

Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»

Кафедра физической механики

Клюшников Георгий Николаевич

Динамика заряженных частиц в геомагнитном поле

Выпускная квалификационная работа

Допущен к защите.

Зав. кафедрой:

проф., д. ф.-м. н. Морозов В. А.

Научный руководитель:

проф., д. ф.-м. н. Колесников Е. К.

Рецензент:

к. ф.-м. н. Чернов С. В.

Санкт-Петербург

2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Department of physical mechanics

Georgiy Klyushnicov

Dynamics of charged particles in a geomagnetic field

Graduation Qualification Paper

Admitted for defence.

Head of the chair
doctor of sc., prof. V. Morozov

Scientific supervisor:
doctor of sc., prof. E. Kolesnikov

Reviewer:
ass. of prof, PhD S. Chernov

Saint-Petersburg

2016

Содержание

1	РАЗРЕШЁННЫЕ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИКЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СУПЕРПОЗИЦИИ ДИПОЛЬНОГО И ОДНОРОДНОГО МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ	7
1.1	Каноническая формулировка задачи о движении заряженной частицы в суперпозиционном поле. Общее соотношение, задающее разрешённые области.	7
1.2	Уравнения для границ разрешённой области. Качественные особенности разрешённых областей.	10
2	ЗАДАЧА О ДИНАМИКЕ ВЕДУЩЕГО ЦЕНТРА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СУПЕРПОЗИЦИИ ПОЛЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ И ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ	13
2.1	Вывод квадратуры для дрейфа ведущего центра	13
2.2	Условия применимости дрейфовых уравнений движения	21
3	ОБЛАСТИ ВЫСЫПАНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ, ПРИБЛИЖЕННОМ ПЕРВЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ГАРМОНИКАМИ РЯДА ГАУССА	24
3.1	Алгоритм численного моделирования	27
3.2	Основные результаты расчётов	28

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о движении высокоэнергетичных заряженных частиц в магнитном поле Земли давно привлекают внимание исследователей. Работы Штермера [13], направленные на математическое обоснование гипотезы Гольдштейна-Биркеланда о корпускулярной природе полярных сияний, и исследования Леметра и Валларта [12], [14], посвященные построению разрешенного конуса космических лучей, явились основой классической теории, изучающей, главным образом, особенности распространения в магнитном поле Земли заряженных частиц, приходящих с больших расстояний от центра Земли.

Вместе с тем в последние годы на передний план вышли задачи динамики в геомагнитном поле заряженных частиц высокой энергии, запускаемых в околоземное космическое пространство на конечном расстоянии от Земли. К числу возможных источников указанных частиц относится альбедное корпускулярное излучение, возбуждаемое в материале крупных объектов космической инфраструктуры (многофункциональных долговременных орбитальных станций, солнечных электростанций, стартовых орбитальных платформ), появление которых в околоземном пространстве возможно в ближайшем будущем. Источниками частиц высокой энергии могут быть и космические ускорители высоких энергий, концепции которых в настоящее время разрабатываются как в нашей стране, так и за рубежом.

Заметим, что отмеченные источники частиц высокой энергии могут явиться дополнительным фактором антропогенного загрязнения ближнего космоса, значительно более опасным для космической техники в силу высокой проникающей способности частиц высокой энергии по сравнению, например, с загрязнением техногенными микрочастицами, воздействующими только на внешние поверхности космического аппарата и его аппаратуры.

Настоящая работа состоит из трёх глав. Первая глава посвящена исследованию

дованию областей, являющихся разрешёнными для движения заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей. При этом основное внимание уделено построению разрешённых областей в ранее не исследованном случае движения в суперпозиционном поле с магнитным моментом диполя, сонаправленным внешнему магнитному полю, для положительных значений постоянной Штермера. Вид разрешённых областей для случая, когда магнитный момент диполя направлен противоположно индукции однородного поля, рассмотрен в работах [6, 7], а для случая, когда магнитный момент диполя сонаправлен индукции однородного поля и постоянная Штермера отрицательна – в работе [8].

Во второй главе рассмотрена задача о динамике заряженной частицы в суперпозиции поля магнитного диполя и однородного магнитного поля, параллельного магнитному моменту диполя. Указанная модель может быть использована для описания магнитного поля Земли на достаточно больших расстояниях от центра Земли (порядка десяти земных радиусов). На указанных расстояниях основной вклад в поле внутренних источников даёт первая (дипольная) гармоника геомагнитного потенциала, а поле внешних гармоник описывается моделью однородного магнитного поля. Известно, что точное решение системы дифференциальных уравнений динамики заряженной частицы в магнитном поле, представляющем из себя суперпозицию дипольного и однородного магнитного полей, в общем случае не может быть получено. В то же время в случае дипольного магнитного поля было найдено (см. [1]) аналитическое решение динамической задачи с использованием так называемых дрейфовых уравнений движения, описывающих движение ведущего центра заряженной частицы по соответствующей силовой поверхности дипольного магнитного поля. Во второй главе показано, что использование дрейфовых уравнений движения позволяет получить аналитическое решение и задачи о дрейфе ведущего центра заряженной частицы в суперпозиционном поле.

Наконец, в третьей главе исследуются области высыпания на земную поверхность высокоэнергетических заряженных частиц для различных значений энергий и углов, задающих начальную скорость частицы. Число частиц в ансамбле принимается равным 100000. При этом магнитное поле Земли моделируется суперпозицией одной первой либо первых четырёх сферических гармоник геомагнитного потенциала.

1 РАЗРЕШЁННЫЕ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИКЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СУПЕРПОЗИЦИИ ДИПОЛЬНОГО И ОДНОРОДНОГО МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

1.1 Каноническая формулировка задачи о движении заряженной частицы в суперпозиционном поле. Об- щее соотношение, задающее разрешённые обла- сти.

В цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) с осью z , сонаправленной магнитному моменту \mathbf{M} , релятивистский гамильтониан заряженной частицы с зарядом e имеет вид

$$H_R = c\sqrt{P_\rho^2 + P_z^2 + \left(\frac{P_\varphi}{\rho} - \frac{eA_\varphi}{c}\right)^2} + m_0^2c^2, \quad (1.1)$$

где $P_\rho = m\dot{\rho}$, $P_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} + e\rho A_\varphi/c$ и $P_z = m\dot{z}$ – обобщённые импульсы, соответствующие обобщённым координатам ρ , φ и z (точка обозначает производную по времени t), m_0 – масса покоя частицы, $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, v – скорость частицы, c – скорость света (см. [4]).

Из (1.1) следует, что релятивистский гамильтониан H_R не зависит от времени явно. Значит, H_R является интегралом движения:

$$H_R = mc^2 = const. \quad (1.2)$$

(1.2) означает, что релятивистская масса m остаётся неизменной во всё время движения частицы. Следовательно, движение релятивистской частицы с массой покоя m_0 можно рассматривать как движение нереляти-

вистской частицы массы m с классической функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_\rho^2 + P_z^2 + \left(\frac{P_\varphi}{\rho} - \frac{eA_\varphi}{c} \right)^2 \right), \quad (1.3)$$

Из (1.3) видно что, гамильтониан H не зависит от координаты φ , поэтому

$$\dot{P}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.4)$$

Таким образом, обобщённый импульс P_φ является интегралом движения.

Представим его в виде

$$P_\varphi = \frac{em\Gamma}{c}, \quad (1.5)$$

Γ – постоянная размерности обратной длины.

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае суперпозиционного магнитного поля векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \left(\frac{M\rho}{r^3} + \frac{B_0\rho}{2} \right) \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.6)$$

где B_0 – проекция однородного магнитного поля на ось z (см. также [11]).

С учётом (1.6) гамильтониан (1.3) можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2m} (P_\rho^2 + P_z^2) + V, \quad (1.7)$$

где

$$V = \frac{e^2 M^2}{2mc^2} \left(\frac{\Gamma}{\rho} - \frac{\rho}{r^3} - \frac{B_0\rho}{2M} \right)^2. \quad (1.8)$$

Гамильтониан (1.7) описывает движение частицы в так называемой ведущей плоскости, проходящей в любой момент времени через частицу и магнитную ось и движущейся вместе с частицей. Такое движение эквивалентно движению в потенциальном поле с эффективным потенциалом (1.8). Уравнения движения частицы в указанном поле могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}, \\ m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Эффективный потенциал V не зависит от времени, поэтому полная энергия частицы E в ведущей плоскости является интегралом движения:

$$E = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + V = \text{const}. \quad (1.10)$$

Перейдём к безразмерным переменным, зависящим от штермеровской единицы длины $C_{st} = \sqrt{eM/mvc}$:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{C_{st}}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{C_{st}}, \quad \tilde{t} = \frac{vt}{C_{st}}. \quad (1.11)$$

Будем обозначать дифференцирование по \tilde{t} штрихом. Тогда в новых переменных (1.11) уравнения (1.9) примут вид

$$\begin{cases} \tilde{\rho}'' = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\rho}}, \\ \tilde{z}'' = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{z}}, \end{cases} \quad (1.12)$$

где новый эффективный потенциал

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma C_{st}}{\tilde{\rho}} - \frac{B_0 C_{st}^3 \tilde{\rho}}{M} - \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{r}^3} \right)^2. \quad (1.13)$$

С учётом (1.11) запишем интеграл (1.10) следующим образом:

$$\frac{1}{2} \left((\tilde{r}')^2 + (\tilde{z}')^2 \right) + \tilde{V}(\tilde{\rho}, \tilde{z}) = \frac{1}{2}. \quad (1.14)$$

Условимся в дальнейшем опускать значок „ \sim “. Как следует из (1.14), разрешённые области движения частицы определяются неравенством $V \leq 1/2$, которое может быть представлено в виде

$$\left| \alpha \rho - \frac{\rho}{r^3} - \frac{2\gamma}{\rho} \right| \leq 1, \quad (1.15)$$

где $\gamma = -C_{st}\Gamma/2$ – постоянная Штермера, $\alpha = -B_0 C_{st}^3/2M$.

Заметим, что уравнения (1.12) и (1.14) эквивалентны уравнениям движения точки единичной массы в эффективном потенциальном поле с потенциалом (1.13).

1.2 Уравнения для границ разрешённой области. Качественные особенности разрешённых областей.

Итак, в любой момент времени безразмерные координаты частицы должны удовлетворять неравенству (1.15), задающему так называемую разрешённую область движения. Точки, координаты которых не удовлетворяют (1.15), принадлежат запрещённой области.

Полагая $\rho = r \cos \psi$, где ψ – геомагнитная широта, получим из (1.15), что

$$\left| \alpha r \cos \psi - \frac{\cos \psi}{r^2} - \frac{2\gamma}{r \cos \psi} \right| \leq 1. \quad (1.16)$$

В рассматриваемом случае индукция однородного поля параллельна магнитному моменту диполя, поэтому $\alpha < 0$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением ранее не исследованного случая положительных значений постоянной Штермера γ (см. также [3]).

Границы области (1.16) определяются уравнениями

$$r^3 + \frac{2}{\mu \cos \psi} r^2 + \frac{4\gamma}{\mu \cos^2 \psi} r + \frac{2}{\mu} = 0, \quad (1.17)$$

$$r^3 - \frac{2}{\mu \cos \psi} r^2 + \frac{4\gamma}{\mu \cos^2 \psi} r + \frac{2}{\mu} = 0, \quad (1.18)$$

где $\mu = -2\alpha > 0$ (см. [8]).

В уравнении (1.18) все коэффициенты при степенях r положительны. Указанное уравнение не имеет вещественных положительных корней и, следовательно, не может задавать границу области (1.16). Таким образом, в рассматриваемом случае граница области (1.16) задаётся вещественными положительными корнями уравнения (1.18), существующими при условии $D \leq 0$:

$$D = \frac{16}{9 \cos^6 \psi} \left(\frac{4}{3\mu^3} \left(\gamma - \frac{1}{3\mu} \right)^3 + \frac{1}{\mu^4} \left(\gamma - \frac{2}{9\mu} \right)^2 \right) + \frac{8}{3\mu^3 \cos^3 \psi} \left(\gamma - \frac{2}{9\mu} \right) + \frac{1}{\mu^2} \leq 0. \quad (1.19)$$

При условии (1.19) уравнение (1.18) имеет два положительных корня

$$r_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}, \quad r_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad (1.20)$$

где угол φ определяется соотношением

$$\cos \varphi = -\frac{3\sqrt{3}q}{2\sqrt{-p^3}};$$

$$p = \frac{4}{\mu \cos^2 \psi} \left(\gamma - \frac{1}{3\mu} \right), \quad q = \frac{2}{\mu} \left(1 + \frac{4\gamma}{3\mu \cos^3 \psi} - \frac{8}{27\mu^2 \cos^3 \psi} \right).$$

Полагая $\cos^3 \psi = u$, запишем (1.19) в виде

$$A + Bu + Cu^2 \leq 0, \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{16}{9} \left(\frac{4}{3\mu^3} \left(\gamma - \frac{1}{3\mu} \right)^3 + \frac{1}{\mu^4} \left(\gamma - \frac{2}{9\mu} \right)^2 \right), \\ B &= \frac{8}{\mu^3} \left(\gamma - \frac{2}{9\mu} \right), \\ C &= \frac{1}{\mu^2}. \end{aligned}$$

Значения u должны удовлетворять условию

$$0 \leq u \leq 1. \quad (1.22)$$

Анализ показывает, что не все пары значений (μ, γ) (а значит, не все тройки коэффициентов (A, B, C)) имеют физический смысл, т. е. соответствуют каким-либо начальным данным. При выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} B^2 > 4AC, \\ \sqrt{B^2 - 4AC} > B. \end{cases} \quad (1.23)$$

пара (μ, γ) соответствует некоторым начальным данным, а решение (1.21) в области (1.22) существует и может быть записано в виде

$$0 \leq u \leq \min(u_2, 1), \quad (1.24)$$

где $u_2 = (\sqrt{B^2 - 4AC} - B) / 2C$.

Как видно из (1.24), качественный вид разрешённой области зависит от значения корня u_2 .

В случае $u_2 < 1$ решение (1.21) в области (1.22) имеет вид $0 \leq u \leq u_2$. При таких значениях u граница разрешённой области существует для значений магнитной широты

$$\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos \sqrt[3]{u_2} \right] \cup \left[\arccos \sqrt[3]{u_2}, \frac{\pi}{2} \right). \quad (1.25)$$

Как следует из (1.25), разрешённая область в случае $u_2 < 1$ состоит из двух компонент, границы каждой из которых не пересекают плоскость магнитного экватора. Каждому значению широты (1.25) соответствуют значения r_1 и r_2 , задаваемые формулами (1.20). Качественный вид разрешённой области в рассматриваемом случае показан на Рис. 1, для которого $\gamma = 1.17$, $\mu = 0.2$, $u_2 = 0.812$, $\arccos \sqrt[3]{u_2} = 21.078^\circ$, $D(\psi = 0) = 12.182 > 0$.

При $u_2 \geq 1$ решение (1.21) в области (1.22) имеет вид $0 \leq u \leq 1$; граница разрешённой области существует для любых значений магнитной широты ψ . Если $u_2 = 1$, то разрешённая область, как и при $u_2 < 1$, состоит из двух компонент, соединяющихся друг с другом в плоскости магнитного экватора. Качественный вид разрешённой области для указанных значений u_2 показан на Рис. 2, для которого $\gamma = 1.15186$, $\mu = 0.2$, $D(\psi = 0) = 0$. Наконец, при $u_2 > 1$ разрешённая область является однокомпонентной, что видно из Рис. 3, соответствующего значениям параметров $\gamma = 0.1$, $\mu = 0.2$, $D(\psi = 0) = -315.444 < 0$.

2 ЗАДАЧА О ДИНАМИКЕ ВЕДУЩЕГО ЦЕНТРА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СУПЕРПОЗИЦИИ ПОЛЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ И ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

2.1 Вывод квадратуры для дрейфа ведущего центра

Дадим общую формулировку дрейфовых уравнений движения.

Рассмотрим частицу массы m и заряда q , движущуюся в магнитном поле \mathbf{B} и поле сил немагнитной природы \mathbf{F} . Будем предполагать, что выполнены условия слабой неоднородности поля \mathbf{B} (см. [1]):

$$\begin{cases} \rho_L |(\nabla B)_\perp| \ll B, \\ v_\parallel T_g |(\nabla B)_\parallel| \ll B, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\rho_L = mv_\perp/qB$ – ларморовский радиус, $T_g = 2\pi m/qB$ – период ларморовского вращения, v_\perp – проекция скорости частицы на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B} , v_\parallel – составляющая скорости частицы в направлении \mathbf{B} , $|(\nabla B)_\perp|$ – модуль проекции градиента B на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B} , $|(\nabla B)_\parallel|$ – модуль проекции градиента на направление \mathbf{B} . В однородном поле, как известно, движение можно рассматривать как наложение вращения по ларморовской окружности и движения центра ларморовской окружности вдоль силовой линии. Если обозначить через \mathbf{r} радиус-вектор точки, в которой находится частица, то в каждый момент времени

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{a} – вектор, проведённый из центра вращения (ведущего центра) в точку, в которой находится частица; \mathbf{c} – текущее положение ведущего центра.

При выполнении условий (2.1) движение частицы сохранит вид (2.2), но, в отличие от движения в однородном поле, величины \mathbf{a} и \mathbf{c} медленно меняются со временем: $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$, а ведущий центр может двигаться поперёк геомагнитного поля, перемещаясь с одной силовой линии на другую.

Скорость частицы \mathbf{v} будет состоять из двух частей: скорости вращения \mathbf{w} и скорости дрейфа \mathbf{u} :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{w} + \mathbf{u}. \quad (2.3)$$

С помощью метода усреднения из точного уравнения движения частицы могут быть получены уравнения динамики ведущего центра (см. [5]):

$$\begin{cases} m\mathbf{b}\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{b} - \mu\mathbf{b}\nabla B, \\ \mathbf{u}_\perp = \left(\mathbf{F} - \mu \left(1 + \frac{2u_\parallel^2}{w^2} \right) \nabla B - m\frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} \right) \times \frac{c\mathbf{B}}{qB^2} + \frac{2c\mu u_\parallel^2}{w^2 q B} (\text{rot}\mathbf{B})_\perp, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, величины с индексами \perp обозначают проекцию на плоскость $\varphi = \text{const}$, движущуюся вместе с частицей (будем называть такую плоскость ведущей), $\mu = p_\perp^2/2\gamma mB$ – эквивалентный магнитный момент частицы, который при выполнении условий (8) является приближённым интегралом движения (см. [1]).

При этом продольное движение ведущего центра описывается первым уравнением (2.4), а поперечное – вторым уравнением (2.4).

В рассматриваемом случае сила \mathbf{F} равна нулю (берутся в расчёт только силы магнитной природы). Также равно нулю и последнее слагаемое в правой части второго уравнения (2.4) (вследствие безвихревого характера поля). Кроме того, будем во втором уравнении (2.4) пренебрегать слагаемыми, содержащими производную $\frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt}$ (вследствие малости u_\perp по сравнению с v).

Пусть (r, λ, φ) – сферическая система координат, где r – расстояние до центра Земли, λ – широта, φ – долгота. Тогда из (2.4) следует, что \mathbf{u}_\perp имеет

одну отличную от 0 азимутальную составляющую u_φ :

$$u_\varphi = r \cos \lambda \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{cm}{qB^2} \left(\frac{w^2}{2} + u_{\parallel}^2 \right) (\nabla B)_\perp. \quad (2.5)$$

Угол φ будем отсчитывать в направлении дрейфа частицы. Поскольку в рассматриваемом случае проекция \mathbf{u}_\perp на ведущую плоскость равна 0, в этой плоскости ведущий центр в процессе движения остаётся на фиксированной силовой линии.

Пусть в начальный момент времени частица обладает скоростью \mathbf{v} , направленной под углом θ к направлению местного магнитного поля. Тогда $w_0 = v \sin \theta$, $u_{\parallel 0} = v \cos \theta$ – начальные значения w и u_{\parallel} , где величины с индексом 0 соответствуют их значениям при $t = 0$. Учитывая, что в магнитостатическом поле модуль скорости v остаётся постоянным и используя сохранение магнитного момента μ , можно показать (см. [1]), что текущее значение продольной компоненты скорости ведущего центра

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{2\mu(B_1 - B)}{m}}, \quad (2.6)$$

где $B_1 = B_0 / \sin^2 \theta$ – значение индукции в «зеркальной» точке, где происходит отражение частицы от магнитного зеркала.

Введём безразмерную индукцию η , связанную с индукцией B и параметром r_e следующим образом:

$$B = M\eta/r_e^3. \quad (2.7)$$

Аналогично (2.7) запишем B_1 :

$$B_1 = M\eta_0/r_e^3 = m(u_{\parallel}^2 + w^2)/2\mu, \quad (2.8)$$

где η_0 – значение η в точке, где происходит отражение от магнитного зеркала.

Скорость движения вдоль силовых линий поля равна

$$u_{\parallel} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\lambda^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (2.9)$$

Функцию $r(\lambda, \alpha)$ найдём из уравнения силовых линий, которое удобно представить в виде (см. [2])

$$r^3 + Cr/(\alpha \cos^2 \lambda) - 1/\alpha = 0, \quad (2.10)$$

где $C = (1 - \alpha r_e^3)/r_e$.

Определим, какое значение r_e соответствует точке с радиус-вектором \mathbf{r} . Для этого решим кубическое уравнение

$$r_e^3 + Cr_e/\alpha - 1/\alpha = 0. \quad (2.11)$$

Физический смысл имеют только положительные корни уравнения (2.11). В зависимости от знаков $D = 1/(4\alpha^2) + C^3/(27\alpha^3)$ и α возможны 4 случая.

1. Если $D \geq 0$ и $\alpha > 0$ (замкнутые кривые на рис. 1), то по формуле Кардано получаем, что единственный положительный корень –

$$r_e = \sqrt[3]{\frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{C^3}{27\alpha^3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2\alpha} - \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{C^3}{27\alpha^3}}}.$$

Остальные два корня являются комплексными.

2. Если $D < 0$ и $\alpha > 0$ (разомкнутые силовые линии), то уравнение (2.11) имеет один положительный корень, определяющийся по формуле $r_e = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3)$, где угол ψ удовлетворяет условию $\cos \psi = \sqrt{-27\alpha/C^3}/2$.
3. Если $D \leq 0$ и $\alpha < 0$ (разомкнутые силовые линии, не пересекающие экваториальную плоскость), то уравнение (2.11) не имеет положительных корней. В этом случае один корень r_e вещественный и отрицательный, а два другие комплексные.

4. Если $D < 0$ и $\alpha < 0$ (кривые, пересекающие экваториальную плоскость, на рис. 2), то существуют два положительных корня r_{e1} и r_{e2} , выражения для которых имеют вид

$$r_{e1} = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3), \quad r_{e2} = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3 + 4\pi/3),$$

$$\text{где } \cos \psi = -\sqrt{-27\alpha/C^3}/2.$$

Таким образом, в случаях 1 и 2 параметр r_e определён единственным образом, в случае 3 уравнение для определения r_e не имеет положительных корней, а в случае 4 одному значению соответствуют 2 значения r_e . Замкнутой силовой линии соответствует меньшее значение r_e , равное $r_{e2} = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3 + 4\pi/3)$; силовой линии, уходящей на бесконечность (разомкнутой) – большее значение $r_{e1} = 2\sqrt{-C/(3\alpha)} \cos(\psi/3)$.

Ограничимся движением ведущего центра вдоль замкнутых силовых поверхностей. С математической точки зрения это значит, что если уравнение (2.11) при заданном C будет иметь два корня, то из них следует выбрать наименьший.

Введём безразмерный параметр

$$\delta = B_0 r_e^3 / M. \quad (2.12)$$

В (2.12) все величины кроме δ выражены в единицах СГС.

Тогда постоянную C можно записать в следующем виде:

$$C = (2 - \delta) / (2r_e). \quad (2.13)$$

Решение кубического уравнения (2.10), в котором λ и α выражены через δ , зависит от знака соответствующего ему дискриминанта

$$D = \frac{1}{\delta^2} + \frac{(2 - \delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda}$$

Будем представлять решение уравнения (2.10) в виде

$$r = F_1(\lambda, \delta) r_e. \quad (2.14)$$

Если $D \geq 0$, то

$$F_1(\lambda, \delta) = \sqrt[3]{\frac{1}{\delta} + \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + \frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{\delta} - \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + \frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda}}}; \quad (2.15)$$

если же $D < 0$, то

$$F_1(\lambda, \delta) = 2\sqrt{\frac{\delta-2}{3\delta \cos^2 \lambda}} \cos \frac{\psi + 4\pi}{3}, \quad (2.16)$$

где $\cos \psi = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{27\delta^3 \cos^6 \lambda}{(\delta-2)^3}}$, $\sin \psi > 0$.

Производную $\frac{dr}{d\lambda}$ представим в виде

$$\frac{dr}{d\lambda} = F_2(\lambda, \delta) r_e. \quad (2.17)$$

При $D \geq 0$

$$F_2(\lambda, \delta) = \frac{(2-\delta)^3 \sin \lambda}{27\delta^3 \cos^7 \lambda} \sqrt{\frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} + \frac{1}{\delta^2}} \times \\ \times \left(\left(\frac{1}{\delta} + \sqrt{\frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} + \frac{1}{\delta^2}} \right)^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{\delta} - \sqrt{\frac{(2-\delta)^3}{27\delta^3 \cos^6 \lambda} + \frac{1}{\delta^2}} \right)^{-\frac{2}{3}} \right); \quad (2.18)$$

при $D < 0$

$$F_2(\lambda, \delta) = 2\sqrt{\frac{\delta-2}{3\delta}} \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\cos \lambda} \cos \frac{\psi + 4\pi}{3} - \\ - 3\sqrt{\delta(\delta-2)} \frac{\sin 2\lambda}{\delta \sqrt{\delta(\delta-2)^3 - 27 \cos^6 \lambda}} \sin \frac{\psi + 4\pi}{3}, \quad (2.19)$$

где, как и ранее, $\cos \psi = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{27\delta^3 \cos^6 \lambda}{(\delta-2)^3}}$, $\sin \psi > 0$.

Из (2.8) и определения штермеровской единицы длины

$$C_{st}^2 = \frac{|q| r_e}{c} \sqrt{\frac{r_e M}{2m\mu\eta_0}}. \quad (2.20)$$

С учётом (2.6) – (2.9) получаем

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2}} \sqrt{\frac{2\mu M (\eta_0 - \eta)}{mr_e^3}}. \quad (2.21)$$

Теперь преобразуем вторую формулу (2.4). Сначала посчитаем модуль вектора \mathbf{B} :

$$B = M \sqrt{\left(\frac{2}{r^3} - \frac{\delta}{r_e^3}\right)^2 \sin^2 \lambda + \left(\frac{1}{r^3} + \frac{\delta}{r_e^3}\right)^2 \cos^2 \lambda}. \quad (2.22)$$

Определим безразмерную индукцию η по формуле

$$\eta(\hat{r}, \lambda, \delta) = \sqrt{(2 - \delta\hat{r}^3)^2 \sin^2 \lambda + (1 + \delta\hat{r}^3)^2 \cos^2 \lambda},$$

где $\hat{r} = r/r_e$.

По формулам для градиента в сферической системе координат

$$\begin{aligned} (\nabla B)_\perp &= \frac{3M^3 \cos \lambda}{r_e^{10} F_1^4 B^2} \left(\left(\left(2\delta - \frac{4}{F_1^3} \right) \sin^2 \lambda - \left(\delta + \frac{1}{F_1^3} \right) \cos^2 \lambda \right) \left(\delta + \frac{1}{F_1^3} \right) + \right. \\ &+ \left. \sin^2 \lambda \left(\frac{1}{F_1^3} - 2\delta \right) \left(\frac{2}{F_1^3} - \delta \right) \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Выделим функцию $F_3(\lambda, \delta)$, не зависящую от r :

$$(\nabla B)_\perp = \frac{M}{F_1^4 r_e^4 \eta^2} F_3(\lambda, \delta), \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} F_3(\lambda, \delta) &= 3 \cos \lambda \left(\left(\left(2\delta - \frac{4}{F_1^3} \right) \sin^2 \lambda - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(\delta + \frac{1}{F_1^3} \right) \cos^2 \lambda \right) \left(\delta + \frac{1}{F_1^3} \right) + \sin^2 \lambda \left(\frac{1}{F_1^3} - 2\delta \right) \left(\frac{2}{F_1^3} - \delta \right) \right). \end{aligned}$$

Определим безразмерный градиент $\widetilde{(\nabla B)}_\perp$, поперечный полю \mathbf{B} :

$$\widetilde{(\nabla B)}_{\perp} = \frac{r_e^4 (\nabla B)_{\perp}}{M} = \frac{F_3(\lambda, \delta)}{F_1^4(\lambda, \delta) \eta^2}. \quad (2.25)$$

Из (2.5), (2.8), (2.14) и определения μ следует, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c\mu M(\eta - 2\eta_0)}{qB^2 r_e^4 F_1(\lambda, \delta) \cos \lambda} (\nabla B)_{\perp}. \quad (2.26)$$

Из (2.14), (2.20), (2.21) и (2.26) получаем производную

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{M \left(1 - \frac{\eta}{2\eta_0}\right) (\nabla B)_{\perp} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2}}{F_1 r_e C_{st}^2 B^2 \cos \lambda \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_0}}} \cdot \text{sign}(-q), \quad (2.27)$$

где $\text{sign}(q)$ – знак q . Не умаляя общности рассуждения будем считать, что $\text{sign}(-q) = 1$.

Наконец, (2.14), (2.17), (2.25) и (2.27) дают зависимость широты от долготы ведущего центра:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^{\lambda} \left(\frac{r_e}{C_{st}}\right)^2 \frac{\left(1 - \frac{\eta}{2\eta_0}\right) \widetilde{(\nabla B)}_{\perp} \tilde{\Phi}}{F_1 \eta^2 \cos \lambda \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_0}}} d\lambda, \quad (2.28)$$

где $\tilde{\Phi} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

На основе формулы (2.28) были построены графики зависимостей $\lambda(\varphi)$. Рассматривались только пространственно ограниченные движения, какковыми заведомо являются движения по замкнутым силовым линиям (2.10). Таким силовым линиям соответствуют значения $r(\lambda, \alpha)$ в форме (2.14) – (2.15) при $0 < \delta < 2$ и в форме ((2.14), (2.16)) при $\delta < 0$. Соответствующие графики для значений $\delta = 0.1$, $\delta = -0.1$ представлены на Рис. 4 – 5.

На каждом из графиков представлены кривые 1 – 4, соответствующие следующим значениям угла θ между \mathbf{v} и \mathbf{B} : 10° , 30° , 40° , 80° . Как видно из рисунков, при возрастании θ максимальная широта λ убывает.

2.2 Условия применимости дрейфовых уравнений движения

Вернёмся к условиям слабой неоднородности (2.1). Иначе можно записать их в виде

$$\begin{cases} \rho_L \frac{|(\nabla B)_\perp|}{B} \ll 1, \\ \frac{T_g}{B} \frac{\partial B}{\partial t} \ll 1, \end{cases} \quad (2.29)$$

За условия применимости дрейфового приближения, как и в [4], примем неравенства

$$\begin{cases} \rho_L |(\nabla B)_\perp| \leq \beta_1^2 B, \\ v_\parallel T_g |(\nabla B)_\parallel| \leq \beta_2^2 B, \end{cases} \quad (2.30)$$

где β_1 и β_2 – максимальные значения отношений $\rho_L |(\nabla B)_\perp|/B$ и $v_\parallel T_g |(\nabla B)_\parallel|/B$. Будем считать β_1^2 и β_2^2 такими же, как и для дипольного поля. По данным [4], $\beta_1 \approx 0.46$, $\beta_2 \approx 0.66$.

Для преобразования неравенств (2.30) вычислим теперь $(\nabla B)_\perp$ и $(\nabla B)_\parallel$.

Если $\tilde{r} = r/C_{st}$, то из (2.22) следует, что

$$B_r = \frac{2M \sin \lambda}{C_{st}^3} \left(\frac{1}{\tilde{r}^3} - \alpha \right), \quad B_\lambda = -\frac{M \cos \lambda}{C_{st}^3} \left(\frac{1}{\tilde{r}^3} + 2\alpha \right). \quad (2.31)$$

Из (2.31) найдём модуль вектора магнитной индукции:

$$B = \sqrt{B_r^2 + r^2 B_\lambda^2} = \frac{M}{C_{st}^3} \sqrt{4 \left(\frac{1}{\tilde{r}^3} - \alpha \right)^2 \sin^2 \lambda + \left(\frac{1}{\tilde{r}^3} + 2\alpha \right)^2 \cos^2 \lambda}. \quad (2.32)$$

Удобно записать (2.32) в виде

$$B = \frac{M \tilde{B}}{\tilde{r} C_{st}^3}, \quad (2.33)$$

где $\tilde{B}(\tilde{r}, \lambda, \alpha) = \sqrt{4(1 - \alpha \tilde{r}^3)^2 \sin^2 \lambda + (1 + 2\alpha \tilde{r}^3)^2 \cos^2 \lambda}$.

Проекция градиента B на направление поля \mathbf{B} равна

$$\begin{aligned} (\nabla B)_\parallel = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial r} B_r + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \lambda} B_\lambda \right) = \frac{3M^3 \sin \lambda}{B^2 C_{st}^{10} \tilde{r}^4} \left(\left(4 \left(\alpha - \frac{1}{\tilde{r}^3} \right) \sin^2 \lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{\tilde{r}^3} + 2\alpha \right) \cos^2 \lambda \right) \left(\frac{2}{\tilde{r}^3} - 2\alpha \right) + \cos^2 \lambda \left(4\alpha - \frac{1}{\tilde{r}^3} \right) \left(2\alpha + \frac{1}{\tilde{r}^3} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Введём обозначение

$$F_{\parallel}(\tilde{r}, \lambda, \alpha) = 6\pi \sin \lambda \left(2 \left(4 (\alpha \tilde{r}^3 - 1) \sin^2 \lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 + 2\alpha \tilde{r}^3) \cos^2 \lambda \right) (1 - \alpha \tilde{r}^3) + \cos^2 \lambda (4\alpha \tilde{r}^3 - 1) (2\alpha \tilde{r}^3 + 1) \right).$$

Тогда

$$(\nabla B)_{\parallel} = \frac{M^3 F_{\parallel}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)}{2\pi B^2 C_{st}^{10} \tilde{r}^{10}} = \frac{M F_{\parallel}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)}{2\pi \tilde{B}^2 C_{st}^4 \tilde{r}^4}. \quad (2.35)$$

Таким образом, первое неравенство (2.30) равносильно

$$\tilde{r} \leq \frac{\beta_2}{\sqrt{v_{\parallel}/v}} \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\parallel}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)|}}. \quad (2.36)$$

Таким же образом можно представить $(\nabla B)_{\perp}$ в виде

$$(\nabla B)_{\perp} = \frac{M F_{\perp}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)}{C_{st}^4 \tilde{r}^4 \tilde{B}^2}, \quad (2.37)$$

где

$$F_{\perp}(\tilde{r}, \lambda, \alpha) = 3 \left((4 (\alpha \tilde{r}^3 - 1) \sin^2 \lambda - (2\alpha \tilde{r}^3 + 1) \cos^2 \lambda) (2\alpha \tilde{r}^3 + 1) + \right. \\ \left. + 2 \sin^2 \lambda \cos \lambda (1 - 4\alpha \tilde{r}^3) (1 - \alpha \tilde{r}^3) \right).$$

Значит, второе неравенство (2.30) равносильно

$$\tilde{r} \leq \frac{\beta_1}{\sqrt{v_{\perp}/v}} \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\perp}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)|}}. \quad (2.38)$$

Вместо неравенств (2.36) и (2.38) будем далее использовать достаточные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r} \leq \beta_1 \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\perp}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)|}}, \\ \tilde{r} \leq \beta_2 \frac{\tilde{B}^2}{\sqrt{|F_{\parallel}(\tilde{r}, \lambda, \alpha)|}}. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Обозначим через Ω область, задаваемую неравенствами (2.39), а дополнение к ней – $C\Omega$. Установим, как меняется вид областей Ω и $C\Omega$ при изменении модуля индукции однородного магнитного поля $B_0 = 2M/C_{st}^3$. В качестве заряженной частицы рассмотрим электрон с энергией $E = 100$ МэВ

[10]. Сначала разберём случай $\mathbf{B}_0 \uparrow\downarrow \mathbf{M}$. Результаты расчётов показывают, что при переходе от дипольного поля (Рис. 6) к суперпозиционному область $S\Omega$ (закрашена серым) становится ограниченной. Для значений $B_0 < 17.39\gamma$ ($1\gamma = 10^{-5}$ Гс) область Ω является двухкомпонентной (Рис. 7), а для $B_0 > 17.39\gamma$ – однокомпонентной (Рис. 8 – 9). При увеличении B_0 площадь области $S\Omega$ уменьшается и в предельном случае $B_0 \rightarrow \infty$ область Ω превращается во всю полуплоскость (см. также [9]).

Обратимся теперь к случаю $\mathbf{B}_0 \uparrow\uparrow \mathbf{M}$. В этом случае, как и в рассмотренном ранее, для конечных значений B_0 область $S\Omega$ является ограниченной. Для значений B_0 , меньших критического значения, равного 65.5γ , область Ω является двухкомпонентной (Рис. 10), а для значений B_0 , больших указанного критического значения, область Ω становится однокомпонентной (Рис. 11 – 12). При увеличении B_0 , как и в случае $\mathbf{B}_0 \uparrow\downarrow \mathbf{M}$, площадь области $S\Omega$ уменьшается, и в предельном случае $B_0 \rightarrow \infty$ область Ω превращается во всю полуплоскость.

3 ОБЛАСТИ ВЫСЫПАНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ, ПРИБЛИЖЕННОМ ПЕРВЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ГАРМОНИКАМИ РЯДА ГАУССА

Запишем уравнение движения заряженной частицы с массой покоя m_0 и зарядом e в геомагнитном поле с потенциалом V запишем в виде

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{e}{m_0\gamma c}\mathbf{v} \times \nabla V, \quad (3.1)$$

где c – скорость света, $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ – лоренц-фактор.

Потенциал V представляется в виде ряда Гаусса

$$V = R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (3.2)$$

где R_E – радиус Земли, g_n^m и h_n^m – коэффициенты, определяемые в результате измерений геомагнитного поля, $P_n^m(\cos \theta)$ – многочлены Шмидта.

Таблица 1. Значения коэффициентов g_n^m и h_n^m

n	m	$g_n^m, 10^{-4}$ Гс	$h_n^m, 10^{-4}$ Гс
1	0	-2944.2	0
	1	-150.1	479.7
2	0	-244.5	0
	1	301.3	-284.6
	2	167.7	-64.2
3	0	135.1	0
	1	-235.2	-11.5
	2	122.6	24.5
	3	58.2	-53.8
4	0	90.8	0
	1	81.4	28.3
	2	12.0	-18.9
	3	-33.5	18.1
	4	7.0	-33.0

Представим (3.1) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m_0\gamma c} \mathbf{v} \times \nabla V. \end{cases} \quad (3.3)$$

Индукция магнитного поля \mathbf{B} выражается через потенциал V : $\mathbf{B} = -\nabla V$. Из (3.2) следует, что компоненты вектора \mathbf{B} в сферической системе координат выражаются рядами

$$\begin{aligned}
B_r &= -R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \\
B_\theta &= -R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}, \\
B_\varphi &= R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (m g_n^m \sin m\varphi - m h_n^m \cos m\varphi) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

В сферической системе координат с центром в центре Земли систему (3.3) удобно представить в следующем удобном для численного интегрирования виде

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= v_r, \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{v_\theta}{r}, \\
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v_\varphi}{r \sin \theta}, \\
\frac{dv_r}{dt} &= \frac{e\omega_r}{mc} + \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r}, \\
\frac{dv_\theta}{dt} &= \frac{e\omega_\theta}{mc} - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r}, \\
\frac{dv_\varphi}{dt} &= \frac{e\omega_\varphi}{mc} - \frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{v_\varphi v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r},
\end{aligned} \right. \tag{3.5}$$

где $\omega_r = v_\theta B_\varphi - v_\varphi B_\theta$, $\omega_\theta = B_r v_\varphi - v_r B_\varphi$, $\omega_\varphi = v_r B_\theta - v_\theta B_r$.

Положим $B_0 = \frac{M}{R_E^3}$ (M – модуль магнитного момента Земли). Перейдём в (3.5) к безразмерным переменным

$$\begin{aligned}
\hat{B}_r &= \frac{B_r}{B_0}, & \hat{B}_\theta &= \frac{B_\theta}{B_0}, & \hat{B}_\varphi &= \frac{B_\varphi}{B_0}, \\
\hat{v}_r &= \frac{v_r}{c}, & \hat{v}_\theta &= \frac{v_\theta}{c}, & \hat{v}_\varphi &= \frac{v_\varphi}{c}, & \hat{r} &= \frac{r}{R_E}, & \tau &= \frac{ct}{R_E}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

В новых переменных (3.6) уравнения (3.5) принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{v}_r, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\hat{v}_\theta}{\hat{r}}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\hat{v}_\varphi}{\hat{r} \sin \theta}, \\ \frac{d\hat{v}_r}{dt} = K\omega_r + \frac{\hat{v}_\theta^2 + \hat{v}_\varphi^2}{\hat{r}}, \\ \frac{d\hat{v}_\theta}{dt} = K\omega_\theta - \frac{\hat{v}_r \hat{v}_\theta}{\hat{r}} + \frac{\hat{v}_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{\hat{r}}, \\ \frac{d\hat{v}_\varphi}{dt} = K\omega_\varphi - \frac{\hat{v}_r \hat{v}_\varphi}{\hat{r}} - \frac{\hat{v}_\varphi \hat{v}_\theta \operatorname{ctg} \theta}{\hat{r}}, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

где $\hat{\omega}_r = \hat{v}_\theta \hat{B}_\varphi - \hat{v}_\varphi \hat{B}_\theta$, $\hat{\omega}_\theta = \hat{B}_r \hat{v}_\varphi - \hat{v}_r \hat{B}_\varphi$, $\hat{\omega}_\varphi = \hat{v}_r \hat{B}_\theta - \hat{v}_\theta \hat{B}_r$,

$K = \operatorname{sign}(q) \frac{C_{st}^2}{R_E^2}$ – безразмерный коэффициент, C_{st} – штермеровская единица длины.

3.1 Алгоритм численного моделирования

Пусть заряженные частицы запускаются с околоземное космическое пространство из точечного источника, находящегося на геостационарной орбите, с фиксированной кинетической энергией и произвольными направлениями скорости. При этом некоторые частицы ансамбля будут падать на поверхность Земли, а некоторые будут улетать от центра Земли на бесконечно большое расстояние. Будем называть областью высыпания множество точек вида (φ_f, λ_f) , где φ_f и λ_f – соответственно долгота и широта точки земной поверхности, в которую попала частица.

В качестве заряженной частицы будем рассматривать электрон. Направление начальной скорости частицы будем характеризовать углом с местной вертикалью i и углом между проекцией вектора скорости на плоскость местного горизонта и восточным направлением q . Предположим, что i и q являются случайными величинами с равномерным законом распределения в промежутках $[2\pi/3, \pi]$ и $[-\pi, \pi]$ соответственно. Для каждого электро-

на ансамбля производится численное интегрирование уравнений движения (3.7) разностным методом Рунге-Кутты-Мерсона четвёртого порядка с автоматическим выбором длины шага. Вычисления проводились до тех пор, пока не оказывалось выполненным одно из следующих условий:

1. Траектория электрона пересекает сферу радиусом R_E ;
2. Длина траектории превышает установленное предельное значение $20R_E$;
3. Электрон удаляется от центра Земли на столь большое расстояние, что его дальнейшее движение сопровождается неограниченным монотонным ростом координаты r (указанное расстояние принимается равным $10R_E$).

3.2 Основные результаты расчётов

С использованием описанного алгоритма были построены области высыпания на земную поверхность электронов с энергиями 15, 30 и 60 МэВ. Считалось, что источник излучения находится в плоскости географического экватора на высоте $5.63 R_E$ на нулевом меридиане. Для сравнения областей высыпания при $n = 1$ и $n = 4$ были получены изображения областей высыпания электронов рассматриваемых энергий на поверхность Земли с учётом только первой гармоники геомагнитного поля, а также с учетом первых четырёх сферических гармоник. Полученные результаты представлены на Рис. 13 – 18.

Также для каждого значения энергии электронов было определено число точек высыпания. Результаты расчётов приведены в Табл. 2.

**Таблица 2. Число точек высыпания
на земную поверхность при $n = 1$ и $n = 4$**

$E_k, \text{ГэВ}$	$n = 1$	$n = 4$
15	5263	4288
30	7414	7479
60	12813	13172

Результаты исследований, приведённые в данной главе, были получены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ».

Заключение

Кратко сформулируем основные результаты, полученные в главах 1 – 3.

1. Как показывают результаты приведённого анализа, в случае, когда $\mathbf{B}_0 \uparrow\uparrow \mathbf{M}$ и $\gamma > 0$, разрешённая область Ω всегда является неограниченной. При этом в зависимости от параметра u_2 Ω может состоять как из одной, так и из двух компонент. При $0 < u_2 < 1$ в структуре разрешённой области можно выделить две неограниченные компоненты, лежащие в верхней ($z > 0$) и нижней ($z < 0$) полуплоскости. При $u_2 = 1$ компоненты Ω соединяются друг с другом в плоскости магнитного экватора. Для значений $u_2 > 1$ Ω однокомпонентна, причём её ближняя и дальняя границы существуют для любых значений магнитной широты ψ .
2. Доказано, что приближение ведущего центра применимо к описанию динамики заряженной частицы, движущейся в поле, представляющем собой суперпозицию дипольного и однородного магнитных полей. Выведена квадратура, описывающая дрейф ведущего центра по силовой поверхности суперпозиционного поля. С использованием этой квадратуры построены зависимости широты от долготы, соответствующие различным направлениям начальной скорости частицы. Определены области применимости дрейфового приближения для суперпозиционного поля. Полученные результаты позволяют сформулировать основные качественные особенности областей Ω и $S\Omega$:
 - (a) В отличие от дипольного случая для конечного значения B_0 запрещённая область Ω является ограниченной.
 - (b) Как при $\mathbf{B}_0 \uparrow\uparrow \mathbf{M}$, так и при $\mathbf{B}_0 \uparrow\downarrow \mathbf{M}$ для значений B_0 , меньших некоторого критического значения, разрешённая область Ω являет-

ся двухкомпонентной, а при значениях B_0 , больших критического, область Ω является однокомпонентной.

(с) С ростом величины внешнего поля B_0 площадь области $S\Omega$ уменьшается и в пределе $B_0 \rightarrow \infty$ разрешённой областью становится вся полуплоскость.

3. Установлено, что независимо от модели геомагнитного поля области высыпания электронов на поверхность Земли качественно не отличаются. При низких энергиях область остается разделенной недостижимой для инжектируемых частиц областью, обладая при этом симметрией. При этом вторая, третья и четвёртая гармоники в совокупности оказывают заметное влияние на форму области высыпания.

Список литературы

1. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г.: *Космическая электродинамика. Основные принципы* М., Мир, 1967, 260 с.
2. Колесников Е. К., Ключников Г. Н. Задача о движении ведущего центра заряженной частицы в суперпозиции магнитного диполя и однородного магнитного поля// Вестник СПбГУ, серия 1. 2015, №1, с. 123 – 134.
3. Колесников Е. К., Ключников Г. Н. Разрешённые области в задаче о динамике заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей// Вестник СПбГУ, серия 1. 2016, №2, с. 293 – 299.
4. Колесников Е. К., Филиппов Б. В. Некоторые задачи эволюции заряженных частиц в поле магнитного диполя. Изд. ЛГУ, 1974. 72 с.
5. Ленерт Б.: *Динамика заряженных частиц*. М.: Атомиздат, 1967, 351 с.
6. Шалимов В. П., Швачунов И. Н. Изучение движения заряженных частиц в поле магнитного диполя, находящегося во внешнем магнитном поле, методом Штермера. I //Космические исследования. 1966. Т. IV. Вып. 2. С. 208 – 220.
7. Шалимов В. П., Швачунов И. Н. Изучение движения заряженных частиц в поле магнитного диполя, находящегося во внешнем магнитном поле, методом Штермера. II //Космические исследования. 1966. Т. IV. Вып. 3. С. 395 – 403.
8. Katsiaris G. A., Psillakis Z. M. Allowed regions for the motion of charged particles in superposed dipole and uniform magnetic fields//J. Astrophysics and Space Science. Vol. 126. P. 69 – 87. 1986.

9. *Klyushnikov G.* Precipitation regions in the problem of charged particles dynamics in the Earth's magnetic field//International Student Conference «Science and Progress». Abstracts. Nov. 2015.
10. *Kolesnicov E., Kluishnicov G.* About drift approach applicability regions in the problem for dynamics of a charged particle in a superposition of dipole and uniform magnetic fields //International Conference on Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading, 2015/Feb. 2015. DOI: 10.1109/POLYAKHOV.2015.7106736.
11. *Lemaire J. F.* The effect of a southward interplanetary magnetic field on Stormer's allowed regions//Space Res. Vol. 31, №5. P. 1131 – 1153. 2003.
12. *Lemaitre G., Vallatra M. S.* On Compton's latitude effect of cosmic radiation//Phys. Rev. V. 43, № 2. P. 87-91. 1933.
13. *Stormer C.* The polar Aurora. London-New-York: Oxford university press, 1955.
14. *Vallatra M. S.* On the allowed cone of cosmic radiation. Toronto: University press, 1938.

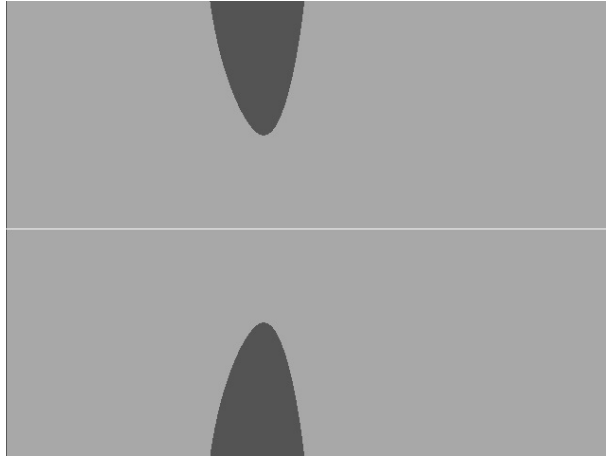


Рис. 1: $\gamma = 1.17, \mu = 0.2$

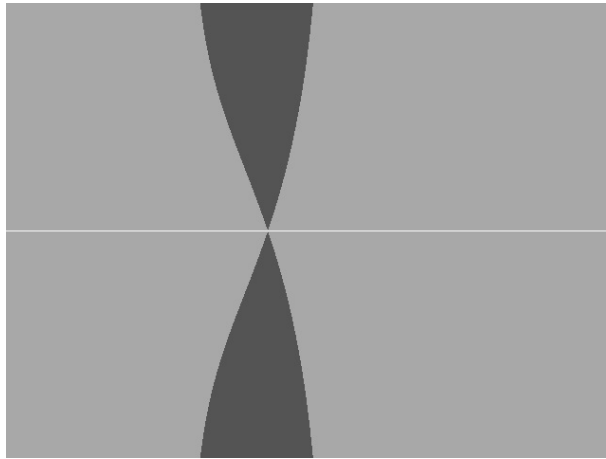


Рис. 2: $\gamma = 1.15186, \mu = 0.2$



Рис. 3: $\gamma = 0.1, \mu = 0.2$

Рис. 1 – 3. Разрешённые области движения (запрещённые области светло-серые, разрешённые тёмно-серые).

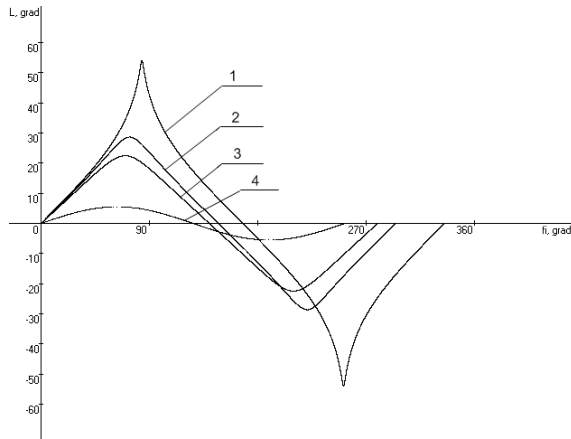


Рис. 4: Графики $\lambda(\varphi)$ при $\delta = 0.1$ (L – широта λ , fi – долгота φ)

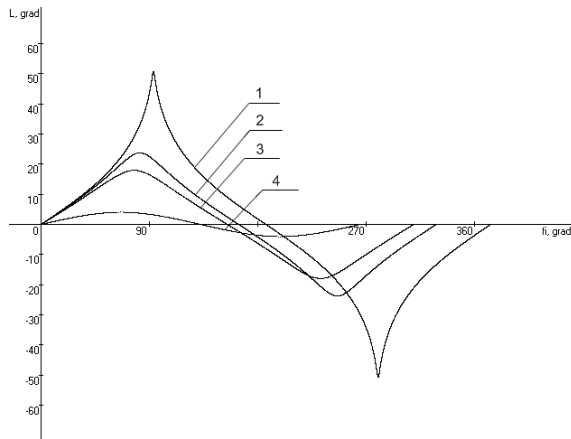


Рис. 5: Графики $\lambda(\varphi)$ при $\delta = -0.1$ (L – широта λ , fi – долгота φ)



Рис. 6: $B_0 = 0\gamma, r_m = 60 R_z$

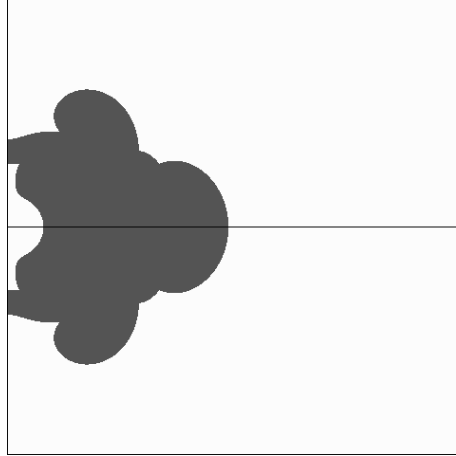


Рис. 7: $\mathbf{B}_0 \uparrow \downarrow \mathbf{M}$, $B_0 = 16\gamma$, $r_m = 60 R_z$

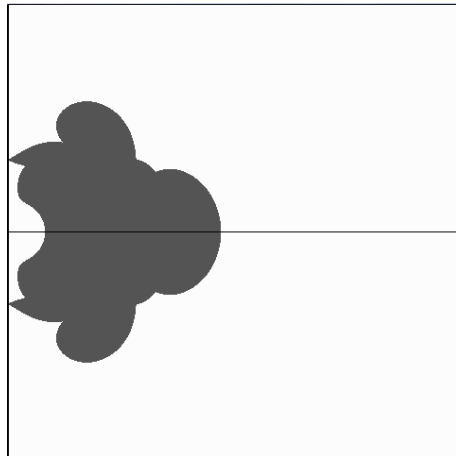


Рис. 8: $\mathbf{B}_0 \uparrow \downarrow \mathbf{M}$, $B_0 = 17.39\gamma$, $r_m = 60 R_z$

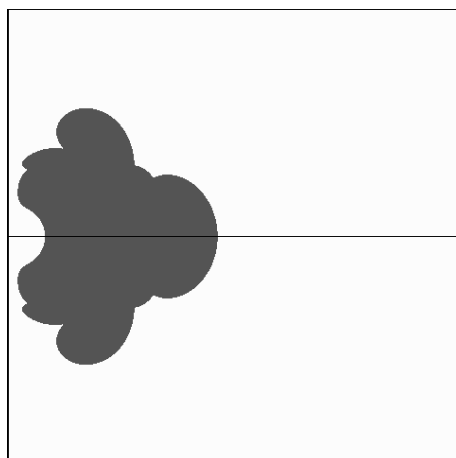


Рис. 9: $\mathbf{B}_0 \uparrow \downarrow \mathbf{M}$, $B_0 = 18\gamma$, $r_m = 60 R_z$

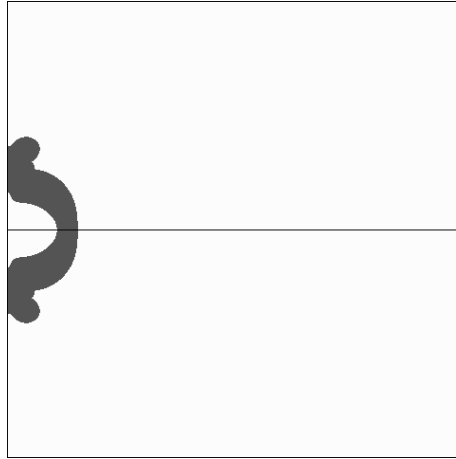


Рис. 10: $\mathbf{B}_0 \uparrow \uparrow \mathbf{M}$, $B_0 = 60\gamma$, $r_m = 60 R_z$

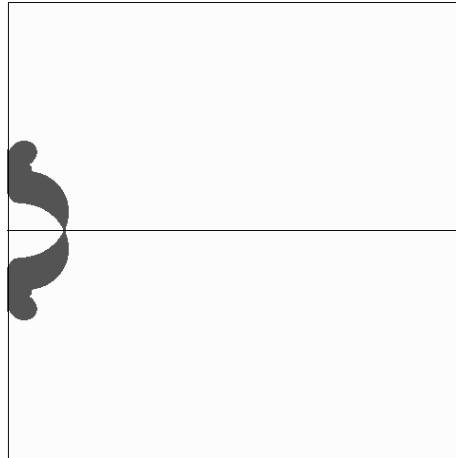


Рис. 11: $\mathbf{B}_0 \uparrow \uparrow \mathbf{M}$, $B_0 = 65.5\gamma$, $r_m = 60 R_z$

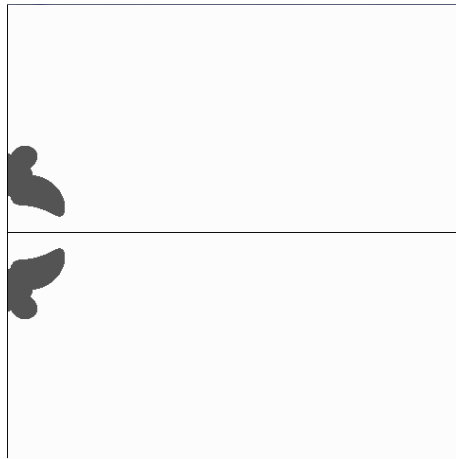


Рис. 12: $\mathbf{B}_0 \uparrow \uparrow \mathbf{M}$, $B_0 = 70\gamma$, $r_m = 60 R_z$

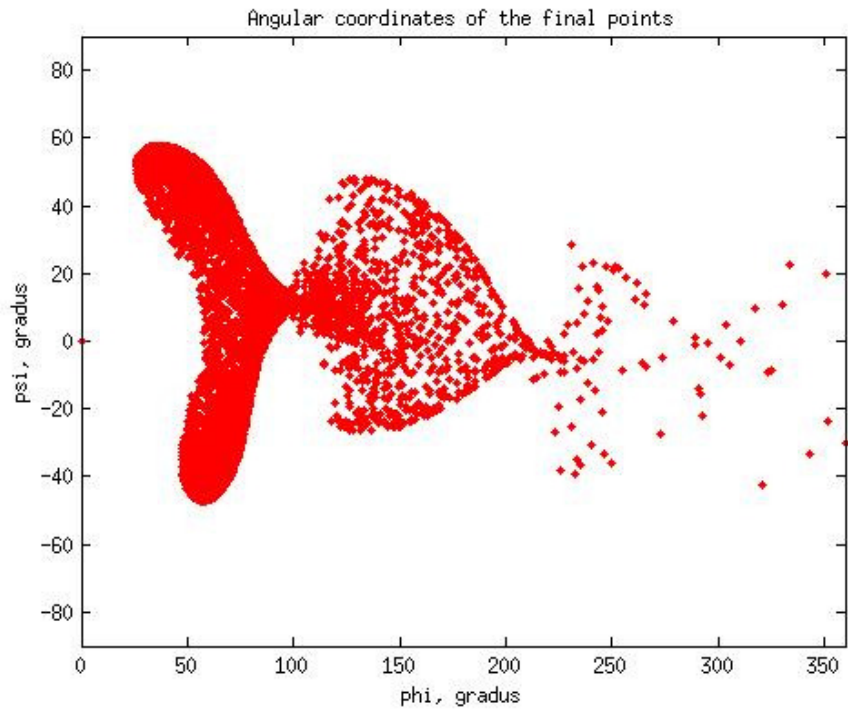


Рис. 13: $E_k = 15\text{GeV}$, $n = 1$

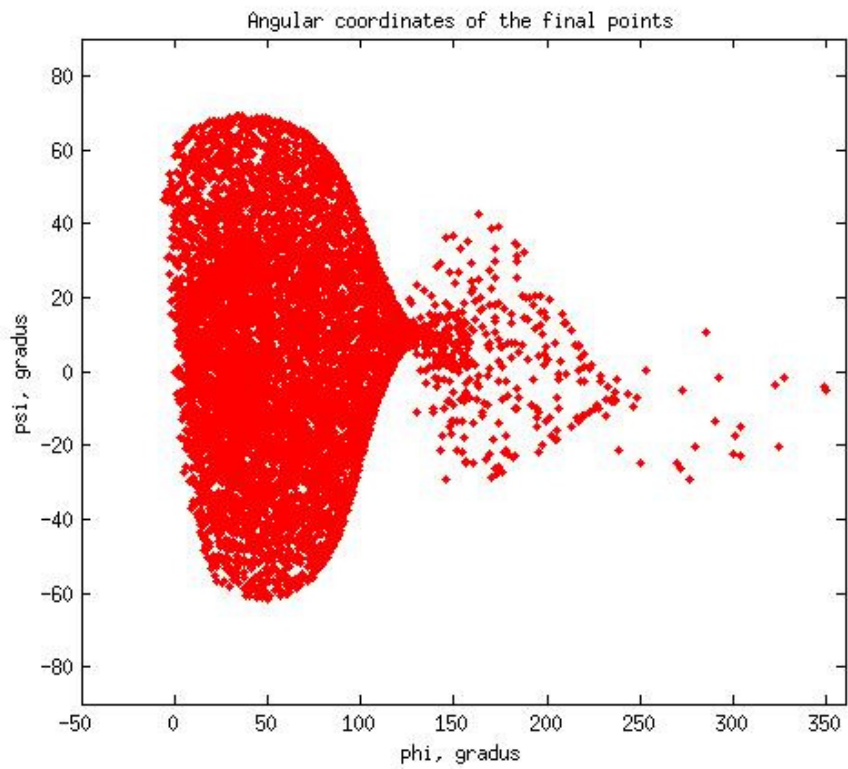


Рис. 14: $E_k = 30\text{GeV}$, $n = 1$

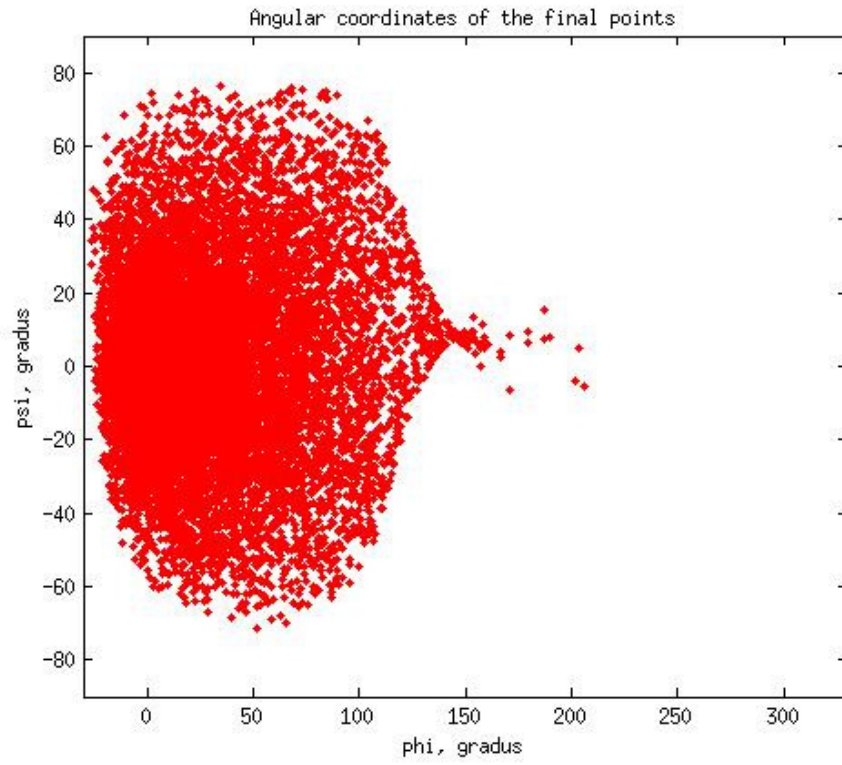


Рис. 15: $E_k = 60\text{GeV}$, $n = 1$

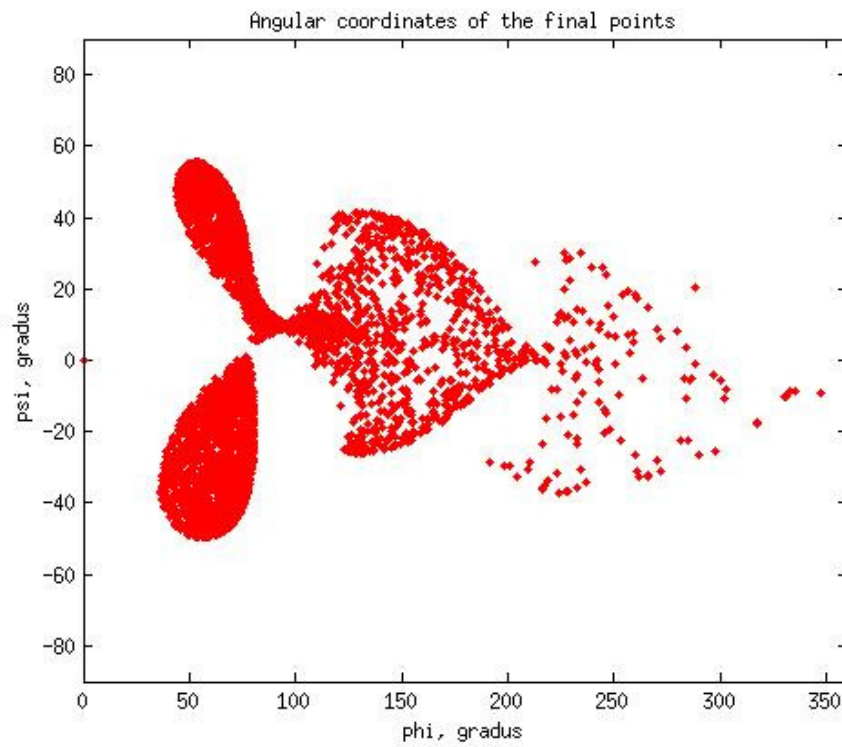


Рис. 16: $E_k = 15\text{GeV}$, $n = 4$

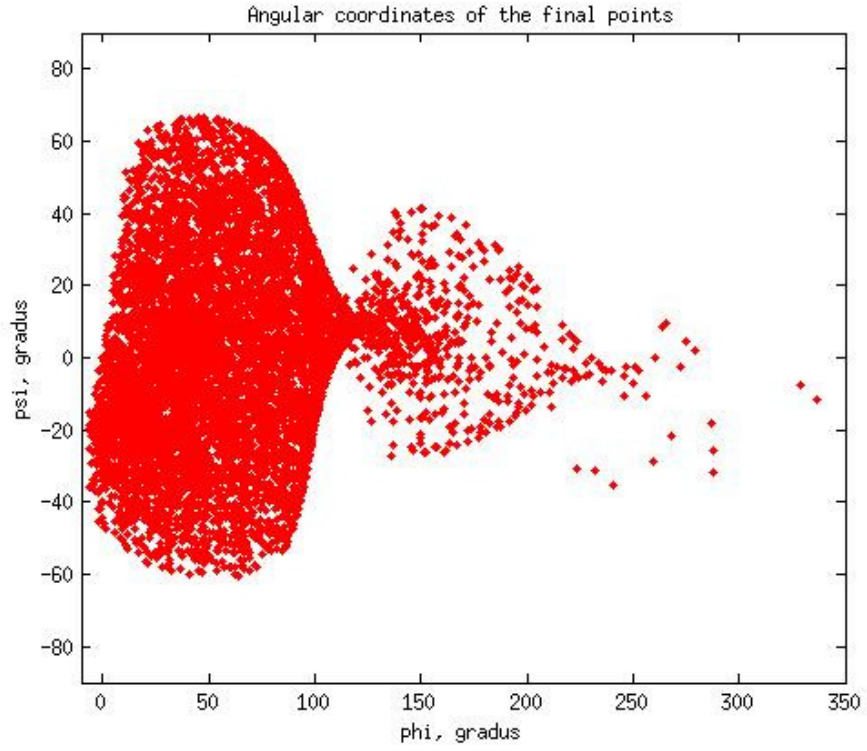


Рис. 17: $E_k = 30\text{GeV}$, $n = 4$

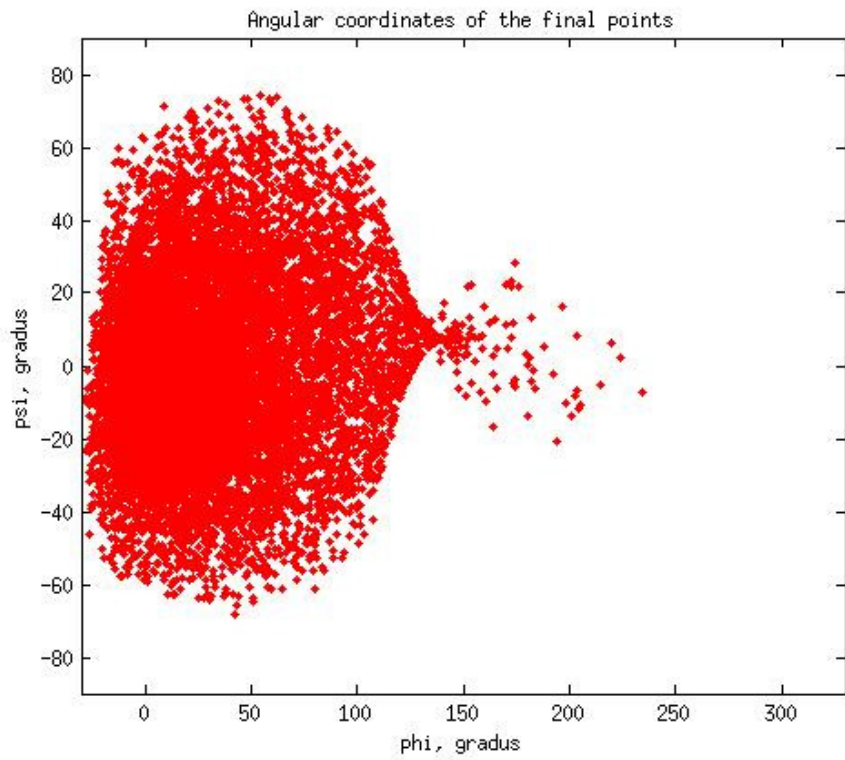


Рис. 18: $E_k = 60\text{GeV}$, $n = 4$