ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Кафедра теоретической и математической физики

ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ МАГНЕТИКА С ПАРНЫМ ОБМЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Диссертация на соискание академической степени магистра

Направление подготовки **01.04.02 Физика**,
программа **«Теоретическая и математическая физика»**

Клюев Александр Сергеевич

Научный руководитель
Д.физ.-мат.н., проф. Вирченко Ю.П.

Рецензент
Д.физ.-мат.н., проф. Красильников В.В.

Белгород 2016

Содержание

1 Список обозначений

В работе мы придерживаемся следующих правил при употреблении шрифтов для обозначения математических объектов и операций над ними.

• Для обозначения математических операторов (функционалов), для которых в математике имеются устоявшиеся аббревиатуры на основе букв латинского алфавита, мы употребляем шрифт «roman» – A, B, C, ...; a, b, c, ... Например, Re и Im – реальная и мнимая части комплексного числа. Если таковых устоявшихся аббревиатур не имеется, то мы используем для обозначения математических объектов различные шрифты, в зависимости от природы объекта, перечисленные ниже.

• Для обозначения стандартных математических структур используется ажурный шрифт – $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, ...$, например, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

• Операторы, отображения, функционалы обозначаются прописными буквами шрифта «sanserif» – $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, ...$

• Для обозначения числовых величин (параметров, функций и их аргументов) используются буквы латинского в шрифте «italic» – $a, b, c, ...$ и греческого алфавитов. При этом латинские буквы i, j, k, l – обозначают целые числа.

• Для обозначения векторов жирные буквы латинского алфавита. Их компоненты нумеруются индексами i, j, k, l, m. При этом принимается тензорное соглашение о суммировании по повторяющимся парным индексам.

• Для обозначения множеств различных математических объектов используется шрифт «calligraphic» – $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, , ...$

2 Предметный указатель

Λ – обозначение множества узлов бесконечной кристаллической решетки

d – размерность пространства погружения кристалла

$\mathbf{a}_i$, $i = 1 \div d$ – набор периодов бесконечного кристалла

$\mathbf{x}$ – радиус-вектор узла кристалла

$\mathbf{e}_i$, $i = 1 \div d$ – взаимно ортогональные единичные векторы

Λ_N – обозначение множества узлов конечного кристалла

L – размер кристалла Λ_N

N – число узлов конечного кристалла

$\mathbf{s}_i(\mathbf{x})$: $\mathbf{x} \in \Lambda$ – векторное (псевдовекторное) поле на узлах кристаллической решетки

$\mathcal{M}_d$ – класс всех векторных (псевдовекторных) полей на кристаллической решетке Λ

$\mathsf{H}_N[\mathbf{s}]$ – энергия векторного (псевдовекторных) поля на конечном кристалле

$I^{(n)}_{i_1,...,i_n}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ – обменные интегралы

δ_{ij} – символ Кронекера

$\mathbf{k}$ – волновой вектор

$\mathcal{K}$ – множество пар, взаимно-противоположных по знаку волновых векторов

P – оператор перестановки

$\mathcal{P}_n$ – группа перестановок порядка n

$\mathsf{H}[\cdot;\Lambda_N]$ – гамильтониан кристалла Λ_N с периодическими условиями

$\mathbf{s}^{(N)}$ – поле, реализующее минимум гамильтониана $\mathsf{H}[\cdot;\Lambda_N]$

$I(\mathbf{x})$ – парный сферически симметричный, трансляционно инвариантный обменный интеграл

$\bar{I}_N(\mathbf{k})$ – фурье-образ обменного интеграла $I(\mathbf{x})$

$\mathbf{k}_*$ – волновой вектор, реализующий минимум $\bar{I}_N(\mathbf{k})$

3 Введение

При теоретическом исследовании твердотельных структур статистическими методами, вероятностные модели, основанные на распределениях Гиббса, которые порождаются гамильтонианами, заданными на фазовых пространствах, где на пространственные положения частиц системы не накладывается никаких ограничений, становятся, как правило, неадекватными. Это связано с тем, что реальные физические твердотельные состояния, создаваемые природными или технологическими процессами, являются, с теоретической точки зрения, с одной стороны, метастабильными, а, с другой стороны, их времена жизни настолько велики, что это положение создает условия для выработки специального подхода к их теоретическому изучению. А именно, в указанных условиях, при построении статистической механики для исследования таких метастабильных состояний, можно дополнительные вводить математические ограничения, которые модельным образом фиксируют ту долгоживущую твердотельную структуру, на фоне которой разворачиваются изучаемые физические процессы. В частности, допустимо предположить, что в области очень низких температур физически реализуются такие состояния, которые представляют собой монокристаллические образцы среды. Тогда фазовое пространство такой системы большого числа N частиц, которая моделирует монокристаллическую твердотельную структуру, должно строиться, исходя из фиксации их пространственно периодического расположения. На этом пути возникают решеточные модели статистической механики, которые являются самостоятельным объектом изучения статистической математической физики[1]. Такие решеточные модели, в свою очередь, подразделяются на классические и квантовые, в зависимости от того, для описания какой физической ситуации предназначаются. В обоих случаях, решеточные системы допускают очень простое, с математической точки зрения, изучение в области высоких температур на основе сходящихся высокотемпературных разложений. Однако, по самому своему смыслу, решеточные модели предназначены не для изучения поведения соответствующих им физических систем в области высоких температур, а, наоборот, подразумевается их использование для описания таких физических состояний, которые характеризуются, в общем случае, значениями соответствующих физических параметров, при которых высокотемпературные разложения расходятся. В частности, не поддается исследованию на основе таких разложений, едва ли не самая важная для систем многих частиц, задача об описании происходящих в них фазовых переходах, которые претерпевает каждая из систем в температурной области, промежуточной между низкими и высокими температурами. Как изучение фазовых переходов, так и изучение поведения систем многих частиц в собственно низкотемпературной области связано с информацией о том состоянии, которое, теоретически, должно реализоваться при нулевой температуре в изучаемой системе большого числа частиц, то есть о состоянии с наименьшей энергией. Поэтому задача описания класса основных состояний для каждой фиксированной решеточной модели является первоочередной. Вместе с тем, уже для самых простейших решеточных моделей задача описания класса основных состояний, как статистической математической физики, оказывается довольно нетривиальной. В настоящей работе мы исследуем класс основных состояний сферически симметричной векторной модели, которая относится к классу классических решеточных систем статистической механики. Она представляет собой предельный случай известной квантовой модели Гайзенберга [3] при специальном предельном переходе неограниченного возрастания значения спина частицы в каждом из узлов кристаллической решетки. Так как модель Гайзенберга, как считается в физике твердого тела, описывает обширные классы магнитоупорядоченных твердотельных сред, то векторная модель, соответственно, с физической точки зрения, должна приближенно описывать эти магнитоупорядоченные среды в том случае, когда частицы в узлах кристаллической решетки с собственным магнитным моментов обладают большим значением спина. В работе будет описан класс основных состояний для гамильтонианов, содержащих только парное взаимодействие магнитных моментов. Обменная амплитуда, описывающая обменное взаимодействие указанных магнитных моментов, предполагается суммируемой. При этом мы исследуем только основные состояния для того случая, когда фурье-образ обменной амплитуды может иметь абсолютный минимум только в одной паре векторов $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ обратной решетки. Такое положение исключает наличие так называемых фрустраций у векторного поля, которое реализует минимум энергии. В построениях работы мы, в значительной степени, следуем терминологии монографии [1].

Далее мы рассмотрим случай, когда обменный интеграл, описывающий взаимодействие пар магнитных моментов в узлах решетки, обладает фурье-образом, минимум которого реализуется на таком множестве $\mathcal{K}$ пар, взаимно-противоположных по знаку волновых векторов, которое содержит более одной пары. При этом парный обменный интеграл предполагается суммируемым на решетке. Мы покажем, что класс распределений векторных полей на решетке, минимизирующих энергию, является, по сути, тем же самым, что и в случае, когда указанное множество состоит из одной пары, а именно эти векторные поля представляют спиралеобразные структуры.

В статистической механике решеточных систем часто применяется аппроксимация изучаемой системы, при которой ее гамильтониан H заменяется на гамильтониан $\tilde{\mathsf{H}}$ соответствующей ей системы с периодическими граничными условиями (см. [2]). Такая аппроксимация упрощает всевозможные конструкции в рамках статистической механики и доказательства утверждений о свойствах различных решеточных систем. Часто, она позволяет проводить вычисления некоторых характеристик до конечных аналитических формул в том случае, когда это вообще возможно. При этом существенно, что понятие аппроксимирующей системы с периодическими граничными условиями вводится в том случае, когда взаимодействие обладает конечным радиусом. Этого оказывается достаточно при вычислении статистических характеристик на основе соответствующего распределения Гиббса при конечных температурах, если гамильтониан системы принадлежит банахову пространству $\mathcal{B}$ суммируемых гамильтонианов [2]. Однако, в том случае, когда приходится давать оценки энергии конкретного состояния, в частности, в задаче о вычислении основного состояния конечной системы, совсем не очевидно, что аппроксимация исходного гамильтониана $\mathsf{H} \in \mathcal{B}$ системы, который физически не обладает конечным радиусом действия, некоторым гамильтонианом конечного радиуса действия, должна приводить к близости соответствующих состояний. В настоящем сообщении мы вводим понятие аппроксимирующей системы с периодическими граничными условиями в том случае, когда она не обладает конечным радиусом действия, и для этой системы даем оценку близости ее энергии к энергии аппроксимируемой системы в том же фазовом состоянии. Для простоты изложения мы ограничиваемся только классическими (не квантовыми) решеточными системами статистической механики и, более того, ограничиваемся только системами с парным взаимодействием, типичным представителем которых является так называемая векторная модель в физике магнетизма. Распространение предлагаемых в сообщении построений на самый широкий круг решеточных систем с гамильтонианами из $\mathcal{B}$ не представляет затруднений.

4 Векторная решеточная модель

Будем рассматривать математические модели бесконечных идеальных (без искажений) кристаллических решеток. Они представляют собой счетные дискретные периодические множества Λ в $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$. Это означает, что задан упорядоченный набор $\langle \mathbf{a}_i; i = 1 \div d\rangle$ векторов из $\mathbb{R}^d$ (при $d = 2$ должно иметь место $\mathbf{a}_1 \not\parallel \mathbf{a}_2$; при $d = 3$ — $([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \mathbf{a}_3) \neq 0$) такой, что множество Λ обладает свойством $\Lambda + \sum\limits_{i=1}^{d} n_i \mathbf{a}_i = \Lambda$ и в каждом компакте в $\mathbb{R}^d$ находится не более чем конечное множество его точек. Такие множества в дальнейшем мы называем решетками. Точки решетки мы будем, следуя традициям кристаллографии, называть *узлами*.

Выбор векторов $\mathbf{a}_i, i = 1 \div d$ – векторов базиса периодов каждой решетки неоднозначен. Среди всех возможных способов выбора имеются такие, для которых число точек множества Λ в каждом параллелепипеде

$$P_{n_1,\dots,n_d} = \left\{ \mathbf{x} = \langle x_j; j = 1 \div d\rangle \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} x_j \mathbf{a}_j, n_i \leq x_i < (n_i + 1) \right\},$$

$$n_i \in \mathbb{Z}, i = 1 \div d$$

минимально. Тогда такой параллелепипед называется *элементарной кристаллической ячейкой.* Если при этом элементарная кристаллическая ячейка содержит ровно один узел из Λ, то она называется *простой.*

В этом случае множество $\Lambda = \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{Z}^d = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{e}_i \,,\ n_i \in \mathbb{Z}\,, i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Здесь полагается, что начало отсчета $\mathbf{0}$ совмещено либо с одним из узлов Λ, либо с центром ячейки.

Обозначим посредством Λ_N конечное подмножество из Λ, определяемое как

$$\Lambda_N = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{e}_i \ : n_i = -L/2 + k, k = 0 \div L, i = 1 \div d \right\},$$

где $N = (L+1)^d$ и $L \in \mathbb{N}$. Это множество служит моделью конечного образца кристалла с простой элементарной кристаллической ячейкой, где число L – является его размером. Если L нечетно, то начало координат помещается в центр тяжести элементарной ячейки, если же L четно, то – в узел решетки.

Обозначим посредством Λ_N конечное подмножество из Λ, определяемое как

$$\Lambda_N = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i \mathbf{a}_i \ : n_i = -L/2 + k, k = 0 \div L, i = 1 \div d \right\},$$

где $N = (L+1)^d$ и $L \in \mathbb{N}$. Это множество служит моделью конечного образца кристалла, где число L – является его размером. Если L нечетно, то начало координат помещается в указанный выше центр тяжести, если же L четно, то – в узел решетки.

Обозначим, далее, посредством $\mathcal{M}_d$ класс всех векторных (псевдовекторных) полей $\langle \mathbf{s}_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, 3 : s_j(\mathbf{x}) s_j(\mathbf{x}) = s^2 \rangle$. По повторяющемуся векторному индексу j здесь и далее предполагается суммирование от 1 до 3. Таким образом, независимо от размерности d решетки, поле всегда полагается трехмерным. Поэтому, далее, во всех выражениях, в которых векторный индекс не повторяется, полагается, что он принимает значения от 1 до 3, а если векторный индекс у поля не указывается, то оно выделяется жирным шрифтом как и узлы решетки.

При каждом фиксированном L сопоставим каждому полю $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \rangle$ значение функционала

$$\mathsf{H}_N[\mathbf{s}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle \in \Lambda_N^n} I^{(n)}_{i_1, \ldots, i_n}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) s_{i_1}(\mathbf{x}_1) \ldots s_{i_n}(\mathbf{x}_n), \qquad (1)$$

которое будем называть энергией поля $\mathbf{s}$ в кристалле Λ_N. Сам же функционал $\mathsf{H}_N[\cdot]$ называется гамильтонианом векторной модели. Согласно своему определению, функции $I^{(n)}_{i_1, \ldots, i_n}(\cdot)$ при $n \geq 2$ – коэффициенты разложения функционала H_N должны быть симметричными по всем своим пространственным аргументам в том смысле, что для любой перестановки P из группы $\mathcal{P}_n$ имеет место равенство $I^{(n)}_{\mathsf{P}i_1,...,\mathsf{P}i_n}(\mathsf{P}\mathbf{x}_1,...,\mathsf{P}\mathbf{x}_n) = I^{(n)}_{i_1,...,i_n}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)$. Эти функции, следуя традиции физики магнетизма, мы будем называть *обменными интегралами*. Существенно, что они не зависят от размера кристалла L (то есть от N) и трансляционно инвариантны, то есть для каждой такой функции и для любого вектора $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} n_i\mathbf{a}_i \in \Lambda$ имеет место

$$I^{(n)}_{i_1,...,i_n}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x},...,\mathbf{x}_n+\mathbf{x}) = I^{(n)}_{i_1,...,i_n}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)\,. \tag{2}$$

Значения этих функций в каждой точке $\langle\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n\rangle \in \Lambda^n$ представляют собой тензоры ранга n в пространстве $\mathbb{R}^3$ относительно группы вращений, если n четно. Если же n нечетно, то их значения представляются тензорами ранга n, если поле $\mathbf{s}$ векторное, и — псевдотензоры такого же ранга, если поле $\mathbf{s}$ псевдовекторное.

Обычно, в статистической механике (см. [1]) предполагается, что ряд, определяющий значение энергии суммируем в следующем смысле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\sum_{\langle\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1}\rangle\in\Lambda^{n-1}}\max_{i_1,...,i_n}|I^{(n)}_{i_1,...,i_n}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)| < \infty\,,$$

хотя, конечно же, имеются физические ситуации, для моделирования которых приходится отказываться от этого условия.

Переопределим обменные интегралы, произведя замену $s^nI^{(n)}$ на $I^{(n)}$. Поэтому, далее, не ограничивая общности, будем считать, что $s_i(\mathbf{x})s_i(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x}\in\Lambda$. В этом случае $\mathcal{M} = S_2^{\Lambda}$, где S_2 – двумерная единичная сфера. Итак, векторные решеточные модели определяются тройкой

$$\Big\langle \Lambda, \mathcal{M}, \langle \mathsf{H}_N[\cdot]; N = (L+1)^d, L\in\mathbb{N}\rangle \Big\rangle\,.$$

Существенно, что система определяется не одним гамильтонианом $\mathsf{H}_N[\cdot]$, а их бесконечной последовательностью, каждый член которой строится по единому механизму.

При решении многих задач статистической механики, связанных с решеточными моделями, имеющими простые элементарные ячейки, удобно сводить их к соответствующим задачам: при $d = 3$ на простой кубической решетке и при $d = 2$ на квадратной решетке. В нашем случае это достигается следующим образом. Сопоставим каждому вектору узла $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} n_j \mathbf{a}_j$, $\langle n_i; i = 1 \div d \rangle \in \mathbb{Z}^d$ решетки Λ вектор $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{d} n_j \mathbf{e}_j \equiv U\mathbf{x}$, где набор векторов $\mathbf{e}_j = \langle \delta_{jk}; k = 1 \div d \rangle$, $j = 1 \div d$ ортонормирован. При этом матрица U имеет обратную. Множество всех построенных векторов $\mathbf{z}$ образует простую кубическую решетку. Векторная модель статистической механики на этой решетке, эквивалентная исходной модели, определяется на основе обменных интегралов $I^{(n)\prime}$, которые даются равенством ${I^{(n)\prime}}_{i_1,\dots,i_n}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n) = I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Исходя из этого, нам достаточно будет описать только все основные состояния векторной модели на простой кубической решетке. Любое основное состояние произвольной решетки с простой элементарной ячейкой может быть построено на их основе посредством преобразования U^{-1}.

В кристаллической решетке с простой элементарной ячейкой всегда есть точка инверсии – центр параллелограмма элементарной ячейки (если в этот центр поместить узел решетки, относящийся к этой ячейке). По этой причине, естественно, с физической точки зрения, рассматривать в рамках моделей (4), только такие обменные интегралы $I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, $n \geq 2$, которые обладают свойством

$$I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = I^{(n)}_{i_1,\dots,i_n}(-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_n)\,.$$

Кроме такой центральной симметрии, обменные интегралы должны обладать более широкой группой симметрии, которая изоморфна группе симметрий простой кубической решетки, изоморфной, в свою очередь, с точки зрения задачи вычисления основного состояния любой решетке с простой элементарной ячейкой.

Рассмотрим теперь модель бесконечной идеальной кристаллической решетки в виде дискретного периодического множества Λ в $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$. Для простоты, будем считать, что решетка обладает простой элементарной кристаллической ячейкой и, более того, представляет собой простую кубическую решетку, то есть ее постоянные векторы решетки $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ $(d = 3)$ взаимно ортогональны и имеют одинаковую длину, которую, опять же для простоты, будем считать единичной и физически безразмерной.

Обозначим, далее, посредством $\mathcal{M}_d$ класс всех векторных (псевдовекторных) полей $\langle \mathbf{s}_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, i = 1,2,3;\ s_j(\mathbf{x})s_j(\mathbf{x}) = s^2 \rangle$. В трехмерном случае по повторяющемуся векторному индексу j здесь и далее предполагается суммирование от 1 до 3. Таким образом, независимо от размерности d решетки, поле всегда полагается трехмерным. Поэтому, далее, во всех выражениях, в которых векторный индекс не повторяется, полагается, что он принимает значения от 1 до 3, а если векторный индекс у поля не указывается, то оно выделяется жирным шрифтом как и узлы решетки. [1)]

Пусть каждому распределению поля $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N \rangle$ сопоставлено значение гамильтониана

$$\mathsf{H}_N[\mathbf{s}] = \frac{1}{2} \sum_{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \in \Lambda_N^2} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) s_i(\mathbf{x}_1) s_i(\mathbf{x}_2)$$

— энергии поля $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ в кристалле Λ_N. Решеточная система статистической механики с гамильтонианом называется сферически симметричной векторной моделью в отсутствии внешнего магнитного поля. Здесь функция $I(\mathbf{x})$, заданная на решетке Λ, предполагается обладающей свойствами симметрии $I(\mathbf{x}) = I(-\mathbf{x})$ и достаточно быстрой сходимости к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$ такой, что

$$\sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} |I(\mathbf{x})| < \infty\,.$$

В статистической механике часто используется конструкционный прием, который называется введением периодических граничных условий [2]. Этим термином обозначается сопоставление системе с гамильтонианом H_N системы с гамильтонианом, обозначаемым нами далее $\mathsf{H}[\cdot; \Lambda_N]$, который определяется на классе периодических по $\operatorname{mod} \Lambda_N$ полей $\mathbf{s}$ на Λ.

Будем, далее, рассматривать системы статистической механики с пространством состояний $\mathfrak{S} = \bigotimes_{\mathbf{x} \in \Lambda} \{\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = s^2\}$; $d, n \in \mathbb{N}$, где $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ – множество являющееся геометрической моделью конечного кристалла, $|\Lambda| = N < \infty$. Это множество мы, опять же для простоты рассмотрений, положим в виде $\Lambda = \{0, 1, ..., L\}^d$, $L \in \mathbb{N}$ – размер кристалла. Распространение дающихся ниже построений на случай множеств Λ, на основе

[1] На самом деле, из полученного основного результата работы вытекает, что он остается верным и в том случае, когда размерность вектора s_i равна двум. Одномерный же случай, соответствующий так называемой модели Изинга, является вырожденным и на него результат настоящей работы не распространяется.

которых возможно осуществлять переход к термодинамическому пределу по Ван Хову (см. [2]), не должен вызвать затруднений.

Положим, что гамильтониан системы для каждого векторного поля $\mathbf{s}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ имеет вид

$$\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Lambda} I(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Big(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{y}) \Big) , \tag{1}$$

что соответствует при $n = 1, 2, 3$ моделям статистической механики, которые описывают системы взаимодействующих ионов, обладающих магнитным моментом $\mathbf{s}$, со сферически симметричным обменным взаимодействием между ними, которое определяется обменным интегралом $I(\cdot)$. В формуле функция $I(\cdot) : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{R}$ обладает свойством $I(-\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$ и является суммируемой $\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} |I(\mathbf{x})| < \infty$. Последнее является необходимым и достаточным условием принадлежности гамильтониана $\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$ к пространству $\mathcal{B}$.

Сделаем небольшое отступление в область физики магнетизма. Обычно, в микроскопической теории магнетизма имеют дело с обменным взаимодействием, у которого $I(\cdot)$ очень быстро убывающая функция с ростом величины $|\mathbf{x}|$ (см., например, [2]). Для магнитного взаимодействия с таким обменом аппроксимация его финитной функцией, которая равна нулю при $|\mathbf{x}| > R$, $R < \infty$ оказывается очень точной по сути, и при конкретных вычислениях удается часто давать гарантированные оценки их точности в результате такой аппроксимации. В то же время, в теории магнетизма имеются и исключительные случаи, когда обменное взаимодействие является дальнодействующим (т.н. косвенный обмен). В частности, примером такого положения является т.н. РККИ-обменное взаимодействие, которое описывает косвенное обменное взаимодействие между магнитными ионами, осуществляемое через коллективизированные электроны проводимости (см., например, [3, 4]). Оно проявляется в металлах и полупроводниках, где коллективизированные электроны выступают посредниками обменного взаимодействия ионов, обладающих локализованными противоположно направленными спинами, частично заполненных d- и f-оболочек. В этом случае

$$I(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{r^4}(r \cos r - \sin r)$$

при $r = 2k_F|\mathbf{x}| \to \infty$.

В случае дальнодействующего обмена аппроксимация гамильтониана H вида (1) посредством замены функции I на финитную функцию может стать неадекватной. В частности, такое положение приводит к значительным затруднениям при исследовании основного состояния системы (см., например, [5]). Это, в частности, проявляется в невозможности использования аппроксимации гамильтониана системы соответствующим гамильтонианом с периодическими условиями, которая обычно используется только для систем с конечным радиусом действия (см. [2]). Дадим теперь определение аппроксимации с периодическими граничными условиями для системы с гамильтонианом вида (1) в общем случае.

Зафиксируем множество Λ и на его основе определим для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ действие оператора P_Λ проектирования. Точка $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ однозначно представима в виде $\mathbf{x} = (L+1)(n_1\mathbf{e}_1 + ...n_d\mathbf{e}_d) + \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \Lambda$, $\mathbf{e}_j$ – орты в $\mathbb{R}^d$, $(\mathbf{e}_j)_i = \delta_{ij}$. Тогда положим $\mathsf{P}_\Lambda \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

5 Задача об определении основного состояния

В рамках моделей вида $\left\langle \Lambda, \mathcal{M}, \langle \mathsf{H}_N[\cdot]; N = (L+1)^d, L \in \mathbb{N}\rangle \right\rangle$., как уже было сказано во введении, с точки зрения статистической механики, представляет особенный интерес решение задачи об описании таких полей $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda\rangle$, которые реализуют минимум для последовательности функционалов H_N. Эта задача понимается в следующем смысле. Для каждого Λ_N ищется класс $\mathcal{B}_N$ полей $\langle s_i^{(N)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N\rangle$, $\left(\mathbf{s}^{(N)}(\mathbf{x})\right)^2 = 1$, которые реализуют минимум функционала $\mathsf{H}_N[\cdot]$, $E_N^{(m)} = \min\{\mathsf{H}_N[\mathbf{s}^{(N)}]; \mathbf{x} \in \Lambda_N\}$. После этого ищется класс $\mathcal{B}$ полей $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda\rangle$, которые являются предельными точками всевозможных последовательностей $\langle\langle s_i^{(N)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N\rangle; N = (L+1)^d\rangle$ при переходе к пределу в том смысле, как это будет описано ниже. Такой предельный переход называется *термодинамическим.*[2)] Конструкция этого предельного перехода и причина, по которой вводится такая операция, связаны с тем, что для реальных физических кристаллов число L очень велико (уже для частиц с наноразмерами $L \propto 10^2, N \propto 10^6$).

Конструкция термодинамического предельного перехода состоит в следующем.

Пусть $D_N(\mathbf{x}) = \min\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|; \mathbf{y} \in \partial\Lambda_N\}$ для каждого узла $\mathbf{x} \in \Lambda_N$, где $\partial\Lambda_N = \{\mathbf{x} \in \Lambda_N : \exists(i \in \{1, ..., d\} : |x_i| = L/2)\}$ – граница множества Λ_N.

Определение. *Будем говорить, что поле $\langle \mathbf{s}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda\rangle$ является термодинамически предельным для последовательности полей $\langle \mathbf{s}^{(N)}; N = (L+1)^d\rangle$, если существует неотрицательная функция $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ такая, что $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и для любого ограничения $\mathbf{s}|_{\Lambda_N}$ выполняется оценка*

$$\left| s_i(\mathbf{x})|_{\Lambda_N} - s_i^{(N)}(\mathbf{x}) \right| < \varepsilon\left(D_N(\mathbf{x})\right) ,$$

Заметим, что таким образом определенный предельный переход не сводится к поточечному предельному переходу, а является, по сравнению с

[2] Здесь мы не рассматриваем термодинамический предельный переход, понимаемый в более общем смысле, например, по Ван Хову[1].

ним, более сильным пределом. Анализ существования этого предела является нетривиальной задачей при $d = 2, 3$ (см. [3]).

Заметим также, что в случае существования термодинамического предела, существует предельная плотность энергии $\lim\limits_{N\to\infty} \min \mathsf{H}_N/N$.

Вычисление поля $\mathbf{s}^{(N)}$, которое, согласно постановке задачи, реализует условный минимум гамильтониана H_N при выполнении совокупности условий $\left(\mathbf{s}^{(N)}\right)^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$, может быть основано на решении уравнения

$$0 = \frac{\delta}{\delta s_j(\mathbf{x})}\left[\mathsf{H}_N[s] - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} \lambda(\mathbf{x}) s_i^2(\mathbf{x})\right] = \frac{\delta \mathsf{H}_N}{\delta s_j(\mathbf{x})} - \lambda(\mathbf{x}) s_j^{(N)}(\mathbf{x})\,, \qquad (2)$$

которому оно удовлетворяет с соответствующей условиям совокупностью неопределенных множителей Лагранжа $\lambda(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda(N)$. В этом уравнении имеется трансляционно неинвариантное слагаемое, которое усложняет его решение. Заметим, что уравнение эквивалентно следующему

$$\epsilon_{ijk} s_j(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathsf{H}_N[\mathbf{s}]}{\delta s_k(\mathbf{x})} = 0\,, \qquad \mathbf{x} \in \Lambda_N\,, \qquad (3)$$

не содержащему неизвестных коэффициентов пропорциональности.

В рамках моделей с гамильтонианами вида $\mathsf{H}_N[\mathbf{s}] = \frac{1}{2}\sum_{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle \in \Lambda_N^2} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) s_i(\mathbf{x}_1) s_i(\mathbf{x}_2)$ и соответствующих каждому из них периодических аналогов $\mathsf{H}[\cdot; \Lambda_N]$ представляет особенный интерес решение задачи об описании таких полей $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda\rangle$, которые реализуют минимум для каждого члена последовательности функционалов $\langle \mathsf{H}_N; L \in \mathbb{N}\rangle$. Это означает, что для каждого Λ_N ищется класс $\mathcal{B}_N$ полей $\langle s_i^{(N)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N\rangle$, $(\mathbf{s}^{(N)}(\mathbf{x}))^2 = 1$, которые реализуют минимум функционала $\mathsf{H}_N[\cdot; \Lambda_N]$,

$$E_N = \min\{\mathsf{H}_N[\mathbf{s}^{(N)}]\,; \mathbf{x} \in \Lambda_N\}\,. \qquad (4)$$

После этого ищется класс $\mathcal{B}$ полей $\langle s_i(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda\rangle$, которые являются предельными точками последовательностей $\langle\langle s_i^{(N)}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda_N\rangle; N = (L+1)^d\rangle$ при переходе к пределу $L \to \infty$. Такой предельный переход называется *термодинамическим.* [3]

Вычисление поля $\mathbf{s}^{(N)}$, которое реализует условный минимум гамильтониана H_N при выполнении совокупности условий $(\mathbf{s}^{(N)}(\mathbf{x}))^2 = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$

[3]Подробнее об этом предельном переходе см. [1].

является, таким образом, задачей на условный экстремум. Однако, ее решение на основе стандартного метода неопределенных множителей Лагранжа крайне затруднительно. Поэтому в настоящей работе применяется иной метод решения этой задачи, который был использован в работе [1]. Этот метод в сильной степени приспособлен к специфике рассматриваемой задачи и, по-видимому, не допускает широкого обобщения.

При решении задачи об описании класса полей, минимизирующих последовательность функционалов $\langle \mathsf{H}_N; L \in \mathbb{N} \rangle$, нами применяется конечное преобразование Фурье для полей на Λ_N, подробно разобранное в работе [1]. Поэтому мы, при решении задачи, будем обращаться с формализмом конечного преобразования Фурье без детальных пояснений, отсылая читателя за подробностями к цитируемой работе.

6 Дискретное преобразование Фурье

Следующее простое утверждение является инструментом для описания всех состояний с минимальной энергией векторной модели.

Лемма 1. *Пусть* $x \in \mathbb{Z}$. *Тогда*

$$\frac{1}{L+1} \sum_{l=-L/2+k,\, k=0}^{L} \exp\left(\frac{2\pi i}{L+1}\, lx\right) = \delta_{x,0}\,.$$

□ Если $x = 0$, то суммируемое выражение равно 1 и, следовательно, сумма равна $(L+1)$. Пусть $x \neq 0$. Тогда

$$\sum_{l=-L/2+k,\, k=0}^{L} \exp\left(\frac{2\pi i}{L+1}\, lx\right) = \exp\left(-\frac{\pi i L}{L+1}\, x\right) \sum_{k=0}^{L} \exp\left(\frac{2\pi i}{L+1}\, kx\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi i L}{L+1}\, x\right) \frac{1 - \exp\left(\dfrac{2\pi i}{L+1}\,(L+1)x\right)}{1 - \exp\left(\dfrac{2\pi i}{L+1}\, x\right)} = 0\,. \quad \blacksquare$$

Следствие. *Пусть* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ *и* $N = (L+1)^d$. *Тогда*

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} \exp\left(i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\right) = \delta_{\mathbf{x},0}\,, \tag{5}$$

где $\bar{\Lambda}_N = \left\{ \dfrac{2\pi}{L+1} \sum_{j=1}^{d} n_j \mathbf{e}_j \;;\; n_j = -L/2 + k, k = \ 0 \div L \right\}$, $\mathbf{e}_j = \langle \delta_{jk}; k = 1 \div d \rangle$, $j = 1 \div d$.

□ Положим $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} x_j \mathbf{e}_j$, где $x_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1 \div d$ и компоненты каждого вектора $\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N$ определяются как $\mathbf{k} = \left\langle \dfrac{2\pi}{L+1} n_j \, ; \, j = 1 \div d \right\rangle$. Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} \exp\left(i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\right) = \left(\prod_{j=1}^{d} \sum_{n_j = -L/2+k, k=0}^{L} \right) \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{L+1} \exp\left(\frac{2\pi i}{L+1} \, x_j n_j \right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{L+1} \sum_{n_j = -L/2+k, \, k=0}^{L} \exp\left(\frac{2\pi i}{L+1} \, n_j x_j \right) = \prod_{j=1}^{d} \delta_{x_j, 0} = \delta_{\mathbf{x}, 0} \, ,$$

согласно утверждению леммы. ■

Теорема 1. *Пусть функция* $f : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{R}$ *периодическая по* $mod \, \Lambda_N$, *где* Λ_N *определяется набором* $\mathbf{e}_j, j = 1 \div d$. *Пусть, далее, ее конечное Фурье-преобразование дается формулой*

$$\bar{f}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda_N} f(\mathbf{x}) \exp\left(-i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\right) \, , \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \, . \tag{6}$$

Тогда имеет место формула для обратного преобразования

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} \exp\left(i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\right) \bar{f}(\mathbf{k}) \, , \qquad \mathbf{x} \in \Lambda \, .$$

При этом функция $\bar{f}(\mathbf{k})$ *обладает свойством* $\bar{f}^*(\mathbf{k}) = \bar{f}(-\mathbf{k})$.

□ Из вещественности функции f, беря комплексное сопряжение от обеих частей формулы (6), непосредственно, получаем, что $\bar{f}^*(\mathbf{k}) = \bar{f}(-\mathbf{k})$.

Подставим в правую часть формулы (7) выражение для $\bar{f}(\mathbf{k})$, даваемое (6), а затем, воспользуемся (5). В результате, получим

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} \exp\left(i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\right) \sum_{\mathbf{y} \in \Lambda_N} f(\mathbf{y}) \exp\left(-i(\mathbf{k}, \mathbf{y})\right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{y} \in \Lambda_N} f(\mathbf{y}) \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} \exp\left(i(\mathbf{k}, \mathbf{x} - \mathbf{y})\right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{y} \in \Lambda_N} f(\mathbf{y}) \delta_{\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0} = f(\mathbf{x}) \, . \quad ■$$

Лемма 2. *Пусть периодическая по* $\mathrm{mod}\,\Lambda_N$ *функция* $f : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{R}$ *является симметричной* $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$. *Тогда функция* $\bar{f}(\mathbf{k})$ *также является симметричной и вещественно-значной.*

$\square$ Так как множество Λ_N симметрично относительно отражений, то есть в выбранной его параметризации имеется равенство $-\Lambda_N = \Lambda_N$, то из (6) следует

$$\bar{f}(-\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} f(\mathbf{x}) \exp\left(i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} f(\mathbf{x}) \exp\left(-i(\mathbf{k},-\mathbf{x})\right) =$$

$$= \sum_{\mathbf{x}\in-\Lambda_N} f(-\mathbf{x}) \exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) = \bar{f}(\mathbf{k})\,,$$

где произведена замена переменной суммирования $\mathbf{x} \Rightarrow -\mathbf{x}$ и мы воспользовались свойством $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Вещественность функции $\bar{f}(\mathbf{k})$ следует из доказанного в Теореме 1 свойства $\bar{f}^*(\mathbf{k}) = \bar{f}(-\mathbf{k})$ и свойства $\bar{f}(\mathbf{k}) = \bar{f}(-\mathbf{k})$. $\blacksquare$

7 Описание классов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_N$ для $k_* = 0$

Мы ограничимся описанием всех возможных основных состояний только для векторной модели с парным взаимодействием в отсутствие внешнего поля. Это означает, что отличен от нуля только обменный интеграл $I^{(2)}_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$. Его трансляционная инвариантность (2) означает, что он зависит только от одной пространственной переменной – от разности $(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$, то есть $I^{(2)}_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\equiv I_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$. Ввиду симметрии этого интеграла по отношению к перестановкам узлов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, введенная таким образом тензор-функция $I_{i_1,i_2}(\mathbf{x})$ обладает свойством $I_{i_1,i_2}(\mathbf{x}) = I_{i_2,i_1}(-\mathbf{x})$. Более того, мы ограничимся изучением только сферически симметричной векторной модели, у которой обменный интеграл $I^{(2)}_{i_1,i_2}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ инвариантен относительно вращений, то есть $I_{i_1,i_2}(\mathbf{x})\equiv I(\mathbf{x})\delta_{i_1,i_2}$, где введенная функция $I(\mathbf{x})$, на основании свойства симметрии $I_{i_1,i_2}(\mathbf{x})$ относительно перестановок аргументов, должна быть симметричной $I(\mathbf{x}) = I(-\mathbf{x})$.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае гамильтониан H_N имеет вид

$$\mathsf{H}_N[\mathbf{s}] = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\Lambda_N} I(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)s_j(\mathbf{x}_1)s_j(\mathbf{x}_2)\,.$$

При этом свойство (3) суммируемости обменных интегралов, в рассматриваемом нами случае, сводится к следующему:

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda}|I(\mathbf{x})| < \infty\,.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $I(0) = 0$, так как, в противном случае, слагаемые $\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}} I(0)\mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}I(0)N$, пропорциональные $I(0)$, не зависят от вида поля $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и поэтому могут не учитываться при вычислении основного состояния.

Наконец, при решении задачи, мы будем учитывать, что свойство центральной симметрии функции $I(\mathbf{x})$, преобразования которой составляют двухэлементную группу, не является самой широкой группой ее симметрии. Наоборот, группа симметрии функции $I(\mathbf{x})$ содержит подгруппу симметрий простой кубической решетки.[4)] Поле $\mathbf{s}$ может считаться как векторным, так и псевдовекторным, у которого $s_i^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$.

Существенным ограничением является то, что в наших построениях гамильтониан H_Λ заменяется на его продолжение на класс периодических по $\operatorname{mod}\Lambda_N$ полей. В этом случае функция $I(\mathbf{x})$ определена во всех узлах решетки Λ и является периодической по $\operatorname{mod}\Lambda_N$.

Определим на основе конечного Фурье-преобразования функции

$$\bar{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} I(\mathbf{x}) \exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) , \tag{7}$$

$$\bar{s}_j(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \tag{8}$$

так, что имеют место, согласно Теореме 1, формулы обращения

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} , \tag{9}$$

$$s_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})} , \tag{10}$$

выполняющиеся во всех узлах $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$.

Из условия $I(-\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$ и определения (4) следует, что функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ вещественна и для нее имеет место равенство $\bar{I}(-\mathbf{k}) = \bar{I}(\mathbf{k})$. Кроме того, заметим, что, в силу абсолютной суммируемости $I(\mathbf{x})$ на Λ (см. (3)), в формуле (4) возможен термодинамический предельный переход $\Lambda_N \to \Lambda$ при $L \to \infty$,

$$\bar{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} I(\mathbf{x}) \exp\left(-i(\mathbf{k},\mathbf{x})\right) ,$$

а также, как следствие, — такой же предельный переход в формуле (6), который приводит к представлению

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}} \bar{I}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} d\mathbf{k} , \tag{12}$$

---

[4] Например, уже при $d = 2$ нужно учитывать отражательные симметрии по отношению к каждой из координатных осей $I(-x_1, x_2) = I(x_1, x_2)$ и $I(x_1, -x_2) = I(x_1, x_2)$.

где $\bar{\Lambda} = (-\pi, \pi]^d$. При этом функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ непрерывна внутри $\bar{\Lambda}$ и периодическая по $\mathrm{mod}\,\bar{\Lambda}$. Свойство абсолютной суммируемости обменного интеграла $I(\mathbf{x})$ гарантирует непрерывность $\bar{I}(\mathbf{k})$ на границе области $\bar{\Lambda}$.

Вещественная функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ определена для всех векторов $\mathbf{k}$, составляющих пространство $\mathbb{R}^3$, в котором она является периодической по $\mathrm{mod}\,\bar{\Lambda}$, $\bar{\Lambda} = [-\pi, \pi]^d$. В силу свойства $\bar{I}(-\mathbf{k}) = \bar{I}(\mathbf{k})$, если она имеет глобальный минимум в точке $\mathbf{k}_0 \in \bar{\Lambda}$, то она обязана иметь такой же минимум в точке $-\mathbf{k}_0$.

При решении задачи описания класса основных состояний векторной модели мы будем искать среди них только такие, фурье-образ которых сосредоточен только на одной из пар ненулевых точек $\mathbf{k}_*$ и $-\mathbf{k}_*$, в которых функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ достигает глобального минимума в $\bar{\Lambda}$ (либо, в вырожденном случае, когда пара вырождается в одну точку $\mathbf{0}$, где $\bar{I}(\mathbf{k})$ достигает глобального минимума).

Решение задачи состоит в следующем. Подстановка в периодический гамильтониан

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda,\ \mathbf{x}_2 \in \Lambda_N} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) s_j(\mathbf{x}_1) s_j(\mathbf{x}_2)$$

разложений (10) дает

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2N^2} \sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda, \mathbf{x}_2 \in \Lambda_N} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times$$
$$\times \sum_{\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2 \in \bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1) \bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \exp(i(\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_1) - i(\mathbf{k}_2, \mathbf{x}_2)) =$$
$$= \frac{1}{2N^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1) \bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \sum_{\substack{\mathbf{x}_1 \in \Lambda, \\ \mathbf{x}_2 \in \Lambda_N}} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \exp(i(\mathbf{k}_1, \mathbf{x}_1) - i(\mathbf{k}_2, \mathbf{x}_2)) =$$
$$= \frac{1}{2N^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1) \bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \sum_{\mathbf{x}_2 \in \Lambda_N} \exp(i(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)) \times$$
$$\times \sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \exp(i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{k}_1)) \,.$$

Последняя сумма здесь равна

$$\sum_{\mathbf{x}_1 \in \Lambda} I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \exp(i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{k}_1)) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda - \mathbf{x}_2} I(\mathbf{x}) \exp(i(\mathbf{k}_1, \mathbf{x})) =$$

$$= \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} I(\mathbf{x}) \exp(i(\mathbf{k}_1, \mathbf{x})) = \bar{I}(\mathbf{k}).$$

Сумма по $\mathbf{x}_2$, согласно следствию Леммы 1, равна $N\delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$. В результате, имеем

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k})|s_j(\mathbf{k})|^2 .$$

Пусть функция $\bar{I}_N(\mathbf{k})$ имеет глобальный минимум в какой-то паре точек $\{\mathbf{k}_*, -\mathbf{k}_*\} \subset \bar{\Lambda}_N$ (либо в точке $\mathbf{k}_* = 0$). Тогда при $L \to \infty$, когда $\Lambda_N \to \Lambda$, в силу непрерывности функции $\bar{I}(\mathbf{k})$, во всех точках из $\bar{\Lambda}_N$, соответствующих кристаллу Λ_N с размером L, имеет место предельное соотношение $\bar{I}_{m^d N}(\mathbf{k}) \to \bar{I}(\mathbf{k})$ при $m \to \infty$, когда размер L кристалла Λ_N увеличивается пропорционально $m \in \mathbb{N}$. Однако, при переходе к такому пределу глобальный минимум функции $\bar{I}(\mathbf{k})$ может появиться в точке $\mathbf{k}_*$, которая не содержится ни в одном из множеств $\bar{\Lambda}_N$. Не отвлекаясь на эти математические тонкости, будем решать задачу об описании класса основных состояний гамильтониана только для того случая, когда точки минимума функции $\bar{I}(\mathbf{k})$ не зависят от размера L кристалла, начиная с некоторого его значения.

Итак, необходимо минимизировать квадратичную форму

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}\in\bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k})|s_j(\mathbf{k})|^2$$

с учетом N условий $s_j^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda_N$. Всю совокупность этих условий запишем в следующей эквивалентной форме

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j^2(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{x},\mathbf{k})} = N\delta_{\mathbf{k},0} , \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N .$$

Подстановка в левую часть, фурье-представления (7) векторного поля $s_j(\mathbf{x})$ приводит эту систему условий, ограничивающих возможный выбор поля $s_j(\mathbf{x})$ при минимизации квадратичной формы (10), к квадратичной форме в терминах поля $\bar{s}_j(\mathbf{k})$,

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} s_j^2(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{x},\mathbf{k})} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\in\bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda_N} \exp(i(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}_1) \bar{s}_j^*(\mathbf{k}_2) \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}' \in \bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}') \bar{s}_j^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \,.$$

Таким образом, имеем

$$\delta_{\mathbf{k},0} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}' \in \bar{\Lambda}_N} \bar{s}_j(\mathbf{k}') \bar{s}_j^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \,, \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N \,. \tag{12}$$

При этом на поле $\bar{s}_j(\mathbf{k})$, ввиду его комплекснозначности, наложены дополнительные условия $\bar{s}_j^*(\mathbf{k}) = \bar{s}_j(-\mathbf{k})$.

Поиск минимума формы (10) при совокупности условий (12) производится следующим образом. Сначала, находятся поля $\bar{s}_j(\mathbf{k})$, реализующие минимум с учетом только одного условия из списка (12), а именно при $\bar{\mathbf{k}} = 0$,

$$\sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2 = N^2 \,.$$

При учете только условия с $\mathbf{k} = 0$ нужно минимизировать линейную форму

$$\mathsf{H}_N = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} \bar{I}(\mathbf{k}) \eta(\mathbf{k}) \,, \tag{13}$$

у которой неотрицательные переменные $\eta(\mathbf{k}) = |\bar{s}_j(\mathbf{k})|^2$ подчинены условию

$$\sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} \eta(\mathbf{k}) = N^2. \tag{14}$$

При этом переменные $\eta(\mathbf{k})$ не являются независимыми, а подчинены условиям

$$\eta(\mathbf{k}) = \eta(-\mathbf{k}) \,, \quad \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N \,, \tag{15}$$

где $\mathbf{k} \notin \partial(-\pi, \pi]^d$. Используя непрерывность функции $\bar{I}(\mathbf{k})$, можно считать, что в форме допускаются также все слагаемые с векторами $\mathbf{k} \in \partial(-\pi, \pi]^d$ и последнее ограничение можно опустить.

Минимизация линейной формы на выпуклом множестве $\mathcal{R} = \{\eta(\mathbf{k}) \geq 0 : \mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N, \sum_{\mathbf{k} \in \bar{\Lambda}_N} \eta(\mathbf{k}) = N^2\}$ сводится к выбору набора значений $\eta(\mathbf{k})$ на его границе. Среди всех граничных точек реализуют минимум только те, в которых достигается абсолютный минимум функции $\bar{I}(\mathbf{k})$. Ранее было указано, что эта функция обладает свойством инвариантности $\bar{I}(\mathbf{k}) = \bar{I}(-\mathbf{k})$, если $\mathbf{k}$ находится внутри $\bar{\Lambda}_N$. Если же $\mathbf{k}$ находится на границе куба $\bar{\Lambda}_N$ (но не в угловой точке), то рассмотрим два случая. Если вектор $\mathbf{k}$ лежит на внутренней части какой-либо стороны $\bar{\Lambda}_N$ (не на ребре), то выполняется $\bar{I}(\mathrm{pr}(\mathbf{k})) = \bar{I}(-\mathrm{pr}(\mathbf{k}))$, где pr обозначает проекцию $\bar{\Lambda}_N$ на: координатную плоскость, параллельную этой стороне. Это следует из формулы (8), в которую нужно подставить, например, $\mathbf{k} = \pi\mathbf{e}_1 + \mathrm{pr}(\mathbf{k})$. Если же вектор $\mathbf{k}$ лежит на внутренней части ребра куба $\bar{\Lambda}_N$, то в указанной формуле операция pr обозначает проекцию на координатную ось, параллельную этому ребру, что вытекает из аналогичной подстановки в формулу (8), например, $\mathbf{k} = \pi(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \mathrm{pr}(\mathbf{k})\mathbf{e}_3$. Отождествив противоположные стороны границы области $\bar{\Lambda}_N$, можно считать, что функция $\bar{I}(\mathbf{k})$ инвариантна относительно преобразования $\mathbf{k} \Rightarrow -\mathbf{k}$ на $\bar{\Lambda}_N$ с учетом такого отождествления, что будет далее везде подразумеваться. Возможность включения угловых точек куба в множество $\mathcal{K}$ мы не рассматриваем.

Обозначим посредством $\mathcal{K}$ подмножество в замыкании $\mathrm{cl}(\bar{\Lambda}_N)$, с учетом отождествления противоположных сторон, для тех векторов $\mathbf{k}$, в которых реализуется этот глобальный минимум. Это множество инвариантно относительно отражений $-\mathcal{K} = \mathcal{K}$, ввиду свойства (15), если под отражением понимать сделанное выше соглашение об отождествлении сторон $\bar{\Lambda}_N$, а также ввиду того, что для этих точек минимума имеет место $\bar{I}(\mathbf{k}) = \bar{I}(-\mathbf{k})$. Кроме того, нужно учесть инвариантность минимизируемой формы относительно замены $\mathbf{k} \Rightarrow -\mathbf{k}$. Тогда функции $\eta(\mathbf{k})$, для которых достигается минимум формы (13) могут быть не равны нулю только для $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$. Отсюда следует, что векторное поле $\bar{s}_j(\mathbf{k})$, в общем случае, может быть отлично нуля только при $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$.

Потребуем теперь выполнимости соотношений (12). После подстановки в эти соотношения, получим

$$\delta_{\mathbf{k},0} = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{K},\, \mathbf{k}-\mathbf{k}' \in \mathcal{K}} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}_j^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\,. \tag{16}$$

При анализе того, к каким ограничениям приводит совокупность этих соотношений, предположим, что множество $\mathcal{K}$ удовлетворяет следующему условию: для любой пары векторов $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ из $\mathcal{K}$ выполняется $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \notin \mathcal{K}$ (в частности, это предполагает, что $0 \notin \mathcal{K}$ точно также как и угловые точки куба $\bar{\Lambda}_N$). Если такое допущение имеет место, то в представленной сумме найдутся отличные от нуля слагаемые только в том случае, когда $\mathbf{k} = 0$,

$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K}$, $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$. Это приводит к $|\mathcal{K}|(|\mathcal{K}| - 1) + 1$ условиям. При подстановке каждого из этих значений $\mathbf{k}$ в представленной сумме отличны от тождественного нуля только два совпадающих друг с другом слагаемых с $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}^*_j(\mathbf{k}_2)$ при $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. По этой причине, мы получаем, на основании (16), следующий список условий

$$\bar{s}_j(-\mathbf{k}_2)\bar{s}^*_j(-\mathbf{k}_1) + \bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}^*_j(\mathbf{k}_2) = 0 \,, \qquad \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K},\ \mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$$

и соотношение (14) при $\mathbf{k} = 0$,

$$\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{K}} \bar{s}_j(\mathbf{k}')\bar{s}^*_j(\mathbf{k}') = N^2 \,. \tag{17}$$

Зафиксируем в списке этих соотношений вектор $\mathbf{k}_1 \in \mathcal{K}$. Тогда в нем, наверняка, имеются два соотношения: $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}^*_j(\mathbf{k}_2) = 0$, $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)\bar{s}^*_j(-\mathbf{k}_2) = 0$ с фиксированным вектором $\mathbf{k}_2 \neq \mathbf{k}_1$ из $\mathcal{K}$. Разложим каждый из векторов $\bar{s}_j(\mathbf{k}')$, $\mathbf{k}' \in \mathcal{K}$ на сумму реальной и мнимой частей: $\bar{s}_j(\mathbf{k}') = a_j(\mathbf{k}') + ib_j(\mathbf{k}')$. Тогда из представленных соотношений следует, что $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) = 0$, $\bar{s}_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_2) = 0$, и поэтому

$$a_j(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) = 0 \,, \quad b_j(\mathbf{k}_1)a_j(\mathbf{k}_2) = 0 \,, \quad a_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_2) = 0 \,, \quad b_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_2) = 0 \,.$$

8 Описание классов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_N$ для пар $k_* \neq 0$

Затем для полей этого класса проверяется выполнимость условий (12) при $\bar{\mathbf{k}} \neq 0$.

Выбрав $\mathbf{k} = -2\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k} = -2\mathbf{k}_2$, получим дополнительные соотношения

$$a_j(\mathbf{k}_1)b_j(\mathbf{k}_1) = 0\,, \quad a_j(\mathbf{k}_2)b_j(\mathbf{k}_2) = 0\,, \quad a_j^2(\mathbf{k}_1) = b_j^2(\mathbf{k}_1)\,, \quad a_j^2(\mathbf{k}_2) = b_j^2(\mathbf{k}_2) = 0\,,$$

то есть для каждой пары $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathcal{K}$ должны существовать четыре вектора, являющиеся все попарно взаимно ортогональными. Это может быть только в том случае, когда один из них равен нулю. Такое положение невозможно, в силу указанных равенств длин векторов $a_j(\mathbf{k}_1)$ и $b_j(\mathbf{k}_1)$, а также $a_j(\mathbf{k}_2)$ и $b_j(\mathbf{k}_2)$.

Следовательно, распределение векторного поля $\bar{s}_j(\mathbf{k})$ и, соответственно, поля $s_j(\mathbf{x})$, реализующее минимум функционала (10) (соответственно (2)) таково, что в сумме (13) имеется только два ненулевых слагаемых с $\eta(\mathbf{k}')$ и $\eta(-\mathbf{k}')$ при некотором произвольном, но фиксированном векторе $\mathbf{k}' \in \mathcal{K}$. Тогда распределение векторного поля $s_j(\mathbf{x})$, реализующего минимум энергии, вид

$$s_j(\mathbf{x}) = \frac{2}{N}\mathrm{Re}\left[(a_j(\mathbf{k}') + ib_j(\mathbf{k}'))e^{i(\mathbf{k}',\mathbf{x})}\right]\,,$$

где векторы $a_j(\mathbf{k}')$ и $b_j(\mathbf{k}')$ взаимно ортогональны и равны по своей длине.

Наконец, обратимся к равенству (17). Оно позволяет определить длину векторов $a_j(\mathbf{k}')$ и $b_j(\mathbf{k}')$,

$$N^2 = |\bar{s}_j(\mathbf{k}')|^2 + |\bar{s}_j(-\mathbf{k}')|^2 = 2(a_j^2(\mathbf{k}') + b_j^2(\mathbf{k}')) = 4a_j^2(\mathbf{k}')\,,$$

то есть $|a_j(\mathbf{k}')| = N/2$ или, окончательно,

$$s_j(\mathbf{x}) = m_j \cos(\mathbf{x}, \mathbf{k}') + n_j \sin(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \qquad (18)$$

где $\mathbf{m} = a_j(\mathbf{k}')/|a_j(\mathbf{k}')|$ и $\mathbf{n} = -b_j(\mathbf{k}')/|b_j(\mathbf{k}')|$ — взаимно ортогональные единичные векторы.

Таким образом, поле $s_j(\mathbf{x})$, при условии, что множество $\mathcal{K}$ не содержит 0 и угловых точек куба $\bar{\Lambda}_N$, реализующее минимум функционала энергии геометрически, представляет собой *спиральную магнитную структуру*, определяемую произвольной парой взаимно ортогональных векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ и вектором $\mathbf{k}' \in \mathcal{K} \subset \bar{\Lambda}_N$, который определяет направление оси и шаг спирали.

9 Близость Гамильтонианов с $s(P_\Lambda y)$ и $s(y)$ при $L \to \infty$

Гамильтониан системы

$$\mathsf{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Lambda} I(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{s}(\mathbf{x}) \mathbf{s}(\mathbf{y}) \,.$$

Необходимо найти минимум гамильтониана при условиях $\mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = 1$, $\mathbf{x} \in \Lambda$. Эта задача решается в два этапа. Сначала решается задача о минимуме с более слабым условием: $\sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \mathbf{s}^2(\mathbf{x}) = N$. Такая задача решается методом неопределенных множителей Лагранжа. Вводится расширенный гамильтониан

$$\bar{\mathsf{H}} = \mathsf{H} - \frac{1}{2} \lambda \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \mathbf{s}^2(\mathbf{x}) \tag{19}$$

с множителем Лагранжа λ. А затем полученный минимум согласуется с остальными условиями.

Такой подход удобен в связи с тем, что для решения полной задачи с учетом всех N условий потребуется N множителей Лагранжа. При их наличии расширенный гамильтониан уже не будет трансляционно инвариантен.

Минимум расширенного гамильтониана (19) ищется из системы уравнений, которые получаются из требования равенства нулю всех частных производных по векторным переменным $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ (градиентов) В результате, имеем N уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})} \bar{\mathsf{H}} = 0 \,; \qquad \mathbf{x} \in \Lambda \,.$$

Эти уравнения записываются явным образом в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})} \mathsf{H} = \lambda \mathbf{s}(\mathbf{x}) \,.$$

Введем линейный оператор в пространстве всех векторных полей на Λ:

$$(\mathcal{J}\mathbf{s})(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \Lambda} I(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{s}(\mathbf{y}) \,.$$

Тогда выписанное уравнение записывается в операторном виде

$$(\mathcal{J}\mathbf{s})(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{s}(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{s}(\mathbf{x})\,.$$

Оно представляет собой уравнение для определения собственных функций и собственных чисел интегрального оператора, роль которых выполняет множитель Лагранжа. Обозначим решение (собственный вектор) этого уравнения для каждого λ посредством $\mathbf{s}_\lambda(\mathbf{x})$.

Из симметрии ядра интегрального оператора следует вещественность λ

$$\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{s}_\lambda(\mathbf{x})\mathbf{s}_\lambda(\mathbf{y}) = \lambda\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} s_\lambda^2(\mathbf{x}) = \lambda N\,.$$

Введем гамильтониан $\tilde{\mathsf{H}}$ с периодическими условиями

$$\tilde{\mathsf{H}} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda,\mathbf{y}\in\mathbb{Z}} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{s}(\mathbf{x})\mathbf{s}(\mathsf{P}_\Lambda\mathbf{y})\,,$$

где P_Λ – оператор проектирования (переноса узла $\mathbf{y}$ решетки в Λ).

Минимум этого гамильтониана ищется на основе расширенного гамильтониана

$$\bar{\tilde{\mathsf{H}}} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda,\mathbf{y}\in\mathbb{Z}} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{s}(\mathbf{x})\mathbf{s}(\mathsf{P}_\Lambda\mathbf{y}) - \frac{1}{2}\lambda\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda}\mathbf{s}^2(\mathbf{x})\,.$$

Эти уравнения для определения минимума строятся таким же образом, как было указано выше,

$$\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda} I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{s}(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{s}(\mathbf{x})\,.$$

$$\mathcal{J}\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{s}(\mathbf{x})\,,\quad \tilde{\mathcal{J}}\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \tag{20}$$

Из разности этих двух уравнений

$$(\mathcal{J}\mathbf{s})(\mathbf{x}) - (\tilde{\mathcal{J}}\mathbf{s})(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\,,$$

следует

$$[(\mathcal{J}-\tilde{\mathcal{J}})\mathbf{s}](\mathbf{x}) + [\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{s}-\tilde{\mathbf{s}})](\mathbf{x}) = (\lambda-\tilde{\lambda})\mathbf{s}(\mathbf{x}) + \tilde{\lambda}(\mathbf{s}(\mathbf{x})-\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}))\,.$$

Откуда получаем оценку

$$\|\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}}\| \sim L^2 \varepsilon(L)\,, \quad \varepsilon \overset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Теперь умножив справа скалярно первое уравнение на $\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$, а второе — на $\mathbf{s}(\mathbf{x})$

$$\Big(\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \mathcal{J}\mathbf{s}(\mathbf{x})\Big) = \lambda\Big(\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x})\Big)\,, \quad \Big(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{J}}\mathbf{s}(\mathbf{x})\Big) = \tilde{\lambda}\Big(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\Big)\,,$$

вычтем из одного из получившихся равенств другое:

$$\Big(\mathbf{s}, (\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}})\tilde{\mathbf{s}}\Big) = (\lambda - \tilde{\lambda})(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}})\,,$$

$$\lambda - \tilde{\lambda} = \frac{\Big(\mathbf{s}, (\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}})\tilde{s}\Big)}{(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}})}$$

Следовательно,

$$(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) \neq 0\,.$$

Точно также получим асимптотические оценки для собственных чисел

$$\lambda \sim (\tilde{\mathbf{s}}, \mathcal{J}\mathbf{s})\,, \qquad \tilde{\lambda} \sim (\mathbf{s}, \tilde{\mathcal{J}}\tilde{\mathbf{s}})\,.$$

Вычитая одну из другой, получим

$$\begin{aligned}(\lambda - \tilde{\lambda}) &= (\tilde{\mathbf{s}}, \mathcal{J}\mathbf{s}) - (\mathbf{s}, \tilde{\mathcal{J}}\tilde{\mathbf{s}}) = \\ &= (\tilde{\mathbf{s}}, \mathcal{J}\vec{s}) - (\mathbf{s}, \mathcal{J}\tilde{\mathbf{s}}) + (\mathbf{s}, (\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}})\tilde{\mathbf{s}}) = \\ &= (\lambda - \lambda)(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}) + (\lambda - \tilde{\lambda})\Big[(\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{s}}) + (\tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{s}})\Big]\,.\end{aligned}$$

Введем обозначение для разности $\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}} \equiv \Delta$ и, аналогично,

$$(\tilde{\mathbf{s}}, \mathcal{J}\mathbf{s}) - (\mathbf{s}, \mathcal{J}\tilde{\mathbf{s}}) = \tilde{\mathcal{J}}\Delta\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{s}, (\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}})\tilde{\mathbf{s}}) + \tilde{\mathcal{J}}\Delta &= -\tilde{\lambda}(\Delta, \tilde{\mathbf{s}}) + (\tilde{\mathbf{s}}, (\lambda - \tilde{\lambda})\tilde{\mathbf{s}}) + \lambda(\Delta, \tilde{\mathbf{s}}) = \\ &= (\lambda - \tilde{\lambda})\Big[(\tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{s}}) + (\Delta, \tilde{\mathbf{s}})\Big]\,,\end{aligned}$$

и поэтому

$$(\lambda - \tilde{\lambda}) = \frac{(\tilde{\mathbf{s}}, (\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}})\tilde{\mathbf{s}})}{(\tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{s}})}\,,$$

$$(\lambda-\tilde{\lambda})=\frac{(\tilde{\mathbf{s}},(\mathcal{J}-\tilde{\mathcal{J}})\tilde{\mathbf{s}})}{(\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}})+(\Delta,\tilde{\mathbf{s}})}+\frac{\tilde{\mathcal{J}}\Delta}{(\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}})+(\Delta,\tilde{\mathbf{s}})}\,.$$

Встречающиеся в этих неравенствах скалярные произведения оцениваются как

$$|(\Delta,\mathbf{s})|\le|\Delta|(\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}})\,,$$

$$|(\Delta,\mathbf{s})+(\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}})|\le(\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}})(1-|\Delta|)\,,$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{s}-\tilde{\mathbf{s}}|\le\frac{\tilde{\mathbf{s}}(\mathcal{J}-\tilde{\mathcal{J}})\tilde{s}}{(\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}})+(\Delta,\tilde{\mathbf{s}})}&=\\ =\frac{\tilde{\mathbf{s}}(\mathcal{J}-\tilde{\mathcal{J}})\tilde{s}}{(1-|\Delta|)(\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}})}+\frac{\tilde{\mathbf{s}}(\mathcal{J}-\tilde{\mathcal{J}})\tilde{\mathbf{s}}}{\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{k})-\tilde{\lambda}}&=\\ =\left[1+\frac{1}{(1-|\Delta|)(\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{s}})}\right]\cdot\frac{\tilde{\mathbf{s}}(\mathcal{J}-\tilde{\mathcal{J}})\tilde{\mathbf{s}}}{\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{k})-\tilde{\lambda}}&\,.\end{aligned}$$

Определение. *Гамильтониан* $\tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}]$, *определяемый формулой*

$$\tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}]=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda,\,\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^d}I(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Big(\mathbf{s}(\mathbf{x}),\mathbf{s}(\mathsf{P}_\Lambda\mathbf{y})\Big)$$

назовем гамильтонианом с периодическими граничными условиями, аппроксимирующим гамильтониан $\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$.

Норма $\|\cdot\|$ в пространстве $\mathcal{B}$ гамильтонианов в применении ее к гамильтонианам на пространстве состояний $\mathfrak{S}$ определяется как (см. [2])

$$\|\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]\|=\max\{|\Lambda|^{-1}|\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]|:\mathbf{s}(\mathbf{x})\in\mathfrak{S},\Lambda\subset\mathbb{Z}^d\}\,. \tag{22}$$

В случае гамильтониана с конечным радиусом действия, очевидно, что разность между энергиями $\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$ и $\tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}]$ должна быть пропорциональна площади поверхности кристалла, то есть L^{d-1} при $L\to\infty$. Если же взаимодействие является дальнодействующим, то такая оценка должна быть слабее.

Для получения оценок близости по норме $\|\cdot\|$ гамильтонианов $\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]$ и $\tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}]$ установим предварительно следующую простую геометрическую оценку

Лемма. *Для любой точки* $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ *имеет место следующее неравенство*

$$|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})| \le dL^{d-1} \max\{|z_j|; j = 1, ..., d\} \equiv dL^{d-1} \|\mathbf{z}\|_0 \qquad (23)$$

и при $|z| > L$ *выполняется* $|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = 0$.

□ Последнее равенство в формулировке леммы очевидно. Доказательство неравенства (2) проведем индукцией по d. При $d = 1$ и $|\mathbf{z}| \le L$ имеем точное равенство, так как $\Lambda = \{0, 1, ..., L\}$ и $\Lambda + \mathbf{z} = \{z, z+1, ..., z+L\}$. Тогда $|\Lambda \cap (\mathbb{Z} \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = L - (L - |z|) = |z|$.

Пусть неравенство (2) имеет место для значения d. Тогда, так как, в общем случае,

$$|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = L^d - \prod_{j=1}^{d} (L - |z_j|)\,,$$

то для значения $(d+1)$, для любой точки $\mathbf{z} = \langle z_1, ..., z_d, z_{d+1} \rangle$, имеем, согласно предположению индукции,

$$|\Lambda \cap (\mathbb{Z}^{d+1} \setminus \Lambda + \mathbf{z})| = L^{d+1} - \prod_{j=1}^{d+1} (L - |z_j|) =$$

$$= L\Big(L^d - \prod_{j=1}^{d} (L - |z_j|)\Big) + \Big(L\Big(\prod_{j=1}^{d} (L - |z_j|) - \prod_{j=1}^{d+1} (L - |z_j|)\Big) \le$$

$$\le dL^{d+1} \max\{|z_j|; j = 1, ..., d\} + \Big(\prod_{j=1}^{d} (L - |z_j|)\Big)(L - (L - |z_{d+1}|)) \le$$

$$\le dL^{d+1} \max\{|z_j|; j = 1, ..., d\} + L^d |z_{d+1}|$$

$$\le (d+1) L^{d+1} \max\{|z_j|; j = 1, ..., d+1\}\,. \qquad \blacksquare$$

Сформулируем основной результат настоящего сообщения.

Теорема. *Имеет место следующая оценка*

$$\|\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}] - \tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}]\| \le \frac{s^2 d}{2} L^{d-1} \sum_{\mathbf{x} \in 2\Lambda} |I(\mathbf{x})|\, \|\mathbf{x}\|_0\,. \qquad (24)$$

□ Очевидны следующие неравенства

$$\|\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}] - \tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}]\| \le \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x}\in\Lambda,\\ \mathbf{y}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}} |I(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \left|\Big(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathsf{P}_\Lambda \mathbf{y})\Big)\right| \le$$

$$\le \frac{s^2}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x}\in\Lambda,\\ \mathbf{y}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}} |I(\mathbf{x}-\mathbf{y})| = \frac{s^2}{2} \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} |I(\mathbf{z})|\, |\Gamma(\mathbf{z};\Lambda)|\,, \qquad (25)$$

где $\Gamma(\mathbf{z};\Lambda) = \{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle : \mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{z}, \mathbf{x}\in\Lambda, \mathbf{y}\notin\Lambda\}$. Множество $\Gamma(\mathbf{z};\Lambda)$ пусто в том случае, когда $\mathbf{z}\notin 2\Lambda$. Если оно не пусто, то каждая пара, принадлежащая ему взаимно однозначно определяется точкой $\mathbf{x}\in\Lambda$ так, что $\mathbf{y} = \mathbf{x}-\mathbf{z}\in\Lambda$, то есть $\mathbf{x}\in(\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda)+\mathbf{z}$. Следовательно, $\Gamma(\mathbf{z};\Lambda) = |\Lambda\cap(\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda+\mathbf{z})|$. Теперь остается применить оценку (23). ■

Из полученной оценки (3) разности энергий следует, что для дальнодействующих взаимодействий таких, что $\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]\in\mathcal{B}$, но для которых

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d} |I(\mathbf{x})|\, \|\mathbf{x}\|_0 = \infty\,,$$

эта разность возрастает быстрее, чем площадь поверхности кристалла, что и затрудняет использование в этом случае аппроксимации исходной системы соответствующей ей системой с периодическими граничными условиями. Тем не менее, справедливо

Следствие. *Если* $\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]\in\mathcal{B}$, *то при термодинамическом предельном переходе имеет место*

$$\lim_{|\Lambda|\to\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \|\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}] - \tilde{\mathsf{H}}_\Lambda[\mathbf{s}]\| = 0\,.$$

□ Так как $\mathsf{H}_\Lambda[\mathbf{s}]\in\mathcal{B}$, то $\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d} |I(\mathbf{x})| < \infty$. Для функций $I(\cdot)$ такого типа имеет место

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} I(\mathbf{x})\|\mathbf{x}\|_0 = 0\,.$$

В самом деле, выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем такой размер L_ε, для которого

$$\sum_{\mathbf{x}\,:|\mathbf{x}|>L_\varepsilon} |I(\mathbf{x})| < \varepsilon\,.$$

Тогда

$$\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} I(\mathbf{x})\|\mathbf{x}\|_0 = \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda\,:|\mathbf{x}|>L_\varepsilon} |I(\mathbf{x})|\,\|\mathbf{x}\|_0 + \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda\,:|\mathbf{x}|\le L_\varepsilon} |I(\mathbf{x})|\,\|\mathbf{x}\|_0\,.$$

Для оценки первой суммы используем неравенство $\|\mathbf{x}\|_0 < L$ и зафиксировав L_ε и поделив на L, перейдем к пределу $L \to \infty$. В результате, получим, что

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} I(\mathbf{x})\|\mathbf{x}\|_0 \le \varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности числа ε, получим требуемое. ■

10 Заключение

В работе проведено строгое математическое исследование задачи об описании класса всех состояний с минимальной энергией для сферически симметричного обменного взаимодействия в рамках векторной решеточной модели магнетика при отсутствии внешнего магнитного поля в том случае, когда кристаллическая решетка является несжимаемой и обладает простой элементарной кристаллической ячейкой. Эта задача, как было сказано во введении, имеет важное значение для последовательного построения статистической механики кристаллов, проявляющих магнитное упорядочение при низких температурах.

Изученная задача ранее интенсивно исследовалась в теоретических работах, связанных с физикой магнетизма, однако, типичным подходом, применяемым при ее решении являлось использование приближения сплошной среды, в рамках которого необходимо было выбирать среди всех стационарных решений соответствующего уравнения ферродинамики (уравнения Ландау-Лифшица) то из них, которое бы отвечало минимуму энергии. Такой подход был связан с тем, что он подход довольно прозрачен в идейном смысле и прост в математическом отнрошении, так как быстро приводил к конкретному результату, что очень важно с точки зрения приложений теории.

Исследование в диссертации выполнено в рамках сферически симметричной векторной классической (не квантовой) модели ферромагнетика, которая относится с точки зрения терминологии статистической математической физики к классическим решеточным моделям. Гамильтониан модели состоит только из бинарных взаимодействий элементарных магнитных моментов, сосредоточенных в узлах решетки и полностью характеризуется функцией $I(\mathbf{x})$ – т.н. обменным интегралом между парой элементарных магнитных моментов, расположенных в двух узлах решетки с вектором $\mathbf{x}$, описывающим их взаимное расположение.

В результате проведенного в диссертации исследования обнаружено, что очень важной, в математическом отношении, характеристикой модели является фурье-образа $\bar{I}(\mathbf{k})$ обменного интеграла $I(\mathbf{x})$. В зависимости от свойств этой функций, качественная структура основного состояния может изменяться. В диссертации исследован случай, когда множество $\mathcal{K}$ векторов $\mathbf{k}$, в которых реализуется ее абсолютный минимум конечно. Кроме того, считается, что множество состоит из векторов $\mathbf{k}$, компоненты k_j которых имеют вид $k_j = \pm\pi p_j/q_j$, p_j/q_j – рациональные числа, $j = 1, 2, 3$. Показано, что в этом случае все основные состояния, реализующие минимум гамильтониана модели, представляют собой спиральные структуры, у которых шаг спирали и направление ее ориентации определяется любым волновым вектором $\mathbf{k}_*$ из $[-\pi, \pi]^d$, $d = 2, 3$, где d – пространственная размерность решетки, в котором достигается минимум функции $\bar{I}(\mathbf{k})$. При этом существенно, чтобы обменный интеграл должен представляться суммируемой на кристаллической решетке $\mathbb{Z}^d$ функцией.

Ввиду принятых в диссертации предположений относительно свойств обменного интеграла $I(bfx)$, для дальнейшего развития того направления математической физики, которому посвящена работа, необходимо решить следующие задачи.

1. В рамках метода решения, предложенного в настоящей работе, нужно отказаться от ограничивающего условия отсутствия в парах $\{k_*, -k_*\}$, точек $k_* = 0$ и $k_* = \langle\pi, \pi, \pi\rangle$.

2. Более того, нужно отказаться при определении основных состояний от условия невырожденности обменного интеграла так, чтобы множество $\mathcal{K}$ пар, для точек из которых достигается минимум фурье-образа обменного интеграла, могло быть бесконечным.

3. Далее, нужно решить техническую задачу, хотя она, на первый взгляд, не должна представлять каких-либо трудностей. Эта задача состоит в том, чтобы отказаться условия попадания минимума фурье-образа обменного интеграла сразу в точку $\mathbf{k}_*$ обратной решетки, которая соответствует конечному кристаллу, то есть таким образом, что термодинамический предельный переход не сказывается на положении этой точки.

4. Необходимо отказаться при определении состояний, минимизирующих энергии, от периодических граничных условий. Это очень важно в связи с тем, что малых изменения гамильтониана могут радикально изменять структуру основного состояния, что представляет собой т.н. фазовый переход в системе большого числа частиц.

5. Необходимо отказаться от сферической симметрии обменного интеграла, в частности, исследовать основные состояния при наличии одноосной анизотропии как типа «легкая ось», так и типа «легкая плоскость».

6. Необходимо установить основные состояния для парного обмена при наличии внешнего магнитного поля.

7. Нужно научиться оценивать влияние на структуру основного состояния наличия в гамильтониане обменных интегралов более высокого порядка.

8. Нужно научиться оценивать точность «приближения сплошной среды» при определении основных состояний по сравнению с точным решением задачи в рамках использования решеточных моделей.

9. Нужно научиться находить основное состояние гамильтониана в том случае, когда парный обменный интеграл не является суммируемым.

10. Нужно распространить результаты решения задач, представленных в предыдущих пунктах программы, на решеточные модели с непростыми элементарными кристаллическими ячейками.

Наконец, все результаты, полученные в рамках решеточных моделей для векторных полей, нужно распространить на соответствующие квантовые решеточные модели. Это может быть достигнуто посредством использования техники спиновых когерентных состояний.

11 Литература

1. Ruelle D. Statistical Mechanics, Rigorous Results / Ney York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc., 1969. (Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты / М.: Мир, 1971.)

2. Вирченко Ю.П. Основное состояние векторной решеточной модели с парным взаимодействием // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2012. – 23(142);29. – С.54-66.

3. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны / М.: Наука, 1967. – 368 с.

4. Вирченко Ю.П. К теории основного состояния обменной модели Гейзенберга // Проблемы теоретической физики / Киев: Наукова думка, 1991. – С.80-96.

5. Клюев А.С., Вирченко Ю.П. Основное состояние векторной решеточной модели с парным взаимодействием. Случай вырожденного обменного интеграла // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – 5(176);34. – С.126-133.

6. Клюев А.С., Вирченко Ю.П. Описание унимодальных векторных полей на простых трехмерных периодических решетках, минимизирующих квадратичный функционал // Proceedings XII of young scientists school "Non-local boundary value problems and problems of modern analysis and informatics", KBR, Terskol 3-7 December 2014 // Нальчик: Институт прикладной математики и автоматизации, 2014. – С.40-42.

7. Клюев А.С., Вирченко Ю.П. Оценка энергии векторной решеточной модели с периодическими граничными условиями // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №11(208); 39. – С.121-125.

8. Клюев А.С., Вирченко Ю.П. Оценка энергии векторной решеточной модели со свободными граничными условиями // Belgorod State

University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №17(214); 40. – С.165-170.

9. Клюев А.С., Вирченко Ю.П. Описание класса унимодальных векторных полей на $\mathbb{Z}^d$, минимизирующих квадратичный функционал // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2016» / Воронеж: Научная книга, 2016. – С.190-194.