САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра Математической теории моделирования систем управления

Фоминых Александр Владимирович

Точные штрафы в задаче оптимального управления в форме Лагранжа

Выпускная квалификационная работа аспиранта
по специальности 01.01.09 — Дискретная математика
и математическая кибернетика

Научный руководитель
кандидат физ.–мат. наук, доцент
В. В. Карелин

Санкт–Петербург 2016

Оглавление

Введение

Дифференциальное исчисление, основы которого были заложены в трудах Ньютона [113] и Лейбница [105], безусловно, представляет собой мощнейший аппарат, без которого сложно представить себе успешное развитие многих разделов математики.

Однако с течением времени оказалось, что многие задачи, возникающие в приложениях и в самой математике, требуют исследования недифференцируемых функций и создания полноценного инструмента работы с ними. Такая потребность привела к появлению сравнительно новых разделов математики: негладкого анализа и недифференцируемой оптимизации. Большой вклад в их развитие внесли такие учёные, как В. Ф. Демьянов [20, 24, 82, 83], А. М. Рубинов [28, 29, 85], Л. Н. Полякова [27, 56, 57, 86, 117, 118], В. Н. Малозёмов [26], Б. Н. Пшеничный [58, 59, 60], С. С. Кутателадзе [48, 49], А. Д. Иоффе [97, 35], Н. З. Шор [74, 75], Дж. Данскин [16], Ф. Кларк [41, 81], Р. Рокафеллар [61, 98], Ж.-П. Обен [52].

Стремительное развитие этих наук и успешное решение многих важных теоретических и прикладных задач подтвердили эффективность этих разделов и окончательно развеяли некоторые предположения о том, что негладкие задачи являются патологией или экзотикой. Напротив, данные разделы прочно вошли в современную структуру математической науки и представляют собой самостоятельные, мощные и постоянно развивающиеся дисциплины, которые, к слову сказать, оказываются даже более широкими, чем классическое дифференциальное исчисление, поскольку обобщают его понятия и позволяют получать многие его результаты как следствия своей, более общей, теории.

Конечно, многие негладкие задачи можно чисто технически или исходя из каких-то общих соображений, сделать гладкими и тогда уже применять к ним весь богатый арсенал методов дифференциального исчисления. Процесс такого сведения получил название «сглаживание». Однако это не всегда оказывается эффективно и просто реализуемо. Простой пример функции, сглаживание которой не позволяет исследовать те её свойства, которые связаны с понятием градиента, приведён в [21]. Ещё одним примером невозможности сглаживания может служить теория точных штрафных функций, которая эффективно применяется при решении задач условной оптимизации. Сама же точная штрафная функция является существенно негладкой.

Теория точных штрафных функций получила широкое распространение при решении задач условной оптимизации [33, 123]. Она позволяет сводить исходную задачу при наличии ограничений к задаче безусловной оптимизации. Как показали многочисленные исследования [95, 115, 116, 121], такое сведение часто довольно очевидно даже для сложных задач как конечномерной, так и бесконечномерной оптимизации. Для достаточно широкого класса задач при некоторых естественных предположениях удаётся показать, что построенная функция — точная штрафная. И хотя по построению она оказывается негладкой, для её оптимизации можно применять уже многие хорошо разработанные методы недифференцируемой оптимизации. Отметим, что наряду с получением достаточных условий точности штрафной функции [23, 79, 88, 92] продолжаются разработки различных конструкций точных штрафных функций с полезными свойствами [96, 114, 122]. Идея использования точных штрафных функций была предложена И. И. Ерёминым в [33].

Как уже отмечалось, негладкий анализ с момента его зарождения значительно пополнился различными методами решения задач оптимизации. Многие методы опираются на необходимые условия экстремума, которые, в свою очередь, можно формулировать в терминах таких фундаментальных понятий негладкой оптимизации, как производная по направлению и субдифференциал [24]. Последнее понятие дало название методу субдифференциального спуска. Общая схема метода состоит в поиске направления спуска в данной точке и осуществлению движения с некоторым шагом по этому направлению. В результате получаем последовательность, которая в некоторых случаях сходится к точке экстремума. К сожалению, субдифференциальное отображение является разрывным в метрике Хаусдорфа [24], что не позволяет в общем случае гарантировать сходимость метода. Поэтому наряду с данным методом разрабатывались его модификации [23, 65], а также методы, основанные на других понятиях негладкого анализа. В частности, весьма эффективным оказался метод гиподифференциального спуска, основанный на введённом В. Ф. Демьяновым понятии гиподифференциала, который является обобщением субдифференциала. Гиподифференциальное отображение, в отличие от субдифференциального, является непрерывным в метрике Хаусдорфа для очень широкого класса функций [28], что обеспечивает сходимость метода во многих задачах. Отметим, что преимущество гиподифференциала заключается ещё и в наличии богатого и удобного исчисления. Так, например, эпсилон-субдифференциальное отображение также является непрерывным по Хаусдорфу для широкого класса функций [51], однако применение эпсилон-субдифференциального спуска значительно затруднено, поскольку исчисления эпсилон-субдифференциалов громоздко и очень сложно даже в самых простых задачах [24].

Метод гиподифференциального спуска начал применяться В. Ф. Демьяновым и Г. Ш. Тамасяном и к бесконечномерным, а именно к вариационным задачам [31, 62, 64, 87], и показал там свою эффективность. Он показал не только практическую пользу, но и свою большую теоретическую роль, поскольку позволил выработать единообразный, оптимизационный подход к широкому классу задач и получить многие фундаментальные результаты вариационного исчисления. Задачи оптимального управления относятся к классу наиболее сложных вариационных задач. Теория точных штрафов применялась к задачам теории управления В. Ф. Демьяновым и В. В. Карелиным [84]. В частности, в работе [38] с помощью теории точных штрафов был получен принцип максимума Л.С. Понтрягина для задачи оптимального управления в достаточно общей постановке.

Теория оптимального управления возникла и формировалась под существенным влиянием исследований космических летательных аппаратов. Одна из первых задач оптимального управления была поставлена Д. Е. Охоцимским в статье [54]. Существенным толчком, инициировавшим целую серию как теоретических, так и практических исследований, стали принцип максимума, полученный Л. С. Понтрягиным, В. Г. Болтянским, Е. Ф. Мищенко и Р. В. Гамкрелидзе [55] и метод динамического программирования, разработанный Р. Беллманом [7, 8]. К решению задач оптимального управления применяются различные подходы. Существует класс методов, основанных на сведении исходной задачи к краевой задаче [36, 50, 99, 103, 106, 108, 112, 119], которое осуществляется при помощи принципа максимума. Ещё одну группу методов, опирающихся на принцип максимума, составляют различные методы последовательных приближений [5, 6, 19, 22, 30, 40, 45, 46, 47, 50, 102]. В основе другой обширной группы методов лежат итерационные процессы в пространстве управлений, которые базируются на вариациях минимизируемого функционала [4, 100, 101, 50, 53, 73, 76, 80, 93, 94, 120]. Наконец, целая серия методов базируется на принципе динамического программирования и состоит в основном в переборе в пространстве фазовых координат и анализе вариантов. Многие из перечисленных схем также существенно используют методы математического программирования (например, градиентные методы, метод Ньютона, методы Ритца и Галёркина [9]) и эффективность решения задач управления в значительной степени определяется умением эффективно решать оптимизационные задачи. Конечно, перечисленными методами не исчерпывается необозримое количество схем и подходов, накопившихся с момента возникновения теории управления. Однако, как показывают многочисленные исследования, любой из перечисленных подходов сложно назвать универсальным, охватывающим значительную часть линейных и нелинейных задач. Подтверждением этого является то, что многие методы индивидуальны, рассчитаны на очень узкий класс задач, у многих не доказана или даже не исследовалась сходимость [50], что не мешает считать их эффективными и признанными методами решения задач оптимального управления. Естественно, что для линейных задач удалось осуществить значительное продвижение как в теоретической части (так, например, Н. Н. Красовским разработана полная теория линейных задач оптимального управления, основанная на проблеме моментов [42], В. И. Зубовым — на результатах линейной алгебры [34]), так и в решении вычислительных проблем (например, схема А. А. Абрамова [50] позволяет обеспечить устойчивость счёта). Задача оптимального управления относится к вариационной задаче в достаточно общей постановке. Поэтому неудивительно, что многие результаты вариационного исчисления являются следствиями принципа максимума Л. С. Понтрягина [55]. Здесь же стоит отметить, что многие фундаментальные результаты теории динамического программирования Р. Беллмана также вытекают из принципа максимума [55].

Одной из актуальных задач, исследуемых в данной работе, является построение метода решения задачи оптимального управления в форме Лагранжа с интегральным ограничением на управление. Отметим, что при фиксированной начальной точке к данной задаче может быть сведена и более общая задача оптимального управления в форме Больца [50]. Различные задачи с интегральным ограничением на управление рассматривались В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым в работе [30] и А. С. Антипиным и Е. В. Хорошиловой в статьях [1, 2, 3]. Изначальный оптимизационный подход позволяет считать предложенный в работе метод в достаточной степени универсальным. Общая схема этого метода может быть описана следующим образом. При помощи аппарата точных штрафных функций исходная задача минимизации интегрального функционала качества при наличии ограничений в виде нелинейной системы дифференциальных уравнений, начального и конечного положения объекта и при интегральном ограничении на управление сводится к задаче безусловной минимизации некоторого функционала. Далее формулируются необходимые условия минимума данного функционала. Здесь стоит упомянуть, что известный интегральный принцип максимума получается из этого условия как следствие, что ещё раз свидетельствует в пользу достаточной общности применяемого подхода. Отметим, что в случае, если исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений линейна относительно фазовых координат и управлений, а минимизируемый функционал является выпуклым, то рассматриваемый функционал оказывается выпуклым, а тогда необходимые условия его минимума являются и достаточными. Как уже говорилось, точная штрафная функция существенно негладкая, поэтому для поиска стационарных точек этого функционала используются методы недифференцируемой оптимизации, в частности, метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска.

В данной работе отдельно исследуется задача нахождения программного управления, целью которого является перевод объекта из заданного начального положения в заданное конечное состояние за фиксированное время. В силу более простой постановки задачи по сравнению с задачей Лагранжа удаётся упростить и применяемый алгоритм решения задачи. В настоящей ВКР также были рассмотрены полиномы произвольной конечной степени от различных интегральных функционалов, сформулированы методы их минимизации для задачи как со свободным, так и закреплённым правым концом, показаны некоторые приложения данных конструкций. Задача Коши как вариационная рассмотрена с помощью описанного подхода отдельно в силу её важности. Наконец, с помощью аппарата точных штрафных функций и опорных функций при некоторых дополнительных предположениях выведен известный принцип максимума для дифференциальных включений. На некоторых примерах продемонстрирован иной подход к задачам оптимального управления, когда осуществляется переход к дифференциальному включению, у которого далее на основе принципа максимума ищется оптимальное решение.

Таким образом, настоящая работа продолжает исследование методов негладкой оптимизации в вариационных задачах, развиваемых в научной школе В. Ф. Демьянова. Более конкретно, идея применения точных штрафов в оптимальном управлении [84] развивается и используется в данной работе для построения конструктивных методов решения задач оптимального управления и исследования дифференциальных включений.

Целью ВКР является разработка единого оптимизационного подхода к решению задач оптимального управления на основе теории точных штрафных функций и методов негладкого анализа, построение прямых методов решения данных задач, изучение задачи нахождения оптимального решения дифференциального включения с применением точных штрафов.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что в ней развивается общий подход применения аппарата точных штрафных функций и методов негладкой оптимизации к задачам оптимального управления, а также задачам, содержащим дифференциальные включения. В данной ВКР показано, как с помощью данного аппарата можно получить некоторые фундаментальные результаты, такие как линеаризованный интегральный принцип максимума Понтрягина для задач управления, принцип максимума для дифференциальных включений, автором которого является Благодатских, а также новые конструктивные условия оптимальности для данных задач.

Практическая значимость работы определяется тем, что в ней разработан общий оптимизационный подход к решению задач оптимального управления. Кроме того, в работе строятся прямые методы решения данных задач, получены некоторые конструктивные условия оптимальности в задаче с дифференциальными включениями. Также в работе реализация построенных методов демонстрируется на конкретных примерах, многие из которых возникают в реальных моделях.

Научная новизна. Все основные научные результаты ВКР являются новыми. Работа продолжает исследования [31, 38, 84].

Методы исследования. В настоящей работе применяются современные методы теории экстремальных задач, выпуклого анализа и недифференцируемой оптимизации.

Основные результаты, полученные в ВКР:

- получены необходимые условия минимума полинома от интегральных функционалов;
- построен прямой метод минимизации полинома от интегральных функционалов, опирающийся на метод наискорейшего спуска;
- на основе теории точных штрафных функций получены необходимые (а в случае линейности системы и выпуклости минимизируемого функционала и достаточные) условия минимума в задаче оптимального управления;
- построен прямой метод решения задачи оптимального управления, опирающийся на метод гиподифференциального спуска;
- с помощью теорий точных штрафных функций и опорных функций при некоторых дополнительных предположениях получен принцип максимума для дифференциальных включений;
- построен прямой метод решения задачи Коши, опирающийся на метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений;

ВКР состоит из введения, шести глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Леммы, теоремы, следствия, замечания, примеры и таблицы нумеруются в соответствии с главой, параграфом, в которых они находятся. Формулы нумеруются в соответствии с главой, в которой они находятся.

Глава 1

Предварительные сведения

Пусть X — вещественное линейное пространство.

Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется вещественным линейным функционалом, если для любых x, $y \in X$ и α, $\beta \in \mathbb{R}$ будет $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Будем обозначать $\operatorname{dom} f = \{x \in X \mid f(x) \neq -\infty,\ f(x) \neq +\infty\}$ — эффективное множество функции f.

Напомним, что производной функции f в точке $x \in \operatorname{dom} f$ по направлению $g \in X$ называется предел

$$f'(x, g) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + \alpha g) - f(x)}{\alpha},$$

если данный предел существует. Функция f называется *дифференцируемой по направлениям* в точке x, если $f'(x, g)$ существует для любого $g \in X$. Везде далее будем писать $\alpha \downarrow 0$, вместо $\alpha \to +0$.

Функция f называется *дифференцируемой по Гато* в точке x, если она дифференцируема по направлениям в данной точке и отображение $g \to f'(x, g)$ является линейным непрерывным функционалом, который называется производной Гато функции f в точке x и обозначается $\nabla f(x)$.

Функция $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$ называется *нормой* (в X), если для любых элементов $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,
3. $\|x\| \geqslant 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Пара $(X, \|\cdot\|)$, состоящая из пространства X и нормы в нём, называется нормированным пространством.

Функция $\rho(\cdot,\cdot)\colon X\times X\to[0,+\infty)$ называется *метрикой* (в X), если для любых элементов $x,y,z\in X$ она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$,
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$,
3. $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

Пара $(X,\rho(\cdot,\cdot))$, состоящая из пространства X и метрики в нём, называется метрическим пространством.

Любое нормированное пространство является метрическим, с метрикой определяемой по формуле $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

Скалярным произведением в пространстве X называется функция $(\cdot,\cdot)\colon X\times X\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая для любых элементов $x,y,z\in X$ и для любого числа $\lambda\in\mathbb{R}$ следующим условиям:

1. $(x,y)=(y,x)$,
2. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$,
3. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$,
4. $(x,x)\geqslant 0,\ \ (x,x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ (если пространство X нормировано) называется непрерывной в точке $x\in X$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого $y\in X$, $\|y-x\|<\delta$, будет $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

Пусть $(X,\rho(\cdot,\cdot))$ — метрическое пространство. Функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ называется *липшицевой* на множестве $S\subset X$, если существует константа $L<\infty$ такая, что для любых элементов $x,y\in S$

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L\rho(x,y).$$

Число L называется *константой Липшица* функции f на множестве S.

Пусть X — нормированное пространство. Множество всех линейных непрерывных функционалов на X называется пространством, *сопряжённым* к X и обозначается через X^*. Пространство X^* также можно сделать нормированным, определив в нём норму по формуле

$$\|f\|=\sup_{x\in B(0,1)}|f(x)|,\quad f\in X^*,$$

где $B(x,r)=\{y\in X\mid\|x-y\|\leqslant r\}$.

Пусть X, Y — нормированные пространства. Пусть $S \subset X$ — непустое множество. Напомним, что отображение F, сопоставляющее каждой точке $x \in S$ некоторое, подмножество пространства Y называется *многозначным отображением* и обозначается $F\colon S \rightrightarrows Y$.

Пусть A, $B \subset X$ — непустые замкнутые ограниченые подмножества. Величина

$$\rho_H(A, B) = \sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\|x-y\| + \sup_{y\in B}\inf_{x\in A}\|x-y\|$$

называется *расстоянием Хаусдорфа* между множествами A и B. Расстояние Хаусдорфа является метрикой на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства X.

Многозначное отображение $F\colon S \rightrightarrows Y$ с ограниченными значениями (т. е. для любого $x \in S$ множество $F(x)$ ограничено) называется *непрерывным по Хаусдорфу* в точке $x \in S$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $y \in S$, $\|y - x\| < \delta$, будет $\rho_H(F(y), F(x)) < \varepsilon$.

Пусть X — метрическое пространство, $A \subset X$ — некоторое множество. Множество A называется компактным, если из всякой бесконечной последовательности $\{x_k\} \subset A$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в X к некоторому пределу.

Напомним, что подмножество A пространства X называется *выпуклым*, если для любых x, $y \in A$ и $\alpha \in [0, 1]$ будет $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$.

Для произвольного множества $A \subset X$ наименьшее (по включению) выпуклое множество, содержащее A, называется *выпуклой оболочкой* множества A и обозначается $\operatorname{co} A$.

Функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ называется *выпуклой*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

Выпуклая функция $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется собственной, если она не равна тождественно $+\infty$.

Линейный функционал $p \in X^*$ называется *субградиентом* собственной выпуклой функции $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точке $x \in \operatorname{dom} f$, если для любого $y \in X$ справедливо неравенство $f(y) - f(x) \geqslant p(y) - p(x)$. *Субдифференциалом* функции f в точке x называется множество (обозначаемое $\partial f(x)$), состоящее из всех субградиентов функции f в точке x, т.е.

$$\partial f(x) = \{p \in X^* \mid f(y) - f(x) \geqslant p(y) - p(x) \quad \forall y \in X\}.$$

Отображение $x \to \partial f(x)$ называется субдифференциальным.

Пусть $\Omega \in X$ — некоторое непустое множество нормированного пространства X. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется гиподифференцируемой на множестве Ω, если для любого $x \in \Omega$ существует выпуклый компакт $df(x) \in \mathbb{R} \times X^*$ такой, что для любого допустимого приращения $\Delta x \in X$ (т. е. $\mathrm{co}\{x + \Delta x\} \in \Omega$) соответствующее приращение функции представимо в следующем виде

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \max_{[a,\varphi] \in df(x)} (a + \varphi(\Delta x)) + o(\Delta x, x),$$

$$o(\alpha \Delta x, x)/\alpha \to 0 \text{ при } \alpha \to 0.$$

Отображение $x \to df(x)$ называется гиподифференциальным.

Функция f называется непрерывно гиподифференцируемой в точке $x \in \Omega$, если она гиподифференцируема в некоторой окрестности этой точки и существует непрерывное (по Хаусдорфу) гиподифференциальное отображение df в этой точке.

Рассмотрим экстремальную задачу вида

$$f \to \inf_{x \in \Omega},$$

где Ω — некоторое непустое подмножество пространства X, а вещественная функция f определена на X. Предположим, что решение этой задачи существует.

Пусть множество Ω задано в виде

$$\Omega = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\},$$

где $\varphi\colon X \to [0, +\infty)$ — некоторая неотрицательная функция. Например, можно взять

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1, \text{ если } x \notin \Omega, \\ \varphi(x) = 0, \text{ если } x \in \Omega. \end{cases}$$

Для любого неотрицательного λ введём функцию

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda \varphi(x),$$

которая называется *штрафной функцией* для заданных f и φ, а число λ называется *штрафным параметром.*

Штрафная функция называется *точной штрафной*, если существует число $\lambda^* \geqslant 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda^*$ множество точек глобального минимума функции F_λ совпадает с множеством точек глобального минимума в задаче

$$f \to \inf_{x \in \Omega}.$$

В этом случае λ^* называется *константой точного штрафа.*

Рассмотрим множество всех функций f, заданных и измеримых на отрезке $[a, b]$ и таких, что интеграл Лебега

$$\int_a^b f^2(x)dx < +\infty$$

(такие функции называют *суммируемыми с квадратом*).

Введём норму

$$||f|| = \big(\int_a^b f^2(x)dx \big)^{1/2}.$$

и соответствующую ей метрику

$$\rho(f, g) = \big(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \big)^{1/2}.$$

Полученное метрическое пространство обозначается $L_2[a, b]$. Две функции $f(t)$ и $g(t)$ называются эквивалентными на $[a, b]$, если $f(t) = g(t)$ почти всюду на $[a, b]$. Все эквивалентные между собой функции будем считать одним и тем же элементом пространства $L_2[a, b]$.

Для произвольного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ определим *опорную функцию* вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ соотношением

$$c(F, \psi) = \sup_{f \in F} (f, \psi).$$

Глава 2

Полиномы от интегральных функционалов

В данном разделе изучаются условия минимума «полиномиального» функционала. Для «полиномиального» функционала выписан градиент Гато, найдены необходимые условия минимума, которые используются при описании метода наискорейшего спуска для рассматриваемой задачи. Дополнительно исследуется задача минимизации «полиномиального» функционала, когда присутствуют ограничения на правом конце. С помощью теории точных штрафных функций эта задача при наличии ограничений сводится к задаче безусловной минимизации. Полученные условия минимума позволяют описать метод гиподифференциального спуска для решаемой задачи. Приведены численные примеры реализации описанных методов. Задача минимизации произведения степеней интегралов находит широкое применение в аэродинамике. Также даны примеры некоторых интегральных уравнений и задачи теории управления, которые можно свести к задаче минимизации полинома от интегральных функционалов.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$y(x, \dot{x}, u, t) = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

Считаем систему полностью управляемой [34]. Здесь $T > 0$ — заданный момент времени, y – вещественная n-мерная вектор-функция, x – n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывно дифференцируемой на $[0, T]$, управление u принадлежит некоторому фиксированному множеству допустимых управлений

$$U = \{u \in C_m[0, T] \mid u(t) \in V \ \forall t \in [0, T]\},$$

где $V \subset R^m$ – компактное множество. Предполагаем $y(x, \dot{x}, u, t)$ непрерывно дифференцируемой по x, $\dot{x}$ и u и непрерывной по всем четырём аргументам.

Пусть требуется подобрать такое управление $u \in U$, при котором решение задачи (2.1), (2.2) удовлетворяет следующему условию:

$$\int_0^T y_0(x, \dot{x}, u, t)dt = L, \tag{2.3}$$

где s-мерная вещественная вектор-функция y_0 может содержать в себе информацию о положении объекта системы, значении его скорости и ограничениях на управление, L – заданный вектор из R^s. Считаем, что y_0 непрерывно дифференцируема по x, $\dot{x}$ и u и непрерывна по всем четырём аргументам. С помощью (2.3) могут быть записаны, например, интегральное ограничение на управление вида

$$\int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt = 1$$

или ограничение на конечное состояние системы

$$x_0 + \int_0^T \dot{x}(t)dt = x_T.$$

Задачу (2.1)–(2.3) сведём к минимизации следующего функционала на всём пространстве:

$$P_2 = \int_0^T \big(y(x, z, u, t), y(x, z, u, t)\big)dt + \sum_{i=1}^{s} \Big(\int_0^T y_{0i}(x, z, u, t)dt - L_i\Big)^2, \tag{2.4}$$

где

$$z(t) = \dot{x}(t), \ \ z \in C_n[0, T],$$

$$y(x, z, u, t) = y(x_0 + \int_0^t z(\tau), z, u, t),$$

$$y_0(x, z, u, t) = y_0(x_0 + \int_0^t z(\tau), z, u, t),$$

а y_{0i} — i-я компонента вектор-функции y_0.

Функционал (2.4) содержит линейное слагаемое и сумму квадратов от интегральных функционалов. Таким образом, задача (2.1)–(2.3) свелась к минимизации полинома второй степени от интегральных функционалов. Аналогично можно рассмотреть задачу минимизации полиномов высших степеней.

В работах [109, 110] описывалась задача минимизации произведения степеней интегральных функционалов, зависящих от искомой функции и её производной. При этом значения функции в начальный и конечный моменты времени считались фиксированными. Задача сводилась к решению дифференциального уравнения второго порядка, а после вывода его общего решения с учётом краевых условий — к $n+2$ алгебраическим уравнениям с $n+2$ неизвестными, где n — количество сомножителей в произведении степеней интегралов. В этих работах и ряде других (см., например, [107, 111]) охарактеризовано приложение полученных результатов к аэродинамике, а именно, к определению оптимальных в каком-то смысле форм аэродинамических объектов.

В данном разделе выводятся необходимые условия минимума функционала (далее будем называть его «полиномиальным»)

$$P_k\big[I_1(x),\ldots,I_n(x)\big] \tag{2.5}$$

с заданным начальным условием

$$x(0)=x_0. \tag{2.6}$$

В выражении (2.5) P_k — полином заданной конечной степени $k\in N$ (его общий вид будет выписан ниже), а I_j, $j=\overline{1,n}$, — интегральный функционал

$$I_j(x)=\int\limits_0^T f_j\big(x(t),\dot{x}(t),t\big)dt,$$

рассматриваемый в классической задаче вариационного исчисления [15]. Здесь $T>0$ — некоторый фиксированный момент времени, f_j — заданная вещественная скалярная функция, непрерывная по всем трём аргументам и непрерывно дифференцируемая по x и $\dot{x}$, x — n-мерная вектор-функция координат, непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0,T]$.

Положим

$$z(t)=\dot{x}(t),\quad z\in C_n[0,T].$$

Тогда с учётом (2.6) имеем

$$x(t)=x_0+\int\limits_0^t z(\tau)d\tau.$$

Требуется найти такую вектор-функцию $x^*\in C_n^1[0,T]$, удовлетворяющую ограничению (2.6), которая доставляет минимум «полиномиальному» функционалу (2.5).

2.2 Необходимые условия минимума

Сначала изучим частный случай, когда минимизируемый функционал имеет следующий вид:

$$P_2(z) = \Big[\int\limits_0^T f\big(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt\Big]^2, \tag{2.7}$$

общий случай будет описан далее. Найдём производную $P_2'(z,v)$ по направлению $v \in C_n[0,T]$ функционала (2.7). Имеем

$$P_2(z+\alpha v) = \Big[\int\limits_0^T f\big(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau)d\tau, z(t)+\alpha v(t), t\big)dt\Big]^2 =$$

$$= \Big[\int\limits_0^T f\big(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt + \alpha \int\limits_0^T \Big\{ \big(\frac{\partial f}{\partial x}, \int\limits_0^t v(\tau)d\tau\big) + \big(\frac{\partial f}{\partial z}, v(t)\big)\Big\}dt + o(\alpha)\Big]^2 =$$

$$= P_2(z) + 2\alpha \int\limits_0^T \Big\{ \big(\frac{\partial f}{\partial x}, \int\limits_0^t v(\tau)d\tau\big) + \big(\frac{\partial f}{\partial z}, v(t)\big)\Big\}dt \int\limits_0^T f\big(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt + o(\alpha) =$$

$$= P_2(z) + 2\alpha \int\limits_0^T \Big\{ \big(\int\limits_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\tau, v(t)\big) + \big(\frac{\partial f}{\partial z}, v(t)\big)\Big\}dt \int\limits_0^T f\big(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt + o(\alpha),$$

$$\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \tag{2.8}$$

Из (2.8) далее получаем

$$P_2'(z,v) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{P_2(z+\alpha v) - P_2(z)}{\alpha} =$$

$$= 2\int\limits_0^T \Big\{ \big(\int\limits_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\tau, v(t)\big) + \big(\frac{\partial f}{\partial z}, v(t)\big)\Big\}dt \int\limits_0^T f\big(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt. \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, что функционал P_2 дифференцируем по Гато [43] в точке z и его градиент выражается по формуле

$$\nabla P_2(z) = 2\Big[\int\limits_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f}{\partial z}\Big] \int\limits_0^T f\big(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)dt. \tag{2.10}$$

Отсюда заключаем, что, для того чтобы вектор-функция $z^* \in C_n[0,T]$ была точкой минимума функционала (2.7), необходимо выполнение соотношений

$$\begin{gathered} \Big[\int\limits_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f}{\partial z}\Big] \int\limits_0^T f\big(x_0 + \int\limits_0^t z^*(\tau)d\tau, z^*(t), t\big)dt = 0_n \quad \forall t \in [0,T], \\ \frac{\partial f(x^*, z^*, T)}{\partial z} \int\limits_0^T f\big(x_0 + \int\limits_0^t z^*(\tau)d\tau, z^*(t), t\big)dt = \mathbf{0}, \end{gathered} \tag{2.11}$$

в которых 0_n — нулевой элемент пространства $C_n[0,T]$. Второе равенство в (2.11) вытекает из первого при $t = T$ и представляет собой условие трансверсальности на правом конце.

Теперь получим выражения, аналогичные (2.9) и (2.10), и необходимое условие минимума, подобное (2.11), для «полиномиального» функционала

$$P_k\big[I_1(x), \dots, I_n(x)\big].$$

В общем случае «полиномиальный» функционал имеет вид

$$P_k = \sum_{i=1}^{\ell} a_i F_i,$$

где

$$F_i = \Big(\int\limits_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} \times \dots \times \Big(\int\limits_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i}.$$

Здесь

$$f_j = f_j(x,z,t), \quad j = \overline{1,n},$$

$$k = \max_{i=\overline{1,\ell}} (m_1^i + \dots + m_n^i), \quad m_j^i \in N \cup \{0\}.$$

Обозначим

$$\begin{cases} f_1^i = \Big(\int\limits_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i - 1} \times \Big(\int\limits_0^T f_2 dt\Big)^{m_2^i} \times \dots \times \Big(\int\limits_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i}, \text{ если } m_1^i \geqslant 1, \\ \hfill f_1^i = 0, \text{ если } m_1^i = 0, \end{cases}$$

$$\dots$$

$$\begin{cases} f_j^i = \Big(\int\limits_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} \times \dots \times \Big(\int\limits_0^T f_{j-1} dt\Big)^{m_{j-1}^i} \times \Big(\int\limits_0^T f_j dt\Big)^{m_j^i - 1} \times \\ \qquad \times \Big(\int\limits_0^T f_{j+1} dt\Big)^{m_{j+1}^i} \times \dots \times \Big(\int\limits_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i}, \text{ если } m_j^i \geqslant 1, \\ \hfill f_j^i = 0, \text{ если } m_j^i = 0, \end{cases}$$

$$\dots$$

$$\begin{cases} f_n^i = \Big(\int\limits_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} \times \dots \times \Big(\int\limits_0^T f_{n-1} dt\Big)^{m_{n-1}^i} \times \Big(\int\limits_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i - 1}, \text{ если } m_n^i \geqslant 1, \\ \hfill f_n^i = 0, \text{ если } m_n^i = 0, \end{cases}$$

где $f_j^i = f_j^i\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z, t\big)$, $i = \overline{1,\ell}$, $j = \overline{1,n}$.

Вначале найдём вариацию функционала F_i. Проводя вычисления, аналогичные (2.8), (2.9), получаем

$$F_i(z+\alpha v) = \Bigg[\int\limits_0^T f_1\big(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau) d\tau, z(t) + \alpha v(t), t\big)dt\Bigg]^{m_1^i} \times \ldots \times$$

$$\times \Bigg[\int\limits_0^T f_n\big(x_0 + \int\limits_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau) d\tau, z(t) + \alpha v(t), t\big)dt\Bigg]^{m_n^i} =$$

$$= \Bigg[\Big(\int\limits_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} + \alpha m_1^i \int\limits_0^T \Big(\int\limits_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z}, v(t)\Big)dt \Big(\int\limits_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i - 1} + o(\alpha)\Bigg] \times \ldots \times$$

$$\times \Bigg[\Big(\int\limits_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i} + \alpha m_n^i \int\limits_0^T \Big(\int\limits_t^T \frac{\partial f_n}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_n}{\partial z}, v(t)\Big)dt \Big(\int\limits_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i - 1} + o(\alpha)\Bigg] =$$

$$= \Big(\int\limits_0^T f_1 dt\Big)^{m_1^i} \times \ldots \times \Big(\int\limits_0^T f_n dt\Big)^{m_n^i} + \alpha m_1^i f_1^i \int\limits_0^T \Big(\int\limits_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z}, v(t)\Big)dt +$$

$$+ \ldots + \alpha m_n^i f_n^i \int\limits_0^T \Big(\int\limits_t^T \frac{\partial f_n}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_n}{\partial z}, v(t)\Big)dt + o(\alpha),$$

$$\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0, \quad (2.12)$$

$$F_i'(z,v) = m_1^i f_1^i \int\limits_0^T \Big(\int\limits_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z}, v(t)\Big)dt + \ldots +$$

$$+ m_n^i f_n^i \int\limits_0^T \Big(\int\limits_t^T \frac{\partial f_n}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_n}{\partial z}, v(t)\Big)dt + o(\alpha),$$

$$\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0, \quad (2.13)$$

и градиент Гато для функционала F_i

$$\nabla F_i = \sum_{j=1}^n \Bigg(\int\limits_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z}\Bigg) m_j^i f_j^i. \quad (2.14)$$

Далее для «полиномиального» функционала P_k с учётом (2.12)–(2.14) имеем

$$P_k(z+\alpha v) = P_k(z) + \alpha \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^n m_j^i f_j^i \int\limits_0^T \Bigg(\int\limits_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z}, v(t)\Bigg)dt + o(\alpha),$$

$$\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

$$P_k'(z,v) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} m_j^i f_j^i \int_0^T \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z}, v(t) \right) dt$$

и градиент Гато

$$\nabla P_k = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i.$$

Таким образом, для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала P_k, необходимо [23] выполнение соотношений

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \left(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) m_j^i f_j^i = 0_n \quad \forall t \in [0,T], \\ \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x^*, z^*, T)}{\partial z} m_j^i f_j^i = \mathbf{0}, \end{gathered} \tag{2.15}$$

где второе равенство представляет собой условие трансверсальности на правом конце.

Заметим, что в случае $n = \ell = 1$, $a_1 = 1$, $m_1^1 = 1$ первый сомножитель в (2.15) равен 1, и мы приходим к необходимым условиям минимума

$$\int_t^T \frac{\partial f_1}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0_n \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial f_1(x^*, z^*, T)}{\partial z} = \mathbf{0}. \tag{2.17}$$

Дифференцируя (2.16) на интервале $[0,T]$, получаем уравнение Эйлера в дифференциальной форме для классической задачи вариационного исчисления. Выражение (2.17) представляет собой условие трансверсальности на правом конце.

2.3 Метод наискорейшего спуска

Опишем следующий метод наискорейшего спуска [37] для поиска стационарных точек функционала P_k.

Фиксируем произвольное $z_1 \in C_n[0,T]$. Пусть уже построено $z_p \in C_n[0,T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (2.15), то z_p является стационарной точкой функционала P_k, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{p+1} = z_p + \gamma_p q_p, \tag{2.18}$$

где $q_p = q(t, z_p)$ – это антиградиент функционала P_k в точке z_p, который находится по формуле

$$q_p = -\sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i, \tag{2.19}$$

а γ_p есть решение задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geqslant 0} P(z_p + \gamma q_p) = P(z_p + \gamma_p q_p). \tag{2.20}$$

Тогда

$$P_k(z_{p+1}) \leqslant P_k(z_p).$$

Если последовательность $\{z_p\}$ бесконечна, то при некоторых дополнительных предположениях метод наискорейшего спуска сходится [37] в следующем смысле:

$$||q(z_p)|| = \sqrt{\int_0^T (q_p, q_p) dt} \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Если последовательность $\{z_p\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала P_k по построению.

Для иллюстрации работы метода наискорейшего спуска рассмотрим пример.

Пример 2.3.1. Пусть требуется найти минимум функционала

$$P_2 = \Big[\int_0^1 \Big\{ \dot{x}^2(t) + x(t) \Big\} dt \Big]^2, \ x(0) = 1. \tag{2.21}$$

Положим $z_1(t) = 0$, тогда $x_1(t) = 1$, $P_2(z_1) = 1$. В данном случае из (2.21) имеем

$$\int_t^1 \frac{\partial f}{\partial x} d\tau = 1 - t,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z(t)$$

для всех $t \in [0, 1]$. По формуле (2.19) получаем выражение для антиградиента в точке z_1

$$q_1(t) = -(1 - t) \int_0^1 1 \ dt = (t - 1).$$

По формуле (2.18)

$$z_2(t) = -\gamma(1 - t).$$

Тогда

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t \big(-\gamma(1 - \tau) \big) d\tau = 1 - \gamma t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Решая задачу (2.20), находим

$$\min_{\gamma\geqslant 0} P_2(z_1+\gamma q_1) = \min_{\gamma\geqslant 0}\Big[\int_0^T \Big\{\big(-\gamma(1-t)\big)^2 + 1 - \gamma t + \frac{1}{2}\gamma t^2\Big\}dt\Big]^2,$$

откуда $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Имеем

$$z_2(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, \tag{2.22}$$

$$x_2(t) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2, \tag{2.23}$$

тогда

$$\int_t^1 \frac{\partial f(x_2, z_2, t)}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f(x_2, z_2, t)}{\partial z} = 0. \tag{2.24}$$

Из (2.24) следует, что в точке z_2 необходимое условие (2.11) минимума выполнено. Таким образом, функционал P_2 достигает минимума в точке z_2, определяемой соотношением (2.22) (а тогда x_2 выражается по формуле (2.23)), здесь $P_2(z_2) = \frac{121}{144}$. Отметим, что в этом примере метод наискорейшего спуска привёл к точке минимума за один шаг.

2.4 Случай ограничения на правом конце

Вернёмся к исходной постановке задачи. Пусть помимо начального условия (2.6) задано ограничение на правом конце

$$x(T) = x_T. \tag{2.25}$$

Требуется найти такую вектор-функцию x^*, удовлетворяющую ограничениям (2.6), (2.25), которая доставляет минимум «полиномиальному» функционалу (2.5).

Введём функцию

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(z), \tag{2.26}$$

в которой

$$\varphi_i(z) = \Big|x_{0i} + \int_0^T z_i(t)dt - x_{Ti}\Big|.$$

Здесь x_{0i} — i-ая компонента вектора x_0, а x_{Ti} — i-ая компонента вектора x_T, $i = \overline{1,n}$. Нетрудно убедиться, что $\varphi(z) = 0$, когда (2.25) выполняется, и $\varphi(z) > 0$, если (2.25) не имеет места.

Теперь можно составить функционал

$$\Phi_\lambda(z) = P_k(z) + \lambda\varphi(z), \tag{2.27}$$

где λ — достаточно большое положительное число. Ниже будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях это точная штрафная функция. Тогда задачу минимизации (2.5) при наличии ограничений (2.6), (2.25) можно свести к безусловной минимизации функционала (2.27).

2.5 Дифференциальные свойства функционала φ

Рассмотрим функционал φ подробнее. Обозначим

$$\overline{\varphi}_i(z) = x_{0i} + \int\limits_0^T z_i(t)dt - x_{Ti}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Введём индексные множества

$$I_0 = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\varphi}_i(z) = 0\},$$

$$I_- = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\varphi}_i(z) < 0\},$$

$$I_+ = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\varphi}_i(z) > 0\}.$$

Нам также потребуются множества

$$\Omega = \{z \in C_n[0,T] \mid \varphi(z) = 0\},$$

$$\Omega_\delta = \{z \in C_n[0,T] \mid \varphi(z) < \delta\},$$

$$\Omega_\delta \setminus \Omega = \{z \in C_n[0,T] \mid 0 < \varphi(z) < \delta\}.$$

Пусть сначала $\varphi(z) = 0$. В этом случае функция φ субдифференцируема, и её субдифференциал с учётом (2.26) имеет вид

$$\partial\varphi(z) = \Big\{ \sum_{i=1}^n \omega_i e_i \mid \omega_i \in [-1,1],\ i = \overline{1,n} \Big\}. \tag{2.28}$$

Пусть теперь $\varphi(z) > 0$. В данном случае функция φ также оказывается субдифференцируемой, и её субдифференциал с учётом (2.26) выражается по формуле

$$\partial\varphi(z) = \Big\{ \sum_{i \in I_0} \omega_i e_i + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \mid \omega_i \in [-1,1],\ i \in I_0,$$

$$\mu_i = 0,\ \text{если}\ i \in I_0,\ \mu_i = 1,\ \text{если}\ i \in I_+,\ \mu_i = -1,\ \text{если}\ i \in I_- \Big\}.$$

Используя ту же технику, что и в [62, 65], можно показать, что имеет место

Теорема 2.5.1. *Пусть найдётся такое положительное число $\lambda_0 < \infty$, что $\forall \lambda > \lambda_0$ существует $z(\lambda) \in C_n[0,T]$, для которого $\Phi_\lambda(z(\lambda)) = \inf\limits_{z \in C_n[0,T]} \Phi_\lambda(z)$. Пусть также функционал P_k является липшицевым на множестве $\Omega_\delta \setminus \Omega$. Тогда функционал (2.27) будет точной штрафной функцией.*

Теперь можно сформулировать необходимые условия минимума «полиномиального» функционала.

Теорема 2.5.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.5.1. Для того чтобы точка*

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t z^*(\tau)d\tau$$

удовлетворяла ограничениям (2.6), (2.25) *и точка* z^* *доставляла минимум функционалу* (2.5)*, необходимо, чтобы для всех* t *из промежутка* $[0,T]$ *выполнялось включение*

$$0_n \in \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int\limits_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \omega_i e_i \mid \omega_i \in [-1,1],\ i = \overline{1,n} \Big\}. \tag{2.29}$$

Доказательство. По Теореме 2.5.1 функционал (2.27) — точная штрафная функция, поэтому существует такое число λ^*, что $\forall \lambda > \lambda^*$ задача минимизации функционала (2.5) при наличии ограничений (2.6), (2.25) эквивалентна задаче безусловной минимизации (2.27). Для того чтобы z^* была точкой минимума (2.27), необходимо [23] выполнение соотношения

$$0_n \in \partial \Phi(z^*). \tag{2.30}$$

Поскольку при $z \in \Omega$ субдифференциал функции φ выражается соотношением (2.28), а функционал P_k дифференцируем по Гато и его градиент выписан в (2.15), то условие (2.30) запишется в виде

$$0_n \in \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int\limits_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \omega_i e_i \mid \omega_i \in [-1,1],\ i = \overline{1,n} \Big\},$$

и включение (2.29) доказано. □

2.6 Метод гиподифференциального спуска

Найдём гиподифференциал функционала Φ. Для гиподифференциала функционалов φ_i, $i = \overline{1,n}$, имеем следующее выражение [25]:

$$d\varphi_i(z) = \mathrm{co}\big\{[\overline{\varphi}_i(z) - \varphi_i(z), e_i], [-\overline{\varphi}_i(z) - \varphi_i(z), -e_i]\big\}.$$

Тогда гиподифференциал функционала Φ находится по формуле

$$d\Phi(z) = \Big[0, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i \Big] + \lambda \sum_{i=1}^{n} d\varphi_i(z).$$

Известно, что необходимым условием минимума функционала (2.27) в точке z^* в терминах гиподифференциала является условие [25]

$$[0, 0_n] \in d\Phi(z^*). \tag{2.31}$$

Переход от субдифференциала к гиподифференциалу обусловлен тем фактом, что гиподифференциальное отображение, в отличие от субдифференциального, является непрерывным в метрике Хаусдорфа [25], а это позволит гарантировать сходимость в некотором смысле рассматриваемого численного метода.

Найдём минимальный по норме гипоградиент $h = h(t, z) \in d\Phi(z)$, т. е. решим задачу

$$\min_{h \in d\Phi(z)} ||h||^2 = \min_{\beta_k \in [0,1],\ k=\overline{1,n}} ||h(\beta_1, \ldots, \beta_n)||^2, \tag{2.32}$$

где

$$h(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \Big[0, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i \Big] + \lambda \big(\beta_1[\overline{\varphi}_1 - \varphi_1, e_1] +$$

$$+ (1-\beta_1)[-\overline{\varphi}_1 - \varphi_1, -e_1] + \cdots + \beta_n[\overline{\varphi}_n - \varphi_n, e_n] + (1-\beta_n)[-\overline{\varphi}_n - \varphi_n, -e_n]\big) =$$

$$= [\lambda(2\beta_1 - 1)\overline{\varphi}_1 + \cdots + \lambda(2\beta_n - 1)\overline{\varphi}_n - \lambda\varphi, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i +$$

$$+ \lambda(2\beta_1 - 1)e_1 + \cdots + \lambda(2\beta_n - 1)e_n] =$$

$$= \big[\lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i - 1)\overline{\varphi}_i - \lambda\varphi, \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i - 1)e_i\big].$$

Таким образом, задачу (2.32) можно переписать следующим образом:

$$\min_{\beta_k \in [0,1],\ k=\overline{1,n}} \Big\{ \big(\lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i - 1)\overline{\varphi}_i - \lambda\varphi\big)^2 +$$

$$+ \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i - 1)e_i \Big]^2 dt \Big\}. \tag{2.33}$$

Задача (2.33) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений. Для её решения можно использовать, например, метод Вульфа или его модификацию [17]. Обозначим это решение $(\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$.

Вектор-функция

$$q^*(t,z) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_t^T \frac{\partial f_j}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_j}{\partial z} \Big) m_j^i f_j^i + \lambda \sum_{i=1}^{n} (2\beta_i^* - 1) e_i \tag{2.34}$$

состоит из последних n компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала Φ. Если $||q^*(z)|| > 0$ (в данном случае z не является стационарной точкой Φ), то $-\frac{q^*(t,z)}{||q^*(z)||}$ представляет собой направление спуска функционала Φ в точке z.

Перейдем к описанию метода гиподифференциального спуска [25] для нахождения стационарных точек функционала Φ. Выберем произвольное $z_1 \in C_n[0,T]$. Пусть уже найдено $z_p \in C_n[0,T]$. Если $\varphi(z_p) = 0$ и выполнено необходимое условие минимума (2.29) или (2.31), то точка z_p стационарная, и процесс прекращается. Если же условие $\varphi(z_p) = 0$ не выполнено или $\varphi(z_p) = 0$, но не выполнено необходимое условие минимума (2.29) или (2.31), то положим

$$z_{p+1} = z_p - \gamma_p q_p^*,$$

где $q_p^* = q^*(t, z_p)$ определяется формулой (2.34), а γ_p является решением задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geqslant 0} \Phi(z_p - \gamma q_p^*) = \Phi(z_p - \gamma_p q_p^*).$$

Тогда

$$\Phi(z_{p+1}) \leqslant \Phi(z_p).$$

Если последовательность $\{z_p\}$ бесконечна, то можно показать, что метод гиподифференциального спуска сходится [23] в следующем смысле:

$$||h(z_p)|| = \sqrt{\int_0^T \big(h(t,z_p), h(t,z_p)\big) dt} \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Если последовательность $\{z_p\}$ конечна, то последняя её точка есть стационарная точка функционала Φ по построению.

Для иллюстрации работы метода гиподифференциального спуска рассмотрим пример.

Пример 2.6.1. Пусть требуется найти минимум функционала

$$P_2 = \Big[\int_0^1 \Big\{ \dot{x}^2(t) - t x(t) \Big\} dt \Big]^2, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 2.$$

Положим $\lambda = 100$, $z_1(t) = 0$, тогда $x_1(t) = 1$. В данном случае субдифференциал функционала Φ имеет вид

$$\partial \Phi(z) = \big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^2 + 2z(t) \big) I_1(x) + \lambda(\omega + \mu),$$

где

$$I_1(x) = \int\limits_0^1 \Big\{\dot{x}^2(t) - tx(t)\Big\}dt = \int\limits_0^1 \Big\{z^2(t) - t\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau\big)\Big\}dt,$$

а величины ω и ν определены в выражении для субдифференциала $\partial\varphi(z)$ перед Теоремой 2.5.1. Гиподифференциал функционала Φ вычисляется по формуле

$$d\Phi(z) = \big[0, \big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2 + 2z(t)\big)I_1(x)\big] + \lambda\text{co}\big\{[\overline{\varphi}(z) - \varphi(z), 1], [-\overline{\varphi}(z) - \varphi(z), -1]\big\},$$

здесь

$$\varphi(z) = |\overline{\varphi}(z)|,\ \overline{\varphi}(z) = x_0 + \int\limits_0^T z(t)dt - x_T.$$

В Таблице 2.6.1 приведены результаты работы метода гиподифференциального спуска.

Таблица 2.6.1. Результаты работы МГС

k	z_k	x_k	$\|\|q^*(z_k)\|\|$	$\Phi(z_k)$
1	0	1	99.833	100.25
2	$0.99917 + 0.0025t^2$	$1 + 0.99917t + 0.0008(3)t^3$	0.00419	0.02782
3	$1.08(3) - 0.25t^2$	$1 + 1.08(3)t - 0.08(3)t^3$	0	0.02596

Из Таблицы 2.6.1 видно, что в точке z_3 необходимое условие (2.31) минимума выполнено ($q^*(z_3) = 0$).

2.7 Некоторые приложения

Приведём примеры задач, которые могут приводить к необходимости минимизации «полиномиального» функционала.

Рассмотрим вначале задачу нахождения таких вектор-функций $x \in C_n^1[0, T]$ с заданным начальным положением x_0, которые удовлетворяют интегральному соотношению

$$\int\limits_0^T g(x, \dot{x}, t)dt = K, \tag{2.35}$$

где K — заданная константа. Функцию $g(x, \dot{x}, t)$ считаем вещественной, непрерывно дифференцируемой по x и $\dot{x}$ и непрерывной по всем трём аргументам. Нетрудно видеть, что задача (2.35) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$P_2 = \Big(\int\limits_0^T g(x, \dot{x}, t)dt - K\Big)^2,$$

который представляет собой квадратичный трёхчлен от интегрального функционала. Если дополнительно присутствует ограничение на правом конце x_T, то требуется минимизировать функционал

$$P_2 = \Big(\int\limits_0^T g(x,\dot{x},t)dt - K\Big)^2 + \Big(x_0 + \int\limits_0^T \dot{x}(t)dt - x_T\Big)^2. \tag{2.36}$$

Заметим, что в отличие от общего случая задачи с ограничением на правом конце, рассмотренного выше, здесь минимум функционала (2.36) ищется на всём пространстве, поскольку предполагается, что существует решение задачи (2.35), удовлетворяющее заданным начальному и конечному условиям. Поэтому в данном случае не возникает необходимости строить точную штрафную функцию и использовать методы негладкой оптимизации.

Аналогичным образом к задаче минимизации «полиномиального» функционала можно свести любое интегральное соотношение, содержащее положительные степени интегральных функционалов и константы.

Вернёмся к задаче (2.1)–(2.3). С учётом (2.4) нетрудно проверить, что имеет место

Теорема 2.7.1. *Для того чтобы решение*

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t z^*(\tau)d\tau$$

системы (2.1) *при управлении* $u^* \in U$ *удовлетворяло условиям* (2.2), (2.3) *необходимо, чтобы для всех* t *из промежутка* $[0,T]$ *выполнялись соотношения*

$$\int\limits_t^T \Big(\frac{\partial y(x^*,z^*,u^*,\tau)}{\partial x}\Big)' y(x^*,z^*,u^*,\tau)d\tau + \Big(\frac{\partial y(x^*,z^*,u^*,t)}{\partial z}\Big)' y(x^*,z^*,u^*,t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \Big(\int\limits_0^T y_{0i}(x^*,z^*,u^*,t)dt - L_i\Big)\Big(\int\limits_t^T \frac{\partial y_{0i}(x^*,z^*,u^*,\tau)}{\partial x}d\tau + \frac{\partial y_{0i}(x^*,z^*,u^*,t)}{\partial z}\Big) = 0_n,$$

$$\Big(\frac{\partial y(x^*,z^*,u^*,t)}{\partial u}\Big)' y(x^*,z^*,u^*,t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \Big(\int\limits_0^T y_{0i}(x^*,z^*,u^*,t)dt - L_i\Big)\frac{\partial y_{0i}(x^*,z^*,u^*,t)}{\partial u} = 0_m.$$

Наконец, если система (2.1) разрешена относительно производных, т. е. рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot{x} = y(x,u,t) \tag{2.37}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2.38}$$

то из Теоремы 2.7.1 следует

Теорема 2.7.2. *Для того чтобы решение*

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t z^*(\tau)d\tau$$

системы (2.37) *при управлении* $u^* \in U$ *удовлетворяло условиям* (2.3), (2.38) *необходимо, чтобы для всех* t *из промежутка* $[0,T]$ *выполнялись соотношения*

$$z^*(t) - y(x^*, z^*, u^*, t) - \int\limits_t^T \Big(\frac{\partial y(x^*, z^*, u^*, \tau)}{\partial x}\Big)'\big(z^*(\tau) - y(x^*, z^*, u^*, \tau)\big)d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^s \Big(\int\limits_0^T y_{0i}(x^*, z^*, u^*, t)dt - L_i\Big)\Big(\int\limits_t^T \frac{\partial y_{0i}(x^*, z^*, u^*, \tau)}{\partial x}d\tau + \frac{\partial y_{0i}(x^*, z^*, u^*, t)}{\partial z}\Big) = 0_n,$$

$$\Big(-\frac{\partial y(x^*, z^*, u^*, t)}{\partial u}\Big)'\big(z^*(t) - y(x^*, z^*, u^*, t)\big) +$$

$$+\sum_{i=1}^s \Big(\int\limits_0^T y_{0i}(x^*, z^*, u^*, t)dt - L_i\Big)\frac{\partial y_{0i}(x^*, z^*, u^*, t)}{\partial u} = 0_m.$$

Как уже было отмечено выше, необходимость минимизации произведения степеней интегралов возникает в задаче определения оптимальных в том или ином смысле форм аэродинамических объектов. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу минимизации следующего интеграла качества:

$$I = I_1^{m_1} I_2^{m_1} I_3^{m_3},$$

здесь

$$I_1 = \int\limits_0^1 x(t)\dot{x}^3(t)dt, \quad I_2 = \int\limits_0^1 x(t)dt, \quad I_3 = \int\limits_0^1 x^2(t)dt,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$

а m_1, m_2, m_3 — некоторые целые неотрицательные числа. Мы не останавливаемся подробно на физическом смысле функционала I. Отметим лишь, что интегралы I_1, I_2, I_3 с точностью до постоянных множителей представляют собой лобовое сопротивление, площадь и объём объекта соответственно и возникают при рассмотрении осесимметричного тонкого тела, находящегося в ньютоновском гиперзвуковом потоке под нулевым углом атаки. Детальное описание данной задачи можно найти в [111].

Глава 3

Программное управление

В этом разделе иллюстрируется применение метода субдифференциального спуска и метода гиподифференциального спуска к задаче нахождения программного управления динамикой объекта, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В некоторых работах, например [34, 32], представлено аналитическое решение задачи построения программного управления как для линейных систем, так и для нелинейного случая. Однако в этом аналитическом решении используется фундаментальная матрица системы, получить которую даже в случае линейных нестационарных систем, вообще говоря, не представляется возможным.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(x, u, t), \ t \in [0, T], \tag{3.1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.2}$$

$$x(T) = x_T. \tag{3.3}$$

Считаем систему (3.1) управляемой [34] из начального положения (3.2) в конечное состояние (3.3). Здесь $T > 0$ — заданный момент времени, $f(x, u, t)$ — вещественная n-мерная вектор-функция, x — n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывной с кусочно-непрерывной на $[0, T]$ производной, x_0, $x_T \in R^n$ — заданные векторы. Предполагаем $f(x, u, t)$ непрерывно дифференцируемой по x и u и непрерывной по всем трём аргументам. Пусть m-мерное управление u принадлежит следующему множеству допустимых управлений

$$U = \{u \in P_m[0,T] \mid \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt \leqslant C\}, \tag{3.4}$$

где C — заданная константа.

Рассмотрим следующую задачу. Требуется подобрать такое управление, которое принадлежит множеству допустимых управлений (3.4) и переводит систему (3.1) из начального положения (3.2) в конечное состояние (3.3) за время T.

3.2 Сведение к вариационной задаче

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0,T]$. Тогда с учётом (3.2) имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau.$$

Введём в рассмотрение функционал

$$I(z,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(\varphi(z,u,t), \varphi(z,u,t)\big)dt + \\ + \max\{0, \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C\} + \sum_{i=1}^n \psi_i(z), \tag{3.5}$$

где

$$\varphi(z,u,t) = z(t) - f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, u, t\big),$$

$$\psi_i(z) = |\overline{\psi}_i(z)|, \ \overline{\psi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t)dt - x_{Ti}, \ i = \overline{1,n},$$

а x_{0i} — i-ая компонента вектора x_0, x_{Ti} — i-ая компонента вектора x_T, $i = \overline{1,n}$.

Нетрудно видеть, что функционал (3.5) неотрицателен для всех $z \in P_n[0,T]$ и для всех $u \in P_m[0,T]$ и обращается в ноль в точке $[z^*, u^*] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$ тогда и только тогда, когда вектор-функция

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau)d\tau$$

является программным движением, соответствующим искомому программному управлению $u^* \in U$.

3.3 Необходимые условия минимума

Введём множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0,T] \mid x_0 + \int_0^T z(t)dt = x_T\}.$$

Ниже нам также потребуются индексные множества

$$I_0 = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) = 0\},$$

$$I_- = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) < 0\},$$

$$I_+ = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) > 0\}$$

и следующие множества управлений

$$U_0 = \Big\{u \in P_m[0,T] \ \Big| \ \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C = 0\Big\},$$

$$U_- = \Big\{u \in P_m[0,T] \ \Big| \ \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C < 0\Big\},$$

$$U_+ = \Big\{u \in P_m[0,T] \ \Big| \ \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C > 0\Big\}.$$

Используя ту же технику, что и в [65] нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3.3.1. *Функционал I субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z, u]$ выражается по формуле*

$$\partial I(z,u) = \bigg\{\bigg[z(t) - f(x,u,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x,u,\tau)}{\partial x}\Big)'\big(z(\tau) - f(x,u,\tau)\big)d\tau +$$

$$+\sum_{i\in I_0}\omega_i e_i + \sum_{j=1}^{n}\mu_j e_j, -\Big(\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\Big)'\big(z(t) - f(x,u,t)\big) + 2\nu u\bigg] \ \bigg| \ \omega_i \in [-1,1], \ i \in I_0,$$

$$\mu_j = 0, \ j \in I_0, \ \mu_j = 1, \ j \in I_+, \ \mu_j = -1, \ j \in I_-,$$

$$\nu \in [0,1], \ u \in U_0, \ \nu = 1, \ u \in U_+, \ \nu = 0, \ u \in U_-\bigg\}.$$

Следствие 3.3.1. *Если $z \in \Omega$, $u \in U$, то функционал I субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z, u]$ выражается по формуле*

$$\partial I(z,u) = \bigg\{\bigg[z(t) - f(x,u,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x,u,\tau)}{\partial x}\Big)'\big(z(\tau) - f(x,u,\tau)\big)d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\omega_i e_i, -\Big(\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\Big)'\big(z(t) - f(x,u,t)\big) + 2\nu u\bigg] \ \bigg| \ \omega_i \in [-1,1], \ i = \overline{1,n}, \tag{3.6}$$

$$\nu \in [0,1], \ u \in U_0, \ \nu = 0, \ u \in U_-\bigg\}.$$

Лемма 3.3.1. *Если система* (3.1) *линейна по фазовым переменным x и по управлению u, то функционал I является выпуклым.*

Доказательство. Представим функционал (3.5) в виде

$$I(z,u) = \frac{1}{2} I_1(z,u) + I_2(u) + I_3(z),$$

где $I_1(z,u)$, $I_2(u)$, $I_3(z)$ — соответствующие слагаемые из правой части (3.5). Функционалы $I_2(u)$ и $I_3(z)$ выпуклы как максимумы выпуклых функционалов [24]. Покажем выпуклость функционала I_1 в случае линейности системы (3.1).

Пусть система (3.1) имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + w(t),$$

где $A(t)$ — $n \times n$-матрица, $B(t)$ — $n \times m$-матрица, $w(t)$ — n-мерная вектор-функция. Считаем $A(t)$, $B(t)$, $w(t)$ вещественными и непрерывными на $[0,T]$. Пусть $z_1, z_2 \in P_n[0,T]$, $u_1, u_2 \in P_m[0,T]$, $\alpha \in (0,1)$. Имеем

$$I_1\big(\alpha(z_1,u_1) + (1-\alpha)(z_2,u_2)\big) = \big|\big|\alpha z_1(t) + (1-\alpha)z_2(t) -$$

$$- A(t)\big[x_0 + \int_0^t \big(\alpha z_1(\tau) + (1-\alpha)z_2(\tau)\big)d\tau\big] -$$

$$- B(t)\big[\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)\big] - w(t)\big|\big|^2 = \big|\big|\alpha\varphi(z_1,u_1) + (1-\alpha)\varphi(z_2,u_2)\big|\big|^2 =$$

$$= \alpha^2 \int_0^T \big(\varphi(z_1,u_1), \varphi(z_1,u_1)\big)dt + 2\alpha(1-\alpha)\int_0^T \big(\varphi(z_1,u_1), \varphi(z_2,u_2)\big)dt +$$

$$+ (1-\alpha)^2 \int_0^T \big(\varphi(z_2,u_2), \varphi(z_2,u_2)\big)dt = \alpha \int_0^T \big(\varphi(z_1,u_1), \varphi(z_1,u_1)\big)dt +$$

$$+ (1-\alpha)\int_0^T \big(\varphi(z_1,u_1), \varphi(z_2,u_2)\big)dt + 2\alpha(1-\alpha)\int_0^T \big(\varphi(z_1,u_1), \varphi(z_2,u_2)\big)dt -$$

$$- \alpha(1-\alpha)\int_0^T \big(\varphi(z_1,u_1), \varphi(z_1,u_1)\big)dt - \alpha(1-\alpha)\int_0^T \big(\varphi(z_2,u_2), \varphi(z_2,u_2)\big)dt =$$

$$= \alpha \int_0^T \big(\varphi(z_1,u_1), \varphi(z_1,u_1)\big)dt + (1-\alpha)\int_0^T \big(\varphi(z_2,u_2), \varphi(z_2,u_2)\big)dt -$$

$$- \alpha(1-\alpha)\int_0^T \big(\varphi(z_1,u_1) - \varphi(z_2,u_2), \varphi(z_1,u_1) - \varphi(z_2,u_2)\big)dt.$$

В силу неотрицательности последнего слагаемого имеем для всех $z_1, z_2 \in P_n[0,T]$, $u_1, u_2 \in P_m[0,T]$, $\alpha \in (0,1)$

$$I_1\big(\alpha(z_1,u_1) + (1-\alpha)(z_2,u_2)\big) \leqslant \alpha I_1(z_1,u_1) + (1-\alpha)I_1(z_2,u_2),$$

что и доказывает выпуклость функционала I_1.

Теперь остаётся заметить, что функционал I является выпуклым (в случае линейности исходной системы) как сумма выпуклых функционалов [24].

Лемма доказана. □

Известно, что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (3.5) в точке $[z^*, u^*]$ в терминах субдифференциала является условие [23]

$$0_{n+m} \in \partial I(z^*, u^*),$$

где 0_{n+m} — нулевой элемента пространства $P_n[0,T] \times P_m[0,T]$. Отсюда и из Леммы 3.3.1 заключаем, что справедлива

Теорема 3.3.2. *Для того, чтобы управление* $u^* \in U$ *переводило систему* (3.1) *из начального положения* (3.2) *в конечное состояние* (3.3) *за время* T*, необходимо, а в случае линейности системы* (3.1) *и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m} \in \partial I(z^*, u^*), \tag{3.7}$$

где выражение для субдифференциала $\partial I(z,u)$ *выписано в формуле* (3.6).

3.4 Метод субдифференциального спуска

Найдём минимальный по норме субградиент

$$h = h(t, z, u) \in \partial I(z, u)$$

в точке $[z, u]$, то есть решим задачу

$$\min_{h \in \partial I(z,u)} ||h||^2 = \min_{\omega_i,\ i \in I_0,\ \nu} \Big[\int_0^T \big(s_1(t) + \sum_{i \in I_0} \omega_i e_i\big)^2 dt + \int_0^T \big(s_2(t) + 2\nu u\big)^2 dt \Big], \tag{3.8}$$

где

$$s_1(t) = \overline{s}_1(t) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j,$$

$$\overline{s}_1(t) = z(t) - f(x,u,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x,u,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z(\tau) - f(x,u,\tau)\big) d\tau,$$

$$s_2(t) = -\Big(\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\Big)' \big(z(t) - f(x,u,t)\big),$$

а величины ω_i, $i \in I_0$, μ_j, $j = \overline{1,n}$, ν определены в Теореме 3.3.1.

Задача (3.8) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [18]. Обозначим ω_i^*, $i \in I_0$, ν^* её решение. Тогда вектор-функция

$$G(t, z, u) := h^* = \Big[s_1(t) + \sum_{i \in I_0} \omega_i^* e_i, s_2(t) + 2\nu^* u \Big]$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала I в точке $[z,u]$. Если $||G(z,u)|| > 0$, то вектор-функция $-\frac{G(t,z,u)}{||G(z,u)||}$ является направлением субдифференциального спуска функционала I в точке $[z,u]$.

Опишем следующий метод субдифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала I. Фиксируем произвольную точку $[z_1,u_1] \in P_n[0,T]\times P_m[0,T]$. Пусть уже построена точка $[z_k,u_k] \in P_n[0,T]\times P_m[0,T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (3.7), то точка $[z_k,u_k]$ является стационарной точкой функционала I, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1},u_{k+1}] = [z_k,u_k] - \alpha_k G_k,$$

где вектор-функция $G_k = G(t,z_k,u_k)$ представляет собой наименьший по норме субградиент функционала I в точке $[z_k,u_k]$, а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha\geqslant 0} I([z_k,u_k] - \alpha G_k) = I([z_k,u_k] - \alpha_k G_k).$$

Тогда

$$I(z_{k+1},u_{k+1}) \leqslant I(z_k,u_k).$$

Если последовательность $\{[z_k,u_k]\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала I по построению.

Если же последовательность $\{[z_k,u_k]\}$ бесконечна, то описанный процесс может и не привести к стационарной точке функционала I, поскольку субдифференциальное отображение $\partial I(z,u)$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа [24].

3.5 Метод гиподифференциального спуска

Найдём гиподифференциал функционала I. Для гиподифференциала функционалов ψ_i, $i=\overline{1,n}$, имеем следующее выражение [28]

$$d\psi_i(z) = \mathrm{co}\big\{\big[\,\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i\big], \big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i\big]\big\}.$$

Пусть, как и ранее,

$$I_2(u) = \max\{0, \int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt - C\}.$$

Для гиподифференциала функционала I_2 имеем выражение

$$dI_2(u) = \mathrm{co}\big\{\big[\int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt - C - I_2(u), 2u\big], \big[-I_2(u), 0_m\big]\big\}.$$

Тогда гиподифференциал функционала I выражается по формуле

$$\begin{gathered} dI(z,u) = \big[0, \overline{s}_1(t), s_2(t)\big] + \\ + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{co}\big\{\big[\,\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m\big], \big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m\big]\big\} + \\ + \mathrm{co}\big\{\big[\int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C - I_2(u), 0_n, 2u\big], \big[-I_2(u), 0_n, 0_m\big]\big\}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Переход от субдифференциала к гиподифференциалу обусловлен тем фактом, что гиподифференциальное отображение, в отличие от субдифференциального, является непрерывным в метрике Хаусдорфа [25], что позволит гарантировать сходимость в некотором смысле рассматриваемого численного метода.

Известно, что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (3.5) в точке $[z^*, u^*]$ в терминах гиподифференциала является условие [25]

$$0_{n+m+1} \in dI(z^*, u^*).$$

Отсюда и из Леммы 3.3.1 заключаем, что справедлива

Теорема 3.5.1. *Для того, чтобы управление $u^* \in U$ переводило систему* (3.1) *из начального положения* (3.2) *в конечное состояние* (3.3) *за время T, необходимо, а в случае линейности системы* (3.1) *и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m+1} \in dI(z^*, u^*), \tag{3.10}$$

где выражение для гиподифференциала $dI(z,u)$ выписано в формуле (3.9).

Найдём минимальный по норме гипоградиент

$$g(t,z,u) \in dI(z,u)$$

функционала I в точке $[z,u]$, то есть решим задачу

$$\begin{gathered} \min_{g \in dI(z,u)} ||g||^2 = \min_{\beta_i \in [0,1],\ i=\overline{1,n+1}} \Big|\Big|\big[0, \overline{s}_1(t), s_2(t)\big] + \\ + \sum_{i=1}^{n} \big\{\beta_i\big[\,\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m\big] + (1-\beta_i)\big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m\big]\big\} + \\ + \beta_{n+1}\big[\int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - C - I_2(u), 0_n, 2u\big] + (1-\beta_{n+1})\big[-I_2(u), 0_n, 0_m\big]\Big|\Big|^2. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Задача (3.11) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [18]. Обозначим β_i^*, $i = \overline{1, n+1}$, её решение. Пусть $g = [g_1, g_2]$, где вектор-функция g_2 состоит из последних $n+m$ компонент вектор-функции g. Тогда вектор-функция

$$\overline{G}(t,z,u) := g_2^* = \big[\overline{s}_1(t), s_2(t)\big] + \sum_{i=1}^{n} \big\{\beta_i^*\big[e_i, 0_m\big] + (1-\beta_i^*)\big[-e_i, 0_m\big]\big\} +$$

$$+\beta_{n+1}^*\big[0_n, 2u\big] + (1-\beta_{n+1}^*)\big[0_n, 0_m\big]$$

является вектор-функцией, состоящей из последних $n+m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала I в точке $[z,u]$. Если $||\overline{G}(z,u)|| > 0$, то вектор-функция $-\frac{\overline{G}(t,z,u)}{||\overline{G}(z,u)||}$ является направлением гипоградиентного спуска функционала I в точке $[z,u]$.

Опишем следующий метод гиподифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала I. Фиксируем произвольную точку $[z_1,u_1] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$. Пусть уже построена точка $[z_k,u_k] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (3.7) или (3.10), то точка $[z_k,u_k]$ является стационарной точкой функционала I, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k \overline{G}_k,$$

где вектор-функция $\overline{G}_k = \overline{G}(t, z_k, u_k)$ представляет собой вектор-функцию, состоящую из последних $n+m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала I в точке $[z_k,u_k]$, а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geqslant 0} I([z_k,u_k] - \alpha \overline{G}_k) = I([z_k,u_k] - \alpha_k \overline{G}_k).$$

Тогда

$$I(z_{k+1}, u_{k+1}) \leqslant I(z_k, u_k).$$

Если последовательность $\{[z_k,u_k]\}$ бесконечна, то при некоторых дополнительных предположениях можно показать, что метод гиподифференциального спуска сходится в следующем смысле

$$||g(z_k,u_k)|| = \sqrt{\int_0^T \big(g(t,z_k,u_k), g(t,z_k,u_k)\big)dt} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Если последовательность $\{[z_k,u_k]\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала I по построению.

3.6 Численные примеры

Приведём примеры задач построения программного управления, в которых метод субдифференциального спуска привёл к точке минимума функционала (3.5).

Пример 3.6.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

с начальным условием

$$x_0 = [2, 1].$$

Требуется перевести систему в начало координат, то есть

$$x_T = [0, 0].$$

При этом на управление накладывается интегральное ограничение

$$\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt \leqslant C.$$

Известно [34], что данная система является полностью управляемой, поэтому существует такое $C^* > 0$, что $\forall\ C \geqslant C^*$ минимум функционала (3.5), равный нулю, достигается. Кроме того, поскольку система линейна, то в силу Леммы 3.3.1 функционал (3.5) является выпуклым, поэтому любая его стационарная точка является точкой минимума.

Положим $T = 1$, $C = 3$. В данной задаче известно аналитическое решение [34]. Для заданных граничных условий оно имеет вид

$$u^*(t) = 30t - 16 + v_2(t),$$

$$z_1^*(t) = 15t^2 - 16t + 1 + \int_0^t v_2(\tau) d\tau,$$

$$z_2^*(t) = 30t - 16 + v_2(t),$$

где вектор-функция $v(t) = [v_1(t), v_2(t)]$ удовлетворяет следующему условию ортогональности

$$\int_0^1 \big(- t v_1(t) + v_2(t)\big) dt = 0.$$

В Таблице 3.6.1 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска (для аналитического решения здесь положено $v(t) = [0, 0]$). В качестве начального приближения взята точка $z(t) = [0, -1]$, а тогда $x(t) = [2, 1 - t]$. Из Таблицы 3.6.1 видно, что на 40-й итерации погрешность не превышает величины 2×10^{-2}.

Таблица 3.6.1. Результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\|\|u^* - u_k\|\|$	$\|\|z^* - z_k\|\|$	$\|\|G(z_k, u_k)\|\|$
1	2.66666	8.7178	8.9629	1.16428
2	1.96998	8.6603	8.71276	0.20983
10	1.34425	6.23975	6.35764	0.27035
20	0.82772	4.60287	4.64919	0.27871
30	0.15326	2.1094	2.32091	0.1575
40	0.01951	0.63503	0.59202	0.05249

Пример 3.6.2. Рассмотрим ещё один пример. Пусть задана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_3 x_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 + u_3. \end{cases}$$

Такие системы возникают из динамических уравнений Эйлера при моделировании движения спутника [44]. При этом движение спутника относительно его центра инерции рассматривается как вращение твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Управления u_1, u_2, u_3 характеризуют воздействие, которое оказывают на спутник установленные на нём двигатели. В начальный момент спутник вращается с заданной угловой скоростью

$$x(0) = x_0.$$

Требуется так управлять двигателями, чтобы за фиксированное время T погасить угловые скорости тела

$$x_T = 0.$$

При этом ресурсы управления ограничены

$$\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt \leqslant C.$$

Положим $x_0 = [1, 0, 0]$, $T = 1$, $C = 2$. В данной задаче также известно аналитическое решение [44]. Для заданных граничных условий оно имеет вид

$$\int_0^1 u_1^*(t) dt = -1, \;\; u_2^*(t) = 0, \;\; u_3^*(t) = 0,$$

$$z_1^*(t) = u_1^*(t), \;\; z_2^*(t) = 0, \;\; z_3^*(t) = 0.$$

В Таблице 3.6.2 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u(t) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $z(t) = [0, 1, 1]$, а тогда $x(t) = [1, t, t]$. Из Таблицы 3.6.2 видно, что на 6-й итерации погрешность не превышает величины 2×10^{-2}.

Таблица 3.6.2. Результаты работы МСС

k	I_k	$\left\|\int_0^1 u_{1k}(t)dt + 1\right\|$	$\|u_{2k}\|$	$\|u_{3k}\|$	$\|z_{1k} - u_{1k}\|$	$\|z_{2k}\|$	$\|z_{3k}\|$	$\|\|G_k\|\|$
1	3.475	1.5	0.5	0.5	0.5	1	1	1.19563
2	1.3084	0.92529	0.53818	0.53818	0.46418	0.29504	0.29504	1.56704
3	0.65596	0.8052	0.51081	0.51081	0.67117	0.08815	0.08815	1.09889
4	0.45822	0.17146	0.31975	0.31975	0.65721	0.07178	0.07178	0.9434
5	0.24556	0	0.19245	0.19245	0.6458	0.06178	0.06178	0.73868
6	0.0146	0	0.03525	0.03525	0.12328	0.03544	0.03544	0.12321

Пример 3.6.3. Рассмотрим ещё одну систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) + u, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases}$$

Такие системы возникают в нелинейном варианте задачи об успокоении маятника [14]. Требуется перевести систему из заданного начального положения

$$x_0 = [1, 0, 0]$$

в заданное конечное состояние

$$x_T = [0, 0, \pi].$$

При этом на управление накладывается ограничение

$$\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt \leqslant C.$$

Положим $T = 2\pi$, $C = \pi$.

В Таблице 3.6.3 приведены результаты вычислений. В качестве начального приближения взята точка $u(t) = \frac{1}{2}$, $z(t) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, а тогда $x(t) = [1 + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t]$. Из Таблицы 3.6.3 видно, что на 10-й итерации погрешность не превышает величины 3×10^{-2}.

Таблица 3.6.3. Результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\|\|G(z_k, u_k)\|\|$
1	15.04	6.4908
2	4.67627	5.31843
5	0.26627	0.8763
10	0.02361	0.0683

В рассмотренных примерах метод гиподифференциального спуска показал аналогичные результаты.

Глава 4

Оптимальное управление

В данном разделе рассматривается задача оптимального управления с интегральным ограничением на управление и интегральным функционалом качества. С помощью теории точных штрафных функций исходная задача сводится к задаче безусловной минимизации некоторого негладкого функционала. Для него найдены необходимые условия минимума в терминах субдифференциала и гиподифференциала. Выделен класс задач, для которых эти условия оказываются и достаточными. На основании данных условий к рассматриваемой задаче применяются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска. Приведены примеры реализации применяемых методов.

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \ \ t \in [0, T]. \tag{4.1}$$

Требуется подобрать такое управление $u^* \in P_m[0, T]$, удовлетворяющее следующему интегральному ограничению

$$\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt \leqslant 1, \tag{4.2}$$

которое переводит систему (4.1) из заданного начального положения

$$x(0) = x_0 \tag{4.3}$$

в заданное конечное состояние

$$x(T) = x_T \tag{4.4}$$

и доставляет минимум функционалу

$$I(x, u) = \int_0^T f_0(x, \dot{x}, u, t) dt. \tag{4.5}$$

Считаем, что оптимальное управление u^* существует. В системе (4.1) $T > 0$ — заданный момент времени, $f(x, u, t)$ — вещественная n-мерная вектор-функция, x — n-мерная вектор-функция фазовых координат, которую будем считать непрерывной с кусочно-непрерывной на интервале $[0, T]$ производной, $u(t)$ — m-мерная вектор-функция управлений, которую считаем кусочно-непрерывной на промежутке $[0, T]$. Предполагаем $f(x, u, t)$ непрерывно дифференцируемой по x и u и непрерывной по всем трём аргументам.

Если $t_0 \in [0, T)$ — точка разрыва вектор-функции u, то для определённости полагаем

$$u(t_0) = \lim_{t \downarrow t_0} u(t). \tag{4.6}$$

В точке T считаем, что

$$u(T) = \lim_{t \uparrow T} u(t). \tag{4.7}$$

При этом $\dot{x}(t_0)$ — правосторонняя производная вектор-функции x в точке t_0, $\dot{x}(T)$ — левосторонняя производная вектор-функции x в точке T.

В функционале (4.5) $f_0(x, \dot{x}, u, t)$ — вещественная скалярная функция, которую будем считать непрерывно дифференцируемой по x, $\dot{x}$ и u и непрерывной по всем четырём аргументам.

4.2 Сведение к вариационной задаче

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0, T]$. Тогда с учётом (4.3) имеем

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Относительно вектор-функции z сделаем предположение, аналогичное (4.6)–(4.7). Имеем

$$f(x, u, t) = f(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, u, t),$$

$$f_0(x, \dot{x}, u, t) = f(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z, u, t).$$

Введём в рассмотрение функционал

$$F_\lambda(z, u) = I(z, u) + \lambda\big[\varphi(z, u) + \sum_{i=1}^n \psi_i(z) + \max\{0, \int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt - 1\}\big], \tag{4.8}$$

где

$$\varphi(z, u) = \sqrt{\int_0^T \big(z(t) - f\big(x, u, t\big), z(t) - f\big(x, u, t\big)\big) dt},$$

$$\psi_i(z) = \big|\overline{\psi}_i(z)\big|, \ \overline{\psi}_i(z) = x_{0i} + \int_0^T z_i(t) dt - x_{Ti}, \ i = \overline{1, n},$$

а x_{0i} — i-ая компонента вектора x_0, x_{Ti} — i-ая компонента вектора x_T, $i = \overline{1,n}$, $\lambda > 0$ — некоторая константа.

Обозначим

$$\Phi(z,u) = \varphi(z,u) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(z) + \max\{0, \int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt - 1\}. \tag{4.9}$$

Нетрудно видеть, что функционал (4.9) неотрицателен для всех $z \in P_n[0,T]$ и для всех $u \in P_m[0,T]$ и обращается в ноль в точке $[\overline{z},\overline{u}] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$ тогда и только тогда, когда вектор-функция $\overline{u}$ удовлетворяет ограничению (4.2), а вектор-функция

$$\overline{x}(t) = x_0 + \int_0^t \overline{z}(\tau)d\tau$$

удовлетворяет системе (4.1) при $u(t) = \overline{u}(t)$ и ограничениям (4.3)–(4.4).

Введём множества

$$\Omega = \big\{[z,u] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T] \bigm| \Phi(z,u) = 0\big\},$$

$$\Omega_\delta = \big\{[z,u] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T] \bigm| \Phi(z,u) < \delta\big\},$$

где $\delta > 0$ — некоторое число. Тогда

$$\Omega_\delta \setminus \Omega = \big\{[z,u] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T] \bigm| 0 < \Phi(z,u) < \delta\big\}.$$

Используя ту же технику, что и в [38], можно показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *Пусть найдётся такое положительное число $\lambda_0 < \infty$, что $\forall \lambda > \lambda_0$ существует точка $[z(\lambda), u(\lambda)] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$, для которой $F_\lambda\big(z(\lambda),u(\lambda)\big) = \inf\limits_{[z,u]} F_\lambda(z,u)$. Пусть также функционал I является липшицевым на множестве $\Omega_\delta \setminus \Omega$. Тогда функционал* (4.8) *будет точной штрафной функцией.*

Таким образом, при сделанных в Теореме 4.2.1 предположениях существует такое число $0 < \lambda^* < \infty$, что $\forall \lambda > \lambda_*$ исходная задача минимизации функционала (4.5) на множестве Ω эквивалентна задаче минимизации функционала (4.8) на всём пространстве. Далее будем считать, что в функционале (4.8) число λ фиксировано и выполнено условие $\lambda > \lambda^*$.

4.3 Необходимые условия минимума

Введём множества

$$\Omega_1 = \big\{z \in P_n[0,T] \bigm| x_0 + \int_0^T z(t)dt = x_T\big\},$$

$$\Omega_2 = \big\{u \in P_m[0,T] \;\big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt \leqslant 1\big\},$$
$$\Omega_3 = \big\{[z,u] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T] \;\big|\; \varphi(z,u) = 0\big\}.$$

Ниже нам также потребуются индексные множества

$$I_0 = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) = 0\},$$

$$I_- = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) < 0\},$$

$$I_+ = \{i = \overline{1,n} \mid \overline{\psi}_i(z) > 0\}$$

и следующие множества управлений

$$U_0 = \big\{u \in P_m[0,T] \;\big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - 1 = 0\big\},$$

$$U_- = \big\{u \in P_m[0,T] \;\big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - 1 < 0\big\},$$

$$U_+ = \big\{u \in P_m[0,T] \;\big|\; \int_0^T \big(u(t), u(t)\big)dt - 1 > 0\big\}.$$

Далее иногда будем писать f вместо $f(x,u,t)$ и f_0 вместо $f_0(x,z,u,t)$. Используя ту же технику, что и в [38, 65] нетрудно убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Теорема 4.3.1. *При $[z,u] \notin \Omega_3$ функционал F_λ субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z,u]$ выражается по формуле*

$$\begin{aligned}
\partial F_\lambda(z,u) = \Big\{\Big[\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\big[w(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' w(\tau)d\tau + \sum_{i\in I_0}\omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\big],\\
\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda\big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' w(t) + 2\nu u(t)\big]\Big] \;\Big|\; \omega_i \in [-1,1],\ i \in I_0,\\
\mu_j = 0,\ j \in I_0,\ \mu_j = 1,\ j \in I_+,\ \mu_j = -1,\ j \in I_-, \quad (4.10)\\
\nu \in [0,1],\ u \in U_0,\ \nu = 1,\ u \in U_+,\ \nu = 0,\ u \in U_-,\\
w(t) = \frac{z(t) - f(x,u,t)}{\varphi(z,u)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Теорема 4.3.2. *При $[z,u] \in \Omega_3$ функционал F_λ субдифференцируем, и его субдифференциал в точке $[z,u]$ выражается по формуле*

$$\begin{aligned}
\partial F_\lambda(z,u) = \Big\{\Big[\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau)d\tau + \sum_{i\in I_0}\omega_i e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\big],\\
\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda\big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t) + 2\nu u(t)\big]\Big] \;\Big|\; v \in P_n[0,T],\ ||v||^2 = \int_0^T \big(v(t), v(t)\big)dt \leqslant 1\Big\}, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

где $\omega_i \in [-1,1]$, $i \in I_0$, μ_j, $j = \overline{1,n}$, ν определены в (4.10).

Следствие 4.3.1. *Если* $[z,u]\in\Omega_3$, $z\in\Omega_1$, $u\in\Omega_2$, *то функционал* F_λ *субдифференцируем, и его субдифференциал в точке* $[z,u]$ *выражается по формуле*

$$\partial F_\lambda(z,u)=\Big\{\Big[\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\lambda\big[v(t)-\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v(\tau)d\tau+\sum_{i\in I_0}\omega_i e_i\big],$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial u}+\lambda\big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'v(t)+2\nu u(t)\big]\Big]\ \Big|\ \omega_i\in[-1,1],\ i=\overline{1,n}, \tag{4.12}$$
$$\nu\in[0,1],\ u\in U_0,\ \nu=0,\ u\in U_-,\ v\in P_n[0,T],\ ||v||^2=\int_0^T\big(v(t),v(t)\big)dt\leqslant 1\Big\}.$$

Лемма 4.3.1. *Если система* (4.1) *линейна по фазовым переменным* x *и по управлению* u, *а функционал* I *выпуклый, то функционал* F_λ *является выпуклым.*

Доказательство. Представим функционал (4.8) в виде

$$F_\lambda(z,u)=I(z,u)+\lambda\varphi(z,u)+\lambda F_1(z)+\lambda F_2(u),$$

где $I(z,u)$, $F_1(z)$, $F_2(u)$ — соответствующие слагаемые из правой части (4.8). Функционалы F_1 и F_2 выпуклы как максимумы выпуклых функционалов [24]. Функционал I выпуклый по условию. Покажем выпуклость функционала φ в случае линейности системы (4.1).

Пусть система (4.1) имеет вид

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+c(t),$$

где $A(t)$ — $n\times n$-матрица, $B(t)$ — $n\times m$-матрица, $c(t)$ — n-мерная вектор-функция. Считаем $A(t)$, $B(t)$, $c(t)$ вещественными и непрерывными на $[0,T]$. Пусть $z_1,z_2\in P_n[0,T]$, $u_1,u_2\in P_m[0,T]$, $\alpha\in(0,1)$. Обозначим $\overline{\varphi}(z,u,t)=z(t)-f(x,u,t)$. Имеем

$$\varphi^2\big(\alpha(z_1,u_1)+(1-\alpha)(z_2,u_2)\big)=\big|\big|\alpha z_1(t)+(1-\alpha)z_2(t)-$$
$$-A(t)\big[x_0+\int_0^t\big(\alpha z_1(\tau)+(1-\alpha)z_2(\tau)\big)d\tau\big]-B(t)\big[\alpha u_1(t)+(1-\alpha)u_2(t)\big]-c(t)\big|\big|^2=$$
$$=\big|\big|\alpha\overline{\varphi}(z_1,u_1)+(1-\alpha)\overline{\varphi}(z_2,u_2)\big|\big|^2=\alpha^2\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_1,u_1,t)\big)dt+ \tag{4.13}$$
$$+2\alpha(1-\alpha)\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt+(1-\alpha)^2\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_2,u_2,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt,$$

$$\big(\alpha\varphi(z_1,u_1)+(1-\alpha)\varphi(z_2,u_2)\big)^2=\alpha^2\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_1,u_1,t)\big)dt+$$
$$+2\alpha(1-\alpha)\sqrt{\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_1,u_1,t)\big)dt\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_2,u_2,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt}+$$
$$+(1-\alpha)^2\int_0^T\big(\overline{\varphi}(z_2,u_2,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt. \tag{4.14}$$

В силу неравенства Гёльдера для всех z_1, z_2, u_1, u_2 будет

$$\int_0^T \big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^T \big(\overline{\varphi}(z_1,u_1,t),\overline{\varphi}(z_1,u_1,t)\big)dt}\sqrt{\int_0^T \big(\overline{\varphi}(z_2,u_2,t),\overline{\varphi}(z_2,u_2,t)\big)dt},$$

поэтому из (4.13) и (4.14) получаем, что

$$\varphi^2\big(\alpha(z_1,u_1)+(1-\alpha)(z_2,u_2)\big) \leqslant \big(\alpha\varphi(z_1,u_1)+(1-\alpha)\varphi(z_2,u_2)\big)^2. \tag{4.15}$$

Так как $\varphi\big(\alpha(z_1,u_1)+(1-\alpha)(z_2,u_2)\big) \geqslant 0$, $\alpha\varphi(z_1,u_1)+(1-\alpha)\varphi(z_2,u_2) \geqslant 0$, то из неравенства (4.15) $\forall$ z_1, z_2, u_1, u_2 и $\alpha \in (0,1)$ следует

$$\varphi\big(\alpha(z_1,u_1)+(1-\alpha)(z_2,u_2)\big) \leqslant \alpha\varphi(z_1,u_1)+(1-\alpha)\varphi(z_2,u_2),$$

что и доказывает выпуклость функционала φ в случае линейности исходной системы.

Теперь остаётся заметить, что функционал F_λ является выпуклым (в случае линейности исходной системы) как сумма выпуклых функционалов [24].

Лемма доказана. □

Известно [23], что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (4.8) в точке $[z^*,u^*]$ в терминах субдифференциала является условие

$$0_{n+m} \in \partial F_\lambda(z^*,u^*),$$

где 0_{n+m} — нулевой элемент пространства $P_n[0,T]\times P_m[0,T]$. Отсюда с учётом Леммы 4.3.1 заключаем, что справедлива

Теорема 4.3.3. *Для того чтобы управление $u^* \in \Omega_2$ переводило систему* (4.1) *из начального положения* (4.3) *в конечное состояние* (4.4) *и доставляло минимум функционалу* (4.5), *необходимо, а в случае линейности системы* (4.1) *и выпуклости функционала* (4.5) *и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m} \in \partial F_\lambda(z^*,u^*), \tag{4.16}$$

где выражение для субдифференциала $\partial F_\lambda(z,u)$ выписано в (4.12).

4.4 Метод субдифференциального спуска

Найдём минимальный по норме субградиент $h = h(t,z,u) \in \partial F_\lambda(z,u)$ в точке $[z,u]$, то есть решим задачу $\min\limits_{h\in\partial F_\lambda(z,u)} ||h||^2$.

Зафиксируем точку $[z,u]$ и рассмотрим два случая.

А. Пусть $\varphi(z,u)>0$. В этом случае

$$\min_{h\in\partial F_\lambda(z,u)}||h||^2=\min_{\omega_i,\ i\in I_0,\ \nu}\Big[\int_0^T\big(s_1(t)+\lambda\sum_{i\in I_0}\omega_i e_i\big)^2dt+\int_0^T\big(s_2(t)+2\lambda\nu u(t)\big)^2dt\Big],\tag{4.17}$$

где

$$s_1(t)=\overline{s}_1(t)+\lambda\sum_{j=1}^n\mu_j e_j,$$

$$\overline{s}_1(t)=\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\lambda\big[w(t)-\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'w(\tau)d\tau\big],$$

$$s_2(t)=\frac{\partial f_0}{\partial u}-\lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'w(t),$$

а величины ω_i, $i\in I_0$, μ_j, $j=\overline{1,n}$, ν и вектор-функция $w(t)$ определены в (4.10).

Задача (4.17) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [17]. Обозначим ω_i^*, $i\in I_0$, ν^* её решение. Тогда вектор-функция

$$G(t,z,u):=h^*=\Big[s_1(t)+\lambda\sum_{i\in I_0}\omega_i^*e_i,s_2(t)+2\lambda\nu^*u(t)\Big]\tag{4.18}$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала F_λ в точке $[z,u]$ в данном случае (при $\varphi(z,u)>0$). Если $||G(z,u)||>0$, то вектор-функция $-G(t,z,u)/||G(z,u)||$ является направлением субградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z,u]$.

Б. Пусть $\varphi(z,u)=0$. В этом случае

$$\begin{aligned}\min_{h\in\partial F_\lambda(z,u)}||h||^2:=\min\big[||h_1||^2+||h_2||^2\big]=\min_{\omega_i,\ i\in I_0,\ \nu,\ v}\Big[\int_0^T\Big\{\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\\+\lambda\big[v(t)-\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v(\tau)d\tau+\sum_{i\in I_0}\omega_i e_i+\sum_{j=1}^n\mu_j e_j\big]\Big\}^2dt+\\+\int_0^T\Big\{\frac{\partial f_0}{\partial u}+\lambda\big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'v(t)+2\nu u(t)\big]\Big\}^2dt\Big],\end{aligned}\tag{4.19}$$

где $h_1=h_1(t,z,u)$, $h_2=h_2(t,z,u)$, а величины ω_i, $i\in I_0$, μ_j, $j=\overline{1,n}$, ν и вектор-функция $v(t)$ определены в (4.11).

Составим функционал

$$H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})=||h||^2+\mu\big[\max\{0,||v||^2-1\}+\max\{0,\overline{\nu}^2-1\}+\sum_{i\in I_0}\max\{0,\omega_i^2-1\}\big],\tag{4.20}$$

где $\overline{\nu}=2\nu-1$, а вектор $\omega\in R^{|I_0|}$ состоит из компонент ω_i, $i\in I_0$.

Обозначим

$$\Psi(v,\omega,\overline{\nu})=\mu\big[\max\{0,||v||^2-1\}+\max\{0,\overline{\nu}^2-1\}+\sum_{i\in I_0}\max\{0,\omega_i^2-1\}\big].$$

Введём множества

$$\overline{\Omega} = \big\{[v,\omega,\overline{\nu}] \in P_n[0,T]\times R^{|I_0|}\times R \;\big|\; \Psi(v,\omega,\overline{\nu}) = 0\big\},$$

$$\overline{\Omega}_\delta = \big\{[v,\omega,\overline{\nu}] \in P_n[0,T]\times R^{|I_0|}\times R \;\big|\; \Psi(v,\omega,\overline{\nu}) < \delta\big\}.$$

Тогда

$$\overline{\Omega}_\delta \setminus \overline{\Omega} = \big\{[v,\omega,\overline{\nu}] \in P_n[0,T]\times R^{|I_0|}\times R \;\big|\; 0 < \Psi(v,\omega,\overline{\nu}) < \delta\big\}.$$

Также введём следующие множества

$$V_0 = \Big\{v \in P_n[0,T] \;\Big|\; \int_0^T \big(v(t),v(t)\big)dt - 1 = 0\Big\},$$

$$V_- = \Big\{v \in P_n[0,T] \;\Big|\; \int_0^T \big(v(t),v(t)\big)dt - 1 < 0\Big\},$$

$$V_+ = \Big\{v \in P_n[0,T] \;\Big|\; \int_0^T \big(v(t),v(t)\big)dt - 1 > 0\Big\},$$

$$N_0 = \big\{\overline{\nu} \in R \mid \overline{\nu}^2 - 1 = 0\big\},$$

$$N_- = \big\{\overline{\nu} \in R \mid \overline{\nu}^2 - 1 < 0\big\},$$

$$N_+ = \big\{\overline{\nu} \in R \mid \overline{\nu}^2 - 1 > 0\big\},$$

$$W_{i0} = \big\{\omega_i \in R \mid \omega_i^2 - 1 = 0\big\},$$

$$W_{i-} = \big\{\omega_i \in R \mid \omega_i^2 - 1 < 0\big\},$$

$$W_{i+} = \big\{\omega_i \in R \mid \omega_i^2 - 1 > 0\big\},$$

где $i \in I_0$.

Лемма 4.4.1. *Пусть найдётся такое положительное число $\mu_0 < \infty$, что $\forall \mu > \mu_0$ существует точка $[v(\mu),\omega(\mu),\overline{\nu}(\mu)] \in P_n[0,T]\times R^{|I_0|}\times R$, для которой $H_\mu\big(v(\mu),\omega(\mu),\overline{\nu}(\mu)\big) = \inf\limits_{[v,\omega,\overline{\nu}]} H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})$. Пусть также функционал $h(v,\omega,\overline{\nu})$ является липшицевым на множестве $\overline{\Omega}_\delta \setminus \overline{\Omega}$. Тогда функционал* (4.20) *будет точной штрафной функцией.*

Таким образом, при сделанных в Лемме 4.4.1 предположениях существует такое число $0 < \mu^* < \infty$, что $\forall \mu > \mu_*$ задача (4.19) эквивалентна задаче минимизации функционала (4.20) на всём пространстве. Далее будем считать, что в функционале (4.20) число μ фиксировано и выполнено условие $\mu > \mu^*$.

Лемма 4.4.2. *Функционал* (4.20) *субдифференцируем, и его субдифференциал в точке* $[v,\omega,\overline{\nu}]$ *выражается по формуле*

$$\begin{gathered}\partial H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})=\Big\{\big[h_v+2\mu\xi v(t),h_{\omega_1}+2\mu\zeta_1\omega_1,\dots,h_{\omega_{|I_0|}}+2\mu\zeta_{|I_0|}\omega_{|I_0|},\\ h_{\overline{\nu}}+2\mu\zeta_0\overline{\nu}\big]\ \Big|\ \xi\in[0,1],\ v\in V_0,\ \xi=1,\ v\in V_+,\ \xi=0,\ v\in V_-,\\ \zeta_0\in[0,1],\ \overline{\nu}\in N_0,\ \zeta_0=1,\ \overline{\nu}\in N_+,\ \zeta_0=0,\ \overline{\nu}\in N_-,\\ \zeta_i\in[0,1],\ \omega_i\in W_{i0},\ \zeta_i=1,\ \omega_i\in W_{i+},\ \zeta_i=0,\ \omega_i\in W_{i-},\ i\in I_0\Big\}.\end{gathered}\tag{4.21}$$

Вычислим следующие вектор-функции, входящие в формулу (4.21).

$$h_v=h_{1v}+h_{2v},$$

где

$$h_{1v}=2\lambda\Big[\lambda v(t)-\lambda\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v(\tau)d\tau-\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t v(\tau)d\tau+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t\int_\tau^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v(\xi)d\xi d\tau+$$

$$+\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\lambda\Big(E-t\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\Big(\sum_{i\in I_0}\omega_i e_i+\sum_{j=1}^n\mu_j e_j\Big)-\frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t\Big\{\int_\tau^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\xi+\frac{\partial f_0}{\partial z}\Big\}d\tau\Big],$$

$$h_{2v}=-2\lambda\frac{\partial f}{\partial u}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial u}+\lambda\big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'v(t)+\overline{\nu}u(t)+u(t)\big]\Big),$$

$$h_{\omega_i}=2\lambda\int_0^T\Big\{\big(q(t)+\lambda\omega_i e_i\big)'e_i\Big\}dt,\ i\in I_0,$$

где

$$q(t)=\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\lambda\big[v(t)-\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v(\tau)d\tau+\sum_{k\in I_0/\{i\}}\omega_k e_k+\sum_{j=1}^n\mu_j e_j\big],$$

$$h_{\overline{\nu}}=2\lambda\int_0^T\Big\{\big(r(t)+\lambda\overline{\nu}u(t)\big)'u(t)\Big\}dt,$$

где

$$r(t)=\frac{\partial f_0}{\partial u}+\lambda\big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'v(t)+u(t)\big].$$

Следствие 4.4.1. *Если* $||v||^2\leqslant 1$, $|\omega_i|\leqslant 1$, $i\in I_0$, $|\overline{\nu}|\leqslant 1$, *то функционал* (4.20) *субдифференцируем, и его субдифференциал в точке* $[v,\omega,\overline{\nu}]$ *выражается по формуле*

$$\begin{gathered}\partial H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})=\Big\{\big[h_v+2\mu\xi v(t),h_{\omega_1}+2\mu\zeta_1\omega_1,\dots,h_{\omega_{|I_0|}}+2\mu\zeta_{|I_0|}\omega_{|I_0|},\\ h_{\overline{\nu}}+2\mu\zeta_0\overline{\nu}\big]\ \Big|\ \xi\in[0,1],\ v\in V_0,\ \xi=0,\ v\in V_-,\\ \zeta_0\in[0,1],\ \overline{\nu}\in N_0,\ \zeta_0=0,\ \overline{\nu}\in N_-,\ \zeta_i\in[0,1],\ \omega_i\in W_{i0},\ \zeta_i=0,\ \omega_i\in W_{i-},\ i\in I_0\Big\}.\end{gathered}\tag{4.22}$$

Замечание 4.4.1. Субдифференциал $\partial F_\lambda(z,u)$ является выпуклым компактным множеством, поэтому необходимое условие минимума функционала $H_\mu(v,\omega,\overline{\nu})$ будет и достаточным [24].

Лемма 4.4.3. *Для того чтобы точка* $[v^*, \omega^*, \overline{\nu}^*] \in P_n[0,T] \times R^{|I_0|} \times R$ *доставляла минимум функционалу* (4.20) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_{n+|I_0|+1} \in \partial H_\mu(v^*, \omega^*, \overline{\nu}^*), \tag{4.23}$$

где $0_{n+|I_0|+1}$ *— нулевой элемент пространства* $P_n[0,T] \times R^{|I_0|} \times R$*, а выражение для субдифференциала* $\partial H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$ *выписано в* (4.22).

Найдём минимальный по норме субградиент $\overline{h} = \overline{h}(t, v, \omega, \overline{\nu}) \in \partial H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$ в точке $[v, \omega, \overline{\nu}]$, то есть решим задачу

$$\min_{\xi,\ \zeta_0,\ \zeta_i,\ i \in I_0} ||\overline{h}||^2 = \min_{\xi,\ \zeta_0,\ \zeta_i,\ i \in I_0} \Big[\int_0^T \big\{ h_v + 2\mu\xi v(t) \big\}^2 dt + \\ + \sum_{i \in I_0} \big\{ h_{\omega_i} + 2\mu\zeta_i\omega_i \big\}^2 + \big\{ h_{\overline{\nu}} + 2\mu\zeta_0\overline{\nu} \big\}^2 \Big], \tag{4.24}$$

где величины ξ, ζ_0, ζ_i, $i \in I_0$, определены в (4.21).

Задача (4.24) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [17]. Обозначим ξ^*, ζ_0^*, ζ_i^*, $i \in I_0$, её решение. Тогда вектор-функция

$$\overline{G}(t, v, \omega, \overline{\nu}) := \overline{h}^* = \big[h_v + 2\mu\xi^* v(t), h_{\omega_1} + 2\mu\zeta_1^*\omega_1, \ldots,$$

$$h_{\omega_{|I_0|}} + 2\mu\zeta_{|I_0|}^*\omega_{|I_0|}, h_{\overline{\nu}} + 2\mu\zeta_0^*\overline{\nu} \big]$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала H_μ в точке $[v, \omega, \overline{\nu}]$. Если $||\overline{G}(\omega, \overline{\nu})|| > 0$, то вектор-функция $-\overline{G}(t, v, \omega, \overline{\nu})/||\overline{G}(\omega, \overline{\nu})||$ является направлением субградиентного спуска функционала H_μ в точке $[v, \omega, \overline{\nu}]$.

Опишем следующий метод субдифференциального спуска для поиска точек минимума функционала $H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$. Фиксируем произвольную точку $[v_1, \omega_1, \overline{\nu}_1] \in P_n[0,T] \times R^{|I_0|} \times R$. Пусть уже построена точка $[v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k] \in P_n[0,T] \times R^{|I_0|} \times R$. Если выполнено условие минимума (4.23), то точка $[v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k]$ является точкой минимума функционала $H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[v_{k+1}, \omega_{k+1}, \overline{\nu}_{k+1}] = [v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k] - \alpha_k \overline{G}_k,$$

где вектор-функция $\overline{G}_k = \overline{G}(t, v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k)$ представляет собой наименьший по норме субградиент функционала H_μ в точке $[v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k]$, а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geqslant 0} H_\mu([v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k] - \alpha\overline{G}_k) = H_\mu([v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k] - \alpha_k\overline{G}_k). \tag{4.25}$$

Тогда

$$H_\mu(v_{k+1}, \omega_{k+1}, \overline{\nu}_{k+1}) \leqslant H_\mu(v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k).$$

Если последовательность $\{[v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k]\}$ конечна, то последняя её точка является точкой минимума функционала $H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$ по построению. Если же последовательность $\{[v_k, \omega_k, \overline{\nu}_k]\}$ бесконечна, то описанный процесс может и не привести к точке минимума функционала $H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$, поскольку субдифференциальное отображение $\partial H_\mu(v, \omega, \overline{\nu})$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа [24].

Обозначим v^*, ω^*, ν^* решение задачи (4.19). Тогда вектор-функция

$$G(t, z, u) := h^* = \Big[\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} +$$
$$\lambda \big[v^*(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v^*(\tau) d\tau + \sum_{i \in I_0} \omega_i^* e_i + \sum_{j=1}^n \mu_j e_j \big],$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \big[- \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v^*(t) + 2\nu^* u(t) \big] \Big] \tag{4.26}$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала F_λ в точке $[z, u]$ в данном случае (при $\varphi(z, u) = 0$). Если $||G(z, u)|| > 0$, то вектор-функция $-G(t, z, u)/||G(z, u)||$ является направлением субградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z, u]$.

Таким образом, в пунктах А и Б решалась задача поиска направления субградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z, u]$. В случае $\varphi(z, u) > 0$ (пункт А) данная задача решается сравнительно просто, так как представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений. В случае $\varphi(z, u) = 0$ (пункт Б) помимо неизвестных величин ω, ν требуется также найти вектор-функцию $v(t)$. Это более сложная задача, решать которую можно численными методами, например, методом субдифференциального спуска, как это описано в пункте Б.

Замечание 4.4.2. Отметим, что в силу структуры функционала H_μ задача (4.25) поиска шага спуска решается аналитически. Кроме того, задача (4.24) нахождения направления спуска с помощью методов квадратичного программирования может быть решена за конечное число итераций.

Итак, теперь можно описать метод субдифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала F_λ. Фиксируем произвольную точку $[z_1, u_1] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Пусть уже построена точка $[z_k, u_k] \in P_n[0, T] \times P_m[0, T]$. Если выполнено условие минимума (4.16), то точка $[z_k, u_k]$ является стационарной точкой функционала $F_\lambda(z, u)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k G_k,$$

где вектор-функция $G_k = G(t, z_k, u_k)$ представляет собой наименьший по норме субградиент функционала F_λ в точке $[z_k, u_k]$. Значение для функционала G_k берётся либо из формулы (4.18) при $\varphi(z, u) > 0$, либо из формулы (4.26) при $\varphi(z, u) = 0$. Величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geqslant 0} F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha G_k) = F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha_k G_k).$$

Тогда

$$F_\lambda(z_{k+1}, u_{k+1}) \leqslant F_\lambda(z_k, u_k).$$

Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала F_λ по построению. Если же последовательность $\{[z_k, u_k]\}$ бесконечна, то описанный процесс может и не привести к стационарной точке функционала F_λ, поскольку субдифференциальное отображение $\partial F_\lambda(z, u)$ разрывно в метрике Хаусдорфа [24].

4.5 Метод гиподифференциального спуска

Как уже отмечалось, описанный в предыдущем разделе метод субдифференциального спуска может не привести к стационарной точке функционала F_λ в силу разрывности субдифференциального отображения $\partial F_\lambda(z, u)$. Чтобы гарантировать сходимость в некотором смысле рассматриваемого численного метода, перейдём к гиподифференциальному отображению $dF_\lambda(z, u)$.

Пользуясь формулами кодифференциального исчисления [25], можно показать, что имеют место следующие две теоремы.

Теорема 4.5.1. *При $[z, u] \notin \Omega_3$ функционал $F_\lambda(z, u)$ гиподифференцируем, и его гиподифференциал в точке $[z, u]$ выражается по формуле*

$$dF_\lambda(z, u) = \big[0, \overline{s}_1(t), s_2(t)\big] +$$

$$+\lambda \sum_{i=1}^{n} \mathrm{co}\big\{\big[\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m\big], \big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m\big]\big\} +$$

$$+\lambda \mathrm{co}\Big\{\Big[\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt - 1 - \max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 2u(t)\Big], \Big[-\max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 0_m\Big]\Big\},$$

где вектор-функции $\overline{s}_1(t)$ и $s_2(t)$ определены в задаче (4.17).

Теорема 4.5.2. *При* $[z,u]\in\Omega_3$ *функционал* F_λ *гиподифференцируем, и его гиподифференциал в точке* $[z,u]$ *выражается по формуле*

$$\begin{aligned}dF_\lambda(z,u)=\Big\{\Big[\lambda\big[\int_0^T\big(z(t)-f(z,u,t)\big)'v(t)dt-\varphi(z,u)\big],\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\\ +\lambda\big[v(t)-\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v(\tau)d\tau\big],\frac{\partial f_0}{\partial u}-\lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'v(t)\Big]+\\ +\lambda\sum_{i=1}^n\mathrm{co}\big\{\big[\overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z),e_i,0_m\big],\big[-\overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z),-e_i,0_m\big]\big\}+\\ +\lambda\mathrm{co}\big\{\big[\int_0^T\big(u(t),u(t)\big)dt-1-\max\{0,||u||^2-1\},0_n,2u(t)\big],\\ \big[-\max\{0,||u||^2-1\},0_n,0_m\big]\big\}\ \Big|\ v\in P_n[0,T],\ ||v||\leqslant 1\Big\}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Известно [25], что необходимым, а в случае выпуклости и достаточным условием минимума функционала (4.8) в точке $[z^*,u^*]$ в терминах гиподифференциала является условие

$$0_{n+m+1}\in dF_\lambda(z^*,u^*),$$

где 0_{n+m+1} — нулевой элемент пространства $P_n[0,T]\times P_m[0,T]\times R$. Отсюда с учётом Леммы 4.3.1 заключаем, что справедлива

Теорема 4.5.3. *Для того чтобы управление* $u^*\in\Omega_2$ *переводило систему* (4.1) *из начального положения* (4.3) *в конечное состояние* (4.4) *и доставляло минимум функционалу* (4.5), *необходимо, а в случае линейности системы* (4.1) *и выпуклости функционала* (4.5) *и достаточно, чтобы*

$$0_{n+m+1}\in dF_\lambda(z^*,u^*),\tag{4.28}$$

где выражение для гиподифференциала $dF_\lambda(z,u)$ *выписано в* (4.27).

Найдём минимальный по норме гипоградиент $g=g(t,z,u)\in dF_\lambda(z,u)$ в точке $[z,u]$, то есть решим задачу $\min\limits_{g\in dF_\lambda(z,u)}||g||^2$.

Зафиксируем точку $[z,u]$ и рассмотрим два случая.

А. Пусть $\varphi(z,u)>0$. В этом случае

$$\begin{aligned}\min_{g\in dF_\lambda(z,u)}||g||^2=\min_{\beta_i\in[0,1],\ i=\overline{1,n+1}}\Big|\Big|\big[0,\overline{s}_1(t),s_2(t)\big]+\\ +\lambda\sum_{i=1}^n\big\{\beta_i\big[\ \overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z),e_i,0_m\big]+(1-\beta_i)\big[-\overline{\psi}_i(z)-\psi_i(z),-e_i,0_m\big]\big\}+\\ +\lambda\beta_{n+1}\big[\int_0^T\big(u(t),u(t)\big)dt-1-\max\{0,||u||^2-1\},0_n,2u(t)\big]+\\ +\lambda(1-\beta_{n+1})\big[-\max\{0,||u||^2-1\},0_n,0_m\big]\Big|\Big|^2.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Задача (4.29) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [17]. Обозначим β_i^*, $i = \overline{1, n+1}$, её решение. Пусть $g = [g_1, g_2]$, где вектор-функция g_2 состоит из последних $n+m$ компонент g. Тогда вектор-функция

$$\overline{\overline{G}}(t, z, u) := g_2^* = \big[\overline{s}_1(t), s_2(t)\big] + \lambda \sum_{i=1}^{n} \big\{\beta_i^*\big[e_i, 0_m\big] + (1-\beta_i^*)\big[-e_i, 0_m\big]\big\} +$$
$$+\lambda\beta_{n+1}^*\big[0_n, 2u(t)\big] + \lambda(1-\beta_{n+1}^*)\big[0_n, 0_m\big] \tag{4.30}$$

состоит из последних $n+m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала F_λ в точке $[z, u]$ в данном случае (при $\varphi(z, u) > 0$). Если $||\overline{\overline{G}}(z, u)|| > 0$, то вектор-функция $-\overline{\overline{G}}(t, z, u)/||\overline{\overline{G}}(z, u)||$ является направлением гипоградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z, u]$.

Б. Пусть $\varphi(z, u) = 0$. В этом случае

$$\min_{g \in dF_\lambda(z,u)} ||g||^2 = \min_{\beta_i \in [0,1],\ i=\overline{1,n+1},\ v} \Big|\Big|\Big[\lambda\Big[\int_0^T \big(z(t) - f(z,u,t)\big)' v(t) dt - \varphi(z,u)\Big],$$
$$\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\Big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau) d\tau\Big], \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t)\Big] +$$
$$+\lambda \sum_{i=1}^{n} \big\{\beta_i\big[\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), e_i, 0_m\big] + (1-\beta_i)\big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m\big]\big\} +$$
$$+\lambda\beta_{n+1}\Big[\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt - 1 - \max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 2u(t)\Big] +$$
$$+\lambda(1-\beta_{n+1})\big[-\max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 0_m\big]\Big|\Big|^2 =$$
$$= \min_{\beta_i \in [0,1],\ i=\overline{1,n+1},\ v} \Big|\Big|\Big[\lambda\Big[\int_0^T \big(z(t) - f(z,u,t)\big)' v(t) dt - \varphi(z,u)\Big],$$
$$\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\Big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau) d\tau\Big], \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t)\Big] +$$
$$+\lambda \sum_{i=1}^{n} \big\{\beta_i\big[2\overline{\psi}_i(z), 2e_i, 0_m\big] + \big[-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z), -e_i, 0_m\big]\big\} +$$
$$+\lambda\beta_{n+1}\Big[\int_0^T \big(u(t), u(t)\big) dt - 1, 0_n, 2u(t)\Big] + \lambda\big[-\max\{0, ||u||^2 - 1\}, 0_n, 0_m\big]\Big|\Big|^2.$$

Это выражение можно переписать так

$$\min_{g \in dF_\lambda(z,u)} ||g||^2 := \min\big[||g_1||^2 + ||g_2||^2 + ||g_3||^2\big] =$$

$$\min_{\overline{\beta}_i \in [-1,1],\ i=\overline{1,n+1},\ v} \Big[\Big\{\lambda\Big[\int_0^T \big(z(t) - f(z,u,t)\big)' v(t) dt - \varphi(z,u)\Big] + \lambda \sum_{i=1}^{n} \overline{\psi}_i(z)\big(\overline{\beta}_i + 1\big) -$$

$$-\lambda\sum_{i=1}^{n}\big(\overline{\psi}_i(z)+\psi_i(z)\big)+\frac{\lambda}{2}\Big(\int_0^T\big(u(t),u(t)\big)dt-1\Big)\big(\overline{\beta}_{n+1}+1\big)-\lambda\max\{0,||u||^2-1\}\Big\}^2+$$

$$+\int_0^T\Big\{\int_t^T\frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau+\frac{\partial f_0}{\partial z}+\lambda\big[v(t)-\int_t^T\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)'v(\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{n}\overline{\beta}_ie_i\big]\Big\}^2dt+$$

$$+\int_0^T\Big\{\frac{\partial f_0}{\partial u}-\lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)'v(t)+\lambda\overline{\beta}_{n+1}u(t)+\lambda u(t)\Big\}^2dt\Big], \qquad (4.31)$$

где $g_1=g_1(t,z,u)$, $g_2=g_2(t,z,u)$, $g_3=g_3(t,z,u)$, $\overline{\beta}_i=2\beta_i-1$, $i=\overline{1,n+1}$, а вектор-функция $v(t)$ определена в (4.27).

Пусть вектор $\overline{\beta}\in R^{n+1}$ состоит из компонент $\overline{\beta}_i$, $i=\overline{1,n+1}$. Составим функционал

$$\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta})=||g||^2+\mu\big[\max\{0,||v||^2-1\}+\sum_{i=1}^{n+1}\max\{0,\overline{\beta}_i^2-1\}\big]. \qquad (4.32)$$

Обозначим

$$\overline{\Psi}(v,\overline{\beta})=\mu\big[\max\{0,||v||^2-1\}+\sum_{i=1}^{n+1}\max\{0,\overline{\beta}_i^2-1\}\big].$$

Введём множества

$$\overline{\overline{\Omega}}=\big\{[v,\overline{\beta}]\in P_n[0,T]\times R^{n+1}\ \big|\ \overline{\Psi}(v,\overline{\beta})=0\big\},$$

$$\overline{\overline{\Omega}}_\delta=\big\{[v,\overline{\beta}]\in P_n[0,T]\times R^{n+1}\ \big|\ \overline{\Psi}(v,\overline{\beta})<\delta\big\}.$$

Тогда

$$\overline{\overline{\Omega}}_\delta\setminus\overline{\overline{\Omega}}=\big\{[v,\overline{\beta}]\in P_n[0,T]\times R^{n+1}\ \big|\ 0<\overline{\Psi}(v,\overline{\beta})<\delta\big\}.$$

Также введём следующие множества

$$B_{i0}=\big\{\overline{\beta}_i\in R\ \big|\ \overline{\beta}_i^2-1=0\big\},$$

$$B_{i-}=\big\{\overline{\beta}_i\in R\ \big|\ \overline{\beta}_i^2-1<0\big\},$$

$$B_{i+}=\big\{\overline{\beta}_i\in R\ \big|\ \overline{\beta}_i^2-1>0\big\},$$

где $i\in\overline{1,n+1}$.

Лемма 4.5.1. *Пусть найдётся такое положительное число $\mu_0<\infty$, что $\forall\mu>\mu_0$ существует точка $[v(\mu),\overline{\beta}(\mu)]\in P_n[0,T]\times R^{n+1}$, для которой $H_\mu\big(v(\mu),\overline{\beta}(\mu)\big)=\inf\limits_{[v,\overline{\beta}]}H_\mu(v,\overline{\beta})$. Пусть также функционал $g(v,\overline{\beta})$ является липшицевым на множестве $\overline{\overline{\Omega}}_\delta\setminus\overline{\overline{\Omega}}$. Тогда функционал (4.32) будет точной штрафной функцией.*

Таким образом, при сделанных в Лемме 4.5.1 предположениях существует такое число $0 < \mu^* < \infty$, что $\forall \mu > \mu_*$ задача (4.31) эквивалентна задаче минимизации функционала (4.32) на всём пространстве. Далее будем считать, что в функционале (4.32) число μ фиксировано и выполнено условие $\mu > \mu^*$.

Лемма 4.5.2. *Функционал* (4.32) *гиподифференцируем, и его гиподифференциал в точке* $[v, \overline{\beta}]$ *выражается по формуле*

$$\begin{gathered} d\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta}) = \big[0, g_v, g_{\overline{\beta}_1}, \ldots, g_{\overline{\beta}_{n+1}}\big] + \\ +\mu\Big[\mathrm{co}\big\{\big[||v||^2 - 1 - \max\{0, ||v||^2-1\}, 2v(t), 0_{n+1}\big], \big[-\max\{0,||v||^2-1\}, 0_n, 0_{n+1}\big]\big\} + \\ +\mathrm{co}\big\{\big[\overline{\beta}_1^2 - 1 - \max\{0,\overline{\beta}_1^2-1\}, 0_n, 2\overline{\beta}_1, 0_n\big], \big[-\max\{0,\overline{\beta}_1^2-1\}, 0_{n+2}\big]\big\} + \cdots + \\ +\mathrm{co}\big\{\big[\overline{\beta}_{n+1}^2 - 1 - \max\{0,\overline{\beta}_{n+1}^2-1\}, 0_n, 0_n, 2\overline{\beta}_{n+1}\big], \big[-\max\{0,\overline{\beta}_{n+1}^2-1\}, 0_n, 0_{n+1}\big]\big\}\Big]. \end{gathered} \tag{4.33}$$

Вычислим следующие вектор-функции, входящие в формулу (4.33).

$$g_v = g_{1v} + g_{2v} + g_{3v},$$

где

$$\begin{gathered} g_{1v} = 2\lambda^2\Big\{\int_0^T \big(z(t) - f(z,u,t)\big)' v(t)dt - \varphi(z,u) + \sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i\overline{\psi}_i(z) + \sum_{i=1}^n \overline{\psi}_i(z) + \\ +\sum_{i=1}^n \big(-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z)\big) + \frac{1}{2}\Big(\int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt - 1\Big)(\overline{\beta}_{n+1}+1) - \max\{0,||u||^2-1\}\Big\}\big(z(t) - f(z,u,t)\big), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} g_{2v} = 2\lambda\Big\{\lambda v(t) - \lambda\int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau)d\tau - \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t v(\tau)d\tau + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t\int_\tau^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\xi)d\xi d\tau + \\ +\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i e_i - \frac{\partial f}{\partial x}\int_0^t \Big[\int_\tau^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\xi + \frac{\partial f_0}{\partial z}\Big]d\tau - \lambda t\frac{\partial f}{\partial x}\sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i e_i\Big\}, \end{gathered}$$

$$g_{3v} = -2\lambda\frac{\partial f}{\partial u}\Big(\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda\Big[-\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v(t) + \overline{\beta}_{n+1}u(t) + u(t)\Big]\Big),$$

$$g_{\overline{\beta}_i} = g_{1\overline{\beta}_i} + g_{2\overline{\beta}_i}, \ i = \overline{1,n},$$

где

$$\begin{gathered} g_{1\overline{\beta}_i} = 2\lambda^2\Big\{\int_0^T \big(z(t) - f(z,u,t)\big)' v(t)dt - \varphi(z,u) + \sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i\overline{\psi}_i(z) + \sum_{i=1}^n \overline{\psi}_i(z) + \\ +\sum_{i=1}^n \big(-\overline{\psi}_i(z) - \psi_i(z)\big) + \frac{1}{2}\Big[\int_0^T \big(u(t),u(t)\big)dt - 1\Big](\overline{\beta}_{n+1}+1) - \max\{0,||u||^2-1\}\Big\}\overline{\psi}_i(z), \end{gathered}$$

$$g_{2\overline{\beta}_i} = 2\lambda\int_0^T \Big\{\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x}d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda\Big[v(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v(\tau)d\tau\Big] + \lambda\sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i e_i\Big\}' e_i dt,$$

$$g_{\overline{\beta}_{n+1}} = 2\lambda \int_0^T \Big(\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda \big[- \Big(\frac{\partial f}{\partial u} \Big)' v(t) + \overline{\beta}_{n+1} u(t) + u(t) \big] \Big)' u(t) dt.$$

Замечание 4.5.1. Гиподифференциал $dF_\lambda(z,u)$ является выпуклым компактным множеством, поэтому необходимое условие минимума функционала $\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta})$ и достаточно [24].

Лемма 4.5.3. *Для того чтобы точка* $[v^*,\overline{\beta}^*] \in P_n[0,T] \times R^{n+1}$ *доставляла минимум функционалу* (4.32) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_{n+n+2} \in d\overline{H}_\mu(v^*,\overline{\beta}^*), \tag{4.34}$$

где выражение для гиподифференциала $d\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta})$ *выписано в* (4.33).

Найдём минимальный по норме гипоградиент $\overline{g} = \overline{g}(t,v,\overline{\beta}) \in d\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta})$ в точке $[v,\overline{\beta}]$, то есть решим задачу

$$\min_{\overline{g} \in d\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta})} ||\overline{g}||^2 = \min_{\gamma_i \in [0,1],\ i=\overline{1,n+2}} \Big|\Big| \big[0, g_v, g_{\overline{\beta}_1}, \ldots, g_{\overline{\beta}_{n+1}}\big] +$$

$$+\mu \Big[\gamma_1 \big[||v||^2 - 1 - \max\{0, ||v||^2 - 1\}, 2v(t), 0_{n+1} \big] + (1-\gamma_1)\big[-\max\{0, ||v||^2-1\}, 0_n, 0_{n+1}\big] +$$

$$+\gamma_2 \big[\overline{\beta}_1^2 - 1 - \max\{0, \overline{\beta}_1^2 - 1\}, 0_n, 2\overline{\beta}_1, 0_n \big] + (1-\gamma_2)\big[-\max\{0, \overline{\beta}_1^2 - 1\}, 0_n, 0_{n+1}\big] + \cdots + \tag{4.35}$$

$$+\gamma_{n+2} \big[\overline{\beta}_{n+1}^2 - 1 - \max\{0, \overline{\beta}_{n+1}^2 - 1\}, 0_n, 0_n, 2\overline{\beta}_{n+1} \big] + (1-\gamma_{n+2})\big[-\max\{0, \overline{\beta}_{n+1}^2 - 1\}, 0_n, 0_{n+1}\big] \Big] \Big|\Big|^2.$$

Задача (4.35) представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений и может быть решена одним из известных методов [17]. Обозначим γ_i^*, $i = \overline{1,n+2}$, её решение. Пусть $\overline{g} = [\overline{g}_1, \overline{g}_2]$, где вектор-функция $\overline{g}_2$ состоит из последних $n+n+1$ компонент $\overline{g}$. Тогда вектор-функция

$$\overline{\overline{\overline{G}}}(t,v,\overline{\beta}) := \overline{g}_2^* = \big[g_v, g_{\overline{\beta}_1}, \ldots, g_{\overline{\beta}_{n+1}} \big] +$$

$$+\mu \Big[\gamma_1^* \big[2v(t), 0_{n+1}\big] + (1-\gamma_1^*)\big[0_n, 0_{n+1}\big] + \gamma_2^*\big[0_n, 2\overline{\beta}_1, 0_n\big] + (1-\gamma_2^*)\big[0_n, 0_{n+1}\big] + \cdots +$$

$$+\gamma_{n+2}^* \big[0_n, 0_n, 2\overline{\beta}_{n+1}\big] + (1-\gamma_{n+2}^*)\big[0_n, 0_{n+1}\big] \Big]$$

состоит из последних $n+n+1$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала $\overline{H}_\mu$ в точке $[v,\overline{\beta}]$. Если $||\overline{\overline{\overline{G}}}(v,\overline{\beta})|| > 0$, то вектор-функция $-\overline{\overline{\overline{G}}}(t,v,\overline{\beta})/||\overline{\overline{\overline{G}}}(v,\overline{\beta})||$ является направлением гипоградиентного спуска функционала $\overline{H}_\mu$ в точке $[v,\overline{\beta}]$.

Опишем следующий метод гиподифференциального спуска для поиска точек минимума функционала $\overline{H}_\mu(v,\overline{\beta})$. Фиксируем произвольную точку $[v_1,\overline{\beta}_1] \in P_n[0,T] \times R^{n+1}$. Пусть уже построена точка $[v_k,\overline{\beta}_k] \in P_n[0,T] \times R^{n+1}$. Если выполнено условие минимума (4.34), то точка $[v_k, \overline{\beta}_k]$ является точкой минимума функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[v_{k+1}, \overline{\beta}_{k+1}] = [v_k, \overline{\beta}_k] - \alpha_k \overline{\overline{\overline{G}}}_k,$$

где вектор-функция $\overline{\overline{\overline{G}}}_k = \overline{\overline{\overline{G}}}(t, v_k, \overline{\beta}_k)$ представляет собой вектор-функцию, состоящую из последних $n + n + 1$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала $\overline{H}_\mu$ в точке $[v_k, \overline{\beta}_k]$, а величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geqslant 0} \overline{H}_\mu([v_k, \overline{\beta}_k] - \alpha \overline{\overline{\overline{G}}}_k) = \overline{H}_\mu([v_k, \overline{\beta}_k] - \alpha_k \overline{\overline{\overline{G}}}_k). \tag{4.36}$$

Тогда

$$\overline{H}_\mu(v_{k+1}, \overline{\beta}_{k+1}) \leqslant \overline{H}_\mu(v_k, \overline{\beta}_k).$$

Если последовательность $\{[v_k, \overline{\beta}_k]\}$ бесконечна, то при некоторых дополнительных предположениях можно показать, что метод гиподифференциального спуска сходится в следующем смысле

$$||\overline{g}(v_k, \overline{\beta}_k)|| = \sqrt{\int_0^T \big(\overline{g}(t, v_k, \overline{\beta}_k), \overline{g}(t, v_k, \overline{\beta}_k)\big) dt} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Если последовательность $\{[v_k, \overline{\beta}_k]\}$ конечна, то последняя её точка является точкой минимума функционала $\overline{H}_\mu(v, \overline{\beta})$ по построению.

Обозначим v^*, β^* решение задачи (4.31). Пусть $g = [g_1, g_2]$, где вектор-функция g_2 состоит из последних $n + m$ компонент g. Тогда вектор-функция

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}(t, z, u) := g_2^* = \Big[\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f_0}{\partial z} + \lambda \big[v^*(t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)' v^*(\tau) d\tau \big], \\ \frac{\partial f_0}{\partial u} - \lambda \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)' v^*(t) \Big] + \lambda \sum_{i=1}^n \big\{ \beta_i^* \big[e_i, 0_m\big] + (1 - \beta_i^*) \big[-e_i, 0_m\big] \big\} + \\ + \lambda \beta_{n+1}^* \big[0_n, 2u(t)\big] + \lambda (1 - \beta_{n+1}^*) \big[0_n, 0_m\big] \end{aligned} \tag{4.37}$$

состоит из последних $n + m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала F_λ в точке $[z, u]$ в данном случае (при $\varphi(z, u) = 0$). Если $||\overline{\overline{G}}(z, u)|| > 0$, то вектор-функция $-\overline{\overline{G}}(t, z, u)/||\overline{\overline{G}}(z, u)||$ является направлением гипоградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z, u]$.

Таким образом, в пунктах А и Б решалась задача поиска направления гипоградиентного спуска функционала F_λ в точке $[z, u]$. В случае $\varphi(z, u) > 0$ (пункт А) данная задача решается сравнительно просто, так как представляет собой задачу квадратичного программирования при наличии линейных ограничений. В случае $\varphi(z, u) = 0$ (пункт Б) помимо неизвестных величин β_i, $i = \overline{1, n+1}$, требуется также найти вектор-функцию $v(t)$. Это более сложная задача, решать которую можно численными методами, например, методом гиподифференциального спуска, как это описано в пункте Б.

Замечание 4.5.2. Отметим, что в силу структуры функционала $\overline{H}_\mu$ задача (4.36) поиска шага спуска решается аналитически. Кроме того, задача (4.35) нахождения направления спуска с помощью методов квадратичного программирования может быть решена за конечное число итераций.

Итак, теперь можно описать метод гиподифференциального спуска для поиска стационарных точек функционала F_λ. Фиксируем произвольную точку $[z_1, u_1] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$. Пусть уже построена точка $[z_k, u_k] \in P_n[0,T] \times P_m[0,T]$. Если выполнено условие минимума (4.16) или (4.28), то точка $[z_k, u_k]$ является стационарной точкой функционала F_λ, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$[z_{k+1}, u_{k+1}] = [z_k, u_k] - \alpha_k \overline{\overline{G}}_k,$$

где вектор-функция $\overline{\overline{G}}_k = \overline{\overline{G}}(t, z_k, u_k)$ представляет собой вектор-функцию, состоящую из последних $n+m$ компонент наименьшего по норме гипоградиента функционала F_λ в точке $[z_k, u_k]$. Значение для функционала $\overline{\overline{G}}_k$ берётся либо из формулы (4.30) при $\varphi(z_k, u_k) > 0$, либо из формулы (4.37) при $\varphi(z_k, u_k) = 0$. Величина α_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geqslant 0} F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha \overline{\overline{G}}_k) = F_\lambda([z_k, u_k] - \alpha_k \overline{\overline{G}}_k).$$

Тогда

$$F_\lambda(z_{k+1}, u_{k+1}) \leqslant F_\lambda(z_k, u_k).$$

Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$ бесконечна, то при некоторых дополнительных предположениях можно показать, что метод гиподифференциального спуска сходится в следующем смысле

$$||g(z_k, u_k)|| = \sqrt{\int_0^T \big(g(t, z_k, u_k), g(t, z_k, u_k)\big) dt} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Если последовательность $\{[z_k, u_k]\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала F_λ по построению.

4.6 Численные примеры

Приведём примеры задач построения оптимального управления, в которых метод субдифференциального спуска привёл к точке минимума функционала (4.8).

Пример 4.6.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u_2 - 9.8 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [-1, 0, 0, 0], \; x(1) = [0, 0, 0, 0].$$

При этом требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^1 u_1^2(t) + u_2^2(t) \; dt.$$

В данной задаче известно [42] аналитическое решение, которое имеет следующий вид

$$u_1^*(t) = -12t + 6,$$

$$u_2^*(t) = 9.8,$$

$$z_1^*(t) = -6t^2 + 6t,$$

$$z_2^*(t) = -12t + 6,$$

$$z_3^*(t) = 0,$$

$$z_4^*(t) = 0,$$

$$I(z^*, u^*) = 108.04.$$

В Таблице 4.6.1 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u = [0, 1]$, $z(t) = [1, 0, 0, 0]$, а тогда $x(t) = [-1 + t, 0, 0, 0]$. Из Таблицы 4.6.1 видно, что на 30-й итерации погрешность не превышает величины 3×10^{-3}.

Таблица 4.6.1. Результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\|\|u^* - u_k\|\|$	$\|\|z^* - z_k\|\|$	$\|\|G(z_k, u_k)\|\|$
1		1.06044	3.47062	3.21367	197.96324
2		0.94422	3.20293	3.22259	707.22868
10		0.34105	1.15682	1.38112	848.13142
20		0.20739	0.72749	0.69893	256.2921
30	108.0425		0.05774	0.02886	0.425

Пример 4.6.2. Рассмотрим ещё один пример. Пусть задана следующая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [2, 0.5], \ x(1) = [x_1(1), 0]$$

и ограничением на управление

$$\int_0^1 u_1^2(t) + u_2^2(t) \ dt \leqslant 1.$$

При этом требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^1 z_1(t) \ dt.$$

В данной задаче также известно [32] аналитическое решение, которое имеет вид

$$u_1^*(t) = -\sqrt{\frac{9}{13}},$$

$$u_2^*(t) = \sqrt{\frac{9}{13}}t - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{13}} - \frac{1}{2},$$

$$z_1^*(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{13}}t^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{9}{13}} + 1)t + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{13}},$$

$$z_2^*(t) = \sqrt{\frac{9}{13}}t - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{13}} - \frac{1}{2},$$

$$I(z^*, u^*) = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{13}).$$

В Таблице 4.6.2 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u = [0, 0]$, $z(t) = [0, 0]$, а тогда $x(t) = [2, 0.5]$. Из Таблицы 4.6.2 видно, что на 7-й итерации погрешность не превышает величины 5×10^{-3}.

Таблица 4.6.2. Результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\|\|u^* - u_k\|\|$	$\|\|z^* - z_k\|\|$	$\|\|G(z_k, u_k)\|\|$
1		1.0	1.00004	0.86826	188.77058
2		0.51873	0.91483	0.90879	76.71471
5		0.00243	0.79148	0.85081	112.2858
6	−0.61768		0.23167	0.23273	0.70711
7	−0.6464		0.08873	0.1132	0.21357

Пример 4.6.3. Рассмотрим один нелинейный пример. Пусть задана следующая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$x(0) = [0.25, 0],\ \ x(1) = [0.25, x_2(1)]$$

и ограничением на управление

$$\int_0^1 u_1^2(t) + u_2^2(t)\ dt \leqslant 1.$$

При этом требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^1 z_2(t)\ dt.$$

Данный пример рассмотрен в работе [104] при более жёстком ограничении на управление $|u(t)| \leqslant 1$, $t \in [0, 1]$, где также приведено оптимальное значение функционала

$$I(z^*, u^*) = \frac{1}{96}.$$

В Таблице 4.6.3 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка

$$u = 10t - 5,$$

$$z(t) = [10t - 5, (0.25 + 5t^2 - 5t)^2],$$

а тогда

$$x(t) = [0.25 + 5t^2 - 5t, 5t^5 - 12.5t^4 + 9.1(6)t^3 - 1.25t^2 + 0.0625t].$$

Из Таблицы 4.6.3 видно, что на 8-й итерации метод привёл к значению, отличающемуся от числа $I(z^*, u^*)$ не более, чем на величину 5×10^{-3}, однако в силу рассматриваемого менее жёсткого ограничения на управление и нелинейности системы нельзя гарантировать, что данное значение является глобальным минимумом в этой задаче.

Таблица 4.6.3. Результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\|\|G(z_k, u_k)\|\|$
1		8.3333	486.44
2		0.43953	102.93801
5		0.10272	130.33683
7		0.00025	99.303
8	0.01579		0.1127

Пример 4.6.4. В заключение рассмотрим ещё один нелинейный пример. Дана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(x_3), \\ \dot{x}_2 = \sin(x_3), \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases}$$

заданы граничные условия

$$x(0) = [0, 0, 0], \ x(1) = [3.85, 2.85, x_3(1)]$$

и ограничение на управление

$$\int_0^{5.1228} u^2(t) \ dt \leqslant 1.2807.$$

При этом требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^{5.1228} z_3(t) \ dt.$$

В Таблице 4.6.4 приведены результаты работы метода субдифференциального спуска. В качестве начального приближения взята точка $u = 0.5$, $z(t) = [0.5, 0.5, 0.5]$, а тогда $x(t) = [0.5t, 0.5t, 0.5t]$. Аналогично предыдущему примеру в силу нелинейности системы нельзя гарантировать, что полученное на последней проведённой итерации значение функционала является глобальным минимумом в этой задаче.

Таблица 4.6.4. Результаты работы МСС

k	$I(z_k, u_k)$	$\Phi(z_k, u_k)$	$\|\|G(z_k, u_k)\|\|$
1		328.4571	373.594
2		232.7861	350.5031
10		27.879	81.23427
15		7.18531	48.2351
20	-0.06627		50.3464
25		0.42832	22.2662
30	-0.157194		0.21303
35	-0.19294		0.0573

В рассмотренных примерах метод гиподифференциального спуска показал аналогичные результаты.

Глава 5

Дифференциальные включения

В этом разделе рассматривается дифференциальное включение с заданными многозначным отображением и начальной точкой. Для этого дифференциального включения требуется найти решение, доставляющее минимум интегральному функционалу. С помощью аппарата опорных функций и аппарата точных штрафных функций в случае непрерывной дифференцируемости опорной функции многозначного отображения по фазовым переменным получены некоторые классические результаты принципа максимума для дифференциальных включений.

5.1 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t) \tag{5.1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{5.2}$$

В формуле (5.1) $F(x, t)$ — заданное непрерывное многозначное отображение при $t \in [0, T]$, x — n-мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат с кусочно-непрерывной на $[0, T]$ производной, $T > 0$ — заданный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0, T]$ и каждой фазовой точке $x \in \mathbb{R}^n$ функция $F(x, t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$.

Требуется найти такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, являющуюся решением включения (5.1) и удовлетворяющую начальному условию (5.2), которая доставляет минимум функционалу

$$I(x) = \int_0^T f_0(x, t)dt, \tag{5.3}$$

где f_0 — заданная вещественная скалярная функция, непрерывная по обоим аргументам и непрерывно дифференцируемая по x.

5.2 Эквивалентная постановка задачи

Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x,t)$. Поскольку $\forall t \in [0,T]$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $F(x,t)$ представляет собой выпуклое замкнутое и ограниченное множество, включение (5.1) можно переписать иначе [11]

$$(\dot{x}, \psi) \leqslant c(F, \psi) \ \forall \psi \in S, \ \forall t \in [0,T].$$

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0,T]$, тогда с учётом (5.2) будет

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Введём функции

$$l(\psi, z, t) = (z, \psi) - c(F, \psi), \tag{5.4}$$

$$h(z,t) = \max_{\psi \in S} \max\{0, l(\psi, z, t)\} \tag{5.5}$$

и составим функционал

$$\varphi(z) = \sqrt{\int_0^T h^2(z,t) dt}. \tag{5.6}$$

Введём множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0,T] \mid \varphi(z) = 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что для функционала (5.6) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \ (z \in \Omega), \text{ если } (\dot{x}, \psi) \leqslant c(F, \psi) \ \forall \psi \in S, \ \forall t \in [0,T], \\ \varphi(z) > 0 \ (z \notin \Omega), \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Запишем функционал

$$\Phi_\lambda(z) = I(z) + \lambda \varphi(z), \tag{5.7}$$

в котором

$$I(z) = I(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau),$$

λ — достаточно большое положительное число. Ниже будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях задачу минимизации функционала (5.3) при наличии ограничений (5.1), (5.2) можно свести к безусловной минимизации функционала (5.7).

5.3 Дифференциальные свойства функционалов φ и I

Далее считаем, что опорная функция $c(F,\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ непрерывно дифференцируема по фазовой переменной x. Тогда для любых $x, y \in C_n[0,T]$ и любого $t \in [0,T]$ будет

$$c\big(F(x+\alpha y,t),\psi\big) - c\big(F(x,t),\psi\big) =$$
$$= \alpha\Big(\frac{\partial c(F,\psi)}{\partial x}, y\Big) + o(\alpha,t),\ \ \frac{o(\alpha,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \tag{5.8}$$

Пусть $v \in P_n[0,T]$. Положим

$$z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v(t),$$
$$y(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим функционал φ подробнее.

Вычислим

$$l(\psi, z_\alpha, t) = l(\psi, z, t) + \alpha H_1(\psi, z, v, t) + o(\alpha, t),\ \ \frac{o(\alpha,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H_1(\psi, z, v, t) = (\psi, v(t)) - \Big(\int_0^t v(\tau)d\tau, \frac{\partial c(F,\psi)}{\partial x}\Big).$$

Здесь использованы свойство аддитивности опорной функции по первому аргументу [12] и равенство (5.8).

С учётом (5.4) и (5.5) далее найдём

$$h(z_\alpha, t) = h(z,t) + \alpha H(z,v,t) + o(\alpha,t),\ \ \frac{o(\alpha,t)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0,$$

где

$$H(z,v,t) = \max_{\psi \in \overline{R}} H_1(\psi, z, v, t),\ \ \max_{\psi \in S} l(\psi, z, t) > 0,$$
$$H(z,v,t) = 0,\ \ \max_{\psi \in S} l(\psi, z, t) < 0,$$
$$H(z,v,t) = \max_{\psi \in \overline{R}} \max\{0, H_1(\psi, z, v, t)\},\ \ \max_{\psi \in S} l(\psi, z, t) = 0,$$
$$\overline{R}(t) = \Big\{\overline{\psi}(t) \in S \mid \max\{0, l(\overline{\psi}, z, t)\} = \max_{\psi(t) \in S} \max\{0, l(\psi, z, t)\}\Big\}.$$

В силу структуры функционала (5.4) нетрудно заметить, что в случае $l(\psi,z,t) > 0$ максимум выражения

$$\max\{0, l(\psi, z, t)\} = l(\psi, z, t)$$

достигается на единственном элементе $\psi^*(t) \in S$, поэтому в этом случае множество $\overline{R}(t)$ состоит из единственного элемента $\psi^*(t)$.

Используя выражение (5.6), можно показать, что имеет место разложение

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha \int_0^T \frac{h(z,t)}{\varphi(z)} H(z,v,t)dt + o(\alpha), \ \ \frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0. \tag{5.9}$$

Введём множества

$$T_+(z) = \{t \in [0,T] \mid l(\psi,z,t) > 0\},$$

$$T_-(z) = \{t \in [0,T] \mid l(\psi,z,t) < 0\},$$

$$T_0(z) = \{t \in [0,T] \mid l(\psi,z,t) = 0\}.$$

Используя разложение (5.9), нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 5.3.1. *Если опорная функция $c(F,\psi)$ многозначного отображения $F(x,t)$ непрерывно дифференцируема по фазовой переменной x, то:*

- *при $z \notin \Omega$ функционал φ дифференцируем по Гато [43] и его градиент в точке z находится по формуле*

$$\nabla\varphi(z) = \frac{h(z,t)}{\varphi(z)}\psi^*(t) - \int_t^T \frac{h(z,\tau)}{\varphi(z)} \frac{\partial c(F(x,\tau),\psi^*(\tau))}{\partial x} d\tau,$$

- *при $z \in \Omega$ функционал φ субдифференцируем и его субдифференциал в точке z находится по формуле*

$$\partial\varphi(z) = \Big\{ w(t)\psi(t) - \int_t^T w(\tau)\frac{\partial c(F(x,\tau),\psi(\tau))}{\partial x} d\tau \ \Big| \ w \in W, \ \psi(t) \in \overline{\overline{R}}(t) \Big\}, \tag{5.10}$$

$$\overline{\overline{R}}(t) = \Big\{ \overline{\psi}(t) \in B(0,1) \ \big| \ \max\{0, l(\overline{\psi},z,t)\} = \max_{\psi(t)\in B(0,1)} \max\{0, l(\psi,z,t)\} \Big\},$$

$$W = \{ w \in P[0,T] \mid \int_0^T \big(w(t),w(t)\big)dt \leqslant 1; \ w(t) \geqslant 0 \ \forall t \in T_0, \ w(t) = 0 \ \forall t \in T_- \}.$$

Заметим, что в данном случае также имеет место равенство

$$\mu w(t) \frac{\partial c(F(x,t),\psi(t))}{\partial x} = \frac{\partial c(F(x,t),\mu w(t)\psi(t))}{\partial x} \ \forall t \in [0,T], \ \forall \mu > 0. \tag{5.11}$$

Находя производную функционала I по направлению $v \in P_n[0,T]$, убеждаемся [39], что он дифференцируем по Гато

$$I'(z,v) = \int_0^T \Big(\int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau, v(t) \Big) dt,$$

и его градиент на множестве $P_n[0,T]$ находится по формуле

$$\nabla I(z) = \int_t^T \frac{\partial f_0}{\partial x} d\tau. \tag{5.12}$$

5.4 Необходимые условия минимума

Пользуясь известным достаточным условием локальной точности штрафной функции [23], заключаем, что справедлива

Теорема 5.4.1. *Пусть точка $z_0 \in \Omega$ является локальным минимумом функционала I на множестве Ω в метрике ρ. Предположим, что в некоторой окрестности*

$$\overline{\Omega}_\delta = \{z \in P_n[0,T] \mid \rho(z, z_0) < \delta\}$$

точки z_0 выполнено соотношение

$$\varphi^{\downarrow}(z) \leqslant -a < 0 \ \forall z \in \overline{\Omega}_\delta \setminus \Omega.$$

Пусть также функционал I является липшицевым на множестве $\overline{\Omega}_\delta$. Тогда существует такое число λ^*, что для любого $\lambda > \lambda^*$ точка z_0 будет локальным минимумом функционала Φ_λ в метрике ρ.

Теорема 5.4.2. *Пусть выполнены условия Теоремы 5.4.1. Пусть также опорная функция многозначного отображения $F(x,t)$ из (5.1) непрерывно дифференцируема по x. Для того, чтобы точка*

$$x^* = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

удовлетворяла включению (5.1) и условию (5.2) и доставляла минимум функционалу (5.3), необходимо, чтобы нашлась такая вектор-функция $\Psi(t)$, что для всех $t \in [0,T]$ выполняются соотношения

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial c(F(x^*,t), \Psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_0(x^*,t)}{\partial x}, \tag{5.13}$$

$$(\dot{x}^*, \Psi(t)) - c(F(x^*,t), \Psi(t)) = 0, \tag{5.14}$$

$$\Psi(T) = \mathbf{0}. \tag{5.15}$$

Доказательство. Теорема 5.4.1 утверждает, что существует такое число $\lambda^* > 0$, что для всех $\lambda > \lambda^*$ точки локального минимума функционала (5.3) на множестве, задаваемом ограничениями (5.1), (5.2), являются точками локального минимума функционала (5.7) на всём пространстве.

Положим $\Psi(t) = \lambda w(t)\psi(t)$, где вектор-функция $w(t)$ берётся из множества W, а вектор-функция $\psi(t)$ — из множества $\overline{\overline{R}}(t)$. Поскольку по Лемме 5.3.1 при $z \in \Omega$ функционал φ субдифференцируем, и его субдифференциал выписан в (5.10), а функционал I

дифференцируем по Гато, и его градиент выписан в (5.12), то из известного необходимого условия минимума [23]

$$0_n \in \partial\Phi(z^*)$$

имеем с учётом (5.11), что в точке минимума для всех $t \in [0, T]$ должно выполняться условие

$$\int_t^T \frac{\partial f_0(x^*, t)}{\partial x} d\tau + \Psi(t) + \int_t^T -\frac{\partial c(F(x^*, t), \Psi(t))}{\partial x} d\tau = 0_n, \tag{5.16}$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$. Дифференцируя (5.16) на интервале времени $[0, T]$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial c(F(x^*, t), \Psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial f_0(x^*, t)}{\partial x}$$

с концевым условием $\Psi(T) = \mathbf{0}$, и мы приходим к соотношениям (5.13), (5.15).

При $t \in T_0$ из вида функции $l(\psi, z, t)$ получаем $(z, \Psi) = c(F, \Psi)$, при $t \in T_-$ $w(t) = 0$, и соотношение (5.14) остаётся в силе. Таким образом, (5.14) должно иметь место при любом $t \in [0, T]$.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 5.4.1. Теорема 5.4.2 сформулирована для задачи со свободным правым концом. Нетрудно показать, что соотношения (5.13), (5.14) будут иметь место и для задачи с фиксированным правым концом, однако концевое значение $\Psi(T)$ для этой задачи в общем случае будет ненулевым, то есть здесь (5.15) уже не будет иметь места.

5.5 Численные примеры

Пример 5.5.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases}$$

в которой ограничение на управление задаётся множеством

$$U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid |u_1| \leqslant 1,\ u_2 = 0\}.$$

Пусть заданы начальное положение $x_0 = (0, 0)$ и конечное состояние $x(1) = (-1/2, -1/3)$ системы. Требуется подобрать такое управление $u^* \in U$, при котором функционал

$$I(x) = \int_0^1 x_2(t) dt$$

принимает наименьшее значение.

Систему можно переписать в виде включения

$$\dot{x} \in F(x),$$

где

$$F(x) = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку опорная функция $c(A, b)$ отрезка $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \in [-1, 1]\}$ имеет вид $|b|$ [10], то в данном случае опорная функция многозначного отображения $F(x)$ выражается по формуле

$$c(F, \psi) = |\psi_1| + x_1\psi_2.$$

Видно, что функция $c(F, \psi)$ является непрерывно дифференцируемой по фазовым переменным и её градиент выписывается следующим образом

$$\frac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, 0)'.$$

Для градиента подынтегральной функции f_0 справедливо выражение

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = (0, 1)'.$$

Из Теоремы 5.4.2 с учётом Замечания 5.4.1 следует, что вектор-функция $\psi(t)$ должна удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = 1. \end{cases} \tag{5.17}$$

Из Теоремы 5.4.2 с учётом Замечания 5.4.1 также получаем, что для $\psi(t)$ для всех t необходимо выполнение соотношений

$$(\dot{x}, \psi(t)) = u_1\psi_1 + x_1\psi_2 = c(F, \psi) = |\psi_1| + x_1\psi_2,$$

отсюда для всех t должно выполняться равенство

$$u_1(t)\psi_1(t) = |\psi_1(t)|. \tag{5.18}$$

Из (5.17), (5.18) уже нетрудно получить оптимальное управление

$$u_1^*(t) = -1, \quad t \in [0, \tau_1),$$

$$u_1^*(t) = 1, \quad t \in [\tau_1, \tau_2), \tag{5.19}$$

$$u_1^*(t) = -1, \quad t \in [\tau_2, 1],$$

и соответствующую ему оптимальную траекторию

$$x_1^*(t) = -t,\ x_2^*(t) = -t^2/2,\ t \in [0, \tau_1),$$

$$x_1^*(t) = t + S_1,\ x_2^*(t) = t^2/2 + S_1 t + S_2,\ t \in [\tau_1, \tau_2), \tag{5.20}$$

$$x_1^*(t) = -t + 1/2,\ x_2^*(t) = -t^2/2 + t/2 - 1/2,\ t \in [\tau_2, 1],$$

где $\tau_1 = 13/24$, $\tau_2 = 19/24$, $S_1 = -13/12$, $S_2 = 169/576$. Для поиска величин τ_1, τ_2, S_1, S_2 в (5.19), (5.20) использованы граничные условия и условие непрерывности траектории.

Пример 5.5.2. Рассмотрим ещё один пример. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yu}{x},\ x \in [x_-, x_+]$$

с краевыми условиями

$$y(x_-) = y_-,$$

$$y(x_+) = y_+,$$

$$x_+ > x_- > 0,\ y_- > 0,\ y_+ > 0$$

и ограничением на управление

$$-1 < \delta \le u \le \sigma < 0.$$

Требуется подобрать такое управление u^*, которое удовлетворяет данному ограничению и доставляет минимум функционалу

$$I(y, u) = \int_{x_-}^{x_+} -y(x) f'(x) dx,$$

где $f(x)$ — некоторая функция распределения.

Такие задачи встречаются при моделировании регрессивной шкалы прибыли [78].

Перейдём от исходного дифференциального уравнения к дифференциальному включению

$$\frac{dy}{dx} \in F(y, x),$$

где

$$F(y, x) = \left[\delta\frac{y}{x}, \sigma\frac{y}{x}\right].$$

Отрезок $\left[\delta\frac{y}{x}, \sigma\frac{y}{x}\right]$ представляет собой одномерный шар с центром в точке $\frac{y}{x}\frac{\sigma+\delta}{2}$ и радиусом $\frac{y}{x}\frac{\sigma-\delta}{2}$. Опорная функция $c(A, b)$ шара $A = \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a - a_0|| \leqslant r\}$ имеет вид

$a_0b + r||b||$ [10], поэтому опорная функция многозначного отображения $F(y,x)$ выражается по формуле

$$c(F,\psi) = \frac{y}{x}\Big(\frac{\sigma+\delta}{2}\psi + \frac{\sigma-\delta}{2}|\psi|\Big).$$

Из Теоремы 5.4.2 с учётом Замечания 5.4.1 имеем

$$\frac{y}{x}u\psi = \frac{dy}{dx}\psi = c(F,\psi) = \frac{y}{x}\Big(\frac{\sigma+\delta}{2}\psi + \frac{\sigma-\delta}{2}|\psi|\Big),$$

тогда

$$u\psi = \frac{\sigma+\delta}{2}\psi + \frac{\sigma-\delta}{2}|\psi|,$$

поэтому

$$\begin{gathered} u = \sigma,\ \psi(x) > 0, \\ u \in [\delta,\sigma],\ \psi(x) = 0, \\ u = \delta,\ \psi(x) < 0. \end{gathered} \tag{5.21}$$

Далее, поскольку

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\sigma+\delta}{2x}\psi + \frac{\sigma-\delta}{2x}|\psi| = \frac{u}{x}\psi,$$

из Теоремы 5.4.2 с учётом Замечания 5.4.1 получаем

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\partial c}{\partial y} - f' = -\frac{u}{x}\psi - f'. \tag{5.22}$$

Из (5.21), (5.22) уже нетрудно получить оптимальное управление

$$\begin{gathered} u^*(x) = \sigma,\ x \in [x_-, x_0), \\ u^*(x) \in [\delta,\sigma],\ x = x_0, \\ u^*(x) = \delta,\ x \in (x_0, x_+], \end{gathered} \tag{5.23}$$

и соответсвующую ему оптимальную траекторию

$$\begin{gathered} y^*(x) = C_1 x^{\sigma},\ x \in [x_-, x_0], \\ y^*(x) = C_2 x^{\delta},\ x \in [x_0, x_+], \end{gathered} \tag{5.24}$$

где $C_1 = \dfrac{y_-}{x_-^{\sigma}}$, $C_2 = \dfrac{y_+}{x_+^{\delta}}$, $x_0 = \Big(\dfrac{y_+ x_-^{\sigma}}{y_- x_+^{\delta}}\Big)^{\frac{1}{\sigma-\delta}}$. Для поиска величин C_1, C_2, x_0 в (5.23), (5.24) использованы граничные условия и условие непрерывности траектории.

Нетрудно убедиться, что условия (5.17), (5.18) и (5.21), (5.22) могут быть получены непосредственно из принципа максимума Понтрягина. Здесь же продемонстрирован несколько иной подход, когда осуществляется переход от исходной системы к соответствующему дифференциальному включению, для которого применяются полученные условия оптимальности для поиска оптимального процесса $(x^*(t), u^*(t))$.

Глава 6

Задача Коши

В данном разделе рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ. Эта задача сводится к вариационной задаче минимизации некоторого функционала на всём пространстве. Для данного функционала выписываются необходимые условия минимума. На основании этих условий описываются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений для рассматриваемой задачи. Приводятся численные примеры реализации этих методов. Аналогичная схема решения задачи Коши в случае линейной системы была использована в [63]. Дополнительно исследуется задача Коши с системой, не разрешённой относительно производных.

6.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x,t), \ t \in [0,T], \tag{6.1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{6.2}$$

Здесь $T > 0$ — некоторый фиксированный момент времени, x — искомая вектор-функция фазовых координат, $x \in C_n^1[0,T]$, $f(x,t)$ — заданная вещественная n-мерная вектор-функция, $x_0 \in R^n$ — заданный вектор. Требуется найти такое решение системы (6.1), которое удовлетворяет начальному условию (6.2). Будем считать, что для (6.1), (6.2) выполнены условия теоремы Пикара. Тогда решение задачи Коши (6.1), (6.2) существует и единственно.

6.2 Сведение к вариационной задаче

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in C_n[0,T]$. Тогда с учётом (6.2)

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau.$$

Требуется найти такую вектор-функцию $z^* \in C_n[0,T]$, которая удовлетворяет системе

$$z(t) = f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, t\big). \tag{6.3}$$

Введём в рассмотрение функционал

$$I(z) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(\varphi(z,t), \varphi(z,t)\big)dt, \tag{6.4}$$

где

$$\varphi(z,t) = z(t) - f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, t\big).$$

Нетрудно видеть, что функционал (6.4) неотрицателен для всех $z \in C_n[0,T]$ и обращается в ноль в точке $z^* \in C_n[0,T]$ тогда и только тогда, когда z^* — решение задачи Коши (6.1), (6.2) или (6.3).

6.3 Необходимые условия минимума

Рассмотрим дифференциальные свойства функционала I. Заметим, что из выполнения условий теоремы Пикара следует существование и непрерывность матрицы $\frac{\partial f}{\partial x}$ частных производных.

Лемма 6.3.1. *Функционал I дифференцируем по Гато [43], и его градиент Гато в точке z выражается по формуле*

$$\nabla I(z) = z(t) - f(x,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial x}\Big)'\big(z(\tau) - f(x,\tau)\big)d\tau. \tag{6.5}$$

Доказательство. Рассмотрим классическую вариацию функционала (6.4). Пусть $v \in C_n[0,T]$, $\alpha > 0$. Вычислим

$$I(z+\alpha v) = \frac{1}{2}\int_0^T \Big(z(t) + \alpha v(t) - f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau)d\tau, t\big),$$

$$z(t) + \alpha v(t) - f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau)d\tau, t\big)\Big)dt =$$

$$= I(z) + \alpha\int_0^T \Big(z(t) - f(x,t), v(t) - \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\int_0^t v(\tau)d\tau\Big)dt + o(\alpha),$$

$$\frac{o(\alpha)}{\alpha} \downarrow 0 \text{ при } \alpha \downarrow 0.$$

Далее имеем

$$I'(z,v) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{I(z+\alpha v) - I(z)}{\alpha} = \int_0^T \big(z(t) - f(x,t), v(t)\big) dt -$$

$$- \int_0^T \Big(\int_t^T \Big(\frac{\partial f(x,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z(\tau) - f(x,\tau)\big) d\tau, v(t)\Big) dt = \int_0^T \big(\nabla I(z), v(t)\big) dt,$$

и формула (6.5) доказана. □

Отсюда заключаем, что для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала (6.4), необходимо [23] выполнение соотношения

$$z^*(t) - f(x^*,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x^*,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z^*(\tau) - f(x^*,\tau)\big) d\tau = 0_n \ \forall t \in [0,T], \tag{6.6}$$

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau,$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $C_n[0,T]$. Отметим, что в случае линейности исходной системы функционал I оказывается выпуклым [63], а тогда сформулированное необходимое условие минимума будет и достаточным.

6.4 Метод наискорейшего спуска

Опишем вначале следующий метод наискорейшего спуска [37] для поиска стационарных точек функционала I.

Фиксируем произвольное $z_1 \in C_n[0,T]$. Пусть уже построено $z_k \in C_n[0,T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (6.6), то z_k является стационарной точкой функционала I, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{k+1}(t) = z_k(t) + \gamma_k G(z_k,t), \tag{6.7}$$

где $G(z_k,t)$ представляет собой антиградиент функционала I в точке z_k, который с учётом (6.5) находится по формуле

$$G(z_k,t) = -z_k(t) + f(x_k,t) + \int_t^T \Big(\frac{\partial f(x_k,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z_k(\tau) - f(x_k,\tau)\big) d\tau, \tag{6.8}$$

$$x_k(t) = x_0 + \int_0^t z_k(\tau) d\tau,$$

а γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geqslant 0} I(z_k + \gamma G(z_k,t)) = I(z_k + \gamma_k G(z_k,t)). \tag{6.9}$$

В силу (6.9)

$$I(z_{k+1}) \leqslant I(z_k).$$

Если последовательность $\{z_k\}$ бесконечна, то благодаря непрерывности $G(z_k, t)$ как функции z описанный метод сходится [23] в следующем смысле

$$||G(z_k)|| = \sqrt{\int_0^T \big(G(z_k, t), G(z_k, t)\big) dt} \to 0,\ k \to \infty.$$

Если последовательность $\{z_k\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала I по построению.

6.5 Метод сопряжённых направлений

Опишем теперь следующий метод сопряжённых направлений [13] для поиска стационарных точек функционала I.

Фиксируем произвольное $z_1 \in C_n[0, T]$. Пусть уже построено $z_k \in C_n[0, T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (6.6), то z_k является стационарной точкой функционала I, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{k+1}(t) = z_k(t) + \gamma_k W(z_k, t), \tag{6.10}$$

$$W(z_0, t) = G(z_0, t),\ W(z_k, t) = G(z_k, t) + \beta_k W(z_{k-1}, t),$$

где $G(z_k, t)$ определяется формулой (6.8), а γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации

$$\min_{\gamma \geqslant 0} I(z_k + \gamma W(z_k, t)) = I(z_k + \gamma_k W(z_k, t)). \tag{6.11}$$

Величину β_k можно искать по-разному. Для нахождения β_k наиболее распространены правило Флетчера—Ривса

$$\beta_k = \frac{\displaystyle\int_0^T \big(G(z_k, t), G(z_k, t)\big)\ dt}{\displaystyle\int_0^T \big(G(z_{k-1}, t), G(z_{k-1}, t)\big)\ dt}$$

и правило Полака—Райбера

$$\beta_k = \frac{\displaystyle\int_0^T \big(G(z_k, t), G(z_k, t) - G(z_{k-1}, t)\big)\ dt}{\displaystyle\int_0^T \big(G(z_{k-1}, t), G(z_{k-1}, t)\big)\ dt}.$$

В силу (6.11)

$$I(z_{k+1}) \leqslant I(z_k).$$

Из (6.7) и (6.10) видно, что на первой итерации МНС и МСН совпадают. Метод сопряжённых направлений обычно оказывается более эффективным, чем метод наискорейшего спуска. Например, при минимизации выпуклых квадратичных функций в конечномерных задачах МСН сходится за конечное число итераций, в отличие от МНС, который в общем случае сходится лишь в пределе.

6.6 Численные примеры

Пример 6.6.1. Для иллюстрации метода наискорейшего спуска рассмотрим следующий пример. Пусть требуется решить задачу Коши

$$\dot{x} = -x^2,$$

$$x(0) = 1.$$

Зададим $T = 1$. Аналитическое решение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{t+1}.$$

В Таблице 6.6.1 приведены результаты вычислений с помощью метода наискорейшего спуска. В качестве начального приближения взята точка $z(t) = 0$, а тогда $x(t) = 1$. Из Таблицы 6.6.1 видно, что на 3-ей итерации погрешность не превышает величины 2×10^{-5}.

Таблица 6.6.1. Результаты работы МНС

k	$I(z_k)$	$\|\|z^* - z_k\|\|$	$\|\|x^* - x_k\|\|$	$\|\|G(z_k)\|\|$
1	0.5	0.54006	0.3372	1.0408
2	0.00318	0.07374	0.01472	0.04325
3	0.0000153	0.0048	0.00087	0.00036

Пример 6.6.2. Для иллюстрации метода сопряжённых направлений рассмотрим ещё один пример. Пусть требуется решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (-c + dx_1)x_2, \end{cases}$$

где начальные условия имеют вид

$$x_1(0) = 3, \; x_2(0) = 1.$$

Такие системы встречаются при моделировании жизнедеятельности популяций и описывают взаимодействие хищников с жертвами. Приведённая система уравнений является одной из самых известных для описания динамики взаимодействующих популяций и носит название модели Вольтерра—Лотка [77]. Здесь x_1 — количество жертв, x_2 — количество хищников. Коэффициенты a, b, c, d положительны, a — скорость размножения жертв в отсутствии хищников, b характеризует сокращение количества жертв из-за хищников, c — скорость вымирания хищников в отсутствии жертв, d характеризует компенсацию количества хищников за счёт жертв. Зададим $T = 1$, $a = b = c = d = 1$.

В Таблице 6.6.2 приведены результаты вычислений с помощью метода сопряжённых направлений. В качестве начального приближения взята точка $z(t) = [t, t]$, а тогда $x(t) = [3 + \frac{1}{2}t^2, 1 + \frac{1}{2}t^2]$. Из Таблицы 6.6.2 видно, что на 6-ой итерации погрешность не превышает величины 3×10^{-2}.

Таблица 6.6.2. Результаты работы МСН

k	1	2	3	4	5	6
$I(z_k)$	2.9974	1.6008	1.2617	0.4419	0.0591	0.0207
$\|\|G(z_k)\|\|$	4.6257	2.1201	1.3691	0.6875	0.7836	0.1608

6.7 Случай неразрешённости относительно производных

Дополнительно исследуем задачу Коши, когда система ОДУ не разрешена относительно производных, то есть рассмотрим задачу

$$g(x, \dot{x}, t) = \mathbf{0}, \; t \in [0, T], \tag{6.12}$$

$$x(0) = x_0. \tag{6.13}$$

Здесь T — некоторый фиксированный момент времени, x — искомая вектор-функция фазовых координат, $x \in C_n^1[0, T]$, $g(x, \dot{x}, t)$ — заданная вещественная n-мерная вектор-функция, $x_0 \in R^n$ — заданный вектор. Требуется найти такое решение системы (6.12), которое удовлетворяет начальному условию (6.13). Предполагаем $g(x, \dot{x}, t)$ непрерывно дифференцируемой по x и $\dot{x}$ и непрерывной по всем трём аргументам. Будем считать, что решение задачи Коши (6.12), (6.13) существует и единственно. Так же, как и в задаче (6.1), (6.2), положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in C_n[0, T]$.

Введём в рассмотрение функционал

$$J(z) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(g(z,t), g(z,t)\big)dt, \tag{6.14}$$

где $g(z,t) = g\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z, t\big)$.

Нетрудно видеть, что функционал (6.14) неотрицателен для всех $z \in C_n[0,T]$ и обращается в ноль в точке z^* тогда и только тогда, когда z^* — решение задачи (6.12), (6.13).

Можно показать, что для задачи (6.12), (6.13) справедлива лемма, аналогичная Лемме 6.3.1 для задачи (6.1), (6.2).

Лемма 6.7.1. *Функционал J дифференцируем по Гато, и его градиент Гато в точке z выражается по формуле*

$$\nabla J(z) = \int_t^T \Big(\frac{\partial g(x,z,\tau)}{\partial x}\Big)' g(x,z,\tau)d\tau + \Big(\frac{\partial g(x,z,t)}{\partial z}\Big)' g(x,z,t).$$

Отсюда заключаем, что для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала (6.14), необходимо [23] выполнение соотношения

$$\int_t^T \Big(\frac{\partial g(x^*,z^*,\tau)}{\partial x}\Big)' g(x^*,z^*,\tau)d\tau + \Big(\frac{\partial g(x^*,z^*,t)}{\partial z}\Big)' g(x^*,z^*,t) = 0_n \ \forall t \in [0,T].$$

Заключение

Приведём краткий обзор результатов, полученных в данной работе.

Во введении даётся обзор литературы по теме работы, обсуждается актуальности исследования, его теоретическая и практическая значимость.

В главе 1 даются основные предварительные сведения, которые используются в последующих главах.

В главе 2 рассматривается задача минимизации полинома от интегральных функционалов. Для решения задачи используются метод наискорейшего спуска и метод гиподифференциального спуска. Отмечено, что такие полиномы имеют приложения в некоторых задачах управления, интегральных уравнениях и аэродинамике.

Во главе 3 задача построения программного управления и соответствующего ему программного движения при интегральном ограничении на управление сводится к вариационной задаче минимизации некоторого негладкого функционала на всём пространстве. Для этого функционала выписаны субдифференциал и гиподифференциал, найдены необходимые условия минимума, которые в случае линейности исходной системы по фазовым переменным и управлению оказываются и достаточными. На основании этих условий описываются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска. Приведены численные примеры реализации описанных методов.

В главе 4 задача построения оптимального управления с интегральным ограничением на управление сводится к вариационной задаче минимизации некоторого негладкого функционала на всём пространстве. Для этого функционала выписаны субдифференциал и гиподифференциал, найдены необходимые условия минимума, которые в случае линейности исходной системы по фазовым переменным и управлению и выпуклости минимизируемого функционала оказываются и достаточными. На основании этих условий описываются метод субдифференциального спуска и метод гиподифференциального спуска для данной задачи. Приведены численные примеры реализации описанных методов.

В главе 5 продемонстрировано применение теории штрафных функций к задаче оптимального управления дифференциальным включением. Аппарат опорных функций позволяет свести исходную задачу к оптимизационной задаче при наличии ограничений. С помощью точных штрафов эта задача при наличии ограничений сводится к минимизации некоторого негладкого функционала на всём пространстве. При условии непрерывной дифференцируемости опорной функции многозначного отображения дифференциального включения по вектору фазовых координат этот функционал оказывается субдифференцируемым, что позволяет выписать необходимые условия минимума в терминах субдифференциала, совпадающие при дополнительных предположениях с некоторым классическим результатом для этой задачи.

В главе 6 задача Коши с нелинейной системой и начальным условием сводится к минимизации некоторого функционала на всём пространстве. Для этого функционала выписан градиент Гато, найдены необходимые условия минимума. На основании условий минимума описываются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений для рассматриваемой задачи. Приведены численные примеры реализации описанных методов. Дополнительно исследуется задача Коши с системой, не разрешённой относительно производных.

Дальнейшие исследования могут вестись в направлении применения описанного подхода к задачам оптимального управления с различными ограничениями на управляющую функцию, а также фазовыми ограничениями. Кроме того, аналогичные методы могут быть применены к различным задачам наблюдения и идентификации. Представляет интерес дальнейшее изучение дифференциальных включений с применением аппарата негладкой оптимизации, построение конструктивных методов в этих задачах.

Список обозначений

$X \times Y$ — прямое произведение пространств X и Y;

X^* — пространство, сопряжённое к пространству X;

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

$\mathbf{0}$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$;

$\mathrm{co}\, A$ — выпуклая оболочка множества A;

$\exists$ — квантор существования;

$\forall$ — квантор всеобщности;

$|\cdot|$ — модуль;

$\|\cdot\|$ — норма;

$\rho(\cdot,\cdot)$ — метрика;

$\|f\|,\ f \in L_2$ — норма в пространстве $L_2[a,b]$;

$\rho(f,g),\ f,g \in L_2$ — метрика в пространстве $L_2[a,b]$;

$B(x,r)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке x;

S — единичная сфера;

N — множество натуральных чисел;

$\mathrm{dom}\, f$ — эффективное множество функции f;

$f'(x,g)$ — производная функции f в точке x по направлению g;

$\nabla f(x)$ — производная Гато функции f в точке x;

$\partial f(x)$ — субдифференциал функции f в точке x;

$df(x)$ — гиподифференциал функции f в точке x;

$\int_a^b (f(t),g(t))dt,\ f,g \in L_2,$ — скалярное произведение в пространстве $L_2[a,b]$;

$\mathrm{sign}\, \alpha$ — знак числа α;

$C_d[a,b]$ — пространство непрерывных d–мерных вектор-функций, определённых на отрезке $[a,b]$;

$C_d^1[a,b]$ — пространство непрерывно дифференцируемых d–мерных вектор-функций, определённых на отрезке $[a,b]$;

$P_d[a,b]$ — пространство кусочно непрерывных d–мерных вектор-функций, определённых на отрезке $[a,b]$;

$L_2[a,b]$ — пространство измеримых, суммируемых с квадратом вектор-функций, определённых на отрезке $[a,b]$;

$\alpha \downarrow 0$ — $\alpha \to +0$;

E — единичная матрица;

e_i — канонический базис в пространстве $\mathbb{R}^n$;

$(\cdot)'$ — транспонирование;

$c(F,\psi) = \sup\limits_{f\in F}(f,\psi)$ — опорная функция множества $F \subset \mathbb{R}^n$;

Литература

[1] **Антипин А. С., Хорошилова Е. В.** Линейное программирование и динамика // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 7–25.

[2] **Антипин А. С., Хорошилова Е. В.** О краевой задаче терминального управления с квадратичным критерием качества // Изв. Ирк. ун-та. Сер. Математика. 2014. Т. 8. С. 7–28.

[3] **Антипин А. С., Хорошилова Е. В.** Оптимальное управление со связанными начальными и терминальными условиями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 2. С. 13–28.

[4] **Баранов А. Ю., Казаринов Ю. Ф., Хоменюк В. В.** Градиентные методы оптимизации нелинейных систем автоматического регулирования. В сб. «Прикл. задачи техн. кибернетики». 1966. С. 307–316.

[5] **Бейко И. В.** Численные методы отыскания оптимальных управлений. В сб. «Оптимальные системы. Статист. методы». М.: Наука, 1967. С. 176–183.

[6] **Бейко И. В., Бейко М. Ф.** Об одном новом подходе к решению нелинейных краевых задач // Укр. мат. ж. 1968. Т. 20. № 6. С. 723–731.

[7] **Беллман Р.** Динамическое программирование. Перев. с англ. М.: Изд–во ин. лит., 1960. 400 с.

[8] **Беллман Р.** Динамическое программирование и современная теория управления. Перев. с англ. М.: Наука, 1969. 118 с.

[9] **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. Том 1. Изд–во. 2-е, стереотип. М.: Физматлит, 1962. 464 с.

[10] **Благодатских В. И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 239 с.

[11] **Благодатских В. И.** Принцип максимума для дифференциальных включений // Тр. МИАН. 1984. Т. 166. С. 23–43.

[12] **Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.

[13] **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

[14] **Габасов Р.** Вопросы конструктивной теории оптимального управления // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1. 1981. № 3. С. 56–61.

[15] **Гюнтер Н. М.** Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1941. 308 с.

[16] **Данскин Дж.** Теория максимина и её приложение к задачам распределения вооружения. М.: Советское радио, 1970. 200 с.

[17] **Даугавет В. А.** Модификация метода Вулфа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1981. Т. 21. № 2. С. 504–508.

[18] **Даугавет В. А.** Численные методы квадратичного программирования. СПб.: Изд–во СПбГУ, 2001. 128 с.

[19] **Демьянов В. Ф.** К построению оптимальной программы в линейной системе // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. № 1. С. 3–11.

[20] **Демьянов В. Ф.** Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд–во ЛГУ, 1974. 112 с.

[21] **Демьянов В. Ф.** Негладкий анализ на плоскости. Часть I // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 8. С. 122–127.

[22] **Демьянов В. Ф.** Построение программного управления в линейной системе, оптимального в интегральном смысле // Прикл. мат. и мех. 1963. Т. 27. № 3. С. 554–556.

[23] **Демьянов В. Ф.** Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

[24] **Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

[25] **Демьянов В. Ф., Долгополик М. В.** Кодифференцируемые функции в банаховых пространствах: методы и приложения к задачам вариационного исчисления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 48–66.

[26] **Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.** Введение в минимакс. М: Наука, 1972. 368 с.

[27] **Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н.** Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20. № 4. С. 849–856.

[28] **Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

[29] **Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.** Элементы квазидифференциального исчисления / Негладкие задачи теории оптимизации и управления; под ред. В. Ф. Демьянова. Л.: Изд–во Ленингр. ун–та, 1982. С. 5–127.

[30] **Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.** Приближённые методы решения экстремальных задач. Л.: Изд–во Ленингр. ун–та, 1968. 178 с.

[31] **Демьянов В. Ф., Тамасян Г. Ш.** О прямых методах решения вариационных задач // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 36–47.

[32] **Егоров А. И.** Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.

[33] **Ерёмин И. И.** Метод «штрафов» в выпуклом программировании // Доклады АН СССР, 1967. Т. 143. № 4. С. 74–75.

[34] **Зубов В. И.** Лекции по теории управления. М.: Наука, 1969. 497 с.

[35] **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.

[36] **Исаев В. К., Сонин В. В.** Вычислительные аспекты задачи об оптимальном перелёте как краевой задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5. № 2. С. 252–261.

[37] **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.

[38] **Карелин В. В.** Точные штрафы в одной задаче управления // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 137–147.

[39] **Карелин В. В.** Точные штрафы в задаче наблюдения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2008. Вып. 4. С. 3–7.

[40] **Карпенко М. Ф.** Итерационный метод отысканий оптимальных управлений. В сб. «Кибернетика и техн. вычисл.». Киев: Наукова думка, 1964. С. 148–157.

[41] **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

[42] **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

[43] **Крейн С. Г.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1964. 424 с.

[44] **Крылов И. А.** Численное решение задачи об оптимальной стабилизации спутника // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 1. С. 203–208.

[45] **Крылов И. А., Черноусько Ф. Л.** Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12. № 1. С. 14–34.

[46] **Крылов И. А., Черноусько Ф. Л.** О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 6. С. 1132–1139.

[47] **Кузнецов А. Г., Черноусько Ф. Л.** Об оптимальном управлении, минимизирующем экстремум функции фазовых координат. Кибернетика. 1968. № 3. С. 50–55.

[48] **Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.** Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 1. Новосибирск: Изд–во Ин–та математики, 2002. 380 с.

[49] **Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.** Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. 2. Новосибирск: Изд–во Ин–та математики, 2003. 413 с.

[50] **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 528 с.

[51] **Нурминский Е. А.** О непрерывности ε-субградиентных отображений // Кибернетика, 1977. № 5. С. 148–149.

[52] **Обен Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 512 с.

[53] **Орлов В. С., Поляк Б. Т., Ребрий В. А., Третьяков Н. В.** Опыт решения задач оптимального управления. В сб. «Вычисл. методы и программир.». Вып. 9. 1967. С. 179–192.

[54] **Охоцимский Д. Е.** К теории движения ракет // Прикл. мат. и мех., 1946. Т. 10. Вып. 2. С. 251–272.

[55] **Понтрягин Л. С, Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

[56] **Полякова Л. Н.** Минимизация функции максимума сильно выпуклых функций с постоянным шагом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1998. Вып. 4. С. 59–63.

[57] **Полякова Л. Н.** Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций // Вестник Ленинградского университета, 1980. № 13. С. 57–62.

[58] **Пшеничный Б. Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

[59] **Пшеничный Б. Н.** Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1969. 151 с.

[60] **Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.** Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука. 1976. 192 с.

[61] **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

[62] **Тамасян Г. Ш.** Градиентные методы в вариационной задаче со свободными концами // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 4. С. 224–230.

[63] **Тамасян Г. Ш.** Градиентные методы решения задачи Коши // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 4. С. 224–230.

[64] **Тамасян Г. Ш.** Метод точных штрафов в вариационной задаче с отклоняющимся аргументом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2003. №2. С. 66–75.

[65] **Тамасян Г. Ш.** Численные методы в задачах вариационного исчисления для функционалов, зависящих от производных высшего порядка // Проблемы математического анализа. 2012. Вып. 67. С. 113–132.

[66] **Фоминых А. В.** Градиентные методы решения задачи Коши для нелинейной системы ОДУ // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 3. С. 311–316.

[67] **Фоминых А. В.** Необходимые условия минимума полинома от интегральных функционалов // Вестник Санкт–Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 2. С. 93–107.

[68] **Фоминых А. В., Карелин В. В.** Точные штрафы в задаче построения оптимального решения дифференциального включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 153–163.

[69] **Фоминых А. В.** Метод гиподифференциального спуска в задаче построения программного управления // Вестник Санкт–Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 1. (принято к печати)

[70] **Фоминых А. В.** Применение метода гиподифференциального спуска к задаче построения оптимального управления // Устойчивость и процессы управления. Материалы международной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В. И. Зубова, 2015. С. 557–558.

[71] **Фоминых А. В.** Точные штрафы в задаче построения оптимального решения дифференциального включения / Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». 2014. С. 136.

[72] **Фоминых А. В.** Метод гиподифференциального спуска в задаче построения оптимального управления / XV Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения». 2015. С. 228–229.

[73] **Шатровский Л. И.** Об одном численном методе решения задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. № 3. С. 488–491.

[74] **Шор Н. З.** О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса // Кибернетика. 1972. № 4. С. 65–70.

[75] **Шор Н. З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979. 200 с.

[76] **Энеев Т. М.** О применении градиентного метода в задачах оптимального управления // Космические исследования. 1966. Т. 4. № 5. С. 651–669.

[77] **Эрроусмит Д., Плейс К.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 243 с.

[78] **Andersen A., Chistiakov S., Vishnevskii V.** A Game-theoretic Model of a Regressive Profit Tax // Applied Mathematical Sciences, 2015. Vol. 9, no. 85, pp. 4201–4209.

[79] **Bellmore M., Greenberg H. J., Jarvis J. J.,** Generalized Penalty-Function Concepts in Mathematical Optimization // Operations Research, 1970. Vol. 18, iss. 2. pp. 229–252.

[80] **Campbell J. H., Moore W. E., Wolf H.** A general method for selection and optimization of trajectories // Methods astrodynam. and celestial Mech. New York–London, Acad. Press, 1966, pp. 355–375.

[81] **Clarke F. H., Ledyaev Y. S., Stern R. J., Wolenski P. R.** Nonsmooth analysis and Control Theory. New York: Springer–Verlag, 1998. 278 p.

[82] **Demyanov V. F.** Continuous generalized gradients for nonsmooth functions / Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 304; A. Kurzhanski, K. Neumann and D. Pallaschke, eds. Berlin: Springer, 1988, pp. 24–27.

[83] **Demyanov V. F.** On codifferentiable functions // Vestn. Leningr. Univ., Math. 1988. Vol. 21. pp. 27–33.

[84] **Demyanov V. F., Gianessi F., Karelin V. V.** Optimal control problems via exact penalty functions // J. Glob. Optim. 1998. Vol. 12. no. 3. pp. 215–223.

[85] **Demyanov V. F., Rubinov A. M.** On quasidifferentiable mappings // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optim. 1983. Vol. 14. pp. 3–21.

[86] **Demyanov V. F., Stavroulakis G., Polyakova L. N., Panagiotopoulos P. D.** Quasidifferentiability and nonsmooth modelling in mechanics, engineering and economics. Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1996. 348 p.

[87] **Demyanov V. F., Tamasyan G. Sh.** Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. 2010. Vol. 60. no. 8. pp. 1-25.

[88] **Evans J. P., Gould F. J., Tolle J. W.** Exact Penalty Functions in Nonlinear Programming // Mathematical Programming, 1973. Vol. 4, iss. 1. pp. 72–97.

[89] **Fominyh A. V.** The subdifferential descent method in the optimal control problem // The XLVI annual international conference on Control Processes and Stability (CPS'15). Abstracts — St. Petersburg: Publishing House Fedorova G.V. 2015. Vol. 2(18). P. 90-95.

[90] **Fominyh A. V., Karelin V. V., Polyakova L. N.** Exact Penalties and Differential Inclusions // Electron. J. Diff. Equ., vol. 2015 (2015), no. 309, pp. 1–13.

[91] **Fominyh A. V.** Application of the Hypodifferential Descent Method to the Problem of Constructing an Optimal Control // IEEE 2015 International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov (SCP), pp. 560–563.

[92] **Glad T., Polak E.** A multiplier method with automatic limitation of penalty growth // Mathematical Programming, 1979. Vol. 17, iss. 1. pp. 140–155.

[93] **Hales K. A., Flugge-Lotz I., Lange B. D.** Minimum-fuel attitude control of a spacecraft by an extended method of steepest-descent // Internat. J. Non-Linear Mech., 1968. Vol. 3. no. 4. pp. 413–436.

[94] **Hussu A.** The conjugate-gradient method for optimal control problems with undetermined final time // Internal. J. Control, 1972. Vol. 15. no. 1. pp. 79–82.

[95] **Han S. P., Mangasarian O. L.** Exact penalty functions in nonlinear programming // Mathematical Programming, 1979. Vol. 17, iss. 1. pp. 251–269.

[96] **Huyer W., Neumaier A.** A New Exact Penalty function // SIAM J. Optim., 2003. Vol. 13, iss. 4. pp. 1141–1158.

[97] **Ioffe A. D.** Nonsmooth Analysis: differential calculus of nondifferentiable functions // Tran. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 266. no. 1. pp. 1–55.

[98] **Ioffe A. D., Rockafellar R. T.** The Euler and Weierstrass conditions for nonsmooth variational problems // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. 1996. Vol. 4. no. 1. pp. 59–87.

[99] **Isayev V. K., Sonin V. V.** Survey of methods for the numerical solutions of variational problems of flight dynamics // Post Apollo Space Explorat. Part 2. Washington, D. C. Amer. Astronaut. Soc., 1966. pp. 1144–1171.

[100] **Kelly H. J.** Gradient theory of optimal flight paths // ARS Journal, 1960. Vol. 30. no. 10, pp. 947–954.

[101] **Kelly H. J.** Method of gradients // Optimiz. techn. applic. aerospace syst., NewYork–London, Acad. Press, 1962, pp. 205–254.

[102] **Kelly H. J., Kopp R. E., Moyer H. G.** Successive approximation techniques for trajectory optimization. Proc. of the Symp. on Vehicle System Optimization, N. Y., 1961.

[103] **Kopp R. E., McGill R.** Several trajectory optimization techniques Part I. Discussion // Comput. Methods Optimizat. Problems, New York–London, Acad. Press, 1964, pp. 65-89.

[104] **Kumar V.** A control averaging technique for solving a class of singular optimal control problems // Internat. J: Control. 1976. Vol. 23. no. 3. pp. 361–380.

[105] **Leibniz G.** Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus // Acta Eruditorum, 1684. October issue. s. 467-473 + Tab. xii.

[106] **Levine M. D.** Trajectory optimization using the Newton–Raphson method // Automatica, 1966. Vol. 3. no. 34. pp. 203–217.

[107] **Lusty A. H., Miele A.** Bodies of Maximum Lift-to-Drag Ratio in Hypersonic Flow // AIAA Journal. 1966. Vol. 4. no. 12. pp. 2130–2135.

[108] **McGill R.** Optimal control, inequality state constraints and the generalized Newton–Raphson algorithm // J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965. A3. no. 2. pp. 1291–298.

[109] **Miele A.** Drag Minimization as the Extremization of Products of Powers of Integrals // Rice University, Aero-Astronautics Report № 31, 1967. 31 p.

[110] **Miele A.** The Extremization of Products of Powers of Functionals and Its Application to Aerodynamics // Astronautica Acta. 1966. Vol. 12. no. 1. pp. 1–41.

[111] **Miele A., Hull D. G.** On the Minimization of the Product of the Powers of Several Integrals // J. Optim. Theory Appl. 1967. Vol. 1. no. 1. pp. 70–82.

[112] **Mitter S. K.** Successive approximation methods for the solution of optimal control problems // Automatica, 1966. Vol. 3. no. 3. pp. 136–149.

[113] **Newton Is.** Tractatus de quadratura curvarum. Uppsala, 1762. 112 s.

[114] **Di Pillo G., Facchinei F.** Exact Barrier Function Methods for Lipschitz Programs // Appl. Math. Optim., 1995. Vol. 32, iss. 1. pp. 1–31.

[115] **Di Pillo, G., Grippo L.** On the Exactness of a Class of Nondifferentiable Penalty Functions // J. Optim. Theory Appl., 1988. Vol. 57, iss. 3. pp. 399–410.

[116] **Di Pillo, G., Grippo L.** Exact Penalty Functions in Constrained Optimization // SIAM J. Control Optim., 1989. Vol. 27. pp. 1333–1360.

[117] **Polyakova L.** Quasidifferentiable optimization: Exact penalty methods // Encyclopedia of optimization / Ed. C. A. Floudas, P. M. Pardalos. Doordrecht: Kluwer Academic Publ. 2001. Vol. 4. pp. 478–483.

[118] **Polyakova L. N., Stavroulakis G. E.** Difference convex optimization techniques in nonsmooth computational mechanics // Optimization Methods & Software. 1996. Vol. 7. pp. 57–81.

[119] **Sidar M.** An iterative algorithm for optimum control problems // Internal J. NonLinear Mech., 1968. Vol. 3. no. 1. pp. 1–6.

[120] **Tripathi S. S., Narendra K. S.** Optimization using conjugate gradient methods // IEEE Trans. Automat. Control, 1970. Vol. 15. no. 2. pp. 268–270.

[121] **Truemper K.** Note on Finite Convergence of Exterior Penalty Functions // Mgt. Sci., 1975. Vol. 21. no. 5. pp. 600–606.

[122] **Wang C., Ma C., Zhou J.** A New Class of Exact Penalty Functions and Penalty Algorithms // J. Glob. Optim., 2014. Vol. 58, iss. 1. pp. 51–73.

[123] **Zangwill W. I.** Non-Linear Programming Via Penalty Functions // Mgt. Sci., 1967. Vol. 13. no. 5. pp. 344–358.