Моделирование и решение задачи трех материальных тел в условиях земного притяжения

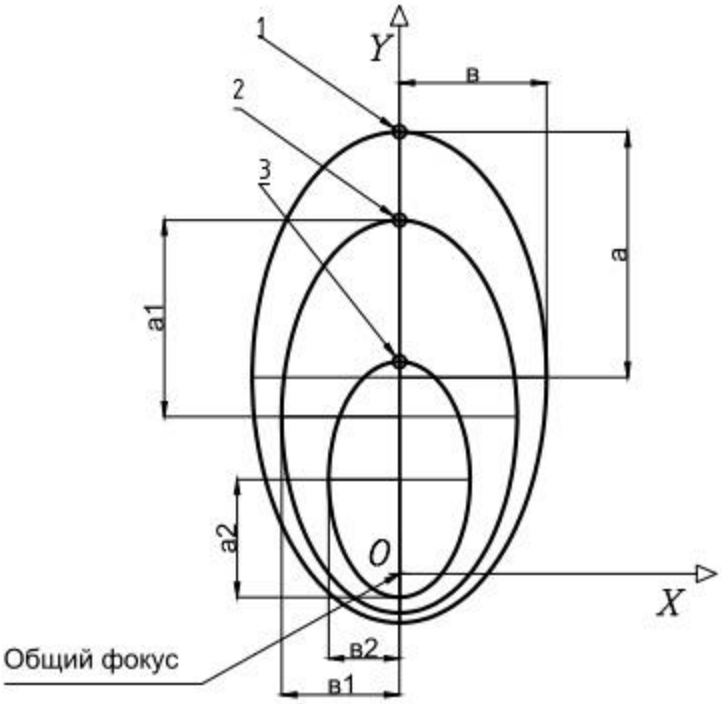

Рис. 1

Зададимся тремя эллипсами, расположим их так, чтобы большие полуоси были (a, a1, ,a2) были расположены вертикально, а нижний фокус каждого эллипса был общим. (Рис.1). Полуоси a > a1 > a2. В точке O , точка общего фокуса, разместим оси координат OX и OY. На верхних концах полуосей находятся материальные точки с массами m, m_1, m_2

Отпустим все три тела 1, 2, 3 одновременно, и будем определять их координаты по осям OY и OX. При падении происходип равноускоренное движение, то есть при падении координата OY будет меняться по следующей формуле:

$y = y_\circ + v_\circ t + \frac{1}{2} g t^2$ ***;(1)***

где: $y_\circ$ ***- начальная координата равная верхней точке большой оси эллипса ;***

$v_\circ$ ***- начальная скорость, в данном случае равна нулю;***

g ***– ускорение свободного падения;***

t ***– время.***

Отсюда, относительно точки отсчета в центре эллипса, учитывая направление падения, получим:

$y = a - \frac{1}{2} g t^2$ ***;(2)***

Координаты y' ***относительно точки отсчета расположенном в точке общего фокуса будут определятся как :***

$y' = a - \frac{1}{2} g t^2 + \sqrt{a^2 - b^2}$ ***; (3)***

где $\sqrt{a^2 - b^2} = c$ ***есть фокусное расстояние эллипса***

Тогда формула (3) примет вид:

$y' = a - \frac{1}{2} g t^2 + c$***; (4)***

Каноническое уравнение эллипса имеет формулу:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (5); так как большая полуось направлена по оси OY, то в нашем случае формула примет вид:

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$; (6)

Из уравнения (5) получим, что:

$x = b\sqrt{1 - \frac{(a - \frac{1}{2}gt^2)^2}{a^2}}$; (7)

Так как в нашем случае оси OY эллипсов не смещены по оси OX, то координаты $x = x'$.

Получаем, что относительно центра координат в общем фокусе имеет место быть следующие соотношения для эллипсов

$$x = b\sqrt{1 - \frac{(a - \frac{1}{2}gt^2)^2}{a^2}}$$

$$y' = a - \frac{1}{2}gt^2 + c$$

Соответственно координаты эллипсов будут для двух других эллипсов

Для второго эллипса:

$$x_1 = b_1\sqrt{1 - \frac{(a_1 - \frac{1}{2}gt^2)^2}{{a_1}^2}}$$

$$y_1' = a_1 - \frac{1}{2}gt^2 + c_1$$

Для третьего эллипса:

$$x_2 = b_2\sqrt{1 - \frac{(a_2 - \frac{1}{2}gt^2)^2}{{a_2}^2}}$$

$$y_2' = a_2 - \frac{1}{2}gt^2 + c_2$$

Между этими телами будет происходить взаимодействие по закону всемирного тяготения с силой

$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{R^2}$; (8)

где: γ – гравитационная постоянная;

m_1 m_2 - массы взаимодействующих тел;

R – расстояние между телами.

Зная координаты тел, можно определить расстояние между ними по формуле:

$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2' - y_1')^2}$; (8)

Подставим вместо координат их значения:

Расстояние между телами массой m_1 и m_2 вычисляется как:

$$R_{12} = \sqrt{\left(b_2\sqrt{1-\frac{(a_2-\frac{1}{2}gt^2)^2}{{a_2}^2}}-b_1\sqrt{1-\frac{(a_1-\frac{1}{2}gt^2)^2}{{a_1}^2}}\right)^2+\left(\left(a_2-\frac{1}{2}gt^2+c_2\right)-\left(a_1-\frac{1}{2}gt^2+c_1\right)\right)^2}$$

$$== \sqrt{\left(b_2\sqrt{1-\frac{(a_2-\frac{1}{2}gt^2)^2}{{a_2}^2}}-b_1\sqrt{1-\frac{(a_1-\frac{1}{2}gt^2)^2}{{a_1}^2}}\right)^2+\left((a_2+c_2)-(a_1+c_1)\right)^2} \text{ ; (9)}$$

Тела m_1 и m_2 имеют общий центр масс, который находится между ними на прямой линии, и определяется правилом рычага:

$m_1d_1 = m_2d_2$ ***; (10) где: d_1 и d_2 - расстояние до центра масс.***

Заменим тела m_1 и m_2 одним телом равным массой сумме ($m_1 + m_2$) этих тел расположенным в центре масс тел m_1 и m_2.

Тогда силу взаимного притяжения между этими телам и телом массой m определим как взаимодействие двух тел:

$$F = \gamma\frac{(m_1+m_2)m}{R''^2} \text{ ; (10)}$$

где: R''^2– расстояние от тела m до центра масс системы двух тел

Отношение длин расстояний λ от тел m_1 и m_2 до центра масс будет равно отношению их масс :

$$\lambda = \frac{m_1}{m_2} \text{; (11)}$$

Тогда координаты центра масс определим как:

$$x'' = \frac{\sqrt{1-\frac{\left(a_1-\frac{1}{2}gt^2\right)^2}{{a_1}^2}}+\frac{m_2b_2\sqrt{1-\frac{(a_2-\frac{1}{2}gt^2)^2}{{a_2}^2}}}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}} \text{ ;(12)}$$

$$y'' = \frac{a_1-\frac{1}{2}gt^2+c_1+\frac{m_1(a_2-\frac{1}{2}gt^2+c_2)}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}} \text{; (13)}$$

Теперь согласно формуле (8) определим расстояние от центра масс тел m_1 и m_2 до тела массой m

$R'' = \sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2}$ ***, подставим значения координат, и получим***

$$R'' = \sqrt{\left(b\sqrt{1-\frac{\left(a-\frac{1}{2}gt^2\right)^2}{a^2}} - \frac{b_1\sqrt{1-\frac{\left(a_1-\frac{1}{2}gt^2\right)^2}{a_1{}^2}} + \frac{m_1 b_2\sqrt{1-\frac{\left(a_2-\frac{1}{2}gt^2\right)^2}{a_2{}^2}}}{m^2}}{1+\frac{m_1}{m_2}}\right)^2 + \left(\left(a-\frac{1}{2}gt^2+c\right) - \frac{a_1-\frac{1}{2}gt^2+c_1+\frac{m_1\left(a_2-\frac{1}{2}gt^2+c_2\right)}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}}\right)^2} \; ; (14)$$

Подставим значение расстояния между центром масс двух тел m_1 и m_2 и телом m в формулу (10), вычислим силу взаимодействия в любой момент времени:

$$F = \gamma \frac{(m_1+m_2)m}{\left(b\sqrt{1-\frac{\left(a-\frac{1}{2}gt^2\right)^2}{a^2}} - \frac{b_1\sqrt{1-\frac{\left(a_1-\frac{1}{2}gt^2\right)^2}{a_1{}^2}} + \frac{m_1 b_2\sqrt{1-\frac{\left(a_2-\frac{1}{2}gt^2\right)^2}{a_2{}^2}}}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}}\right)^2 + \left(\left(a-\frac{1}{2}gt^2+c\right) - \frac{a_1-\frac{1}{2}gt^2+c_1+\frac{m_1\left(a_2-\frac{1}{2}gt^2+c_2\right)}{m_2}}{1+\frac{m_1}{m_2}}\right)^2} \; ; (15)$$

Таким образом, в любой момент времени t можем определить силу взаимодействия трех тел между собой.

Бармаков Руслан Юсупович

23 сентября 2017 г.

Г. Пенза