

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Математико-механический факультет
Кафедра математической физики

Теплицкая Яна Игоревна

Гипотеза подковы для минимайзера максимального расстояния

Выпускная квалификационная работа

Специальность 01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Степанов Е.О.

Рецензент:
д. ф.-м. н., профессор Малютин А.В.

Санкт-Петербург
2016

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY
Mathematics and Mechanics Faculty
Department of the partial differential equations

Teplitskaya Yana

On the horseshoe conjecture
in the optimal pipeline problem

Graduation Qualification Paper

Scientific supervisor:
professor Eugene Stepanov

Reviewer:
professor A. V. Malyutin

Saint Petersburg
2016

СОДЕРЖАНИЕ

1. Аннотация выпускной квалификационной работы	3
2. Введение	3
3. Основные результаты	4
3.1. Схема доказательства	5
4. Доказательства	9
4.1. Доказательство центральной Леммы	13
5. Заключение	17
Список литературы	17

1. АННОТАЦИЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Мы изучаем свойства множеств Σ , обладающих минимальной длиной (одномерной мерой Хаусдорфа) в классе замкнутых связных множеств $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{y \in M} \text{dist}(y, \Sigma) \leq r$$

для заданного компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ и для заданного числа $r > 0$. Такие множества можно воспринимать как водопроводы минимальной длины, подходящие на расстояние не более r к каждой точке множества M , которое можно считать множеством потребителей воды.

В настоящей работе доказывается гипотеза Миранды, Паолини и Степанова, описывающая множество минимайзеров для частного случая, когда M является окружностью радиуса $R > 0$, удовлетворяющего условию $r < R/4.98$. Более того, мы показываем, что если M является границей гладкого выпуклого множества с минимальным радиусом кривизны R , то любой минимайзер Σ имеет схожую структуру при условии $r < R/5$. Кроме того, мы доказываем схожее утверждение для локальных минимайзеров.

2. ВВЕДЕНИЕ

Для заданного компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим функционал

$$F_M(\Sigma) := \max_{y \in M} \text{dist}(y, \Sigma),$$

где Σ — замкнутое подмножество \mathbb{R}^2 и $\text{dist}(y, \Sigma)$ обозначает евклидово расстояние между y и Σ . Величина $F_M(\Sigma)$ будет в дальнейшем называться *энергией* множества Σ . Рассмотрим класс замкнутых связных множеств $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих неравенству $F_M(\Sigma) \leq r$ для некоторого $r > 0$. Нас интересуют свойства множеств минимальной длины (одномерной меры Хаусдорфа) $\mathcal{H}^1(\Sigma)$. В дальнейшем будем называть такие множества *минимайзерами*. Такие множества можно воспринимать как водопроводы минимальной длины, подходящие на расстояние не более r к каждой точке множества M , которое можно считать множеством потребителей воды.

В работе [10] доказано (даже для общего n -мерного случая $M \subset \mathbb{R}^n$), что множество $\text{OPT}_\infty^*(M)$ минимайзеров (для всех $r > 0$) непусто и совпадает с множеством $\text{OPT}_\infty(M)$ решений двойственной задачи: минимизировать F_M среди всех компактных связных множеств $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ с заданным ограничением на длину $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$ (для соответствующего $l > 0$). Вышеупомянутая двойственная задача сходна с большим числом задач минимизации других функционалов на классе замкнутых связных множеств, к примеру функционала среднего расстояния относительно некоторой конечной борелевской меры (см [3], [5], [6], [9] and [8]) или близких к ним задач городского планирования (см [4]).

Минимизация функционала максимального или среднего расстояния среди дискретных множеств с заданным ограничением на число компонент связности (а не среди связных одномерных множеств) приводит к классу близких задач: k -center problem и k -median problem (см, например, [12], [13], [7] а также [2, 1] и ссылки там).

Некоторые базовые свойства минимайзеров для введенной выше задачи в общем, n -мерном случае (такие как отсутствие петель или регулярность по Альфорсу), доказаны в [11]. Пусть в дальнейшем

$B_r(x)$ обозначает открытый шар с радиусом r и центром в точке x , а $B_r(M)$ — открытую r -окрестность M , то есть

$$B_r(M) := \bigcup_{x \in M} B_r(x).$$

Введем следующие естественные понятия.

Определение 2.1. Точка $x \in \Sigma$ называется энергетической, если для произвольного $\rho > 0$ выполняется

$$F_M(\Sigma \setminus B_\rho(x)) > F_M(\Sigma).$$

Множество всех энергетических точек Σ будем обозначать G_Σ .

Рассмотрим минимайзер $\Sigma \in OPT_\infty^*(M)$ с энергией $r = F_M(\Sigma)$. Тогда множество Σ может быть разбито на три непересекающихся множества:

$$\Sigma = E_\Sigma \sqcup X_\Sigma \sqcup S_\Sigma,$$

где $X_\Sigma \subset G_\Sigma$ — множество изолированных энергетических точек (то есть каждая точка $x \in X_\Sigma$ — энергетическая и найдется такое $\rho > 0$, возможно зависящее от x , что $B_\rho(x) \cap G_\Sigma = \{x\}$); а $E_\Sigma = G_\Sigma \setminus X_\Sigma$ — множество неизолированных энергетических точек. В [10] доказаны следующие утверждения.

- (а) Для любой точки $x \in G_\Sigma$ найдется такая точка $y \in M$, что $|x - y| = r$ и $B_r(y) \cap \Sigma = \emptyset$. Если X_Σ не конечно, тогда точки сгущения X_Σ принадлежат E_Σ .
- (б) Для произвольной $x \in S_\Sigma$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $S_\Sigma \cap B_\varepsilon(x)$ является отрезком или правильной треногой, то есть объединением трех отрезков с концевой точкой в x и попарными углами величины $2\pi/3$.
- (с) X_Σ относительно открыто в G_Σ .

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения.

Определение 2.2. Для выпуклого замкнутого множества N определим минимальный радиус кривизны его границы с помощью формулы

$$R(\partial N) := \inf_{x \in \partial N} \sup\{r : B_r(O) \cap \partial N = x \text{ для некоторого } O \in N\}.$$

Определение 2.3. Для выпуклого замкнутого множества N мы определим внутреннее множество N_r как множество всех точек N , лежащих на расстоянии хотя бы r от его границы: $N_r := N \setminus B_r(\partial N)$.

В дальнейшем будем обозначать $N := \text{conv}(M)$, где conv — выпуклая замкнутая оболочка, а $M_r := \partial N_r$. Заметим, что N , N_r , M и M_r — замкнутые множества. Под замкнутой выпуклой кривой будем понимать границу выпуклого множества.

Ясно, что если M — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны $R > r$, тогда M_r — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны хотя бы $R - r$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для заданных точек A, B будем использовать обозначения $[AB]$, $[AB)$ и (AB) для (замкнутого) отрезка, луча и прямой соответственно.

Будем называть хордой замкнутой выпуклой кривой D отрезок, соединяющий две точки D . Подмножество q замкнутой выпуклой кривой D называется дугой D , если q является непрерывным инъективным образом отрезка (может совпадать с точкой). Образы концевых точек интервала будем называть концами дуги, а образы внутренних точек интервала — внутренними точками дуги.

Когда ясно, о чем идет речь, дугу с концами A, B будем обозначать $\overset{\circ}{AB}$, а ее длину — $|\overset{\circ}{AB}|$ (не путать с длиной отрезка, соединяющего точки A и B , которая обозначается $|AB|$).

Мы говорим, что дуга $q = Q_i \overset{\circ}{Q}_r$ множества M_r продолжается в множество Σ хордой, если для некоторого $i \in \{l, r\}$ найдется хорда $[Q_i X]$ множества N_r такая, что $[Q_i X] \subset \Sigma$. Будем говорить, что множество A покрывает множество $Q \subset M$, если Q является подмножеством $\bar{B}_r(A)$. Обычно последнее обозначение мы используем для множества Q , являющегося дугой M .

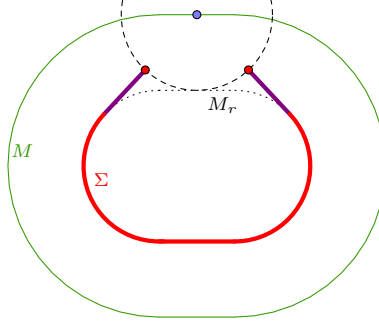


Рис. 1. Подкова.

Определение 3.1. Пусть M — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны $R > r$. Тогда связная кривая Σ называется подковой, если $F_M(\Sigma) = r$ и Σ — объединение дуги q множества M_r и двух отрезков, касающихся множества M_r в различных концевых точках дуги q и заканчивающихся энергетическими точками (как изображено на Рис. 1).

Следующая теорема доказывает гипотезу Миранды, Паолини и Степанова из работы [10] о множестве минимайзеров для $M := \partial B_R(0)$ при $r < R/4.98$. Она показывает даже больше. А именно, что произвольная замкнутая выпуклая кривая M имеет минимайзеры схожей структуры, если минимальный радиус кривизны множества M составляет хотя бы $5r$. Заметим, что это не доказывает гипотезу целиком (которая в работе [10] была сформулирована для $r < R$).

Theorem 3.2. Для любой замкнутой выпуклой кривой M с минимальным радиусом кривизны R и для произвольного $r < R/5$ множество минимайзеров содержит только подковы. Для окружности $M := \partial B_R(O)$ утверждение верно при $r < R/4.98$.

Полезно заметить, что мы используем глобальную минимальность только в Лемме 3.5, Лемме 3.7 и для неравенства $m(S) \leq 2$ (Лемма 3.8). Во всех остальных шагах мы пользуемся только локальными аргументами, поэтому можем что-то сказать также и о локальных минимайзерах.

Определение 3.3. Пусть M — выпуклая замкнутая кривая с минимальным радиусом кривизны R . Множество Σ называется локальным минимайзером, если оно покрывает M и если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для произвольного множества Σ' , покрывающего M и удовлетворяющего $\text{diam } \Sigma \Delta \Sigma' \leq \varepsilon$, выполняется $\mathcal{H}^1(\Sigma) < \mathcal{H}^1(\Sigma')$.

Следствие 3.4. Пусть Σ — локальный минимайзер для некоторой замкнутой выпуклой кривой M с минимальным радиусом кривизны $R > 5r$. Тогда найдется такая абсолютная константа $c > 0$, что если Σ — не подкова, то $\mathcal{H}^1(\Sigma) - \mathcal{H}^1(\Sigma_{\text{opt}}) > c(R - 5r)$, где Σ_{opt} — (глобальный) минимайзер.

Отметим, что утверждение Теоремы 3.2 без требования соотношения на величины R и r , вообще говоря, неверно (пример изображен на Рис. 2). В качестве контрпримера можно рассмотреть

$$N^t := \cup_{x \in (0,t)} B_r(x), \quad M^t := \partial N^t.$$

Заметим, что множество M^t имеет минимальный радиус кривизны r для любого t . Если $t \gg r > 1$, то любая подкова имеет длину $2t - O(1)$, а ломаная $X := \cup_{i=0 \dots [t]+1} [x_i, x_{i+1}]$, где $x_{2k} = (-1, 2k)$, $x_{2k+1} = (1, 2k + 1)$ имеет длину $\sqrt{2}t + o(1)$. Но множество $X \cup \partial B_r((0,0)) \cup \partial B_r((t,0))$ связно и покрывает M^t .

3.1. Схема доказательства. Здесь мы приведем схему доказательства Теоремы 3.2. Для начала введем некоторые определения.

Обозначим за Σ произвольный минимайзер для некоторой выпуклой замкнутой кривой M . Будем говорить, что дуга M замкнута, если она относительно замкнута в M .

Лемма 3.5. Пусть M — замкнутое выпуклое множество с минимальным радиусом кривизны R , а Σ является минимайзером с энергией $r < R$. Тогда выполняются следующие утверждения.

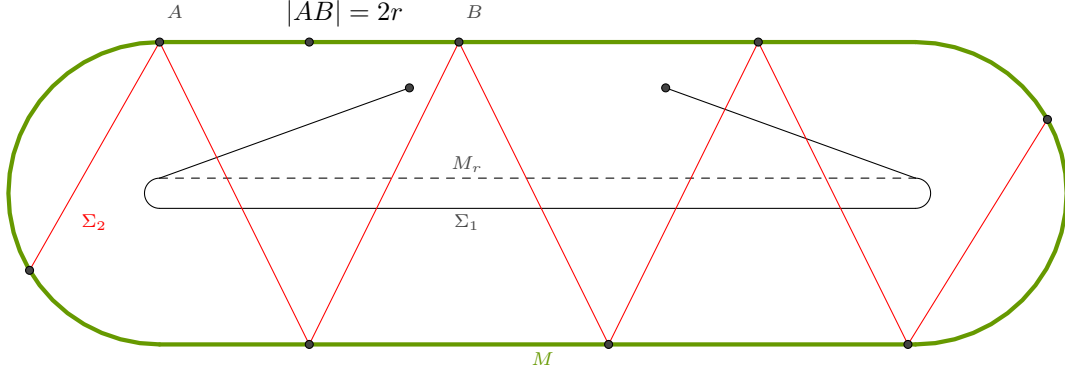


Рис. 2. Пример для ситуации без предположения $R > 5r$.

- (i) Каждая связная компонента замыкания пересечения Σ с внутренностью N_r (далее будем обозначать Σ_r) является минимальной сетью для некоторого множества точек, лежащих на M_r , то есть решением задачи Штейнера для этого множества, и, в частности, состоит только из прямолинейных отрезков.
- (ii) Σ состоит из дуг M_r и прямолинейных отрезков.
- (iii) Существует такая функция $r \mapsto a_M(r)$, что $a_M(r) \leq 2r$ и длина любого отрезка Σ_r не превосходит $a_M(r)$. Для окружности $M := \partial B_R(O)$ можно положить $a_{\partial B_R(O)}(r) = 2r\sqrt{1 - \frac{r^2}{4R^2}}$.

Замечание 3.6. Из Замечания 4.3 следует, что когда $\Sigma \subset N$ является связным множеством, покрывающим M , таким, что $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq \mathcal{H}^1(\Sigma_{\text{opt}}) + a$, где Σ_{opt} — минимайзер, и с Σ_r , состоящим только из прямолинейных отрезков, тогда длина каждого отрезка $\Delta \subset \Sigma_r$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{H}^1(\Delta) \leq 2r + a.$$

Подобное утверждение может быть доказано для M , являющегося границей не обязательно выпуклого множества, но мы будем рассматривать только выпуклый случай, чтобы избежать лишних технических деталей.

Лемма 3.7. Пусть M — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны $R > 2a_M(r) + r$, где a_M определено в Лемме 3.5. Тогда множество Σ_r не имеет штейнеровских точек, то есть состоит только из хорд кривой M_r .

Рассмотрим произвольную связную компоненту S множества $\Sigma \setminus N_r$ и обозначим за $n(S)$ число энергетических точек множества S . Точки из $\bar{S} \cap M_r$ будем в дальнейшем называть *точками входа* S . Обозначим число точек входа за $t(S)$.

Следующая Лемма, в частности, показывает, что $t(S)$ конечно.

Лемма 3.8. Пусть M — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны $R > 2a_M(r) + r$. Пусть S — связная компонента множества $\Sigma \setminus N_r$. Тогда $n(S) \leq 2$, $t(S) \leq 2$. Более того, S является локально минимальной сетью, соединяющей множество точек входа и энергетических точек множества S .

Замечание 3.9. Пусть Σ — локальный минимайзер в смысле Определения 3.3. Тогда ввиду Замечания 3.6 с $a := (R - 5r)/4$ каждый прямолинейный отрезок множества $\Sigma_r := \Sigma \cap N_r$ имеет длину не превосходящую $a'_M(r) = 2r + (R - 5r)/4$. Тогда, в Леммах 3.7 и 3.8, а также в Следствии 3.13 ниже, мы можем заменить a_M на a'_M , а значит, они останутся верными при $R > 2a'_M(r) + r = 5r + (R - 5r)/2$, а значит и при $R > 5r$.

Заметим, что $\bar{B}_r(S) \cap M$ всегда является замкнутой дугой ввиду Леммы 3.8. Обозначим её за q_S .

Лемма 3.10. В условиях Теоремы 3.2 каждая дуга множества Σ продолжается отрезками касательных к множеству M_r . То же верно и для Σ , являющегося локальным минимайзером в смысле Определения 3.3 для выпуклой кривой M и $r < R/5$.

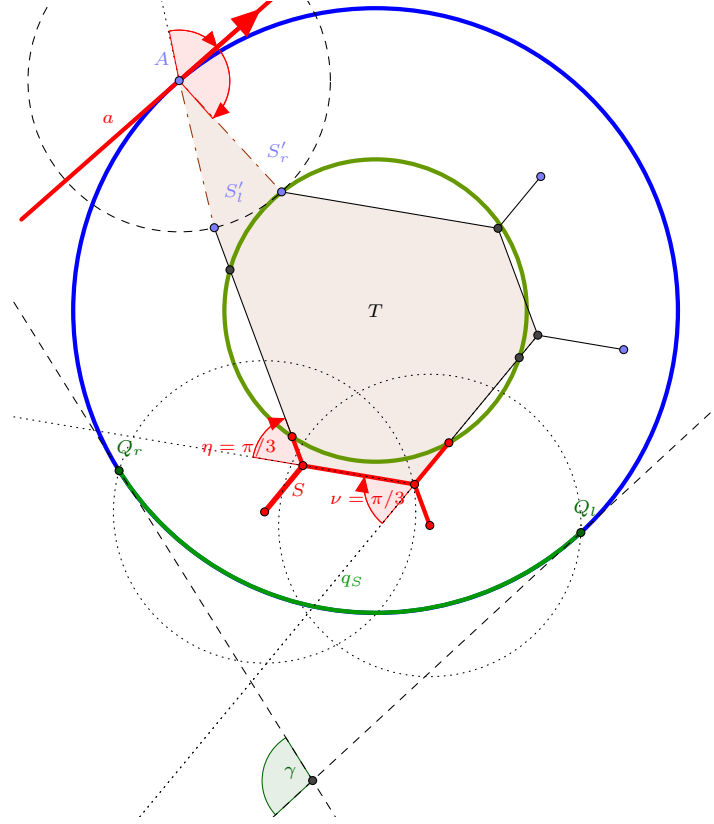


РИС. 3. Иллюстрация к построению T .

Замечание 3.11. Как будет ясно из доказательства, для того чтобы утверждение Леммы 3.10 выполнялось для локальных минимайзеров, требование $r < R/5$ может быть немного ослаблено.

Лемма 3.12. Пусть M — выпуклая замкнутая кривая с минимальным радиусом кривизны R и пусть Σ — минимайзер с энергией $r < R$. Тогда верны следующие утверждения.

- (i) Пусть S_1, S_2 — связные компоненты множества $\Sigma \setminus N_r$ или дуги множества $\Sigma \cap M_r$. Тогда внутренности дуг q_{S_1} и q_{S_2} не пересекаются.
- (ii) Σ не содержит петель (гомеоморфных образам S^1).

Следствие 3.13. Предположим, что множество Σ не содержит штейнеровских точек в N_r . Рассмотрим следующий абстрактный граф с вершинами, соответствующими связным компонентам множества $\Sigma \setminus N_r$ и дугам $\Sigma \cap M_r$, и ребрами между ними, определенными следующим образом:

- две вершины, соответствующие связным компонентам множества $\Sigma \setminus N_r$, связаны ребром, если эти компоненты были связаны хордой M_r ,
- вершина, соответствующая связной компоненте S множества $\Sigma \setminus N_r$, и вершина, соответствующая дуге C множества $\Sigma \cap M_r$, связаны ребром, если $\bar{S} \cap C \neq \emptyset$,
- вершины, соответствующие дугам $\Sigma \cap M_r$, не связаны ребрами.

Этот граф является деревом и, более того, если $R > 2a_M(r) + r$, то он является путем.

Доказательство. Лемма 3.12(ii) влечет отсутствие в графе циклов, а из Леммы 3.8 следует, что степень вершин в этом графе не превосходит 2. Связность множества Σ влечет связность графа. Таким образом, граф является путем в случае $R > 2a_M(r) + r$. \square

Таким образом, в условиях Теоремы 3.2 существуют две компоненты связности множества $\Sigma \setminus N_r$, обладающие ровно одной точкой входа; эти компоненты соответствуют листьям нашего графа. Мы

будем называть их *конечными компонентами* и обозначать S_l и S_r (и называть их *левой* и *правой* соответственно); остальные компоненты будем называть *средними*.

Граф, определенный в Следствии 3.13, который в условиях Теоремы 3.2 является путем, задает на компонентах связности $\Sigma \setminus N_r$ естественный порядок, начинающийся с S_l и заканчивающийся S_r . Также он задает порядок на точках входа в каждой компоненте связности, первую из которых мы будем называть *левой*, а последнюю — *правой*. Мы будем называть такой порядок *порядком против часовой стрелки*.

Заметим, что дуги M , которые покрыты связными компонентами $\Sigma \setminus N_r$, смежными в графе, определенном в Следствии 3.13, являются соседними (то есть эти дуги имеют одну общую точку). А значит дуги q_{S_l} и q_{S_r} тоже соседние.

Обозначим за A точку пересечения q_{S_l} и q_{S_r} (см Рис. 3); она существует, поскольку q_{S_l} и q_{S_r} — замкнутые дуги, и единственна благодаря Лемме 3.12(i). Рассмотрим множество $\hat{\Sigma} := \Sigma \cup [AS'_l] \cup [AS'_r]$, где $[AS'_l]$ и $[AS'_r]$ — отрезки длины r , соединяющие точку A с S_l и S_r соответственно. Ввиду Леммы 3.12(ii) и того, что $B_r(A) \cap \Sigma = \emptyset$, множество $\hat{\Sigma}$ ограничивает область, которую мы в дальнейшем будем называть T (как изображено на Рис.3).

Предыдущие леммы влекут следующее следствие.

Следствие 3.14. *Граница T — замкнутая кривая, состоящая из дуг M_r и прямолинейных отрезков.*

Рассмотрим поведение касательной к границе области T . Следствие 3.14 и Лемма 3.10 гарантируют, что все точки, где наклон касательной меняется, кроме точки A , принадлежат связным компонентам $\Sigma \setminus N_r$ или дугам M_r .

Определение 3.15. *Пусть q кривая (не обязательно инъективная). Будем говорить, что поворот кривой q это величина, определенная формулой:*

$$\text{wind}(q) = \int_a^b d \arg(\gamma'(t)),$$

где $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — параметризация q и \arg непрерывная ветка многозначной функции Arg . В нашей постановке поворот почти всегда совпадает с углом между касательной линией и концами q .

Определение 3.16. *Пусть S — компонента связности $\Sigma \setminus N_r$. Тогда $\text{wind}(S)$ обозначает поворот $S \cap \partial T$, параметризованный против часовой стрелки. В частности, если $S = S_l$, то $\text{wind}(S)$ означает поворот соответствующей кривой $S \cap \partial T$, параметризованной так, чтобы начинаться в точке входа и заканчиваться в S'_l , а если $S = S_r$, то $\text{wind}(S)$ означает поворот $S \cap \partial T$, параметризованной так, чтобы начинаться в S'_r и заканчиваться в точке входа.*

Для лучей $[BC)$, $[CD)$ мы будем использовать обозначение $\angle([BC), [CD))$ для направленного угла от $[BC)$ к $[CD)$.

Теперь мы можем сформулировать центральную Лемму.

Лемма 3.17. *Пусть M — выпуклая замкнутая кривая с минимальным радиусом кривизны R . Предположим, что $r < R/5$ (а для окружности $M := \partial B_R(O)$ достаточно выполнения условия $r < R/4.98$). Пусть S — связная компонента множества $\Sigma \setminus N_r$ или дуга M_r . Тогда верны следующие утверждения.*

- Если S — средняя компонента или дуга M_r , то $\text{wind}(q_S) \leq \text{wind}(S)$. При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда S является дугой M_r .
- Если S — конечная компонента, тогда для правой и левой компонент выполняется

$$\text{wind}(q_S) \leq \text{wind}(S) + \angle([CS'_l), [S'_l A)) + \angle([AS'_l), a),$$

$$\text{wind}(q_S) \leq \text{wind}(S) + \angle([CS'_r), [S'_r A)) + \angle(a, [AS'_r)),$$

где a обозначает касательный луч к M в точке A , направленный слева направо (см Рис. 3, углы $\angle([AS'_l), a)$, $\angle(a, [AS'_r))$ обозначены красным), а C — точка ветвления, если S — тренога и точка входа, если S — отрезок (ввиду Леммы 3.8 других вариантов нет). Равенство достигается тогда и только тогда, когда S — отрезок касательной к M_r .

Замечание 3.18. Если в Лемме 3.17 предположить, что Σ не имеет штейнеровских точек в N_r , тогда достаточно потребовать $r < R/2.9$ (это будет видно из доказательства Леммы 3.17, Случай 1а).

Теперь Теорема 3.2 доказывается в несколько строчек.

Доказательство Теоремы 3.2. Заметим, что $\text{wind}(\partial T) = \text{wind}(M) = 2\pi$. Тогда, в силу Леммы 3.17, каждый глобальный минимайзер Σ состоит из дуг M_r и отрезков касательных к M_r . А значит, имеет единственную дугу M_r , а ввиду отсутствия петель содержит также конечные компоненты. Конечные компоненты не могут быть дугами. Следовательно минимайзер является подковой. \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Ясно, что $\Sigma \subset N$ (N — равномерно выпуклое множество, поэтому в противном случае можно спроецировать часть Σ , лежащую в $\mathbb{R}^2 \setminus N$, на N , от чего длина Σ строго уменьшится).

Лемма 4.1. Пусть M выпуклая замкнутая кривая с минимальным радиусом кривизны $R > r$ и пусть B — шар с радиусом r и центром внутри N . Тогда если B касается M , то $B \subset N$.

В дальнейшем, по умолчанию мы будем полагать M и Σ удовлетворяющими условиям Теоремы 3.2. Иногда мы будем требовать более слабые условия.

Верно следующее утверждение.

Лемма 4.2. Пусть M — выпуклая замкнутая с минимальным радиусом кривизны $R > r$ и пусть Σ — произвольный минимайзер для M . Тогда множество E_Σ не дискретных энергетических точек Σ лежит на M_r .

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется такая точка $x \in E_\Sigma \setminus M_r$, что $\text{dist}(x, M) < r - \varepsilon$ для некоторого положительного ε и последовательность $\{x_k\}$ энергетических точек из $B_{\varepsilon/2}(x)$, сходящаяся к x . Ввиду выпуклости N и того, что минимальный радиус кривизны M не меньше r , каждая кривая $\gamma_k := \overline{B_r(x_k)} \cap M$ связна, так что можно говорить, что каждый x_k покрывает дугу γ_k . Следовательно, все γ_j имеют общую точку. Действительно, для точки $z \in M$ такой, что $\text{dist}(x, z) = \text{dist}(z, M)$ выполняется

$$\text{dist}(x_j, z) \leq \text{dist}(x, z) + \text{dist}(x_j, x) \leq r - \varepsilon + \varepsilon/2 = r - \varepsilon/2,$$

а значит $z \in \gamma_j$. Несложно заметить, что тогда либо $\gamma_i \subset \gamma_j$, либо $\gamma_i \subset \gamma_j \cup \gamma_l$ для некоторых различных i, j, l . Но тогда одна из точек x_i, x_j, x_l не энергетическая. Противоречие. \square

Доказательство Леммы 3.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (I): Изменения множества $\Sigma \cap N_r$ не влияют на энергию $F_M(\Sigma)$, так что если мы возьмем произвольную связную компоненту S из множества $\Sigma \cap N_r$ и заменим ее деревом Штейнера, соединяющим точки множества $S \cap M_r$ (дерево непусто ввиду связности Σ и требования $F_M(\Sigma) \leq r$, которое влечет $\Sigma \setminus N_r \neq \emptyset$), тогда длина получившегося множества должна остаться той же, что была, ввиду оптимальности Σ , а значит компонента S является штейнеровским деревом, соединяющим $S \cap \partial N_r$, как и утверждалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (II): Напомним, что $\Sigma = E_\Sigma \sqcup X_\Sigma \sqcup S_\Sigma$, где X_Σ — дискретное множество точек, S_Σ состоит из деревьев Штейнера (а значит, из прямолинейных отрезков) и $E_\Sigma \subset M_r$ ввиду Леммы 4.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (III): Пусть Σ' произвольная связная компонента множества $\Sigma \cap N_r$. Удалим произвольный открытый отрезок $\Delta \subset \Sigma'$. Значение F_M не изменится, то есть $F_M(\Sigma' \setminus \Delta) = F_M(\Sigma)$, при этом множество $\Sigma' \setminus \Delta$ разбивается на две связные компоненты Σ_1 и Σ_2 такие, что $\Sigma' = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$. Ясно, что $M \supset \overline{B_r(\Sigma_1)} \cup \overline{B_r(\Sigma_2)}$. Тогда ввиду связности M существует такая точка $A \in M$, что $A \in \overline{B_r(\Sigma_1)} \cap \overline{B_r(\Sigma_2)}$, но тогда есть такие точки $B \in \overline{\Sigma_1}$ и $C \in \overline{\Sigma_2}$, что $|AB| \leq r$, $|AC| \leq r$. Отсюда расстояние между Σ_1 и Σ_2 не превосходит $|BC| \leq 2r$, а длина удаленного отрезка Δ не превосходит расстояния между Σ_1 и Σ_2 ввиду оптимальности Σ (в противном случае можно соединить Σ_1 и Σ_2 короче). Пусть $a_M(r)$ максимальное значение $|BC|$ (расстояние между компонентами) по всем допустимым Δ .

В случае если $M = \partial B_R(O)$, длина $[BC]$ принимает максимальное значение, когда отрезок $[BC]$ является хордой и $|AB| = |BC| = r$. Тогда для этого случая мы можем посчитать максимальное значение длины $[BC]$:

$$\sin \frac{\angle AOC}{2} = \frac{|AC|}{2|OC|} = \frac{r}{2R},$$

то есть

$$|BC| = 2 \sin \angle AOC \cdot |OC| = 4 \sin \frac{\angle AOC}{2} \cos \frac{\angle AOC}{2} |OC| = 2r \sqrt{1 - \frac{r^2}{4R^2}}.$$

□

Замечание 4.3. Чтобы доказать Замечание 3.6, мы заменим доказательство Леммы 3.5(iii) следующим, очень близким, аргументом. Пусть $\Delta \subset \Sigma \cap N_r$ — произвольный открытый отрезок, а Σ' снова связная компонента $\Sigma \cap N_r$, содержащая Δ . Обозначим за D множество (возможно, пустое) минимальной длины такое, что $(\Sigma' \setminus \Delta) \cup D$ замкнуто и связно. Ясно, что $\mathcal{H}^1(D) \leq 2r$: действительно, если $\Sigma' \setminus \Delta$ состоит из двух связных компонент Σ_i , $i = 1, 2$, вспомнив, что Σ покрывает M , мы повторим рассуждения из доказательства Леммы 3.5(iii) чтобы показать $\text{dist}(\Sigma_1, \Sigma_2) \leq 2r$, что влечет требуемое утверждение. Теперь остается только заметить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\Sigma \setminus \Delta) + 2r &\geq \mathcal{H}^1(\Sigma \setminus \Delta) + \mathcal{H}^1(D) \geq \mathcal{H}^1((\Sigma \setminus \Delta) \cup D) \\ &\geq \mathcal{H}^1(\Sigma_{\text{opt}}) \geq \mathcal{H}^1(\Sigma) - a, \end{aligned}$$

и неравенство $\mathcal{H}^1(\Delta) \leq \mathcal{H}^1(\Sigma) - \mathcal{H}^1(\Sigma \setminus \Delta) \leq 2r + a$ завершает доказательство Замечания.

Доказательство Леммы 3.7. Предположим противное, т.е. что Σ имеет точку ветвления A_0 в N_r . Ввиду Леммы 4.1 найдется такая точка $O \in N$, что $A_0 \in B_R(O)$ и $B_R(O) \subset N$ (в частности, $B_{R-r}(O) \subset N_r$). Обозначим за A одну из точек ветвления Σ_r , ближайшую к O и положим $t := |OA|$.

Пусть Σ' обозначает связную компоненту $\Sigma \cap N_r$, содержащую A . Ввиду структуры локально минимальной сети, найдутся три прямолинейных отрезка Σ' , начинающиеся в A . Рассмотрим из них такие два отрезка $[AA_{-1}], [AA_1]$, что точка O принадлежит углу $\angle A_{-1}AA_1$ (не исключая случай принадлежности стороне угла). Напомним, что угол $\angle A_{-1}AA_1$ равен $2\pi/3$. Заметим также, что точки A_{-1}, A_1 лежат вне $B_t(O)$. Отсюда один из отрезков $[AA_1], [AA_{-1}]$ пересекает $B_t(O)$. Не умаляя общности будем считать, что это отрезок $[AA_1]$. Обозначим пересечение отрезка $[AA_1]$ и окружности $\partial B_t(O)$ за C .

Утверждается, что $t \leq a_M(r)$. Предположим противное, тогда поскольку $|AC| \leq a_M(r)$ и $|OA| = |OC| = t > a_M(r) \geq |AC|$, имеем $\angle OAC > \pi/3$, отсюда отрезок $[AA_{-1}]$ также пересекает $B_t(O)$. Обозначим пересечение отрезка $[AA_{-1}]$ с окружностью $\partial B_t(O)$ за D и заметим, что угол $\angle OAD$ также больше, чем $\pi/3$, а значит $\angle CAD > 2\pi/3$, что противоречит минимальности Σ , завершая доказательство.

Заметим, что точки A_1, A_{-1} принадлежат N_r , поскольку $R - r > 2a_M(r) \geq t + a_M(r)$, и значит точки A_1, A_{-1} являются точками ветвления. Также ввиду Леммы 3.5 длины отрезков $[AA_{-1}]$ и $[AA_1]$ не превосходят $a_M(r)$. Рассмотрим правильный шестиугольник P со стороной длины $a_M(r)$ такой, что точка A является его вершиной, а отрезки $[AA_1], [AA_{-1}]$ принадлежат двум его сторонам. Выполняются следующие утверждения.

- $\text{diam } P = 2a_M(r)$.
- Отрезок $[OA]$ делит угол $\angle A_{-1}AA_1 = 2\pi/3$ на два угла, хотя бы один из которых острый. Обозначим этот острый угол за $\angle OAB$, где B — соответствующая вершина шестиугольника P (то есть $|AB| = a_M(r)$). Тогда угол $\angle OBA$ также острый, поскольку $|OA| = t \leq a_M(r) = |AB|$. Поэтому перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую (AB) , пересекает последнюю на отрезке $[AB]$, а значит точка O находится внутри квадрата, построенного на стороне $[AB]$. Но этот квадрат является подмножеством P , а значит $O \in P$.
- Утверждения выше влекут $P \subset B_{2a_M(r)}(O)$, и значит $P \subset N_r$.

Возьмем теперь такие вершины A_{-2} и A_2 , что $[A_1A_2], [A_{-1}A_{-2}] \subset \Sigma_r$ и точка O принадлежит углам $\angle AA_1A_2$ и $\angle AA_{-1}A_{-2}$. Ясно, что $A_2, A_{-2} \in P \subset N_r$ так что они тоже являются точками ветвления. Так же определим и точки A_3, A_{-3} : $[A_2A_3], [A_{-2}A_{-3}] \in \Sigma_r$ и O принадлежит углам $\angle A_1A_2A_3$ и $\angle A_{-1}A_{-2}A_{-3}$. Точки A_3, A_{-3} также принадлежат P , а значит и N_r , поэтому тоже являются точками ветвления. Эти шесть построенных отрезков находятся во внутренности N_r , поэтому не содержат концевых точек. Продолжая последовательно строить эту конструкцию, мы получим два пути в $P \subset N_r$: один путь (начинающийся с $A, A_1, A_2, A_3 \dots$) на каждом шаге поворачивает влево, а другой (начинающийся с $A, A_{-1}, A_{-2}, A_{-3} \dots$) каждый раз поворачивает вправо. Таким образом, $\Sigma \cap P \subset \Sigma \cap N_r$ содержит концевую точку, что невозможно в N_r или цикл, что невозможно для дерева Штейнера. Противоречие. □

Доказательство Леммы 3.8. Пусть S является связной компонентой множества $\Sigma \setminus N_r$. Сначала мы докажем, что $n(S) \leq 2$. Ввиду свойства (а) множества энергетических точек, для любой энергетической точки $x \in S$ найдется такая точка $y = y(x) \in M$, что $|xy| = r$ и $B_r(y) \cap S = \emptyset$. Тогда y может быть только концом дуги q_S , поскольку в противном случае $S = S \setminus B_r(y)$ не связно. Если конец дуги q_S соответствует двум разным энергетическим точкам W_1, W_2 множества $\Sigma \cap S$, то $q_{W_1} \subset q_{W_2}$ или $q_{W_2} \subset q_{W_1}$, оба эти случая невозможны, поэтому $n(S) \leq 2$, и утверждение доказано.

Докажем теперь, что $m(S) \leq 2$. Предположим противное, т.е. существование как минимум трех различных точек входа у S . Обозначим их, против часовой стрелки, соответственно Q_1, Q_2 и Q_3 . Ввиду Леммы 3.5 Σ_r состоит из хорд M_r . Обозначим за W конец хорды M_r в Σ_r с другим концом в Q_2 . Тогда $|Q_2W| \leq |Q_1W|$ (в противном случае, заменив в Σ $[Q_2W]$ на $[Q_1W]$, получили бы множество лучше), и аналогично $|Q_2W| \leq |Q_3W|$. Заметим, что $W \notin \tilde{S}$, поскольку в Σ нет циклов. Несложно увидеть, что точки Q_1, Q_2, Q_3, W лежат на M_r в упомянутом порядке против часовой стрелки. В противном случае дуга q_{S_W} является подмножеством q_S , где S_W — связная компонента $\Sigma \setminus N_r$, содержащая W , что невозможно.

Отсюда $|WQ_2|$ составляет хотя бы радиус d максимального шара, вписанного в N_r и касающегося Q_2 .

Поскольку $d \geq 2(R - r)$, имеем $|WQ_2| \geq R - r > 2r$, что противоречит Лемме 3.5(iii), завершая доказательство.

В заключение заметим, что любое связное подмножество S , содержащее все энергетические точки S , покрывает q_S , и значит, заменив S на дерево Штейнера \tilde{S} , соединяющее энергетические точки и точки входа множества S , мы получим лучшее, чем Σ , множество. Поэтому, ввиду оптимальности Σ , длины S и \tilde{S} должны быть равны, что доказывает последнее утверждение Леммы. \square

Замечание 4.4. Поскольку ввиду Леммы 3.8 компонента S является локально минимальной сетью, соединяющей энергетические точки и точки входа, ясно, что энергетические точки являются концевыми в S . Пусть S содержит две энергетические точки W_1 и W_2 . Пусть $[A_1W_1]$ и $[A_2W_2]$ являются концевыми отрезками S , заканчивающимися в точках W_1, W_2 соответственно (не исключая случай $A_1 = A_2$). Пусть $Q_i \in q_S$ — такие точки, что $B_r(Q_i) \cap \Sigma = \emptyset$ (ввиду доказательства Леммы 3.8 Q_i являются концами q_S), $i = 1, 2$. Тогда каждая точка Q_i лежит на прямой (A_iW_i) , $i = 1, 2$.

Доказательство Замечания 4.4. Действительно, S является деревом Штейнера для трех или четырех точек с A_1, A_2 в качестве точек ветвления. Предположим противное, т.е. что A_1, W_1, Q_1 не лежат на одной прямой. Тогда можно заменить $[A_1W_1] \cap B_\varepsilon(W_1)$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$ на часть отрезка $[DQ_1]$, где $D = [A_1W_1] \cap \partial B_\varepsilon(W_1)$, получив множество лучше (оно будет иметь длину строго меньше и несложно видеть, что оно все еще будет покрывать дугу q_S). \square

Доказательство Леммы 3.10. Пусть $\tilde{BC} \subset \Sigma$ является дугой M_r .

Заметим, что $\Sigma \setminus M_r$ состоит из прямолинейных отрезков: когда Σ является минимайзером, это следует из Лемм 3.7 и 3.8, а когда Σ является только локальным минимайзером для $r < R/5$, это следует из Замечания 3.9.

Заметим, что ввиду Леммы 3.7 дуга \tilde{BC} не содержит точек ветвления. Если Σ является локальным минимайзером, то доказательство Замечания 3.9 влечет, что точка ветвления обеспечивает нам отрезок длины хотя бы $2r + (R - 5r)/4$ в Σ_r .

В остальной части доказательства мы используем только локальные аргументы, так что все дальнейшие рассуждения будут относиться сразу к обоим случаям: когда Σ минимайзер или локальный минимайзер.

Сначала докажем, что ни B , ни C не совпадает с точкой S'_i или S'_r . Предположим противное, то есть, не умаляя общности, что $B = S'_r$. Тогда можно заменить B_1B на часть отрезка $[B_1A]$, где $B_1 = B_\varepsilon(B) \cap \tilde{BC}$, получим множество лучше Σ (и со строго меньшей длиной). Осталось доказать, что любая дуга в Σ продолжается отрезками касательных к M_r . Сначала докажем, что в Σ дуга не может продолжаться хордой, затем, что выйти из дуги M_r в “кольцо” $N \setminus N_r$ можно только в направлении касательной (что и означает наличие прямолинейного отрезка $[BD] \subset \Sigma$ такого, что $D \in N \setminus N_r$ и, более того, (BD) касается M_r в B).

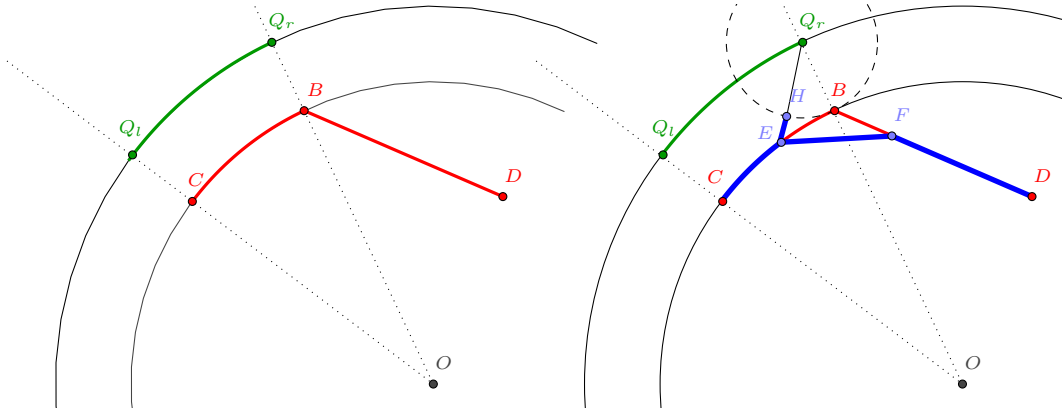


Рис. 4. Случай продолжения хордой. Рисунок к Лемме 3.10.

Мы утверждаем, что $\overset{\vee}{BC}$ не может быть продолжена хордой в Σ . Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим точки $E \in \overset{\vee}{CB}$, $F \in [BD]$ такие, что $|\overset{\vee}{EB}| = |BF| = \varepsilon$. Тогда $|EB| = \varepsilon + o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$, поскольку M_r гладкая (условие на кривизну M влечет $C^{1,1}$ гладкость). Пусть $Q_r \in M$ такая точка, что $|Q_r B| = r$ и $B_r(Q_r) \cap \Sigma = \emptyset$, и пусть H является точкой пересечения $[EQ_r]$ и $\partial B_r(Q_r)$ (как изображено на Рис. 4). Тогда (BQ_r) перпендикулярна касательной прямой к M_r в точке B . Тогда

$$\begin{aligned} |EH| &= |EQ_r| - |Q_r H| = \sqrt{|EB|^2 + r^2 + o(\varepsilon)} - r = \sqrt{(\varepsilon + o(\varepsilon))^2 + r^2} - r \\ &= r\sqrt{1 + o(\varepsilon)} - r = o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Теперь, поскольку угол между дугой $\overset{\vee}{EB}$ и отрезком $[BF]$ меньше π , получаем

$$|EF| = \sqrt{2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \cos \angle EBF} + o(\varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1 - \cos \angle EBF} + o(\varepsilon) < 2\varepsilon - |\Omega(\varepsilon)|,$$

и, значит,

$$|EH| + |EF| < 2\varepsilon = |\overset{\vee}{EB}| + |BF|$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

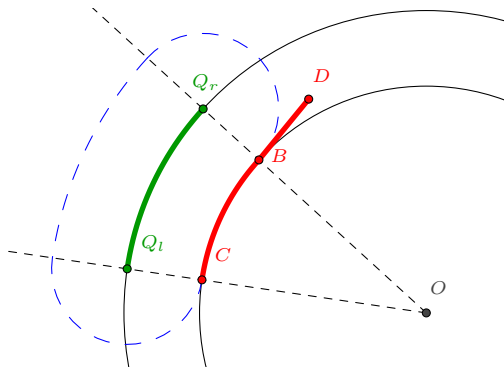


Рис. 5. Область без точек Σ . Иллюстрация к Лемме 3.10.

Мы утверждаем, что единственный способ войти внутрь кольца $N \setminus N_r$ из дуги M_r это выйти по касательной к M_r , то есть если отрезок $[BD] \subset \Sigma$, тогда $D \in N \setminus N_r$ (как следует из доказанного выше) и, более того, BD касателен к M_r в B (как изображено на Рис. 5).

В противном случае угол между дугой и отрезком будет меньше π и, в достаточно малой окрестности B , можно, как и в предыдущем случае, заменить дугу $\overset{\vee}{EB}$ и отрезок $[BF] \subset [BD]$ на отрезок $[EF]$, уменьшив длину и не увеличив энергию. \square

Замечание 4.5. Если в постановке Леммы 3.10 M является *строго* выпуклой кривой, тогда утверждение Леммы 3.10 верно для локальных минимайзеров, т.е. доказательство следует из локальных аргументов. Также в этом случае Лемма 3.10 верна для $R > r$.

Доказательство. Действительно, единственная часть в доказательстве Леммы, где мы используем глобальную минимальность, это доказательство того, что если $(\overset{\vee}{BC})$ является дугой $\Sigma \cap M_r$, то C не имеет точек ветвления. Заменяем эту часть доказательства Леммы 3.10 следующим аргументом. Предположим противное, т.е. что есть и хорда $[CX] \subset \Sigma \cap N_r$ и отрезок $[CY] \subset \Sigma \setminus N_r$. Если M *строго* выпуклая кривая, тогда все точки $\text{Int}(\overset{\vee}{BC})$ энергетические, и отсюда $[CY]$ должен быть отрезком касательной к M_r в точке C . Но тогда можно поменять Σ так же, как на Рис 4: заменить $\Sigma \cap B_\varepsilon(C)$ на дерево Штейнера, соединяющее $\Sigma \cap \partial B_\varepsilon(C)$, и пару отрезков длины $O(\varepsilon^2)$, получив множество, лучшее чем Σ (и со строго меньшей длиной). \square

Доказательство Леммы 3.12. Утверждение (ii) доказано в [11]. Чтобы доказать (i), предположим противное, т.е. $\text{Int}(q_{S_1}) \cap \text{Int}(q_{S_2}) \neq \emptyset$ для S_1, S_2 , являющихся связными компонентами $\Sigma \setminus N_r$ или дугами $\Sigma \cap M_r$. Очевидно, хотя бы одна из S_1, S_2 не является дугой (не умаляя общности, это S_1). Лемма 3.8 говорит нам, что $m(S_1) \leq 2$. Очевидно, $m(S_1) \geq 1$. Если $m(S_1) = 2$ можно отрезать окрестность соответствующей энергетической точки. Длина Σ уменьшится, при этом оно все еще будет покрывать M . Если $m(S_1) = 1$, тогда Лемма 3.10 дает требуемое противоречие. \square

4.1. Доказательство центральной Леммы.

Доказательство Леммы 3.17. Очевидно, что если S является дугой, то сравниваемые значения равны.

Обозначим за Q_l и Q_r концы дуги q_S . Пусть O является пересечением перпендикуляров к M в точках Q_l и Q_r . Заметим, что $\text{wind}(q) = \angle Q_l O Q_r$ и обозначим эту величину за γ . Заметим также, что $|Q_l O| \geq R$, $|Q_r O| \geq R$. Заметим, что Леммы 3.7 и 3.8 также как и Следствие 3.13 остаются верными при $R > a_M(r) + r$, что выполняется если $R > 5r$ (или $R > 4.98r$ в том случае, когда M является окружностью радиуса R), т.е. в условиях доказываемого утверждения.

Надо разобрать следующие случаи.

(1) Пусть S является средней компонентой. Тогда она содержит две точки входа и одну или две энергетических точки ввиду Леммы 3.8. Поскольку S является деревом Штейнера для множества точек входа и энергетических точек, есть четыре возможности для S .

(а) *Случай $n = 2, m = 2$, и существует точка ветвления, смежная с (смежная означает, что мы воспринимаем S как граф) с обеими точками входа (как изображено на Рис. 6).*

Заметим, что если существует точка ветвления смежная с обеими точками входа, тогда есть и тогда ветвления (обозначим ее за B), смежная с обеими энергетическими точками. Ясно, что $\text{wind}(S)$ составляет $\pi/3$. Покажем, что покрываемая дуга q_S имеет раствор меньше, чем $\pi/3$. Посчитаем величину дуги, ограниченной продолжениями отрезков, начинающихся из B . Несложно увидеть, что эта дуга является самой длинной, когда B лежит на M_r (это предельный случай). А значит, достаточно смотреть на угол в $N \setminus N_r$ величины $2\pi/3$ с вершиной B на M_r . Хорошо известно, что дуга является самой длинной в случае, если S касательна к M_r и когда M является окружностью. В этом случае перпендикуляр к M_r в точке B разбивает угол $\angle Q_l B Q_r = 2\pi/3$ на углы величины $\pi/2$ и $\pi/6$ (как изображено на Рис. 7). В этом случае величина дуги составляет

$$\arccos\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\pi}{6} - \arcsin\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right),$$

где $\alpha := R/r$, а значит она меньше, чем $\pi/3$ для $\alpha \geq 2.9$.

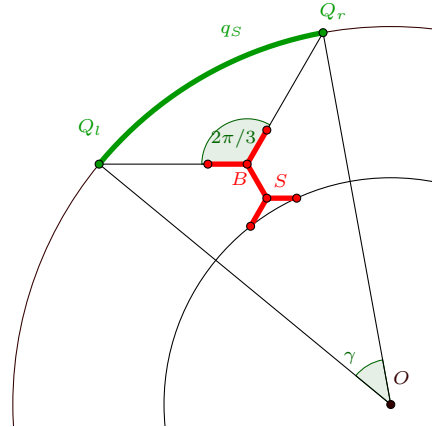


Рис. 6. Общая ситуация для случая 1а: $n = 2, m = 2$, есть точка Штейнера, смежная с обеими точками входа.

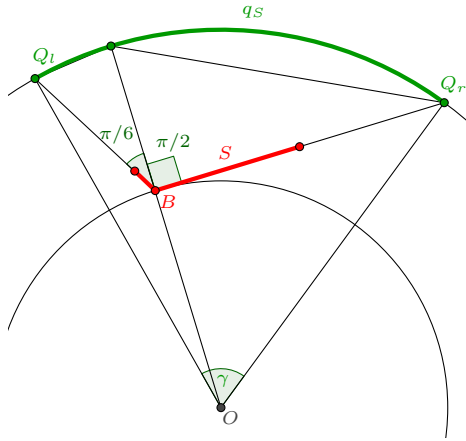


Рис. 7. Предельная ситуация для случая 1а: $n = 2, m = 2$, есть точка Штейнера, смежная с обеими точками входа.

- (b) Случай $n = 2, m = 2$, и нет точки ветвления, смежной с обеими точками входа как изображено на Рис. 8). Обозначим точки ветвления S за V_l и V_r . В этом случае $\text{wind}(S) = \pi/3 + \pi/3 = 2\pi/3$. Предположим противное (то есть что $\gamma > 2\pi/3$) и, соединив O с Q_l и Q_r , мы получим (невыпуклый) пятиугольник $Q_l V_l V_r Q_r O$ с двумя углами, равными $4\pi/3$, и одним углом величины хотя бы $2\pi/3$, что невозможно.
- (c) Случай $n = 1, m = 2$ и существует точка ветвления в S (как изображено на Рис. 9). Ясно, что $\text{wind}(S) = \pi/3$. Чтобы доказать утверждение, предположим противное (т.е. $\gamma \geq \pi/3$) и, как в предыдущем случае, соединим точку O с точками Q_l и Q_r . Кроме того, соединим O с энергетической точкой W , отчего угол величины γ разобьется на две части; возьмем большую из них (не умаляя общности это $\angle WOQ_r$). Таким образом, у нас есть треугольник $\Delta OQ_r W$ со стороной $|OQ_r| \geq R$ и острым углом (α на Рис. 9) величиной хотя бы $\pi/6$ напротив стороны $|WQ_r| = r$. Вспомнив, что $R > 2r$ и введя обозначение

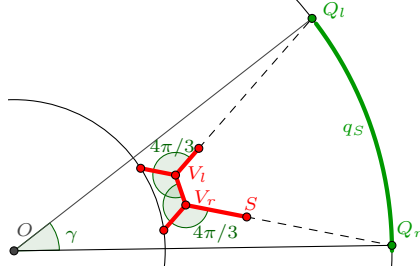


Рис. 8. Рисунок к случаю 1b: $n = 2, m = 2$, не существует точки Штейнера, смежной с обеими точками входа.

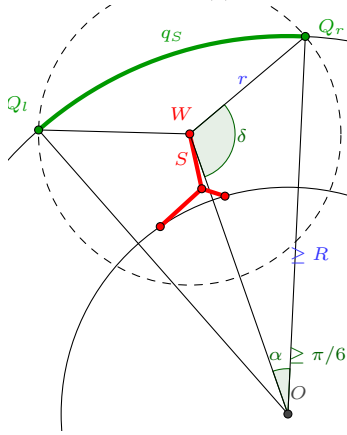


Рис. 9. Рисунок к случаю 1c: $m = 2, n = 1$.

$\delta := \angle OWQ_r$, получим

$$\sin \delta = \frac{|OQ_r|}{r} \sin \alpha \geq \frac{R}{2r} > 1,$$

что дает нам противоречие.

- (d) Последний случай $n = 1, m = 2$ и нет точки ветвления в S (как изображено на Рис. 10). Тогда S состоит из двух отрезков $[BW] \cup [WD]$, где $B, D \in M_r, W \in X_\Sigma$ и $\angle BWD \geq 2\pi/3$. Сначала соединим O с Q_l и Q_r , затем обозначим $K_l = [OQ_l] \cap M_r$ и $K_r = [OQ_r] \cap M_r$. Рассмотрим теперь четырехугольник P , образованный вершинами K_l, K_r, O и W . Сумма углов K_l, K_r и W в P составляет хотя бы $\pi/2 + \angle BWD + \pi/2$, так что оставшийся угол (который равен γ) не превосходит $\pi - \angle BWD \leq \pi - 2\pi/3 = \pi/3$, как и утверждалось. В случае же равенства оба отрезка $[BW]$ и $[WD]$ касаются M и можно заменить S на дугу BD , получив множество лучше.

- (2) Пусть S — крайняя компонента (пусть, не умаляя общности, это будет левая крайняя компонента, так что $Q_r = A$). Напомним, что C означает точку ветвления, если S является треногой, и точку входа, если S — отрезок. Тогда возможны два варианта:

- (а) Случай $n = 2, m = 1$ (как изображено на Рис. 11). Заметим, что S является треногой: $S = [BC] \cup [CW] \cup [CS'_l] \subset \overline{(N \setminus N_r)}$, где $B \in M_r$. Замечание 4.4 влечет $Q_r = [CS'_l] \cap M$, $Q_l = [CW] \cap M$ и $|S'_l Q_r| = r = |WQ_l|$, $B_r(Q_r) \cap \Sigma = B_r(Q_l) \cap \Sigma = \emptyset$. Пусть $K \in [OQ_l]$ такая, что $(Q_r K) \perp (OQ_r)$. Тогда $\alpha := \text{wind}(S) = \angle([BC], [CQ_r]), \angle([CS'_l], [S'_l A]) = 0$ и $\beta := ([CQ_r], [Q_r K]) = \angle([AS'_l], a)$. Мы должны показать $\alpha + \beta > \gamma$. Пусть P является точкой пересечения (KQ_r) и $[BC]$. Тогда $\angle OKP = \pi/2 - \gamma$ и $\angle KPC = \alpha + \beta$. Предположим противное, то есть $\alpha + \beta \leq \gamma$. Тогда $\angle OKP + \angle KPC < \pi/2$, откуда $\angle KLP > \pi/2$, где L —

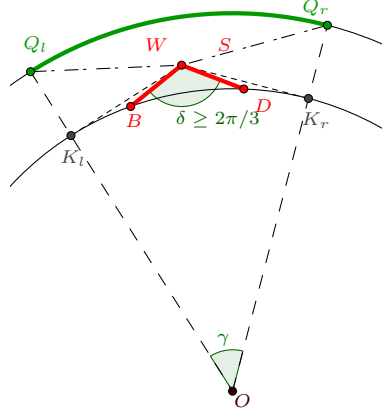


Рис. 10. Рисунок к случаю 1d:
 $m = 2$, $n = 1$ и S состоит из двух
отрезков $[BC] \cup [CD]$.

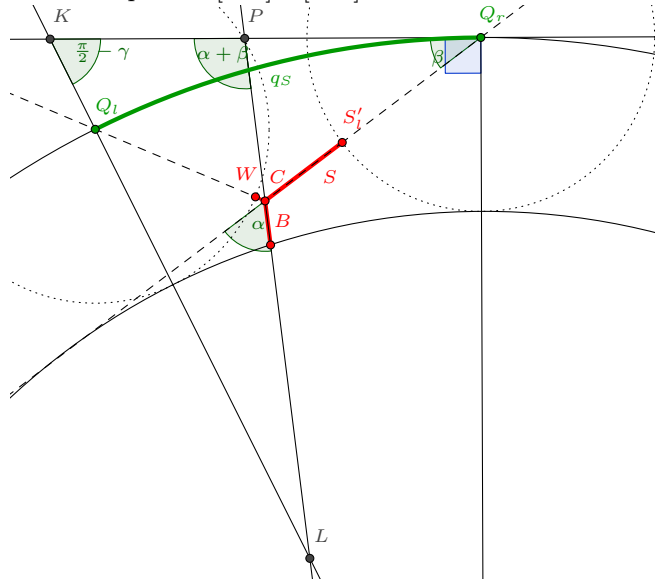


Рис. 11. Рисунок к случаю 2a:
крайняя компонента, $n = 2$, $m = 1$.

точка пересечения (BC) и (OK) , но, поскольку $\angle Q_l C L = 2\pi/3$, сумма углов в треугольнике $\triangle C L Q_l$ больше π , что невозможно.

- (b) *Случай* $n = 1$, $m = 1$ (как изображено на Рис. 12). В случае $S = [CS'_l]$, где $C \in M_r$, $|S'_l Q_r| = r$, и $\text{wind}(S) = 0$. Обозначим за K такую точку, что $K \in [OQ_l]$ и $\angle OQ_r K = \pi/2$. Определим точки $L := [S'_l C] \cap (OQ_l)$ и $P := [BS'_l] \cap (Q_r K)$, и введем обозначения $\alpha := \angle PS'_l Q_r$ и $\beta := \angle S'_l Q_r K$.

Имеет смысл рассмотреть следующие две возможности. Заметим, что $|S'_l Q_l| = r$, в противном случае можно заменить $[CS'_l] \cap B_\varepsilon(S'_l)$ на часть отрезка $[DQ_r]$, где $D = [CS'_l] \cap \partial B_\varepsilon(S'_l)$.

- $\angle CS'_l Q_r \leq \pi$ (как изображено на Рис. 12). Тогда $\angle([AS'_l], a) = \beta$ и $\angle([CS'_l], [S'_l A]) = \alpha$, так что $\text{wind}(S) + \angle([CS'_l], [S'_l A]) + \angle([AS'_l], a) = \alpha + \beta$. Заметим, что $\angle S'_l P K = \alpha + \beta$ и $\angle OKQ_r = \pi/2 - \gamma$. Если $\alpha + \beta \leq \gamma$ (что противоречит доказываемому утверждению), тогда $\angle OKP + \angle KPS'_l < \pi/2$ so $\angle KLP > \pi/2$, а это невозможно, поскольку тогда $|CQ_l| < |S'_l Q_l|$, что противоречит $|S'_l Q_l| = r$, $|CQ_l| \geq r$.

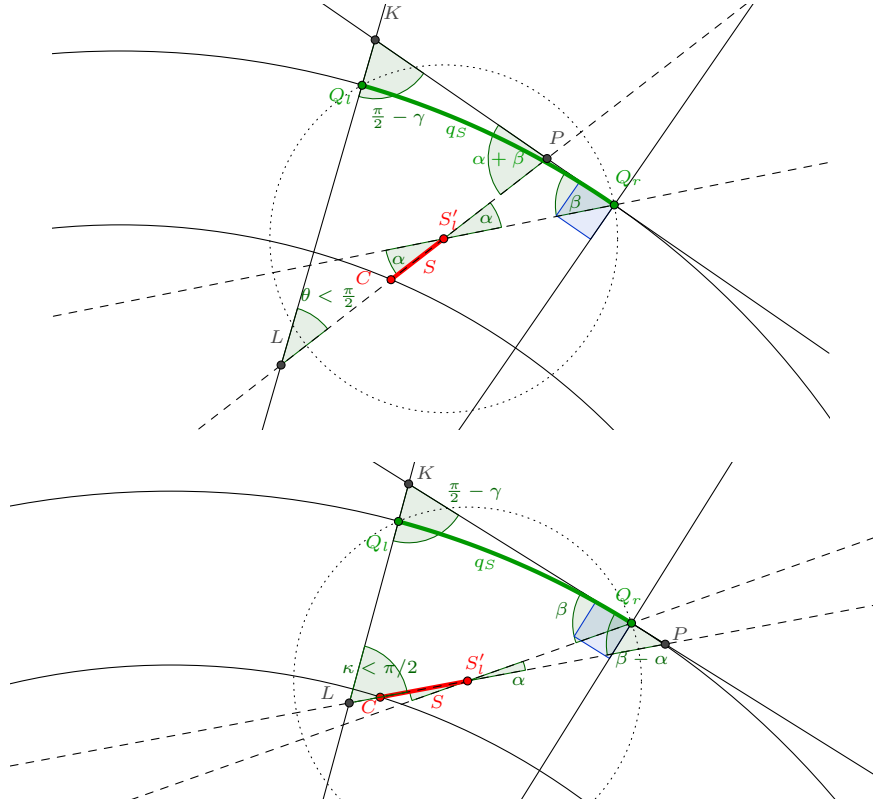


Рис. 12. Рисунок к случаю 2b: крайняя компонента, $n = 1$, $m = 1$.

- $\angle CS'_l Q_r > \pi$ (как изображено на Рис. 12). В этом случае $\angle([AS'_l], a) = \beta$ и $\angle([CS'_l], [S'_l A]) = -\alpha$, так что $\text{wind}(S) + \angle([CS'_l], [S'_l A]) + \angle([AS'_l], a) = \beta - \alpha$ и мы знаем, что $\angle KPC = \beta - \alpha$. Если $\beta - \alpha \leq \gamma$ (что противоречит доказываемому утверждению), тогда $\angle OKP + \angle KPC < \pi/2$, а это невозможно, поскольку тогда $|CQ_l| < |S'_l Q_l|$, что противоречит $|S'_l Q_l| = r$, $|CQ_l| \geq r$.

□

Доказательство Следствия 3.4. Пусть Σ является локальным минимайзером в смысле Определения 3.3. Мы покажем, что это так для $s := 1/4$. Предположим противное, т.е. $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq \mathcal{H}^1(\Sigma_{\text{opt}}) + (R - 5r)/4$. Замечание 3.9 показывает, что Леммы 3.7 и 3.8 также как и Следствие 3.13 остаются верными при $r < R/5$. Повторяя доказательство Теоремы 3.2 без всяких изменений (мы можем это сделать, потому что все аргументы, которые использовались в этом доказательстве, также как и в Лемме 3.17 являются локальными, т.е. на самом деле противоречие возникает с локальной, а не глобальной, минимальностью Σ), мы получаем, что Σ является подковой.

□

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемая задача чрезвычайно полезна в народном хозяйстве: она позволит газифицировать (а также обеспечить водой или иными ресурсами) границы выпуклых областей или регионов. В случае, если на границе области расположена стена, полученный результат позволит качественно улучшить условия жизни стражников Стены, а значит сделает более безопасной жизнь во всем регионе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Bouchitté, C. Jimenez, and R. Mahadevan. Asymptotic analysis of a class of optimal location problems. *J. Math. Pures Appl.* (9), 95(4):382–419, 2011.

- [2] A. Brancolini, G. Buttazzo, F. Santambrogio, and E. Stepanov. Long-term planning versus short-term planning in the asymptotical location problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 15(3):509–524, 2009.
 - [3] G. Buttazzo, E. Oudet, and E. Stepanov. Optimal transportation problems with free Dirichlet regions. In *Variational methods for discontinuous structures*, volume 51 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 41–65. Birkhäuser, Basel, 2002.
 - [4] G. Buttazzo, A. Pratelli, S. Solimini, and E. Stepanov. *Optimal urban networks via mass transportation*, volume 1961 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
 - [5] G. Buttazzo and E. Stepanov. Optimal transportation networks as free Dirichlet regions for the Monge-Kantorovich problem. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 2(4):631–678, 2003.
 - [6] G. Buttazzo and E. Stepanov. Minimization problems for average distance functionals. *Calculus of Variations: Topics from the Mathematical Heritage of Ennio De Giorgi, D. Pallara (ed.)*, *Quaderni di Matematica, Seconda Università di Napoli, Caserta*, 14:47–83, 2004.
 - [7] S. Graf and H. Luschgy. *Foundations of quantization for probability distributions*, volume 1730 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
 - [8] A. Lemenant. A presentation of the average distance minimizing problem. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 390(Teoriya Predstavlenii, Dinamicheskie Sistemy, Kombinatornye Metody. XX):117–146, 308, 2011.
 - [9] X. Y. Lu and D. Slepcev. Properties of minimizers of average-distance problem via discrete approximation of measures. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 45(5):820 – 836, 2013.
 - [10] M. Miranda, Jr., E. Paolini, and E. Stepanov. On one-dimensional continua uniformly approximating planar sets. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 27(3):287–309, 2006.
 - [11] E. Paolini and E. Stepanov. Qualitative properties of maximum distance minimizers and average distance minimizers in \mathbb{R}^n . *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 122(3):3290–3309, 2004. Problems in mathematical analysis.
 - [12] A. Suzuki and Z. Drezner. The p -center location problem in an area. *Location science*, 4(1):69 – 82, 1996.
 - [13] A. Suzuki and A. Okabe. Using Voronoi diagrams. *Drezner, Z. (ed.): Facility location: A survey of applications and methods*, *Springer series in operations research*, pages 103 – 118, 1995.
- E-mail address*, Yana Teplitskaya: janejashka@gmail.com

FACULTY OF MATHEMATICS AND MECHANICS, ST.PETERSBURG STATE UNIVERSITY, 7/9 UNIVERSITetskAYA NAB., ST. PETERSBURG, 199034 RUSSIA