

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Математико-механический факультет  
Кафедра теории упругости

**Каштанова Станислава Викторовна**

**ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ  
ТОНКИХ ПЛАСТИН С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ**

Выпускная квалификационная работа

Специальность: 01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

Допущена к защите: \_\_\_\_\_

Зав.кафедрой: \_\_\_\_\_ академик РАН, д.ф.-м.н. Морозов Н.Ф.

Научный руководитель: \_\_\_\_\_ академик РАН, д.ф.-м.н. Морозов Н.Ф.

Рецензент: \_\_\_\_\_ к.ф.-м.н. Зимин Б.А.

Санкт-Петербург

2016

**Введение.** Устойчивость тонких пластин с отверстием, находящихся под действием одноосного растяжения в классической постановке исследовалась во многих работах, например, [1,2,3]. В работах [2,3] отмечается, что, по-видимому, исторически первой работой о потере устойчивости растягиваемой пластины с отверстием была работа Седаевой Е.М.[1]. Однако и в работе [1], и в серии других работ этого автора, была допущена ошибка в знаке нагрузки, вследствие чего результаты получились заниженными, т.е. этими результатами пользоваться нельзя. В книге [3] приведены кратко все результаты трех работ Седаевой Е.М., ссылающейся на эту работу, приводятся результаты авторов, полученные при решении этой задачи, однако существенное расхождение результатов (и величины критической нагрузки и формы потери устойчивости) никак не комментируется. В данной работе в первую очередь еще раз представлена корректная постановка и решение классической задачи. Точное решение классической задачи необходимо для сравнения с последующими решениями усложненных задач, а именно, задач, в которых учитываются эффекты поверхностных натяжений, так как особенностью деформирования наноразмерных пластин и оболочек является наличие поверхностного эффекта [4,5,6], который усиливается при уменьшении геометрических размеров объекта.

Локальная потеря устойчивости тонких пластин с отверстием на макроуровне активно исследовалась в 80-е годы [3, 7]. В частности, задача о локальном выпучивании тонкого одноосно растянутого упругого листа с эллиптическим отверстием была решена вариационными методами [2,3] в рамках линеаризованной системы уравнений Кармана. Решение такой задачи сводится к решению обобщенной задачи Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения

$$\Delta\Delta w(x, y) = \Lambda \left[ \sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (1)$$

в котором  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $w$  – прогиб пластины, соответствующий собственному числу  $\Lambda$  и заданным кинематическим и статическим краевым

условиям,  $\sigma_{xx} = p\sigma_{xx}^0, \sigma_{yy} = p\sigma_{yy}^0, \sigma_{xy} = p\sigma_{xy}^0$  – компоненты тензора напряжений в решении соответствующей плоской задачи теории упругости,  $x, y$  – декартова прямоугольная система координат.

Первая критическая (эйлерова) нагрузка  $p^*$ , отвечающая минимальному собственному числу  $\Lambda$ , находится в виде

$$p^* = \frac{D}{2hR^2} \min \Lambda = kE \left(\frac{h}{R}\right)^2, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

где  $h$  – толщина пластины,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $R$  – характерный линейный размер отверстия,  $k = \frac{\min \Lambda}{24(1-\nu^2)}$ . Было показано[8], что механическая природа подобного локального выпучивания у свободных кромок отверстия связана с образованием локальных зон сжимающих окружных напряжений при одноосном растяжении пластины вдали от отверстия.

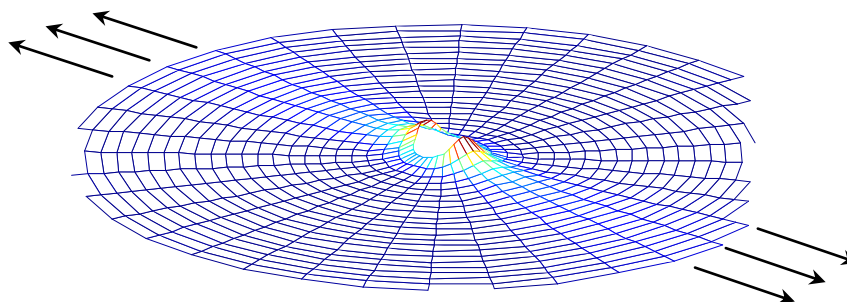


Рис.1

**Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечную упругую пластинку с круговым отверстием радиуса  $R$ , растянутую на бесконечности одноосно при учете поверхностных напряжений. Растягивающее напряжение на бесконечности равно  $P$ .

Поле напряжений при  $r > R$  в этом случае имеет вид [9]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, \varphi) &= \frac{P}{2} \left[ 1 - \frac{R^2}{r^2} + \left( 1 - \frac{4R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right] + \frac{H_0 \gamma_0 R^2}{r^2} \\
&\quad + \frac{P}{2} \left\{ 1 - \frac{(1-2H_1)R^2}{r^2} - \left[ 1 - \frac{4(1-H_2)R^2}{r^2} + \frac{3(1-2H_2)R^4}{r^4} \right] \cos 2\vartheta \right\}, \\
\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= \frac{P}{2} \left[ 1 + \frac{R^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right] - \frac{H_0 \gamma_0 R^2}{r^2} \\
&\quad + \frac{P}{2} \left\{ 1 + \frac{(1-2H_1)R^2}{r^2} + \left[ 1 + \frac{3(1-2H_2)R^4}{r^4} \right] \cos 2\vartheta \right\}, \quad (3) \\
\tau_{r\varphi}(r, \varphi) &= -\frac{P}{2} \left[ 1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4} \right] \sin 2\varphi + \frac{P}{2} \left\{ 1 + 2 \frac{(1-H_2)R^2}{r^2} - \frac{3(1-2H_2)R^4}{r^4} \right\} \sin 2\vartheta.
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{2\mu_s - \gamma_0}{(\lambda_s + 2\mu_s)(R + M)}, \quad H_1 = \frac{M(1 + \varkappa)}{4(R + M)}, \quad H_2 = \frac{M(1 + \varkappa)}{2R + M(3 + \varkappa)}, \\
M &= \frac{(2\lambda_s + 2\mu_s + \gamma_0)(2\mu_s - \gamma_0)}{(\lambda_s + 2\mu_s)2\mu}, \quad \varkappa = \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}, \quad \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}
\end{aligned}$$

$\gamma_0$  – остаточное поверхностное напряжение, отвечающее ненагруженному телу,  $\lambda_s, \mu_s$  – модули поверхностной упругости, аналогичные постоянным Ламе  $\lambda, \mu$  для объемной изотропной упругости [5].

Присутствие слагаемых с постоянными  $H_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) в формулах (3) указывает на влияние поверхностных напряжений на напряженно-деформированное состояние пластины. Известно, что при увеличении размера отверстия это влияние ослабевает (размерный эффект). Равенство нулю коэффициентов  $H_j$  означает отсутствие поверхностных напряжений. В этом случае соотношения (3) переходят в известное решение задачи Кирша о растяжении бесконечной пластины с круговым отверстием.

Задачу будем рассматривать в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  с центром, совпадающим с центром кругового отверстия.

Представим напряжения как линейную комбинацию классических напряжений и напряжений, порожденных поверхностными эффектами:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, \varphi) &= \sigma_{rr}^{cl} + \sigma_{rr}^+, \\
\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= \sigma_{\varphi\varphi}^{cl} + \sigma_{\varphi\varphi}^+ \quad (4) \\
\tau_{r\varphi}(r, \varphi) &= \tau_{r\varphi}^{cl} + \tau_{r\varphi}^+,
\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^+(r, \varphi) &= \frac{H_0 \gamma_0 R^2}{r^2} + \frac{P}{2} \left\{ 1 - \frac{(1 - 2H_1)R^2}{r^2} - \left[ 1 - \frac{4(1 - H_2)R^2}{r^2} + \frac{3(1 - 2H_2)R^4}{r^4} \right] \cos 2\vartheta \right\} \\
\sigma_{\varphi\varphi}^+(r, \varphi) &= -\frac{H_0 \gamma_0 R^2}{r^2} + \frac{P}{2} \left\{ 1 + \frac{(1 - 2H_1)R^2}{r^2} + \left[ 1 + \frac{3(1 - 2H_2)R^4}{r^4} \right] \cos 2\vartheta \right\} \quad (5) \\
\tau_{r\varphi}^+(r, \varphi) &= \frac{P}{2} \left\{ 1 + 2 \frac{(1 - H_2)R^2}{r^2} - \frac{3(1 - 2H_2)R^4}{r^4} \right\} \sin 2\vartheta.
\end{aligned}$$

Заметим, что в постановке задачи Штурма-Лиувилля (1) напряжения предполагаются пропорциональными разыскиваемому собственному числу (критической внешней нагрузке). В то же время в первых двух равенствах (5) первое слагаемое не зависит от нагрузки  $p$  и, следовательно, не удовлетворяет этому условию. Вместе с тем, с ростом нагрузки его вклад в нормальные напряжения  $\sigma_{\rho\rho}$  и  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  становится все меньше. В связи с этим, полагая, что потеря устойчивости у кромок отверстия происходит при достаточно большом значении нагрузки, в расчетах на устойчивость пренебрежем этим слагаемым.

**Решение.** Для определения критического напряжения воспользуемся энергетическим методом С.П. Тимошенко [10,11]:

$$U + \lambda \mathcal{W} = 0. \quad (6)$$

Здесь  $U$  – потенциальная энергия изгиба пластины, а  $\mathcal{W}$  – работа усилий в срединной плоскости пластинки, накопившихся к моменту потери устойчивости, на дополнительных перемещениях, вызванных потерей плоской формы деформирования [1]:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)\mathcal{L}(w, w)] r \, dr d\varphi, \\
\mathcal{W} &= \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \left[ \sigma_{rr} r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + 2\tau_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] dr d\varphi \quad (7)
\end{aligned}$$

$w$  – прогиб пластины после потери устойчивости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины,

$$\mathcal{L}(w, w) = 2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^4} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \quad (8)$$

Для поиска первой критической нагрузки  $p^*$  (точки бифуркации), при которой может возникнуть искривленная форма первоначально плоской пластины, воспользуемся принципом виртуальных перемещений. Следуя этому принципу, за основу возьмем приращение энергии деформации пластины в полярных координатах

$$\Delta V = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \left\{ \frac{D}{2R^2} \left[ \left( w''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} w'_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} w''_{\varphi\varphi} \right)^2 \rho - 2(1-\nu) \left( \frac{1}{\rho} w''_{\rho\rho} (w''_{\varphi\varphi} + \rho w'_{\rho}) - 1 \rho 3 \rho w'_{\rho\varphi} - w'_{\varphi} 2 + \Lambda h 2 \sigma r r 0 \rho w'_{\rho} 2 + \sigma \varphi \varphi 0 1 \rho w'_{\varphi} 2 + 2 \tau r \varphi 0 w'_{\rho} w'_{\varphi} \rho d \rho d \varphi \right) \right] \right\} \quad (9)$$

Прогиб пластины  $w$  ищем в виде двойного ряда

$$w(\rho, \vartheta) = R \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl} \frac{\cos l\vartheta}{\rho^k}, \quad (10)$$

удовлетворяющего условию затухания прогиба на бесконечности. При этом условия свободных кромок отверстия являются естественными для функционала (10) [12]. Наличие симметрии относительно координатных осей  $x, y$  позволяет среди тригонометрических составляющих удерживать только косинусы четного числа аргумента.

Тогда  $U$  и  $W$  (в классическом случае) принимают следующую форму:

$$U = \frac{\pi D}{2} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{k0} A_{m0} \frac{2k^2 m^2}{k+m+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{kl} A_{ml} \frac{(k^2 - l^2)(m^2 - l^2)}{k+m+2} + 2(1 - \nu) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{k0} A_{m0} \frac{2k(k+1)m}{k+m+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{kl} A_{ml} \frac{(k+1)[k(l^2+m) + l^2(m+1)]}{k+m+2} \right) \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
W = & \frac{\pi h R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{km}{(k+m)(k+m+2)} \left( 2A_{k0}A_{m0} + \sum_{l=1}^{\infty} A_{kl}A_{ml} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{k+m-2}{k+m+4} \left( A_{k1}A_{m1} + A_{k0}A_{m2} + A_{k2}A_{m0} + \sum_{l=1}^{\infty} \{A_{k(l-1)}A_{m(l+1)} + A_{k(l+1)}A_{m(l-1)}\} \right) \right) \right. \\
& \left. + \frac{k+m+1}{k+m} \left( A_{k1}A_{m1} \frac{1}{k+m+4} + \sum_{l=1}^{\infty} \{A_{kl}A_{ml} \frac{l^2}{k+m+2} \right. \right. \\
& \left. \left. - (A_{kl}A_{m(l+2)} + A_{k(l+2)}A_{ml}) \frac{l(l+2)}{k+m+4} \right) \right) - \\
& \left. - (4A_{0l}A_{m2} + A_{k1}A_{m1}) \frac{4k(k+m+1)}{(k+m)(k+m+2)(k+m+4)} \right]
\end{aligned}$$

Из принципа виртуальных перемещений следует, что в состоянии равновесия механической системы потенциальная энергия деформации достигает минимума. В этом состоянии обобщенные силы, т.е. частные производные приращения потенциальной энергии по обобщенным координатам, равны нулю:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial A_{ml}} = \frac{\partial}{\partial A_{ml}} (U + \Lambda W) = 0,$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial A_{ml}} = \pi D \cdot \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} A_{k0} \frac{2km}{k+m+2} (km + 2(1-\nu)(k+1)), & l=0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_{kl} \left\{ \frac{(k^2 - l^2)(m^2 - l^2)}{k+m+2} + 2(1-\nu) \frac{(k+1)[k(l^2+m) + l^2(m+1)]}{k+m+2} \right\}, & l \geq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial W}{\partial A_{ml}} = \frac{h}{2} \left( \frac{\partial W_I}{\partial A_{ml}} + \frac{\partial W_{II}}{\partial A_{ml}} + \frac{\partial W_{III}}{\partial A_{ml}} \right),$$

$$\frac{\partial W_I}{\partial A_{ml}} = \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2km}{(k+m)(k+m+2)} \begin{cases} 2 \left( A_{k0} - A_{k2} \frac{(k+m-2)}{(k+m+4)} \right), & l=0 \\ \left( A_{k1} - (A_{k1} + A_{k3}) \frac{(k+m-2)}{(k+m+4)} \right), & l=1 \\ \left( A_{k2} - (2A_{k0} + A_{k4}) \frac{(k+m-2)}{(k+m+4)} \right), & l=2 \\ \left( A_{kl} - (A_{k(l-2)} + A_{k(l+2)}) \frac{(k+m-2)}{(k+m+4)} \right), & l \geq 3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial W_{II}}{\partial A_{ml}} = \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(k+m+1)}{k+m}$$

$$\cdot \begin{cases} 0, & l=0 \\ \left( A_{kl} \frac{l^2}{(k+m+2)} + A_{k1} \frac{1}{(k+m+4)} - A_{k(l+2)} \frac{l \cdot (l+2)}{(k+m+4)} \right), & l=1 \\ \left( A_{kl} \frac{l^2}{(k+m+2)} - A_{k(l+2)} \frac{l \cdot (l+2)}{(k+m+4)} \right), & l=2 \\ \left( A_{kl} \frac{l^2}{(k+m+2)} - A_{k(l-2)} \frac{l \cdot (l-2)}{(k+m+4)} - A_{k(l+2)} \frac{l \cdot (l+2)}{(k+m+4)} \right), & l \geq 3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial W_{III}}{\partial A_{ml}} = -\pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(k+m+1)}{(k+m)(k+m+2)(k+m+4)} \begin{cases} 2A_{k2}, & l=0 \\ A_{k1}, & l=1 \\ 2A_{k0}, & l=2 \\ 0, & l \geq 3 \end{cases}$$

Искомая первая критическая нагрузка  $p^*$ , соответствующая выходу пластины из плоской формы равновесия, будет равна минимальному положительному значению собственного числа  $\Lambda$  (см. также [13]).

**Учет поверхностных напряжений вдоль поверхности пластины.** Далее помимо поверхностных эффектов на границе отверстия учитывается дополнительный вклад поверхностных напряжений, учет которых меняет изгибную жесткость пластины, т.е., следуя [14]:

$$D = \frac{\mu h^3}{6(1-\nu)} + \mu_s h^2 + \frac{\lambda_s h^2}{2}. \quad (12)$$

### Численные результаты

Используя метод Ритца, в программе Maple, рассчитаны критические нагрузки для классического случая, для случая учета поверхностных эффектов на границе круга и для случая учета поверхностных напряжений вдоль поверхности пластины.



Расчеты выполнены для пластин из алюминия, основные константы которого  $\lambda = 58.17 \text{ ГПа}, \mu = 26.13 \text{ Гпа}$ . Данные для поверхности [15-16]:

$$\lambda_s = 6.8511 \frac{H}{m}, \quad \mu_s = -0.376 \frac{H}{m}, \quad \gamma_s^0 = 0,9108 \frac{H}{m} \text{ для Al [111].}$$

Отношение критической нагрузки, учитывающей поверхностные эффекты на границе круга ( $P$ ) к классической нагрузке и учитывающей полную систему сил к классической критической нагрузке:

	Отношение крит. нагр.	$R=1 \text{ нм}$	$R=2 \text{ нм}$	$R=4 \text{ нм}$	$R=5 \text{ нм}$
$h=2 \text{ нм}$	$P/P_{cl}$	0,990	0,994	0,995	0,996
	$P_{пол}/P_{cl}$	1,218	1,229	1,224	1,225
$h=3 \text{ нм}$	$P/P_{cl}$	0,991	0,995	0,996	0,997
	$P_{пол}/P_{cl}$	1,142	1,147	1,149	1,150
$h=4 \text{ нм}$	$P/P_{cl}$	0,991	0,995	0,997	0,998
	$P_{пол}/P_{cl}$	1,104	1,110	1,111	1,112
$h=5 \text{ нм}$	$P/P_{cl}$	0,991	0,995	0,997	0,998
	$P_{пол}/P_{cl}$	1,081	1,086	1,089	1,090
$h=10 \text{ нм}$	$P/P_{cl}$	0,991	0,995	0,998	0,999
	$P_{пол}/P_{cl}$	1,036	1,041	1,043	1,043

Табл. 1

Таким образом, видно, что для этого случая учет поверхностных напряжений, действующих по границе отверстия, уменьшает критическую нагрузку по сравнению с классическим случаем. При увеличении толщины пластины отношение нагрузок, учитывающей поверхностные натяжения, к классической, асимптотически стремится к 1, т.е. для более «толстых» пластин поверхностные эффекты не влияют на критическую нагрузку. График (рис. 2) представлен для  $R=2 \text{ нм}$  и  $h$  от 3 нм до 10 нм.

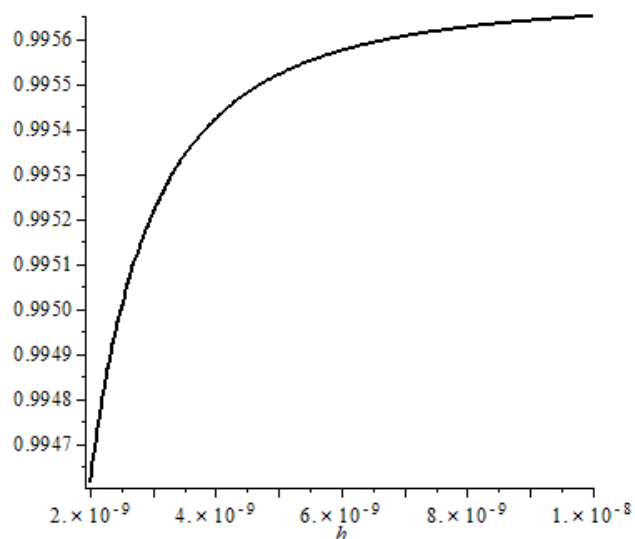


Рис.2

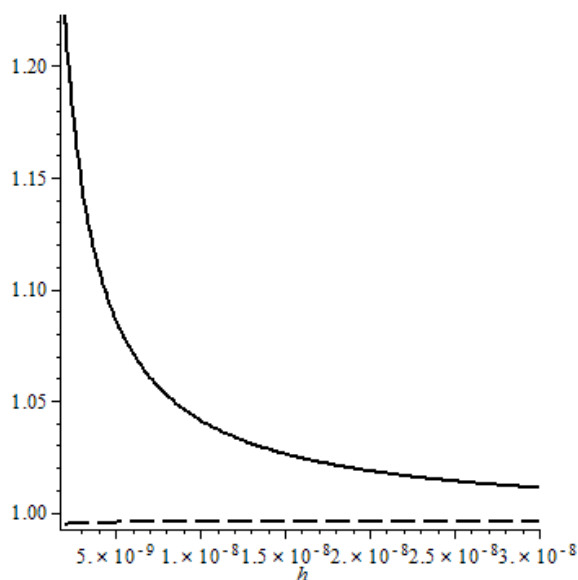


Рис.3

Из табл. 1 видно, что учет поверхностных эффектов на лицевых сторонах пластины увеличивает критическую нагрузку при выбранных упругих и поверхностных модулях, и учет изменения изгибной жесткости пластины играют большую роль, чем учет поверхностных эффектов на границе круга. График (рис. 3) представлен для случая  $r=2$  нм и  $h$  от 3 нм до 30 нм, пунктир - отношение  $\frac{P}{P_{cl}}$ , сплошная - отношение  $\frac{P_{пол}}{P_{cl}}$ . при увеличении толщины пластины поверхностные эффекты становятся пренебрежимо малы.

**Заключение.** В работе исследована потеря устойчивости при растяжении бесконечной пластины с круговым отверстием с учетом поверхностных эффектов. Был рассмотрен классический случай задачи (без учета поверхностных сил) и проведен сравнительный анализ относительно классического случая двух следующих добавлений: учет поверхностных сил на границе отверстия и учет поверхностных сил вдоль всей пластины. В результате получено, что изменения изгибной жесткости пластины играют большую роль, чем учет поверхностных сил на границе отверстия. Численный анализ производился в программе Maple.

## Литература:

1. **Седаева Е.М.** Устойчивость бесконечных пластин, ослабленных круговыми отверстиями. Тр. научн.-исслед. ин-та мат. Воронеж. ун-та. Воронеж, 1973, вып.8, с.32-36.
2. **Бочкарев А.О., Даль Ю.М.** Локальная устойчивость упругих пластин с вырезами. ДАН СССР. 1989. Том 308, №2, с.312-315.
3. **Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Кулиев Г.Г., Милованова О.Б.** Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. Киев., Наук. думка, 1981.
4. **Grekov M.A., Morozov N.F.** Solution of the Kirsch problem in view of surface stresses // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2011. Vol. 52. P. 123-129. Vol. 53. P. 163-164.
5. **Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б.** Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице. Физическая мезомеханика. 2010. Т.13, №5, с.127-138.
6. **Еремеев В.А., Альтенбах Х., Морозов Н.Ф.** О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин // Докл. РАН. 2009. Т. 424. № 5. С. 618–620.
7. **Никольская Н.А.** // Вестн. Ленингр. ун-та. 1979. № 1. С. 111-115.
8. **Бочкарев А.О., Греков М.А.** Локальная потеря устойчивости пластины с круговым наноотверстием при одноосном растяжении // ДАН. 2014. Т.457 № 3, с.282-285
9. **Греков М.А., Язовская А.А.** Эффект поверхностной упругости и остаточного поверхностного напряжения в упругом теле, ослабленном эллиптическим отверстием нанометрового размера. ПММ, 2014, Т.14, вып. 2.
10. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластины и оболочки. М., Наука, 1966.
11. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967.
12. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. 1970. 512 с.
13. **Grekov M., Kashtanova S., Morozov N., Yazovskaya A.** // Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety / Book of Abstracts of 19<sup>th</sup> European Conference on Fracture. Kazan. 2012. P. 376.
14. **Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф.** Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений, Изв. РАН, Механика твердого тела, 2010, с.618-620
15. **Shenoy V.B.** Atomistic calculations of elastic properties of metallic for crystal surfaces. Phys. Rev. 2005, B 71, N 9, p.94 -104.
16. **Miller R.E., Shenoy V.B.** Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. Nanotechnology 11 (2000) 139–147