасами в АСУП. М.: Ин-т проблем управления, 1975. 63 с.

12. *Лотоцкий В. А., Мандаль А. С.* Модели и методы управления запасами. М.: Наука, 1991. 188 с.

13. *Лукинский В. С., Бадокин О. В., Блаженкова Т. А., Бобкова В. М., Бочкарев А. А., Зайцев Е. И., Лукинский В. В.* Проблемы формирования прикладной теории логистики и управления цепями поставок. СПб.: СПбГИЭУ, 2011. 287 с.

14. *Лукинский В. С., Плетнева Н. Г., Шульженко Т. Г.* Теоретические и методологические проблемы управления логистическими процессами в цепях поставок. СПб.: СПбГИЭУ, 2011. 242 с.

15. *Микитьянц С. Р., Голдобина Н. Н.* Применение математических методов в управлении запасами: Учебное пособие. Л.: ЛФЭИ, 1982. 69 с.

16. *Первозванская Т. Н., Первозванский А. А.* Элементы теории управления запасами. Л.: ЛГУ, 1983. 109 с.

17. *Плоткин Б. К.* Экономико-математические методы и модели в управлении материальными ресурсами: Учеб. Пособие / Санкт-Петербург. Ун-т экономики и финансов. СПБ.: Изд-во С.-Петерб. Ун-та экономики и финансов, 1992. 63 с.

18. *Рубальский Г. Б.* Управление запасами при случайном спросе. М.: «Сов. радио», 1977. 160 с.

19. *Рыжиков Ю. И.* Теория очередей и управление запасами: Учебное пособие. СПБ.: Питер, 2001. 384 с.

20. *Сакович В. А.* Модели управления запасами. Минск: Наука и техника, 1986. 319с.

21. *Уайт О. У.* Управление производством и материальными запасами в век ЭФМ / Пер. с англ. / общ. ред. и вступ. статья А.А. Модина. М.: Прогресс, 1978. 304 с.

22. *Фасоляк Н. Д.* Управление производственными запасами (экономический аспек проблемы). М.: Экономика, 1972. 271 с.

23. *Хедли Дж. Уайтин* Т. Анализ систем управления запасами / Пер. с англ. М.: Наука, 1969. 512 с.

24. *Хэнссменн Ф.* Применение математических методов в управлении производством и запасами / Пер. с англ. М.: Прогресс, 1969. 280 с.

25. *Чаусова Е. В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределённостью спроса и задержками в поставках // Вестник Томского государственного университета, 2002, № 1, с. 195–200.

26. *Чаусова Е. В.* Динамическая сетевая модель управления запасами с интервально заданным нестационарным спросом // Дискретный анализ и исследование операций. Материалы Российской конференции. Новосибирск: Изд-во института математики, 2002. 248 с.

27. *Чугунов Е. С.* Равновесие по Нэшу в однономенклатурной задаче управления запасами с дефицитом товаров // Процессы управления и устойчивость, 2015, Т. 2(18), № 1, с. 726–731.

28. *Чугунов Е. С.* Двухэтапный метод решения задачи адаптивного управления запасами // Логистика: современные тенденции развития. Ч. 2: материалы XV Междунар. науч.-практ. конф. 7, 8 апреля 2016 г., 2016, с. 176–179.

29. *Чугунов Е. С., Захаров В. В.* Эвристический метод решения многономенклатурной задачи управления запасами // Информационно-управляющие системы, 2015, № 6, с. 105–111.

30. *Чугунов Е. С., Любич С. Я.* Применение LP/NLP алгоритма в многономенклатурной задаче управления запасами // Процессы управления и устойчивость, 2014, Т. 1(17), № 1, с. 488–494.

31. *Aviv Y., Federgruen A.* Capacitated multi-item inventory systems with random and seasonally fluctuating demands: implications for postponement strategies // Management Science, 2001, vol. 47, n. 4, p. 512–531.

32. *Cardenas-Barron L. E., Trevino-Garza G., Wee H. M.* A simple and better algorithm to solve the vendor managed inventory control system of multi-product multi-constraint economic order quantity model // Expert Systems with Applications, 2012, vol. 39(3), p. 3888–3895.

33. *Duran M., Grossmann I.* An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs // Mathematical Programming, 1986, Vol. 36. P. 307–339.

34. *Gasratov M. G., Zakharov V. V.* Games and Inventory Management // Proceedings of the 6th German-Russian Logistics and SCM Workshop DR-LOG 2011 in Bremen. Gottingen: Cuvillier Verlag, 2011. p. 108–116.

35. *Harris F.* Operation and Cost // Factory Management Series. A.W. Shaw, Chicago, 1915, p. 48–52.

36. *Hax A.C., Candea D.* Production and inventory management, Prentice-Hall. Englewood Clifis, N.J., 1984. 135 p.

37. *Kuhn H.W., Tucker A.W.* Nonlinear programming. Proceedings of 2nd Berkeley Symposium. USA: Berkeley. University of California Press, 1951. 492 p.

38. *Lezhnina E. A., Chugunov E. S.* The Nash Equilibrium in Inventory Model with Price Discounts

39. *Lezhnina E. A. Zakharov V. V.* The Nash Equilibrium in Multy-Product Inventory Model // Contributions to Game Theory and Management, 2014, vol. 7, p. 191–200.

40. *Parlar M.* Game Theoretic Analysis of the Substitutable Product Inventory Problem with Random Demands // Naval Research Logistics, 1988, vol. 35, p. 397–409.

41. *Wilson, R. H.* A Scientific Routine for Stock Control // Harvard Business Review, 1934, vol. 13, p. 116–128.