САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Кафедра высшей алгебры и теории чисел

Чепуркин Константин Михайлович

Некоторые геометрические свойства оснащённых трансферов

Выпускная квалификационная работа

Допущена к защите.
Зав. кафедрой:
д.ф.-м.н., проф. Востоков С.В.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. член-корр. РАН Панин И.А.

Рецензент:
д.ф.-м.н., Ягунов С.А.

Санкт-Петербург

2016

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics & Mechanics Faculty

Chair of Higher Algebra and Number Theory

Konstantin Chepurkin

Some geometric properties of framed transfers

Graduation Thesis

Admitted for defence.
Head of the chair:
Dr.Sci. in Math., Prof. Sergei Vostokov

Thesis supervisor:
Dr.Sci. in Math., Corr. member of RAS, Prof. Ivan Panin

Thesis reviewer:
Dr.Sci in Math., Serge Yagunov

Saint Petersburg

2016

Содержание

1. Введение

В 1992 году Владимиром Воеводским была предложена конструкция триангулированной категории мотивов. Однако в 2000 году в одной из статей [6] цикла «Cycles, transfers, and motivic homology theories» Воеводским было дано другое определение той же категории, использующее в своей основе понятие гомотопически инвариантного предпучка с трансферами. Этот подход позволял свести вычисление морфизмов внутри новой категории к хорошо известному контексту гомологий комплексов, что позволило, например, явно вычислить мотив аффинной кривой.

Однако возможность такого сведения основывалась на геометрических теоремах, таких как теорема об аффинном вырезании, теорема об этальном вырезании и теорема о гомотопической инвариантности когомологий для гомотопически инвариантных предпучков с трансферами (см. [5]). Так, например, теорема об этальном вырезании является локальным алгебро-геометрическим аналогом топологической теоремы о вырезании для сингулярных когомологий. Доказательство каждой из этих теорем требует построения некоторых циклов, задающих многозначные гомотопии.

В 2001 году Воеводский в неопубликованной работе [7] ввёл определение оснащённых соответствий, предпучков и пучков с оснащёнными трансферами. Оснащённые соответствия действуют не только на мотивных когомологиях, но и на всех обобщённых теориях когомологий по Воеводскому. Дальнейшее развитие эта работа получила в серии препринтов И. Панина и Г. Гаркуши 2014-15 годов [2], [3]. В первом из препринтов были сформулированы основные определения и теоремы, необходимые для конструкции категории оснащённых мотивов, а также проведено само построение категории оснащённых мотивов. Во втором препринте были сформулированы, но не доказаны некоторые важные геометрические утверждения, необходимые для доказательства теоремы [2, Theorem 3.1] из предыдущего препринта.

В данной работе представлены доказательства утверждений [3, 8.9] и [3, 10.5], являющихся ключевыми для доказательства инъективной и сюръективной частей теоремы об этальном вырезании из теоремы [2, Theorem 3.1][1].

[1] Автор признателен И.А.Панину за постановку задачи и постоянное внимание при её решении.

2. Общие конструкции

Эта секция содержит обозначения, определения, предположения и конструкции, которые будут действовать во всех остальных разделах.

Пусть k совершенное бесконечное поле. Напомним определение оснащённого соответствия между гладкими схемами X и Y над k.

Определение 1 ([7])**.** *Оснащённое соответствие веса n между схемами X и Y задаётся следующим набором данных:*

1) *Замкнутое подмножество $Z \subseteq \mathbb{A}^n_X$, конечное над X.*

2) *Этальная окрестность $U \to \mathbb{A}^n_X$ подмножества Z.*

3) *Набор регулярных функций $\phi_1, \dots, \phi_n$ на U таких, что $\{\phi_1 = \dots = \phi_n = 0\}$ задаёт Z как замкнутое подмножество. При этом ни одно из множеств $\{\phi_i = 0\}$ не содержит ни одной общей точки слоя отображения $U \to X$.*

4) *Морфизм $g : U \to Y$.*

Таким образом, тройка (U, ϕ, g), где $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \colon U \to \mathbb{A}^n$, однозначно задаёт оснащённое соответствие. В частности, любому морфизму схем $f \colon X \to Y$ можно естественным образом сопоставить оснащённое соответствие веса 0, взяв в $Z = U = X$, а $g = f$. Определение группы $\mathbb{Z}F_n(X, Y)$ дано в препринте [2, стр 23]. Напомним его.

Определение 2. *Обозначим за $Fr_n(X, Y)$ множество всех оснащённых соответствий из X в Y веса n. Определим группу $\mathbb{Z}Fr_n(X, Y)$ как свободную абелеву группу, порождённую $Fr_n(X, Y)$. Определим теперь группу $\mathbb{Z}F_n(X, Y)$ как факторгруппу $\mathbb{Z}Fr_n(X, Y)$ по соотношениям*

$$(U, \phi, g) = (U - Z_2, \phi|_{U-Z_2}, g|_{U-Z_2}) + (U - Z_1, \psi|_{U-Z_1}, g|_{U-Z_1}),$$

если $Z = Z_1 \sqcup Z_2$, где $Z = \{x \in U | g(x) = 0\}$ — носитель соответствия (U, ϕ, g).

Стоит отметить, что, как абелева группа, $\mathbb{Z}F_n(X, Y)$ свободно порождена оснащёнными соответствиями уровня n между X и Y, чей носитель связен.

Приступим к формулировке утверждений, необходимых для теоремы об этальном вырезании. Рассмотрим следующий элементарный квадрат Нисневича с аффинными k-гладкими схемами X и X'.

$$\begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & X' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Pi} \\ V & \longrightarrow & X \end{array}$$

Пусть также схема X геометрически неприводима. Обозначим за S и S' дополнения к V и V' внутри соответствующих схем. Рассмотрим две точки $x \in S$ и $x' \in S'$, такие, что $\Pi(x') = x$. Пусть U и U' — спектры локальных колец $\mathcal{O}_{X,x}$ и $\mathcal{O}_{X',x'}$.

Для доказательства утверждения инъективности в теореме об этальном вырезании [3, часть 8] достаточно построить морфизмы

$$a \in \mathbb{Z}F_n((U, U - S), (X', X' - S))$$

$$b \in \mathbb{Z}F_n((U, U - S), (X - S, X - S)),$$

такие, что

$$\Pi \circ a - j \circ b = can \circ \sigma_U^N$$

как элементы группы $\overline{\mathbb{Z}F_n}((U, U - S), (X, X - S))$. Оснащённые соответствия для пар введены в [3, Definition 2.3]. Там же определена категория $\overline{\mathbb{Z}F}_*^{pr}(k)$, морфизмы которой являются оснащёнными соответствиями пар с точностью до $\mathbb{A}^1$ гомотопий. Для краткости последнюю категорию будем обозначать $\overline{\mathbb{Z}F}_*(k)$. Здесь σ_U обозначает гомоморфизм надстройки (см. [2, стр 5]), $j : (X - S, X - S) \to (X, X - S)$ и $can : (U, U - S) \to (X, X - S)$ — естественные вложения.

Для доказательства сюръективной части теоремы об этальном вырезании [3, часть 10] достаточно предъявить морфизмы

$$a \in \mathbb{Z}F_n((U, U - S), (X', X' - S')),$$

$$b \in \mathbb{Z}F_n((U', U' - S'), (X' - S', X' - S')),$$

такие, что имеет место равенство

$$a \circ \pi - j \circ b = can' \circ \sigma_U^n$$

как элементов $\overline{\mathbb{Z}F}_n((U', U' - S'), (X', X' - S'))$. Морфизмы $j : (X' - S', X' - S') \to (X', X' - S')$ и $can' : (U', U' - S') \to (X', X' - S')$ обозначают естественные вложения.

Совершенно понятно, что если в условии заменить X на некоторую его открытую подсхему X°, содержащую точку x , взяв при этом $V^\circ = V \cap X^\circ$, $X'^\circ = \Pi^{-1}(X^\circ)$, $V'^\circ = V' \cap X'^\circ$, то новый коммутативный квадрат так же будет элементарным квадратом Нисневича, причём, если удастся построить соответствующие a° и b°, то они так же дадут решение для исходного элементарного квадрата.

$$\begin{tikzcd}
V' \cap X'^\circ \arrow[r] \arrow[d] & \Pi^{-1}(X^\circ) \arrow[d, "\Pi"] \\
V \cap X^\circ \arrow[r] & X^\circ
\end{tikzcd}$$

Таким образом, схему X можно уменьшить для получения необходимых свойств.

Замечание 2.1. Уменьшим схему X' таким образом, чтобы соответствующая конечная X-схема X'_n — нормализация схемы X в поле функций $k(X')$ — отличалась бы от X' на дивизор Картье. Заметим, что X'_n конечно над X и, так как X' гладкое многообразие, содержит её как открытую подсхему $X' \hookrightarrow X'_n$. Схема X'_n аффинная, как конечная над аффинной. Рассмотрим схему Y'' — дополнение к X' внутри X'_n. Так как $S' \cong S$, то S' замкнуто, а так как она содержится в X', то выполнено $S' \cap Y'' = \varnothing$. Рассмотрим функцию f, такую, что $f|_{Y''} = 0$ и $f|_{S'} = 1$. Рассмотрим $Y' = \{f = 0\}$. Это дивизор Картье, содержащий Y'' и не пересекающийся с S'. Определим теперь $Y = \Pi_n(Y')$. Y — замкнутая подсхема в X и, более того, это дивизор Картье. Заменим X' на схему X'_f.

Определение 3 ([4]). *Почти элементарным расслоением над схемой B называется морфизм $q \colon X \to B$, включённый в диаграмму,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "q"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{q}"] & X_\infty \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "q_\infty"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

удовлетворяющую свойствам:

1) j *— открытое вложение, плотное во всех слоях* $\overline{q}$*, а* $X = \overline{X} - X_\infty$*;*

2) $\overline{q}$ *— гладкий проективный морфизм, все слои которого геометрически неприводимые многообразия размерности один;*

3) q_∞ *— конечный плоский морфизм, все слои которого не пусты;*

4) *морфизм* i *является замкнутым вложением, а пучок идеалов, задающий на* X_∞ *структуру замкнутой подсхемы в* X*, является локально главным.*

Лемма 2.1 ([3, Lemma 8.4])**.** *Используем обозначения замечания 2.1. В частности,* V*,* X*,* X' *— элементарный квадрат Нисневича,* $x \in X - V$*. Найдётся такое уменьшение* X *и* X'*, сохраняющее точку* x *и свойства замечания 2.1, такое, что существует почти элементарное расслоение* $q\colon X \to B$*, что выполнено*

- $S \sqcup Y$ *— конечная* B *схема;*
- B *— открытое аффинное подмножество в* $\mathbb{P}^d_k$*;*
- $\omega_{B/k} \cong \mathcal{O}_B$*;*
- $\omega_{X/k} \cong \mathcal{O}_X$*;*
- *Морфизм* $\overline{q}$ *факторизуется в виде композиции* $\overline{X} \xrightarrow{r} B \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{pr} B$*, где* r *конечный, а* pr *- каноническая проекция.*

Доказательство. Достаточно применить утверждение [4, Proposition 2.3], взяв схему $Z = Y \sqcup S$. □

Замечание 2.2. Рассмотрим морфизм $q : X \to B$ из заключения леммы 2.1. Тогда композиция $q \circ \Pi$ определяет структуру B-схемы на X'. Также имеет место соотношение $\omega_{X/B} \cong \mathcal{O}_X$ и, если $l\colon X \hookrightarrow B \times \mathbb{A}^N$, то в $\mathrm{K}_0(X)$ выполнено $[N_X] = (N-1)[\mathcal{O}_X]$.

Замечание 2.3. Рассмотрим нормализацию схемы $\overline{X}$ внутри поля $k(X')$. Обозначим его за $\overline{X}'$. Эта нормализация, посредством композиции $q \circ \Pi$ доставляет почти элементарное расслоение схемы X' над базой B.

Лемма 2.2. *Пусть даны* $\overline{X}$*,* $\overline{X'}$ *– две гладкие проективные схемы над гладкой аффинной базой* B*. Пусть* X *— открытая аффинная подсхема в* $\overline{X}$*, а* X_∞ *— её дополнение, чей пучок идеалов локально главный. Пусть дан конечный морфизм* B*-схем* $\overline{\Pi} : \overline{X}' \to \overline{X}$*. Обозначим за* $X' = \Pi^{-1}(X)$ $X'_\infty = \Pi^{-1}(X_\infty)$*. Тогда если* X_∞ *обильный дивизор, то* X'_∞ *тоже.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что так как X_∞ — дивизор Картье, то и X'_∞ также дивизор Картье. Пусть теперь $\mathcal{F}$ некоторый когерентный пучок на $\overline{X'}$. Воспользуемся формулой проекции (см. [1, глава 3 упр. 8.3]) для морфизма $\overline{\Pi}$.

$$R\overline{\Pi}_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}'}} \overline{\Pi}^*(L(nX_\infty))) \cong R\overline{\Pi}_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} L(nX_\infty))$$

Заметим, что

$$\overline{\Pi}^*(L(nX_\infty)) \cong L(nX'_\infty).$$

Так как схема $\overline{X}'$ конечна над $\overline{X}$, то старших производных функторов нет (они обнуляются, когда их номер больше максимума размерности слоёв). Тогда имеет место изоморфизм

$$R\overline{\Pi}_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}'}} \overline{\Pi}^*(L(nX_\infty))) \cong \overline{\Pi}_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} L(nX_\infty)).$$

Вспоминая, что когомологии есть производные функторы прямого образа в базу, а композиция прямых образов — это прямой образ композиции, получаем

$$H^k(\overline{X}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}'}} \overline{\Pi}^*(L(nX_\infty))) \cong H^k(\overline{X}, \overline{\Pi}_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} L(nX_\infty))).$$

Последнее выражение обнуляется для всех достаточно больших n при $k > 0$, что и требовалось доказать.

$\square$

Лемма 2.3. *Пусть дана существенно гладкая локальная k-схема U с замкнутой точкой u, также гладкое собственное отображение $pr_U : \overline{X} \to U$ со слоями размерности 1. Пусть на $\overline{X}$ задано линейное расслоение L и два его сечения s_0 и s_1. Обозначим за $\overline{X}_{cl}$ и L_{cl} замены базы соответствующих схем вдоль морфизма $u \to U$. Если сечения s_0 и s_1 не пропорциональны над $k(u)$ и не обращаются в ноль ни на одной компоненте связности $\overline{X}_{cl}$, а также выполнено $\{s_0 = 0\} \cap \{s_1 = 0\} = \varnothing$, то морфизм $(s_0 : s_1, pr_U) : \overline{X} \to \mathbb{P}^1 \times U$ является конечным и сюръективным.*

Доказательство. Рассмотрим кривую $\overline{X}_{cl}$ над полем $k(u)$ и соответствующее отображение в $\mathbb{P}^1_{k(u)}$. Так как на каждой компоненте связности это отображение принимает хотя бы два значения (если бы отображение было постоянным, то s_1 и s_0 имели бы одинаковые нули). Тогда отображение соответствующей компоненты связности на $\mathbb{P}^1_{k(u)}$ сюръективно. Из этого получаем, что в целом отображение $\overline{X}_{cl} \to \mathbb{P}^1_{k(u)}$ квазиконечно и, исходя из проективности, конечно. По теореме Гротендика о размерности слоёв существует открытое подмножество в $\mathbb{P}^1 \times U$, на котором размерности слоёв конечны. Так как это открытое подмножество содержит все замкнутые точки, то оно совпадает со всем $\mathbb{P}^1 \times U$. Следовательно, отображение квазиконечно и, следовательно, конечно. Так как отображение конечно, то образ должен иметь ту же размерность, следовательно, исходя из гладкости U и неприводимости, получаем, что он содержит единственную общую точку. Следовательно, морфизм сюръективен. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть X гладкая проективная кривая над гладкой аффинной базой U. Обозначим структурное отображение за pr_U. Пусть дано некоторое сечение $s : U \to X$ отображения pr_U. Тогда образ U является дивизором Картье.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что s задаёт замкнутую подсхему в X. Действительно, так как тождественное отображение собственное и факторизуется через s, получаем, что s - собственное. С другой стороны, s — мономорфизм схем. По известному критерию замкнутости получаем, что s — замкнутое вложение. Теперь воспользуемся гладкостью X. В окрестности V точки $x \in s(U)$ представим отображение pr_U в виде композиции $V \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^1_U \to U$, где отображение π этально, а второе есть проекция на U. Заметим, что $\pi \circ s$ также сечение канонической проекции, следовательно, образ s содержался в V. Рассмотрим образ окрестности V в $\mathbb{A}^1_U$. Это открытое подмножество. $\pi \circ s$ есть U точка аффинной прямой и, следовательно имеет вид $t = a$ для некоторой $a \in k[U]$, где t это параметр на аффинной прямой. Тогда образ $\pi \circ s$ задаётся уравнением $t - a = 0$. Рассмотрим f — прообраз функции $t - a$ относительно π. Так как π этально, то $\pi^{-1}(\{t - a = 0\})$ раскладывается в дизъюнктное объединение $s(U) \sqcup G$ для некоторой замкнутой схемы G. Сужение f на $V - G$ и есть искомая функция, нули которой задают $s(U)$. $\square$

3. Геометрическое построение для первой части теоремы об этальном вырезании

В этом разделе будет доказана теорема, необходимая для доказательства инъективности отображения из теоремы об этальном вырезании для предпучков с оснащёнными трансферами.

В дальнейшем все подсхемы внутри X и X' будут рассматриваться как схемы над B. Обозначим Δ естественное отображение $U \to U \times_B X$. Для построения отображений из начала параграфа необходимо доказать следующую теорему, сформулированную, но не доказанную в [3, Proposition 8.9]:

Теорема 1. *Пусть схемы X и X' удовлетворяют заключению леммы 2.1, а $U = \mathcal{O}_{X,x}$. Тогда существует такая функция $h_t \in k[\mathbb{A}^1 \times U \times_B X]$, что для h_t, $h_0 = h_t|_{0 \times U \times_B X}$ и $h_1 = h_t|_{1 \times U \times_B X}$ выполнены следующие свойства*

a) Морфизм $(pr, h_t)\colon \mathbb{A}^1 \times U \times_B X \to \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$ конечный и сюръективный, и, следовательно, замкнутая подсхема $Z_t = h_t^{-1}(0) \subseteq \mathbb{A}^1 \times U \times_B X$ конечная, плоская и сюръективна над $\mathbb{A}^1 \times U$.

b) Замкнутая подсхема $Z_0 = h_t^{-1}(0)$ раскладывается в дизъюнктное объединение $Z_0 = \Delta(U) \sqcup G$, причём $G \subseteq U \times_B V$.

c) Замкнутая подсхема в $U \times_B X'$ заданная уравнением $h_1 \circ (id_U \times \Pi) = 0$ является дизъюнктным объединением $Z_1' \sqcup Z_2'$, причём морфизм $m = id_U \times \Pi|_{Z_1'}$ осуществляет изоморфизм с $Z_1 = \{h_1 = 0\} \subseteq U \times_B X$.

d) $Z_t \cap \mathbb{A}^1 \times (U - S) \times_B S = \varnothing$

Доказательство. Рассмотрим две схемы

$$E := U \times_B X_\infty \hookrightarrow U \times_B \overline{X} \quad \text{и} \quad E' := U \times_B X'_\infty \hookrightarrow U \times_B \overline{X}'.$$

Возьмём некоторое число $n \in \mathbb{N}$. Тогда ограничение расслоения $L(nE - \Delta(U))$ на $U \times_B S$ тривиально, так как $U \times_B S$ конечная схема над U, и, следовательно, полулокальная. Тогда существует некоторое $r_1 \in \mathrm{H}^0(U \times_B S, L(nE - \Delta(U))|_{U\times_B S})$, нигде не обращающегося в ноль. Пусть s_Δ каноническое сечение пучка $L(\Delta(U))$, чьи нули совпадают с $\Delta(U)$. Покажем, что для достаточно больших n существует такое сечение $s'_1 \in \Gamma(U \times_B \overline{X}', L(nE'))$, что выполнено

- $Z'_1 := \{s'_1 = 0\} \subseteq U \times_B X'$.
- Z'_1 — конечен и итален над U.
- Морфизм $i = (id \times \Pi)\colon Z'_1 \hookrightarrow U \times_B X$ является замкнутым вложением.
- $s'_1|_{U\times_B S'} = s_\Delta|_{U\times_B S} \otimes r_1$. Здесь и далее подразумевается, что схемы $U \times_B S'$ и $U \times_B S'$ отождествлены посредством отображения $id \times \Pi$.

Пучок $L(E')$ является обильным по лемме 2.2, в частности при всех достаточно больших n пучок $L(nE')$ разделяет точки $U \times_B \overline{X'}$. Также заметим, что так как $U \times_B S$ регулярная и конечная схема над U, то $k[U \times_B S]$ плоский конечнопорождённый и, следовательно, свободный конечнопорождённый U-модуль. Определим U-схемы Z и M следующим образом

$$Z := \{(x_1, x_2, s) \in U \times_B \overline{X}' \times_{\overline{X}} \overline{X'} \times_U \mathrm{H}^0(L(nE'))|\ s(x_1) = 0 = s(x_2);\ s|_{U\times_B S} = s_\Delta|_{U\times_B S} \otimes r_1\}$$

$$M := \{s \in L(nE')|\ s|_{U\times_B S} = s_\Delta|_{U\times_B S} \otimes r_1\}.$$

Рассмотрим следующую диаграмму U-схем

$$\begin{array}{ccc} Z & \xhookrightarrow{i} & U \times_B \overline{X}' \times_{\overline{X}} \overline{X'} \times_U \mathrm{H}^0(L(nE')) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle pr\circ i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle pr} \\ M & \hookrightarrow & \mathrm{H}^0(L(nE')). \end{array}$$

Заметим, что отображение i корректно определено и на диагонали. Подсхема Z является замкнутой подсхемой внутри $U \times_B X' \times_X X' \times \mathbb{P}_U(\mathrm{H}^0(L(nE')))$. Наша задача состоит в том чтобы доказать, что в M найдётся U точка s'_1, не лежащая в образе $pr \circ i(Z)$, $s'_1|E' \in \mathrm{H}^0(L(nE')|_{E'}) \cong \mathcal{O}_{E'}$ задаёт обратимый элемент и $s'_1|_{U\times_B S'} = s_\Delta|_{U\times_B S} \otimes r_1 \in \mathrm{H}^0(L(nE')|_{U\times_B S'})$.

Сначала решим задачу по модулю максимального идеала m_x в U. Рассмотрим следующую диаграмму U-схем

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}'_{cl} & \hookrightarrow & U \times_B \overline{X}' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_{cl}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi} \\ \overline{X}_{cl} & \hookrightarrow & U \times_B \overline{X} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ x & \hookrightarrow & U. \end{array}$$

В $\overline{X}_{cl}$ имеются открытая аффинная подсхема X_{cl}, а также замкнутые подсхемы S_{cl}, E_{cl}, каждая из которых получается ограничением с X соответствующей подсхемы. Аналогично в $\overline{X}'_{cl}$ имеются подсхемы X'_{cl}, S'_{cl}, E'_{cl}, $S'_{cl} \cong S_{cl}$. Рассмотрим схемы

$$Z_{cl} := \{(x_1, x_2, s) \in X'_{cl} \times_{X_{cl}} X'_{cl} \times \mathrm{H}^0(L(nE'_{cl}))|\ s(x_1) = 0 = s(x_2);\ \ s|_{S_{cl}} = s_\Delta|_{S_{cl}} \otimes r_1|_{S_{cl}}\},$$

$$M_{cl} := \{s \in \mathrm{H}^0(L(nE'_{cl}))|s|_{S_{cl}} = s_\Delta|_{S_{cl}} \otimes r_1|_{S_{cl}}\}.$$

Схемы Z_{cl}, M_{cl}, вообще говоря, не являются ограничениями соответствующих схем над U. Вычислим размерность Z_{cl} для достаточно больших n. Для этого рассмотрим Z_{cl} как схему над $X'_{cl} \times_{X_{cl}} X'_{cl}$, после чего вычислим размерность слоёв этого морфизма, показывая, что условия $s|_{S_{cl}} = s_\Delta|_{S_{cl}} \otimes r_1|_{S_{cl}};\ s(x_1) = 0;\ s(x_2) = 0$, наложенные одно за другим, каждый раз выделяют аффинное подмногообразие некоторой фиксированной положительной коразмерности всюду, кроме, возможно, подсхемы коразмерности 1, где, в свою очередь, коразмерность аффинного подмногообразия падает не более, чем на 1.

Для этого рассмотрим точную последовательность когомологий

$$0 \to \mathrm{H}^0(I(S'_{cl}) \otimes L(nE'_{cl})) \to \mathrm{H}^0(L(nE'_{cl})) \to \mathrm{H}^0(L(nE'_{cl})|_{S'_{cl}}) \to \mathrm{H}^1(I(S'_{cl}) \otimes L(nE'_{cl})).$$

По теореме Серра об обращении в ноль, для достаточно больших n последний член этой последовательности равен нулю. Следовательно, отображение

$$\mathrm{H}^0(L(nE'_{cl})) \to \mathrm{H}^0(L(nE'_{cl})|_{S'_{cl}}) \cong k[S'_{cl}]$$

сюръективно.

Следовательно, существует сечение, сужение которого на S'_{cl} совпадает с $s_\Delta|_{S_{cl}} \otimes r_1|_{S_{cl}}$. Так как указанное отображение есть гомоморфизм конечномерных $k(x)$ векторных пространств, то множество M_{cl} всех таких сечений параметризуется аффинным $k(x)$ подмногообразием $\mathrm{H}^0(L(nE'_{cl}))$ коразмерности, равной $\dim_{k(x)} k[S'_{cl}]$. Теперь покажем, что внутри M_{cl} оставшиеся два условия высекают подмногообразие коразмерности 2.

Для этого перейдём к алгебраическому замыканию поля $k(x)$. Рассмотрим сначала ситуацию, когда пара точек $(x_1, x_2) \in X'_{cl} \times_{X_{cl}} X'_{cl}$ не лежит на диагонали, то есть $x_1 \neq x_2$. Покажем, что условие $s(x_1) = 0$ выделяет подсхему коразмерности по крайней мере 1 в M_{cl} всюду, кроме замкнутого подмножества $\{s_\Delta(x_1) = 0\}$. Если точка x_1 лежит в $S'_{cl} - \{s_\Delta = 0\} = S'_{cl} - \{x'\}$, то соответствующее условие выделяет в M пустую подсхему. Рассмотрим точную последовательность пучков на $\overline{X}'_{cl}$:

$$0 \to I_{x_1 + S'_{cl}} \otimes L(nE'_{cl}) \to L(nE'_{cl}) \to \mathcal{O}_{x_1 + S'_{cl}} \otimes L(nE'_{cl}) \to 0.$$

Считая, что точка x_1 не лежит в S'_{cl}, получаем, что $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{x_1+S'_{cl}} \otimes L(nE'_{cl})) \cong k(x_1) \times k[S'_{cl}]$. Рассмотрим теперь точную последовательность когомологий.

$$0 \to \mathrm{H}^0(I(x_1 + S'_{cl}) \otimes L(nE'_{cl})) \to \mathrm{H}^0(L(nE'_{cl})) \to \mathrm{H}^0(L(nE'_{cl})|_{x_1+S'_{cl}}) \to \mathrm{H}^1(I(x_1 + S'_{cl}) \otimes L(nE'_{cl})).$$

По двойственности Серра получаем

$$\mathrm{H}^1(I(x_1 + S'_{cl}) \otimes L(nE'_{cl})) \cong \mathrm{H}^0(L(x_1 + S'_{cl}) \otimes L(-nE'_{cl}) \otimes K_{\overline{X}'_{cl}}).$$

Для достаточно больших n обратимый пучок $L(x_1+S'_{cl})\otimes L(-nE'_{cl})\otimes K_{\overline{X}'_{cl}}$ имеет отрицательную степень и, так как мы находимся на кривой, нулевые глобальные сечения, следовательно, H^1 обнуляется. Таким образом, для достаточно больших n отображение

$$\mathrm{H}^0(L(nE'_{cl}))\to \mathrm{H}^0(L(nE'_{cl})|_{x_1+S'_{cl}})\cong k(x_1)\times k[S'_{cl}]$$

сюръективно. Следовательно, существует сечение $L(nE'_{cl})$, ограничение которого на S'_{cl} совпадает с $s_\Delta\otimes r_1$, а в x_1 это сечение принимает значение $1\in k(x_1)$. Таким образом, множество сечений удовлетворяющих условию $s(x_1)=0$ имеет коразмерность один в M.

Рассмотрим теперь точку x_2. Если она лежит в $S'_{cl}-\{s_\Delta=0\}$, то есть в $S'_{cl}-\{x'\}$, то новое условие выделяет пустую подсхему. Если $x_2=x'$, то $x_1\neq x'$ и, следовательно, на подсхеме $\{x_2=x'\}$ в M_{cl} выделяется подмножество коразмерности 1, что нас устраивает. По симметрии это же верно для $\{x_1=x'\}$. Таким образом, осталось показать, что когда ни x_1, ни x_2 не лежат в S'_{cl} условие $s(x_2)=0$ выделяет подсхему коразмерности 1 в схеме $\{s\in M_{cl}|s(x_1)=0\}$. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0\to I(x_2+x_1+S'_{cl})\otimes L(nE'_{cl})\to L(nE'_{cl})\to \mathcal{O}_{x_2+x_1+S'_{cl}}\otimes L(nE'_{cl})\to 0.$$

Применяя, как и ранее, двойственность Серра получаем требуемое.

Пусть теперь $x_1=x_2$. Рассмотрим последовательность

$$0\to I(2x_1)\cap I(S'_{cl})\otimes L(nE'_{cl})\to L(nE'_{cl})\to \mathcal{O}_{2x_1\cap S'_{cl}}\otimes L(nE'_{cl})\to 0.$$

Если $x_1\neq x'$, то условие, что s обнуляется в x_1 с кратностью два имеет коразмерность не менее 2 для достаточно больших n, следует из двойственности и рассуждений про сюръективность. Для точек же $x_1=x'$ аналогичное рассуждение даёт только коразмерность 1. Подводя итог, получаем, что размерность Z_{cl} вычисляется по следующей формуле:

$$\dim Z_{cl}=\dim_{k(x)}\mathrm{H}^0(L(nE'_{cl}))-\dim_{k(x)}k[S'_{cl}]-2+1=\dim_{k(x)}M_{cl}-1,$$

для достаточно больших n. Следовательно, образ этой схемы имеет коразмерность не менее 1 в M_{cl}. Тогда существует открытая подсхема внутри M_{cl}, которая удовлетворяет всем условиям, кроме условия на бесконечности.

Покажем что внутри M_{cl} есть открытая подсхема, удовлетворяющая условиям на бесконечности. Рассмотрим отображение:

$$\mathrm{H}^0(L(nE'_{cl}))\to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{E'_{cl}+S'_{cl}}\otimes L(nE'_{cl})),$$

возникшее из короткой точной последовательности пучков на $\overline{X}'$.

$$0\to I(E'_{cl}+S'_{cl})\otimes L(nE'_{cl})\to L(nE'_{cl})\to \mathcal{O}_{E'_{cl}+S'_{cl}}\otimes L(nE'_{cl})\to 0.$$

Воспользуемся теоремой Серра об обращении в ноль. Тогда для достаточно больших n это отображение сюръективно. Аналогичное отображение

$$\mathrm{H}^0(L(nE'_{cl}))\to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{E'_{cl}}\otimes L(nE'_{cl})|E'_{cl})\cong k[E'_{cl}]$$

также является сюръективным. Рассмотрим в $k[E'_{cl}]$ все обратимые элементы. Это точки непустой открытой подсхемы в конечномерной $k(x)$ схеме $\mathrm{H}^0(k[E'_{cl}])$. Прообраз этой открытой подсхемы при указанном отображении открыт. Следовательно, схема M', равная пересечению этого прообраза с M_{cl}, открыта и не пуста.

Теперь возьмём пересечение $M'' = (M_{cl} - pr \circ i(Z_{cl})) \cap M'$. Это открытая непустая подсхема внутри аффинного $k(x)$ пространства.

Нам осталось проверить условие этальности. Так как поле k и, следовательно, $k(x)$ совершенно, для этого достаточно проверить, что есть открытое подмножество сечений в M_{cl}, которые ни в какой точке не обращаются в 0 с кратностью 2. Однако последнее условие эквивалентно тому, что сечение s не лежит в образе ограничения Z_{cl} на диагональ. Это условие коразмерности 1.

Таким образом, схема M'' обладает рациональной точкой (для достаточно больших n) и параметризует сечения, которые доставляют решение задачи при ограничении с U на $k(x)$.

Теперь задача сводится к тому, чтобы поднять это сечение с сохранением условия $s|_{U\times_B S} = s_\Delta \otimes r_1$.

Рассмотрим следующую последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{O}_{\overline{X}'_{cl} \cup U\times_B S'} \to \mathcal{O}_{\overline{X}'_{cl}} \oplus \mathcal{O}_{U\times_B S'} \to \mathcal{O}_{S'_{cl}} \to 0.$$

Умножая тензорно на $L(nE')$ и переходя к когомологиям, получаем точную последовательность:

$$0 \to \mathrm{H}^0(L(nE')|_{\overline{X}'_{cl}\cup U\times_B S'}) \to \mathrm{H}^0(L(nE')|_{\overline{X}'_{cl}}) \oplus \mathrm{H}^0(L(nE')|_{U\times_B S'}) \to \mathrm{H}^0(L(nE')|_{S'_{cl}})$$

По теореме Серра, для достаточно больших n эту последовательность можно продлить нулём, не нарушая точности

$$0 \to \mathrm{H}^0(L(nE')|_{\overline{X}'_{cl}\cup U\times_B S'}) \to \mathrm{H}^0(L(nE')|_{\overline{X}'_{cl}}) \oplus \mathrm{H}^0(L(nE')|_{U\times_B S'}) \to \mathrm{H}^0(L(nE')|_{S'_{cl}}) \to 0.$$

Это означает, что любое сечение $L(nE')$ поднимается с $\overline{X}'_{cl}$ и $U \times_B S'$ на их объединение при условии согласованности на пересечении. Теперь рассмотрим последовательность

$$0 \to I(\overline{X}'_{cl} \cup U \times_B S') \otimes L(nE') \to L(nE') \to \mathcal{O}_{\overline{X}'_{cl}\cup U\times_B S'} \otimes L(nE') \to 0.$$

Для достаточно больших n индуцированное отображение на когомологиях сюръективно. Рассмотрим сечение $s \in M''_{cl}$. Оно согласовано с $s_\Delta \otimes r_1$. Поднимем его до сечения s'_1 расслоения $L(nE')$ сначала на $\overline{X}'_{cl} \cup U \times_B S'$, а затем на $U \times_B S$. Это и будет необходимым сечением.

Пусть Z_1 — образ отображения $(id \times \Pi)|_{Z'_1}$. Тогда прообраз $(id \times \overline{\Pi})^{-1}(Z_1)$ раскладывается в дизъюнктное объединение $Z'_1 \sqcup Z'_2$. Это следует из того, что $Z_1 \cong Z'_1$ этально над U, и, следовательно, $(id \times \Pi)^{-1}(Z_1)$ этально над U. Тогда все неприводимые компоненты $(id\times\Pi)^{-1}(Z_1)$ не пересекаются. Отметим также, что схема Z'_2 не пересекается с $U \times S'$, так как единственной возможной замкнутой точкой пересечения могла быть x', но она уже лежит на Z'_1.

Обозначим за s_1 сечение расслоения $L(Z_1)$, обнуляющееся в точности на Z_1. За s_2' обозначим сечение расслоения $L(Z_2')$, обнуляющееся в точности на Z_2'. Тогда имеет место соотношение

$$(id \times \Pi^{-1})^* s_1 = \mu s_1' \otimes s_2',$$

где μ — некоторый обратимый элемент $k[U]$. Без ограничения общности будем считать $\mu = 1$, так как этот элемент зависит от выбора s_2'.

Рассмотрим расслоение $L(Z_1)$. Дивизор Z_1 изоморфен как схема дивизору Z_1' на схеме $\overline{X}'$, который эквивалентен дивизору nE'. По определению схема E' является обратным образом схемы E вдоль морфизма $id \times \overline{\Pi}$. Таким образом, имеет место соотношение

$$L(Z_1) \cong (id \times \overline{\Pi})_*(Z_1') \cong (id \times \overline{\Pi})_*(nE') \cong (id \times \overline{\Pi})_*((id \times \overline{\Pi})^*(nE)) \cong dnE,$$

где d — это степень отображения Π. Таким образом, расслоение $L(Z_1)$ изоморфно расслоению $L(dnE)$. Отождествим их в дальнейшем.

Построим теперь сечение $s_0 \in \mathrm{H}^0(L(dnE))$, которое

- имеет вид $s_\Delta \otimes s_0'$, где $s_0' \in \mathrm{H}^0(L(dnE - \Delta(U)))$.
- s_0' совпадает с $s_1 \otimes s_\Delta^{-1}$ на E.
- s_0' совпадает с $r_1 \otimes s_2'$ на $U \times_B S$.

Для доказательства рассмотрим точную последовательность

$$0 \to I_{E+U\times_B S} \otimes L(dnE - \Delta(U)) \to L(dnE - \Delta(U)) \to \mathcal{O}_{E+U\times_B S} \otimes L(dnE - \Delta(U)) \to 0.$$

Эта последовательность порождает длинную точную последовательность когомологий. Для всех достаточно больших n, по теореме Серра, $\mathrm{H}^1(I_{E+U\times_B S} \otimes L(dnE - \Delta(U)))$ обнуляются. Так как E и $U \times_B S$ не пересекаются, то $k[E + U \times_B S] \cong k[E] \times k[U \times_B S]$. Следовательно,

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{E+U\times_B S} \otimes L(dnE-\Delta(U))) = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_E \otimes L(dnE-\Delta(U))) \oplus \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{U\times_B S} \otimes L(dnE-\Delta(U))).$$

В первом сомножителе содержится элемент $s_1|_E \otimes (s_\Delta|_E)^{-1}$, который корректно определён, так как s_Δ не обращается в ноль на E. Во втором сомножителе лежит элемент $r_1 \otimes s_2'$. Исходя из обнуления первых когомологий, отображение

$$\mathrm{H}^0(L(dnE - \Delta(U))) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{E+U\times_B S} \otimes L(dnE - \Delta(U)))$$

сюръективно. Следовательно, существует элемент s_0' с заданными ограничениями.

Рассмотрим элемент $\mathrm{H}^0(L(nd(E \times \mathbb{A}^1)))$ вида $(1-t)s_0 + ts_1$. Так как ограничения $(1-t)s_0 + ts_1$ на $\{0\} \times (E \sqcup U \times_B S)$ и $\{1\} \times (E \sqcup U \times_B S)$ совпадают, а $(1-t)s_0 + ts_1$ линейно по t, то ограничение $(1-t)s_0 + ts_1$ на $\mathbb{A}^1 \times (E \sqcup U \times_B S)$ постоянно. Тогда это сечение не обращается в 0 на $\mathbb{A}^1 \times E$ и $\mathbb{A}^1 \times (U - S) \times_B S$, так как таким же свойством обладает его ограничение при $t = 1$. Рассмотрим теперь функцию на $\mathbb{A}^1 \times U \times_B X$

$$h_t = \frac{(1-t)s_0 + ts_1}{s_E^{\otimes nd}}.$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы. Действительно, так как сечение $(1-t)s_0 + ts_1$ обратимо на бесконечности, а $s_E^{\otimes nd}$ обращается в ноль, то отображение

$$(id, (1-t)s_0 + ts_1 : s_E^{\otimes nd}, pr_U) : \mathbb{A}^1 \times U \times_B \overline{X} \to \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1_U$$

конечно и сюръективно по лемме 2.3. Следовательно, его ограничение на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1_U$ конечно и сюръективно, а оно совпадает с h_t. Остальные свойства следуют непосредственно из конструкции h_t.

□

4. Геометрическое построение для второй части теоремы об этальном вырезании

Этот раздел посвящён доказательству второй основной теоремы, являющейся технической базой для доказательства сюръективной части теоремы об этальном вырезании. Формулировка теоремы представлена в [3, Proposition 10.5]. Обозначим сужение морфизма Π на U' за π. Также рассмотрим $\Delta' \colon U' \to U' \times_B X'$ - естественное отображение. Его образ изоморфен U'.

Рассмотрим схему $\overline{\Pi}^{-1}(X) \subseteq \overline{X'}$. Эта схема совпадает с нормализацией X'_n схемы X внутри $k(X')$. Следовательно, дополнение до $\overline{X'} - X'$ есть объединение двух схем X'_∞ и замыкания Y' из замечания 2.1. Заметим, что подсхема Y' конечна над базой B, так как схема Y конечна над B, а схема Y' замкнута в конечной над Y схеме $\Pi^{-1}(Y)$. Так как схема Y' лежит над Y, которая не пересекает X_∞, то $Y' \cap X'_\infty = \varnothing$. Следовательно, Y' замкнуто в $\overline{X'}$ и является дивизором Картье. Так как X'_∞ обилен по лемме 2.2, то и $X'_\infty \sqcup Y'$ обилен. Таким образом, схемы

$$D = U \times_B Y' \cup X'_\infty \hookrightarrow U \times_B \overline{X'};\ \ D' = U' \times_B Y' \cup X'_\infty \hookrightarrow U' \times_B \overline{X'},$$

задают обильные дивизоры Картье на $U \times_B \overline{X'}$ и $U' \times_B \overline{X'}$, соответственно.

Теорема 2. *В предположениях и обозначениях леммы 2.1 существуют функции* $F \in k[U \times_B X]$ *и* $h'_t \in k[\mathbb{A}^1 \times U' \times_B X']$

a) *Морфизм* $(pr, h'_t) \colon \mathbb{A}^1 \times U' \times_B X' \to \mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1$ *конечный и сюръективный, и, следовательно, замкнутая подсхема* $Z'_t = h'^{-1}_t(0) \subseteq \mathbb{A}^1 \times U' \times_B X'$ *конечная, плоская и сюръективная над* $\mathbb{A}^1 \times U'$.

b) *Замкнутая подсхема* $Z'_0 = h'^{-1}_t(0)$ *раскладывается в дизъюнктное объединение* $Z'_0 = \Delta'(U') \sqcup G'$, *причём* $G' \subseteq U' \times_B X' - S'$.

c) $h'_1 = (\pi \times id)^*(F)$.

d) $Z'_t \cap \mathbb{A}^1 \times (U' - S') \times_B S' = \varnothing$

e) *Морфизм* $(pr_U, F) \colon U \times_B X' \to U \times \mathbb{A}^1$ *конечный и сюръективный, и, следовательно, схема* $Z_1 = F^{-1}(0) \subseteq U \times_B X'$ *конечная, плоская и сюръективная над* U.

f) $Z_1 \cap (U - S) \times_B S' = \varnothing$

Доказательство. Так как наша цель состоит в построении функции F, так, что обратный образ F ведёт себя определённым образом на $\Delta'(U')$, то естественно рассмотреть подсхему $(\pi \times id)(\Delta(U')) \hookrightarrow U \times_B X'$. Опишем эту подсхему. Для этого построим следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}' \arrow[r, "\overline{\Pi}"] \arrow[d, "\overline{\Gamma}=(\overline{\Pi},id)"] & \overline{X} \arrow[d, "\Delta"] \\
\overline{X} \times_B \overline{X}' \arrow[r, "id\times\overline{\Pi}"] & \overline{X} \times_B \overline{X}.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, отображение $\overline{\Gamma}$ определено, является заменой базы диагонали и задаёт сечение отображения $pr_{\overline{X}'}$. Значит, по лемме 2.4 $\overline{\Gamma}$ есть дивизор Картье. Образ Γ есть в точности график отображения $\overline{\Pi}$. Следующая диаграмма содержит определение отображения $\overline{\Gamma}'$ как обратного образа отображения $\overline{\Gamma}$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}' \times_{\overline{X}} \overline{X}' \arrow[r, "\overline{\Gamma}'=(id,id)"] \arrow[d, "pr_1"] & \overline{X}' \times_B \overline{X}' \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "(\overline{\Pi}\times id)"] & \overline{X}' \arrow[d, "\overline{\Pi}"] \\
\overline{X}' \arrow[u, bend left, "\Delta'"] \arrow[ur, "\Delta'"] \arrow[r, "\overline{\Gamma}"] & \overline{X} \times_B \overline{X}' \arrow[r, "pr_2"] & \overline{X}.
\end{tikzcd}$$

Отображение $\Delta' \colon \overline{X'} \to \overline{X}' \times_B \overline{X}'$ очевидно пропускается через $\overline{\Gamma}'$. Сделаем замену базы всей диаграммы относительно морфизма $U \to \overline{X}$. Так как V, X, X' — элементарный квадрат Нисневича, то $U \times_{\overline{X}} \overline{X'} = U'$. Исходя из этого, диаграмма принимает вид

$$\begin{tikzcd}
U' \times_U U' \arrow[r, "\Gamma'=(id,id)"] \arrow[d, "pr_1"] & U' \times_B \overline{X}' \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "(\pi\times id)"] & U' \arrow[d, "\pi"] \\
U' \arrow[u, bend left, "\Delta'"] \arrow[ur, "\Delta'"] \arrow[r, "\Gamma"] & U \times_B \overline{X}' \arrow[r, "pr_2"] & U.
\end{tikzcd}$$

Отождествим отображения Γ и Γ' с соответствующими им замкнутыми подсхемами. В таких обозначениях получаем, что Γ в точности совпадает с образом $\Delta'(U')$ при отображении $\pi \times id$. Отображение Γ' является заменой базы отображения Γ. Тогда прообраз схемы Γ относительно $\pi \times id$ есть Γ', которая содержит $\Delta'(U')$. Заметим, что обе подсхемы являются дивизорами Картье как обратные образы дивизоров Картье.

Лемма 4.1. $\Gamma' = \Delta'(U') \sqcup G'$, *причём* $G' \cap U' \times_B S' = \varnothing$.

Доказательство. U' этальна над U. Следовательно, образ диагонали замкнут и открыт в $U' \times_U U'$, следовательно, является компонентой связности. Его дополнение обозначим за G'. Рассмотрим $\Gamma' \cap U' \times_B S'$. Эта схема изоморфна $U' \times_U S'_{U'} \cong U' \times_{S_U} S'_{U'} \cong S'_{U'}$. Однако последняя, очевидно, содержит только одну замкнутую точку, отвечающую диагонали. Если бы схема G' пересекалась с $U' \times_B S'$, то содержала бы эту диагональную точку, что противоречило бы определению G'. □

Рассмотрим расслоения $L(D)$, $L(\Gamma)$, $L(\Delta')$, $L(G')$ и их канонические сечения s_D, s_Γ, $s_{\Delta'}$, $s_{G'}$. Имеет место короткая точная последовательность когерентных пучков на $U \times_B X'$.

$$0 \to I(U \times_B S' + D) \otimes L(nD) \to L(nD) \to \mathcal{O}_{U\times_B S'+D} \otimes L(nD) \to 0.$$

По теореме Серра об обращении в ноль, для всех достаточно больших n отображение

$$\mathrm{H}^0(L(nD)) \to \mathrm{H}^0(L(nD)|_{U\times_B S'+D})$$

сюръективно. Схемы $U \times_B S'$ и D не пересекаются, а также являются полулокальными схемами. Таким образом, сужение любого расслоения тривиально на $U\times_B S' \sqcap D$. Рассмотрим элемент $r_1 \in \mathrm{H}^0(L(nD-\Gamma)|_{U\times_B S'})$, нигде не обращающийся в ноль. Также рассмотрим элемент $s_\infty \in \mathrm{H}^0(L(nD)|_D)$, нигде не обращающийся в ноль. Так как

$$\mathrm{H}^0(L(nD)|_{U\times_B S'+D}) \cong \mathrm{H}^0(L(nD)|_{U\times_B S'}) \oplus \mathrm{H}^0(L(nD)|_D),$$

то существует сечение $f_1 \in \mathrm{H}^0(L(nD))$, чьё ограничение на $U\times_B S'$ совпадает с $r_1 \otimes s_\Gamma|_{U\times_B S'}$, а ограничение на D равно s_∞.

Рассмотрим сечение s_1 расслоения $L(nD')$, заданное соотношением $s_1 = (\pi \times id) * (f_1)$. Оно удовлетворяет свойствам:

1) s_1 не обращается в ноль на D'.

2) $s_1 = r_1' \otimes (s_{\Delta'} \otimes s_{G'})|_{U'\times S'}$, где $r_1' = (\pi \times id) * (r_1)$.

Вообще говоря, последнее равенство верно только с точностью до обратимого элемента $k[U']$. Однако, ничто не мешает изменить элемент, который не участвовал в рассуждениях до этого, например $s_{G'}$, так, чтобы равенство стало справедливым.

Рассмотрим короткую точную последовательность пучков на $U' \times \overline{X}'$

$$0 \to I(U' \times_B S' + D') \otimes L(nD') \to L(nD') \to \mathcal{O}_{U'\times_B S'+D'} \otimes L(nD') \to 0.$$

По теореме Серра, для всех достаточно больших n сюръективно отображение

$$\mathrm{H}^0(L(nD' - \Delta'(U'))) \to \mathrm{H}^0(L(nD' - \Delta'(U'))|_{U'\times_B S'+D'}).$$

Как и ранее, схемы $U' \times_B S'$ и D' не пересекаются и, следовательно, можно найти глобальное сечение $L(nD' - \Delta'(U'))$ с любыми ограничениями на $U' \times_B S'$ и D'.

Возьмём сечение s_0', совпадающее на бесконечности с $s_1|_{D'} \otimes s_{\Delta'}|_{D'}^{-1}$ и равное $r_1' \otimes s_{G'}|_{U'\times_B S'}$ на $U' \times_B S'$.

Возьмём сечение $s_0 = s_0' \otimes s_{\Delta'}$. Тогда функции

$$F = \frac{f_1}{s_D^{\otimes n}}, \quad h_t' = \frac{(1-t)s_0 + ts_1}{s_{D'}^{\otimes n}}$$

удовлетворяют заключению теоремы. Действительно, необходимо лишь применить, как в предыдущей теореме, лемму 2.3. Остальные свойства следуют из построения F и h_t'.

□

Список литературы

[1] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. — МИР, 1981.

[2] Garkusha G., Panin I. Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky). — preprint, 2014. — URL: http://arxiv.org/abs/1409.4372.

[3] Garkusha G., Panin I. Homotopy invariant presheaves with framed transfers. — preprint, 2015. — URL: http://arxiv.org/abs/1409.4372.

[4] Panin I., Stavrova A., Vavilov N. Grothendieck–Serre's conjecture concerning principal G-bundles over reduc- tive group schemes: I // Compos. Math. — 2015. — Vol. 151(3). — P. 535–567.

[5] Voevodsky V. Cohomological theory of presheaves with transfers, in Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories // Ann. Math. Studies. — 2000.

[6] Voevodsky V. Triangulated categories of motives over a field, in Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories // Ann. Math. Studies. — 2000.

[7] Voevodsky V. Notes on framed correspondences. — unpublished, 2001. — URL: https://www.math.ias.edu/vladimir/sites/math.ias.edu.vladimir/files/framed.pdf.