ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Кафедра теоретической и математической физики

ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИНДУЦИРОВАННОГО ШУМОМ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АВТОКАТАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Диссертация на соискание академической степени магистра

Направление подготовки **03.04.02 Физика**,
программа **«Теоретическая и математическая физика»**

Фам Минь Туан

Научный руководитель
Д.физ.-мат.н., проф. Вирченко Ю.П.

Рецензент
Д.физ.-мат.н., проф. Красильников В.В.

Белгород 2016

Аннотация

Дается полное исследование стационарной плотности распределения в пространстве относительных концентраций для трехпараметрической стохастической модели Хорстхемке-Лефевера бинарной автокаталитической циклической химической реакции, которая учитывает возмущения, вызванные тепловыми флуктуациями реагентов. Эта модель представляет собой стационарный диффузионный случайный процесс, порождаемый стохастическим уравнением с дифференциалом Стратоновича, у которого маргинальная плотность распределения допускает бифуркационную перестройку от унимодальной к бимодальной при увеличении интенсивности шума, что физически интерпретируется как динамический фазовый переход индуцированный флуктуациями в системе.

Ключевые слова

бимодальное распределение
бифуркация
критическая поверхность
стехиометрические коэффициенты
стохастическое дифференциальное уравнение
диффузионный марковский процесс
уравнение Фоккера-Планка
уравнения химической кинетики
фазовая диаграмма
фазовый переход индуцированный шумом
флуктуации

Оглавление

Список обозначений

В работе мы придерживаемся следующих правил при употреблении шрифтов для обозначения математических объектов и операций над ними.

• Для обозначения математических операторов (функционалов), для которых в математике имеются устоявшиеся аббревиатуры на основе букв латинского алфавита, мы употребляем шрифт «roman» – A, B, C, ...; a, b, c, ... Например, Re и Im – реальная и мнимая части комплексного числа. Если таковых устоявшихся аббревиатур не имеется, то мы используем для обозначения математических объектов различные шрифты, в зависимости от природы объекта, перечисленные ниже.

• Для обозначения стандартных математических структур используется ажурный шрифт – $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \ldots$, например, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

• Операторы, отображения, функционалы обозначаются прописными буквами шрифта «sanserif» – $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots$.

• Для обозначения числовых величин (параметров, функций и их аргументов) используются буквы латинского в шрифте «italic» – $a, b, c, \ldots$ и греческого алфавитов. При этом латинские буквы i, j, k, l – обозначают целые числа.

• Для обозначения векторов жирные буквы латинского алфавита. Их компоненты нумеруются индексами i, j, k, l, m. При этом принимается тензорное соглашение о суммировании по повторяющимся парным индексам.

• Для обозначения множеств различных математических объектов используется шрифт «calligraphic» – $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, , \ldots$.

Предметный указатель

t – временной параметр

$N_t(\cdot)$ – число частиц заданного реагента химической реакции в момент времени t

x_t – относительная концентрация двух реагентов в момент времени t

k_i – скорость i-го химического процесса

α – приведенный аддитивный параметр химической реакции

λ – приведенный мультипликативный параметр химической реакции

$\tilde{\varphi}(t)$ – обобщенный процесс белого шума

$\tilde{w}(t)$ – стандартный винеровский процесс

$\tilde{x}(t)$ – случайный процесс изменения относительной концентрации

σ^2 – интенсивность тепловых флуктуаций

$p(x,t)$ – текущая плотность распределения вероятностей в точке x в момент времени t

$p(x)$ – стационарная плотность распределения вероятностей в точке x

$J[\cdot]$ – поток вероятности

$\varepsilon = \alpha - 1/2$

K_ν – функция Макдональда с параметром ν

f – коэффициент переноса диффузионного процесса $\tilde{x}(t)$

g – диффузионный коэффициент процесса $\tilde{x}(t)$

Σ_ε – сечение критической поверхности в плоскости $\varepsilon = \mathrm{const}$

$\Sigma_\pm$ – ветви кривых в сечение критической поверхности

Δ – цилиндр $4\lambda^2 + 3\sigma^4 - 12\sigma^2 = 0$

$G_{\pm}$ – гиперболы, ограничивающие физически разрешенную область расположения сечения при $\varepsilon = \mathrm{const}$ критической поверхности

λ_* – критическое значение параметра λ в точке каспа сечения критической поверхности

σ_*^2 – критическое значение параметра σ^2 в точке каспа сечения критической поверхности

1. Введение

При теоретическом изучении различных явлений в естественных науках возникают математические модели, которые связаны со стохастическими динамическими системами. Их формулировка и исследование основано на понятии стохастического дифференциального уравнения и привлечения общей теории таких уравнений. Одной из таких стохастических моделей является т.н. *генетическая модель*, введенная в [1] как иллюстрирующая эволюцию со временем в некоторых биологических процессах. В работе [2] было предложено применение этой модели для описания кинетики бинарных циклических химических реакций при наличии катализаторов (см. также [3], где дан более детальный вывод уравнений модели на основе химической кинетики). Там же был дан анализ стационарного решения модели в частном симметричном случае, результаты которого приведены в монографии [4]. В этой же монографии была проанализирована связь между моделью авторов и моделью работы [1].

В динамике, описываемой генетической моделью, проявляется так называемый *индуцированный шумом фазовый переход* при изменении ее свободных параметров. Он, с математической точки зрения, представляет собой бифуркационную перестройку стационарной плотности распределения случайной величины $\tilde{x}(t)$ – значения в момент времени t случайного процесса, который определяется моделью. Причем, такая перестройка отсутствует в детерминированном пределе модели при равной нулю интенсивности шума – параметра, характеризующего влияние стохастического слагаемого в соответствующем стохастическом дифференциальном уравнении. Именно это обусловило интерес к исследованию генетической модели. Дополнительным обстоятельством привлекающем внимание к изучению этой модели является экспериментальное подтверждение наличия указанного фазового перехода [6].

Бифуркация, свойственная генетической модели представляет собой частный случай фазовых переходов под воздействием шума, начало интенсивному математическому исследованию которых было положено в 70-х годах прошлого столетия, и до настоящего времени эта тематика исследований представляет интерес [7], как с точки зрения математической физики, так и с точки зрения приложения результатов этих исследований к конкретным физическим ситуациям. Следует отметить, что успехи в исследовании фазовых переходов под воздействием шума, в основном, связаны с изучением одномерных динамических систем.

Математическое исследование генетической модели давалось в работах ее основоположников в различные годы (см., например, их обзоры [8-10] и второе изд. уже цитированной монографии [11]). Однако, в их работах не было дано полного аналитического исследования стационарного состояния генетической модели. При исследовании стационарных состояний для наборов значений параметров модели в общем положении в этих работах авторы переходили к численной симуляции.

В настоящей работе мы приводим результаты полного исследования стационарного состояния генетической модели при всех допустимых значениях ее параметров, предварительно опубликованные в [3, 12-14]. В следующем разделе, мы кратко приводим конструкцию модели Хорстхемке-Лефевера и необходимые для дальнейшего изложения, связанные с ней результаты. В разд. 3 ставится задача вычисления критической поверхности в пространстве параметров. В 4-м разд. приводятся полное аналитическое исследование критической поверхности. В 5-м разделе критическая поверхность исследуется вблизи граничных значений параметра $\alpha = 0$ и 1, в которых она теряет смысл.

Глава 1. Конструкция модели

Рассмотрим связанные пары химических реакций, которые осуществляются по следующей схеме:

$$A + X + Y \underset{k_1}{\overset{k_2}{\leftrightarrows}} 2Y + A^*\,, \qquad B + X + Y \underset{k_3}{\overset{k_4}{\leftrightarrows}} 2X + B^*\,,$$

где X, Y, A, B, A^*, B^* – символы химических реагентов и при этом вещества, обозначаемые символами A, B, A^*, B^*, выполняют роль химической среды, в которой возможно протекание прямой и обратной реакции со сравнимыми друг с другом скоростями k_i, $i = 1, 2, 3, 4$. На основании базовых уравнений химической кинетики, описывающих динамику этой пары одновременно протекающих реакций, имеем [1)]

$$\begin{aligned}
\dot{N}_t(X) &= k_2 N_t^2(Y) N_t(A^*) - k_1 N_t(X) N_t(Y) N_t(A) + \\
&\qquad + k_3 N_t(X) N_t(Y) N_t(B) - k_4 N_t^2(X) N_t(B^*)\,, \\
\dot{N}_t(Y) &= k_1 N_t(X) N_t(Y) N_t(A) - k_2 N_t^2(Y) N_t(A^*) + \\
&\qquad + k_4 N_t^2(X) N_t(B^*) - k_3 N_t(X) N_t(Y) N_t(B)\,,
\end{aligned}$$

где $N_t(A), N_t(A^*), N_t(B), N_t(B^*)$, $N_t(X), N_t(Y)$ – зависящие от времени t числа частиц соответствующих реагентов. Из этой системы уравнений следует закон сохранения суммарного числа молекул обоих реагентов в каждом физически малом объеме термодинамической системы, так как сумма двух уравнений приводит к $d(N_t(X) + N_t(Y))/dt = 0$. Тогда $N_t(X) + N_t(Y) = N = \mathrm{const}$.

Обозначим посредством $x(t) = N_t(X)/N$, $1 - x(t) = N_t(Y)/N$ концентрации частиц, соответственно, реагентов X и Y в момент времени t. Пренебрегая малыми изменениями со временем величин $N_t(A)$, $N_t(A^*)$, $N_t(B)$, $N_t(B^*)$ по сравнению с самими этими величинами, то есть считая, что они не зависят от t, и при этом значения $N(A)$, $N(A^*)$, $N(B)$, $N(B^*)$ имеют

[1]По поводу методов построения уравнений химической кинетики см., например, [15].

один и тот же порядок величины, намного превосходящий числа $N_t(X)$ и $N_t(Y)$, перейдем к другому масштабу времени в кинетических уравнениях посредством замены $N[k_2N(A^*) + k_4N(B^*)]t$ на физически безразмерный параметр t. Тогда, получается следующее уравнение для концентрации $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = \alpha - x(t) + \lambda x(t)(1 - x(t)) \,, \quad x(t) \in [0, 1] \,. \tag{1}$$

с безразмерными коэффициентами

$$\alpha = \frac{k_2N(A^*)}{k_2N(A^*) + k_4N(B^*)} \,, \quad \lambda = \frac{k_3N(B) + k_4N(B^*) - k_1N(A) - k_2N(A^*)}{k_2N(A^*) + k_4N(B^*)} \,, \tag{2}$$

$\alpha \in [0,1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, которые являются характеристиками реакции. Уравнение (1) имеет устойчивую стационарную точку $\bar{x} = (\lambda - 1 + \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4\lambda\alpha})/2\lambda$ внутри интервала $[0,1]$, к которой стремится любое решение с начальным значением $x_0 \in (0,1)$. Значения $\alpha = 0, 1$ являются особыми, так как для них модель теряет свой физический смысл. Наличие одной устойчивой точки равновесия указывает на то, что в детерминированном случае модель (1) не допускает качественных изменений динамики при изменении ее параметров.

При учете термодинамических случайных флуктуаций чисел $N_t(A)$, $N_t(B)$, детерминированная модель (1) должна быть заменена на стохастическую посредством аддитивных случайных возмущений параметров модели в виде стационарных эргодических случайных процессов. В стохастической модели Хорстхемке-Лефевера такое возмущение в виде белого шума $\sigma^2\tilde{\varphi}(t)$ вводится только для параметра λ, $\lambda \Rightarrow \lambda + \sigma^2\tilde{\varphi}(t)$, $\langle\tilde{\varphi}(t)\rangle = 0$, $\langle\tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}(0)\rangle = \delta(t)$, где здесь и далее знаком «тильда» отмечаются случайные величины, а угловыми скобками обозначены математические ожидания. Вводя стохастический дифференциал $d\tilde{w}(t) = \tilde{\varphi}(t)dt$, где $\tilde{w}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ – винеровский случайный процесс, приходим к генетической модели в виде стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{x}(t) = [\alpha - \tilde{x}(t) + \lambda\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))]\, dt + \sigma\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))d\tilde{w}(t) \,, \tag{3}$$

определяющего марковский диффузионный случайный процесс $\tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Для дифференциала $d\tilde{w}(t)$ в (3), в зависимости от предназначения стохастической системы, используются различные определения (см. по этому поводу [16]). Для построения стохастических моделей физических систем естественно использовать уравнения, в которых дифференциал $d\tilde{w}(t)$ понимается по Стратоновичу [17], в отличие от классического подхода на основе стохастического дифференциала Ито [18]. Вопросу обоснования этого положения посвящена обширная литература как теоретического характера (см., например, [19-20]), основанная на теоремах приближения решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами [21-22], так и экспериментального характера, где сравнивались предсказания родственных стохастических моделей в конкретной физической ситуации, основанные на различных стохастических дифференциалах [23].

Известно, что совокупность случайных реализаций – решений стохастического дифференциального уравнения (3) составляет марковский диффузионный случайный процесс с вероятностью 1 непрерывными траекториями. Это является основополагающим положением теории уравнений с дифференциалом Ито (см., например, [24]). В случае уравнений с дифференциалом Стратоновича этот факт устанавливается на основе однозначной связи между этими дифференциалами (см., например, [16]). Поэтому для плотности $p(x,t) = d\mathrm{Pr}\{\tilde{x}(t) < x\}/dx = \langle \delta(\tilde{x}(t) - x)\rangle$ маргинального распределения первого порядка этого процесса справедливо уравнение Фоккера-Планка [2)]

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial\left[f(x)p(x,t)\right]}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\left[g^2(x)p(x,t)\right]}{\partial x^2} \equiv \big(\mathsf{H}p\big)(x,t)\,, \qquad (4)$$

$$f(x) = \alpha - x + \lambda x(1-x) + \frac{\sigma^2}{2}x(1-x)(1-2x)\,, \quad g(x) = x(1-x)\,. \qquad (5)$$

Для любого случайного значения $\tilde{x}(0) \in (0,1)$, статистически независимого от значений винеровского процесса $\tilde{w}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, уравнение (3) имеет единственное, с точностью до стохастической эквивалентности, решение, которое с вероятностью 1 содержится в $(0,1)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Этот факт может быть доказан на основе методов общей теории стохастических дифференциальных уравнений (см. [24]). Более прозрачное доказательство строится (см. [26]) на основе представления белого шума в виде предела при $m \to \infty$ от последовательности $\{\tilde{\varphi}^{(m)}(t); m \in \mathbb{N}\}$ *импульсных процессов* с

[2]Заметим, что к такому же уравнению можно прийти посредством техники приближений, которая разрабатывалась в рамках общего подхода для эволюционных задач статистической физики (см., например, [25]).

траекториями

$$\tilde{\varphi}^{(m)}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_n^{(m)} u^{(m)}\big(t - \tilde{t}_n^{(m)}\big) \,. \tag{6}$$

Здесь $\{u^{(m)}(\cdot); m \in \mathbb{N}\}$ – последовательность финитных локализованных около нуля гладких функций, стремящаяся в слабом смысле к $\delta(t)$ при $m \to \infty$; $\{\{\tilde{\alpha}_n^{(m)}; n \in \mathbb{Z}\}; m \in \mathbb{N}\}$ – последовательность одинаковых дихотомических независимых в совокупности случайных величин $\tilde{\alpha}_n^{(m)}$, $n \in \mathbb{Z}$ с нулевым средним значением и таких, что $\tilde{\alpha}_n^{(m)} \in \{\pm a^{(m)}\}$ при $n \in \mathbb{Z}$ и $a^{(m)} \to 0$ при $m \to \infty$; $\{\{\tilde{t}_n^{(m)}; n \in \mathbb{Z}\}; m \in \mathbb{N}\}$ – последовательность простейших пуассоновских случайных потоков $\tilde{t}_n^{(m)}$, $n \in \mathbb{Z}$ с плотностями $\rho_m = \big(a^{(m)}\big)^{-2}$ таких, что при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ поток статистически независим от случайной последовательности $\{\tilde{\alpha}_n^{(m)}, n \in \mathbb{N}\}$. Известно, что ряд (6) сходится для каждого $m \in \mathbb{N}$ с вероятностью 1 (см. [27]), что устанавливается применением леммы Бореля-Кантеля. Указанное выше свойство решений уравнения (3) следует из того, что этим свойством обладают решения $\tilde{x}^{(m)}(t)$ дифференциального уравнения со случайными коэффициентами

$$\dot{\tilde{x}}^{(m)}(t) = [\alpha - \tilde{x}(t) + \lambda\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))] + \sigma\tilde{x}(t)(1 - \tilde{x}(t))\tilde{\varphi}^{(m)}(t)$$

при каждом фиксированном m. После применения теоремы Вонга-Закаи [21] к пределам $\tilde{x}(t)$ последовательности решений $\langle\tilde{x}^{(m)}(t); m \in \mathbb{N}\rangle$, что допустимо, так как последовательность случайных процессов $\{\tilde{w}^{(m)}(t); m \in \mathbb{N}\}$ с траекториями $\tilde{w}^{(m)}(t) = \int_0^t \tilde{\varphi}^{(m)}(s)ds$ поточечно стремится к стандартному винеровскому процессу при $m \to \infty$, получим, что предельные траектории $\tilde{x}(t)$ с вероятностью 1 также полностью расположены в $(0, 1)$.

Ввиду того, что траектории $\tilde{x}(t)$ диффузионного процесса полностью расположены в $(0, 1)$ при $\tilde{x}(0) \in (0, 1)$, носитель каждого решения $p(x, t)$ уравнения (4) с начальной плотностью распределения $p(x, 0)$ такой, что $\mathrm{supp}[p(x, 0)] \subset [0, 1]$, совпадает с $[0, 1]$. По этой причине, для такого начального распределения, соответствующее решение $p(x, t)$ удовлетворяет граничному условию равенства нулю потока вероятности

$$J[p(x, t)] = f(x)p(x, t) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial[g^2(x)p(x, t)]}{\partial x} \,.$$

в *естественных* (в смысле Гихмана-Скорохода [24]) граничных точках $x = 0, 1$. [3)]

Довольно просто находится стационарное решение $p(x)$ уравнения Фоккера-Планка (4), которое имеет вид $J[p(x)] = 0$ при естественных граничных условиях. Оно существует и единственно для каждого набора значений параметров $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ и представляется формулами (см. [3], [4])

$$p(x) = \frac{A}{x(1-x)} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\beta} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{\alpha - 1}{1-x} - \frac{\alpha}{x} \right) \right\}, \qquad \beta = \frac{2(2\alpha + \lambda - 1)}{\sigma^2} \tag{7}$$

где постоянная A находится из условия $\int\limits_0^1 p(x)dx = 1$,

$$A = \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} + \beta \ln \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right\} \left[K_{-\beta} \left(\frac{4}{\sigma^2} \sqrt{\alpha(1-\alpha)} \right) \right]^{-1},$$

где $K_{-\beta}(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода с показателем $(-\beta)$, которая для любого показателя $\nu \in \mathbb{C}$ и положительного x определяется интегральным представлением (см. [28], стр. 700)

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} u - \nu u} du, \qquad \operatorname{Re} x > 0.$$

Плотность распределения $p(x)$ теряет смысл при $\alpha = 0$, так как она неинтегрируема в окрестности точки $x = 0$. По той же причине, она теряет смысл при $\alpha = 1$, когда она неинтегрируема в окрестности точки $x = 1$. При $\alpha \in (0, 1)$ имеет место $p(0) = p(1) = 0$.

Диффузионный процесс $\tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ характеризуется тем, что границы отрезка $[0, 1]$, внутри которого расположены его траектории, не являются естественными в смысле Феллера (определение см., например, в [4], стр. 146). Это связано с тем, что критерием естественности границ по Феллеру является расходимость двух интегралов – характеристик процесса вблизи границ, которые в нашем случае имеют вид

$$\int p(x) g^2(x) \Big(\int_{x'}^{x} p(y) dy \Big) dx, \qquad \int p(x) \Big(\int_{x'}^{x} p(y) g^2(y) dy \Big) dx$$

[3]Это свойство используется без обоснования в [4].

и поэтому, заведомо, сходятся.

Таким образом, для процесса $\tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ применима теорема Эллиотта (см. [29]), на основании которой можно утверждать, что: *спектр* $\{-\mu_m\}$ *дифференциального оператора* H *с граничными условиями* $(J[p(x,t)])_{x=0,1} = 0$ *чисто дискретный и* $\mu_m \geq 0$, *а соответствующие собственные функции* $\psi_m(x)$ *образуют полную систему в пространстве* $\mathbb{L}_1(0,1)$.

Указанное свойство оператора H позволяет утверждать, что случайный процесс $\tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ имеет единственную финальную плотность распределения, которая совпадает с единственной собственной функцией оператора H с нулевым собственным значением. Это означает, что для любой начальной плотности $p(x,0)$ с носителем, сосредоточенным на $[0,1]$, и удовлетворяющей граничному условию $(J[p(x,0)])_{x=0,1} = 0$, соответствующее решение $p(x,t)$ уравнения (4) стремится к стационарной плотности $p(x)$ при $t \to \infty$. Более того, можно утверждать, что статистические характеристики случайного процесса $\tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ стремятся к соответствующим статистическим характеристикам диффузионного стационарного эргодического процесса $\tilde{x}_\infty(t)$, $t \in \mathbb{R}$ с маргинальной плотностью распределения первого порядка $p(x)$ и условной вероятностью перехода $p(x,t;y,s)$, удовлетворяющей уравнению (4) при $t \geq s$ и начальному условию $p(x,s;y,s) = \delta(x-y)$.

Глава 2. Критическая поверхность

Качественное устройство плотности $p(x)$ – число ее мод характеризуется разбиением пространства наборов параметров (λ, σ^2, α) на области таким образом, что эта плотность имеет фиксированное число точек максимума (модальность плотности распределения) в каждой из этих областей. Такое разбиение, по аналогии с термодинамикой, будем называть фазовой диаграммой системы, а поверхность Σ, которая разделяет эти области, будем называть *критической поверхностью.* Дальнейшее содержание статьи посвящено исследованию этой поверхности. Изменению модальности плотности $p(x)$ соответствует изменение числа решений уравнения $dp(x)/dx = 0$ при изменении параметров системы, то есть такая бифуркация $p(x)$ связана с вырождением решений этого уравнения, которое приводится к виду

$$S(x) \equiv \alpha - x + \lambda x(1-x) - \frac{\sigma^2}{2}x(1-x)(1-2x) = 0\,, \qquad x \in (0,1)\,. \quad (8)$$

Качественный анализ критической поверхности при произвольных значениях параметров λ и α, который дается ниже в этом и следующем разделах, отсутствует в предыдущих публикациях, посвященных генетической модели.

Замечание 1. Кроме решений уравнения (8), формально, условию наличия бифуркации плотности $p(x)$ удовлетворяют точки $x = 0$ и 1, так как $p'(0) = p''(0) = p'(1) = p''(1) = 0$ при любых значениях параметров α, λ и σ^2, кроме $\sigma^2 = 0$ (где плотность $p(x)$ не существует). Однако, при фиксированном α, значения параметров λ_c и σ_c^2, при которых могут возникнуть дополнительные экстремумы плотности в $x = 0, 1$ отсутствуют. В самом деле, если бы существовала экстремальная точка $x_c(\lambda, \sigma^2)$, которая находится внутри $(0,1)$ и такая, что $x_c(\lambda, \sigma^2) \to 0$, либо $x_c(\lambda, \sigma^2) \to 1$ при $\lambda \to \lambda_c$ и $\sigma^2 \to \sigma_c^2$, независимо от направления перехода к пределу в полуплоскости $(\lambda, \sigma^2 > 0)$, то в этой точке должно выполняться $S(x_c(\lambda, \sigma^2)) = 0$. Но это невозможно, так как при $\lambda \to \lambda_c$, $\sigma^2 \to \sigma_c^2$ в последнем равенстве, $S(0) = \alpha \neq 0$, либо $S(1) = \alpha - 1 \neq 0$.

Уравнение (8) может иметь либо одно, либо три вещественных решения. Тем его решениям, которые расположены на $(0,1)$ соответствуют экстремумы плотности $p(x)$. Один вещественный корень всегда находится внутри $(0,1)$, так как $S(1)S(0) < 0$, и поэтому $p(x)$ имеет один экстремум внутри интервала. Тогда, ввиду $p(0) = p(1) = 0$, при наличии трех экстремумов, два из которых являются максимумами, а один – минимумом между ними, имеется три вещественных корня уравнения (8) внутри $(0,1)$.

Ввиду замечания 1 кратность решений уравнение $dp/dx = 0$ внутри $(0,1)$ эквивалентна кратности корней уравнения $S(x) = 0$. Анализ существования кратного корня $x_0 \in \mathbb{R}$ у полинома $S(x)$ основан на том, что для него, наряду с равенством $S(x_0) = 0$, должно выполняться $S'(x_0) = 0$. Тогда условие существования кратного корня у полинома $S(x)$, в зависимости от его параметров, получается из равенства нулю зависящего от параметров остатка, который получается в результате применения алгоритма Евклида к паре полиномов $S(x)$ и $S'(x)$. В результате, приходим к уравнению критической поверхности Σ в виде

$$P(\lambda,\sigma^2,\varepsilon) \equiv \lambda^4 + \lambda^2\Big(1 - 5\sigma^2 - \sigma^4/2\Big) - \lambda\varepsilon(9\sigma^4 + 18\sigma^2 - 4\lambda^2) - \\ - 4\sigma^2\Big(1 - \sigma^2/4\Big)^3 - 27\sigma^4\varepsilon^2 = 0\,, \quad (9)$$

где $\varepsilon = \alpha - 1/2 \in [-1/2, 1/2]$. Выполнение этого равенства является необходимым и достаточным условием для существования кратного корня x_0 при наборе $(\lambda, \sigma^2, \alpha)$ разрешенных значений параметров, который, однако, может как принадлежать, так и не принадлежать $(0,1)$.

При выполнении (9) из условия $S'(x_0) = 0$ определяется сам кратный корень,

$$S'(x_0) = 3\sigma^2\Big(x_0 - \frac{1}{2}\Big)^2 + 2\lambda\Big(x_0 - \frac{1}{2}\Big) + 1 - \frac{\sigma^2}{4} = 0\,,$$

$$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{2\lambda(1+2\sigma^2) + (18\alpha - 9)\sigma^2}{12\sigma^2 - 3\sigma^4 - 4\lambda^2}\,. \quad (10)$$

Причем, такое решение возможно только тогда, когда дискриминант квадратного уравнения положителен, что означает $4\lambda^2 + 3\sigma^4 - 12\sigma^2 > 0$. Таким образом критическая поверхность Σ должна быть расположена вне поверхности $\{(\lambda,\sigma^2,\alpha) : \Delta \equiv 4\lambda^2 + 3\sigma^4 - 12\sigma^2 = 0\}$ эллиптического цилиндра, имея с ней точки соприкосновения. В точках соприкосновения Σ с поверхностью цилиндра реализуется тройной корень уравнения $S(x) = 0$, $x_0 = 1/2 - \lambda/3\sigma^2$. Остальные точки поверхности соответствуют двойному корню. Для того, чтобы кратный корень x_0 соответствовал бифуркации плотности $p(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $0 < x_0 < 1$, что эквивалентно неравенству

$$\left|\frac{4\lambda(1+2\sigma^2)+36\,\varepsilon\sigma^2}{4\lambda^2+3\sigma^4-12\sigma^2}\right| < 1\,,$$

которое накладывает дополнительное ограничение на параметры $(\lambda, \sigma^2, \alpha)$ (для тройного корня оно имеет вид $2|\lambda| < 3\sigma^2$). Вводя гиперболы

$$G_\pm(\lambda,\sigma^2,\varepsilon) \equiv (2\sigma^2+1\pm 2\lambda)^2-(\sigma^2+2(4\mp 9\varepsilon))^2+4(4\mp 9\varepsilon)^2-1=0\,, \quad (11)$$

последнее неравенство записывается в виде

$$G_+(\lambda,\sigma^2,\varepsilon)G_-(\lambda,\sigma^2,\varepsilon) \ge 0\,. \quad (12)$$

Оно определяет допустимую область для расположения точек критической поверхности, границами которой являются соответственно гиперболы $G_\pm = 0$. Это условие очень важно, так как поверхность, определяемая уравнением (9) не является связной. [4)]

Замечание 2. Так как при $|\varepsilon| \ne 1/2$ кратное решение x_0 не может пересечь границы 0 и 1 (см. (10)) при изменении параметров, то кривая Σ_ε, определяемая уравнением (9), при $\varepsilon = \mathrm{const}$, $|\varepsilon| \ne 1/2$ и, в частности, та ее часть, которая представляет пересечение критической поверхности с плоскостью $\varepsilon = \mathrm{const}$, не имеет общих точек с гиперболами $G_\pm = 0$. Исключение могут составлять точки с $\sigma^2 = 0$, где плотность $p(x)$ не существует, и точки, где $\Delta = 0$. Последнее связано с невозможностью рассуждать по непрерывности в формуле (10), которая теряет смысл, так как предел к точке, в которой $\Delta = 0$, по различным направлениям может быть разным.

Замечание 3. Пересечение кривой Σ_ε с гиперболами $G_\pm = 0$ в точках, для которых $\Delta = 0$, но $\sigma^2 \ne 0$, возможно только в точках соприкосновения кривой с эллипсом $\Delta = 0$, так как е ее точки не могут находиться внутри этого эллипса.

[4]Заметим, что при $\alpha \ne 1/2$, кроме кратного корня x_0, имеется еще один не равный ему корень, за исключением точек соприкосновения поверхности Σ с поверхностью цилиндра. При этом некратный корень соответствует максимуму плотности $p(x)$ и бифуркация состоит в одновременном рождении дополнительного максимума вместе с минимумом.

Глава 3. Анализ критической поверхности

Исследование критической поверхности проведем, изучая ее пересечения с плоскостями при фиксированных значениях $\alpha \in (0,1)$ (либо $\varepsilon \in (-1/2,\ 1/2)$). Эти пересечения представляют собой кривые Σ_ε четвертого порядка. Ту часть у каждой из этих кривых, которая удовлетворяет условию (12), будем в дальнейшем называть *критической кривой.* Полная классификация кривых четвертого порядка отсутствует, ввиду чрезвычайного разнообразия их качественного устройства (см. [30]). В частности, они могут быть многосвязными и при этом не существует общего метода определения числа их связанных компонент. Кривая Σ_ε, как раз, оказывается многосвязной, и поэтому возникает задача выделения именно той из ее компонент, которая соответствует именно критической кривой. В общем положении значений параметров $(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)$, для выделения требуемой компонеты и ее исследования, потребуется провести довольно сложный геометрический анализ.

Обозначим посредством $(\lambda_*(\varepsilon), \sigma_*^2(\varepsilon))$ координаты точек соприкосновения кривой Σ_ε с эллипсом $\Delta = 0$ на плоскости $\varepsilon = \mathrm{const}$, указав явно их зависимость от ε. Они находятся из совместного решения уравнений $P(\lambda_*, \sigma_*^2, \varepsilon) = 0$ и $4\lambda_*^2 + 3\sigma_*^4 - 12\sigma_*^2 = 0$. Из этих уравнений, находим, что

$$\lambda_* = -\frac{9\varepsilon\sigma_*^2}{1 + 2\sigma_*^2}\ , \tag{13}$$

и, используя уравнение эллипса,

$$4(\sigma_*^2 - 1)^3 = 27\sigma_*^2(1 - 4\varepsilon^2)\,. \tag{14}$$

Это уравнение однозначно определяет, неявным образом, зависимость $\sigma_*^2(\varepsilon)$, так как (14) имеет одно вещественное решение $\sigma_*^2(\varepsilon) \geq 1$ (при $\sigma_*^2 < 1$ уравнение не имеет решений, так как $|\varepsilon| < 1/2$). В самом деле, в правой части (14) находится линейная функция, а в левой – выпуклая при $\sigma_*^2 > 1$ функция. Следовательно, при $\sigma_*^2 > 1$ имеется не более двух вещественных решений. С другой стороны, значение линейной функции в правой части больше значения функции в левой части при $\sigma_*^2 = 1$. Поэтому имеется только одно пересечение прямой с выпуклой левой частью при указанных значениях σ_*^2. Это пересечение должно происходить при $\sigma_*^2 < 4$. Заметим также, что равенство $\sigma_*^2 = 1$ возможно только при $|\varepsilon| = 1/2$.

Перейдем в уравнении $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = 0$ к полярным координатам с центром в точке соприкосновения $(\lambda_*(\varepsilon), \sigma_*(\varepsilon))$

$$\lambda = \lambda_* + \rho \cos \varphi \,, \quad \sigma^2 = \sigma_*^2 + \rho \sin \varphi \tag{15}$$

и разложим полином $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)$ в ряд Тейлора около этой точки по степеням ρ. Это разложение обрывается на четвертой степени по ρ,

$$P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = -3(\sigma_*^2 - 1)^2 (\rho \sin \varphi)^2 \, Q_2(z) + \frac{1}{6} (\rho \sin \varphi)^3 \, Q_3(z) + \frac{1}{16} (\rho \sin \varphi)^4 \, Q_4(z) \,,$$

где введена переменная $z = \mathrm{ctg}\varphi$ и ее значение $z_* = \mathrm{ctg}\varphi_* = \lambda_*/3\sigma_*^2 \in [-1/2, 1/2]$,

$$Q_2(z) = (z - z_*)^2 \geq 0 \,, \quad Q_4(z) = (4z^2 - 1)^2 \geq 0 \,,$$

$$Q_3(z) = 8z_*(7\sigma_*^2 - 1)z^3 - 6(\sigma_*^2 + 5)z^2 + 18z_*(1 + \sigma_*^2)z + \frac{3}{2}(\sigma_*^2 - 3) \,.$$

Точки, у которых $\mathrm{ctg}\varphi = \pm\infty$, $\varphi = 0, \pi$ соответствуют пересечению кривой с уровнем $\sigma^2 = \sigma_*^2$.

Значение z_* принадлежит интервалу $(-1/2, 1/2)$. Это следует из того, что точка (λ_*, σ_*^2) лежит на эллипсе, и поэтому $z_*^2 = \lambda_*^2/9\sigma_*^4 = (4 - \sigma_*^2)/12\sigma_*^2 \leq 1/4$ при $\sigma_*^2 \geq 1$.

Найдем аналитическое выражение, определяющее кривую Σ_ε. Поделим $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon)$ на ρ^2, исключив значение $\rho = 0$, которое соответствует точке соприкосновения кривой с эллипсом. Тогда получаем квадратное уравнение относительно ρ,

$$\frac{1}{16}\rho^2 Q_4(z) \sin^2 \varphi + \frac{1}{6}\rho Q_3(z) \sin \varphi - 3(\sigma_*^2 - 1)^2 Q_2(z) = 0 \,. \tag{16}$$

Дискриминант этого уравнения неотрицателен, в силу определения функций $Q_2(z), Q_4(z)$. Поэтому получаем две функции, определяемые (9),

$$\rho_\pm(\varphi) = \frac{4}{3Q_4(z) \sin \varphi} \Big(-Q_3(z) \pm \sqrt{Q_3^2(z) + 27(\sigma_*^2 - 1)^2 Q_4(z) Q_2(z)} \Big) \,. \tag{17}$$

Они описывают кривую Σ_ε при тех значениях φ, при которых $\rho_\pm(\varphi) \geq 0$.

Ввиду неотрицательности дискриминанта, функция $\rho_+(\varphi) \geq 0$ при $\sin\varphi \geq 0$ и поэтому определяет кривую только при $\varphi \in [0, \pi]$. Наоборот, функция $\rho_-(\varphi)$ определяет кривую только при $\sin\varphi \leq 0$, $\varphi \in [-\pi, 0]$, независимо от знака $Q_3(z)$.

Используя связь $z_*^2 = (4 - \sigma_*^2)/12\sigma_*^2$, находим, что коэффициент $Q_3(z_*)$ положителен

$$Q_3(z_*) = \frac{8}{9\sigma_*^4}(\sigma_*^2 - 1)^3 > 0\,.$$

По непрерывности, $Q_3(z) > 0$ в окрестности точки z_* при $\sigma_*^2 > 1$. Тогда функция $\rho_+(\varphi)$ определена при φ в окрестности φ_*. При этом, ввиду $Q_2(z_*) = 0$, $\rho_+(\varphi_*) = 0$, в этой точке имеется соприкосновение кривой Σ_ε с эллипсом.

Функция $\rho_-(\varphi)$ может обращаться в нуль только в исключительном случае, когда одновременно $Q_3(z) = 0$ и $Q_2(z)Q_4(z) = 0$, что реализуется только при $\varepsilon = \pm 1/2$. Таким образом, при $|\varepsilon| < 1/2$ функция $\rho_-(\varphi) > 0$ при $\varphi \in (-\pi, 0)$.

Если дискриминант не равен нулю, то есть $|\varepsilon| < 1/2$, то кривые, определяемые $\rho_+(\varphi)$ и $\rho_-(\varphi)$, могут иметь общие точки только при $\varphi = 0, \pi$. Из уравнения (16) следует, что функции $\rho_\pm(\varphi)$, которые являются его решениями, имеют конечные совпадающие для них обоих пределы r_+ и r_- при $\varphi \to 0$ и π, соответственно, которые удовлетворяют уравнению

$$r_\pm^2 \pm \varkappa r_\pm - 3(\sigma_*^2 - 1)^2 = 0\,, \qquad \varkappa = 8z_*(7\sigma_*^2 - 1)/6\,.$$

Теорема 1. *Функции $\rho_+(\varphi)$ и $\rho_-(\varphi)$ определены и неотрицательны, соответственно, на $[-\pi, 0]$ и на $[0, \pi]$ при $z \neq \pm 1/2$. При этом $\rho_+(\varphi) \to \infty$ при $z \to \pm 1/2$.*

□ Функция $\rho_+(\varphi)$ определена в окрестности угла φ_* и при этом $z_* \in (-1/2, 1/2)$. Покажем, что она определена на всем интервале $(-1/2, 1/2)$.

На ограниченном интервале изменения $z = \operatorname{ctg}\varphi$ полиномы $Q_2(z)$, $Q_3(z)$, $Q_4(z)$ от z ограничены. Тогда, как следует из формулы (17), функция $\rho_+(\varphi)$ может стремиться к ∞ только в том случае, когда $Q_4(z) \to 0$, то есть $z \to \pm 1/2$ и $\sin\varphi \to 2\sqrt{5}/5$. В этих условиях, числитель в (17) стремится к ненулевому значению. Вычисление значений $Q_3(\pm 1/2)$ на основе выражения (13) для λ_* и $z_* = \lambda_*/3\sigma_*^2$ приводит к формуле

$Q_3(\pm 1/2) = -12(1 \pm 2\varepsilon) < 0$. Ввиду отрицательности этой величины, $\rho_+(\varphi) > 0$. Следовательно, получаем следующую асимптотическую формулу

$$\rho_+(\varphi) = \frac{\sqrt{5}|Q_3(\pm 1/2)|}{12(z^2 - 1/4)^2}\bigl(1 + o(1)\bigr) \text{ при } \ z \to \pm\frac{1}{2}\,.$$

Таким образом, положительная функция $\rho_+(\varphi)$ в области определения $[0, \pi]$ имеет по переменной z интервалы непрерывности $(-\infty, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, \infty)$ и при $|z| = 1/2$ – разрывы второго рода.

Из (17) следует, что функция $\rho_-(\varphi)$ определена при всех $\varphi \in (-\pi, 0)$, за исключением, может быть, тех углов, для которых $Q_4(z) = 0$. Однако, при $z = \pm 1/2$ она имеет конечный предел

$$\lim_{z \to \pm 1/2,\, \sin\varphi < 0} \ \rho_-(\varphi) = 9\sqrt{5}(\sigma_*^2 - 1)^2 Q_2(\pm 1/2)/|Q_3(\pm 1/2)|\,.$$

Следовательно, по непрерывности, $\rho_-(\varphi)$ определена на всем интервале $(-\pi, 0)$. ■

Следствие 1. *Функции $\rho_\pm(\varphi)$ определяют двухсвязную кривую так, что одна ее компонента Σ_+ определяется функцией $\rho_+(\varphi)$ при $\varphi \in (\psi, \pi - \psi)$, $\psi = \mathrm{arcctg}(1/2)$, а вторая компонента Σ_- определяется на дополнении к $[-\pi, \pi] \setminus [\psi, \pi - \psi]$ следующим образом:*

$$\begin{cases} \rho_+(\varphi) & ,\ \varphi \in [0, \psi)\,; \\ \rho_-(\varphi) & ,\ \varphi \in [-\pi, 0]; \\ \rho_+(\varphi) & ,\ \varphi \in (\pi - \psi, \pi]. \end{cases}$$

□ Утверждение следует из того, что связная компонента кривой должна определяться непрерывной функцией, и того, что $\rho_\pm(\varphi)$ имеют совпадающие предельные значения при $\varphi = 0, \pi$. ■

Исследуем поведение компоненты Σ_+ в окрестности точки ее соприкосновения $(\lambda_*, \sigma_*^2 > 1)$ с эллипсом $\Delta = 0$, $\varepsilon = \mathrm{const}$, то есть при значениях φ в малой окрестности угла φ_* или, что то же самое, при значениях z в малой окрестности z_*, где $\rho_+(\varphi) = o(1)$. Покажем, что компонента имеет особенность типа «касп» с острием в этой точке, направленным в сторону эллипса и касательной, направленной под углом φ_*.

Теорема 2. *В локальных декартовых координатах (u, v) с центром в точке $(\lambda_*, \sigma_*^2 > 1)$ кривая, представляемая функцией $\rho_+(\varphi)$, описывается* *асимптотической формулой в окрестности точки* $(0,0)$

$$u = \mathrm{const}|v|^{2/3}\,, \quad v \to 0\,.$$

$\square$ Найдем асимптотическое выражение функции $\rho_+(\varphi)$ в окрестности точки (λ_*, σ_*^2) при малых значениях $(z - z_*)$. Так как $Q_3(z_*) > 0$ и $Q_4(z_*) \neq 0$, $Q_2(z) = (z - z_*)^2$, то из (17) получаем следующую асимптотическую с точностью до $(z - z_*)^2$ формулу при $z \to z_*$:

$$\rho_+(\varphi) = 18\frac{(\sigma_*^2 - 1)^2}{\sin\varphi_*}\frac{Q_2(z)}{Q_3(z_*)} + O((z - z_*)^3)\,.$$

Учитывая, что $\sin\varphi_* = (1 + z_*^2)^{-1/2}$, и явное выражение для $Q_3(z_*)$, эта формула преобразуется к виду

$$\rho_+(\varphi) = \frac{3\sigma_*^2}{1 - 4\varepsilon^2}(\sigma_*^2 - 1)^2(1 + z_*^2)^{1/2}(z - z_*)^2 + O((z - z_*)^3)\,.$$

Перейдем в локальные декартовы координаты (u, v) с центром в точке (λ_*, σ_*^2) и u-осью, направленной под углом φ_*. При этом $u > 0$. В терминах таких координат, кривая $\rho_+(\varphi)$ представляется уравнением $u^2 + v^2 = C\mathrm{arctg}^4(v/u)$, где $\rho_+(\varphi) = (v^2 + u^2)^{1/2}$, $\varphi - \varphi_* = \mathrm{arctg}(v/u)$. Из уравнения следует, что при $u, v \to 0$ вдоль кривой выполняется $v/u \to 0$. Следовательно, при указанном переходе, имеет место асимптотическая эквивалентность $u^2 + v^2 \propto (v/u)^4$. В свою очередь, это приводит к тому, что $u^6 \propto v^4$, то есть $u \propto |v|^{2/3}$, $v \to 0$. $\blacksquare$

Согласно этой теореме, критическая кривая состоит из двух *ветвей*, сшитых в точке соприкосновения с эллипсом $\Delta = 0$.

Для установления возможности пересечения компонент $\Sigma_\pm$ с гиперболами $G_\pm = 0$ перейдем в уравнении (11) к полярным координатам $(\rho^{(\pm)}, \varphi)$,

$$\rho^{(\pm)}\big[4(1 \pm \sin 2\varphi) - \sin^2\varphi\big] + \\ +2\big[2\cos\varphi\big(2(\lambda_* \pm \sigma_*^2) \pm 1\big) + \sin\varphi(3\sigma_*^2 \pm 4\lambda_* - 6 \pm 18\varepsilon)\big] = 0\,, \quad (18)$$

где при подстановке использовано, что $G_\pm(\lambda_*, \sigma_*^2, \varepsilon) = 0$ и опущено указание зависимости от ε в величинах λ_* и σ_*^2. Гиперболы $G_\pm = 0$ являются двухсвязными кривыми, но вид уравнения (18) указывает на то, что у каждой из них имеется компонента, которая проходит через центр полярной системы координат. У такой компоненты и только у нее найдется угол $\varphi^{(\pm)}$, где $\rho^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}) = 0$. Углы $\varphi^{(\pm)}$ определяют наклоны касательных к гиперболам относительно направления λ-оси в центре координат. В результате, получаем

$$z^{(\pm)} = \frac{6z_* \mp 3(\sigma_*^2 - 2)}{2(2\sigma_*^2 + 1) \pm 12\sigma_*^2 z_*}\,, \tag{19}$$

где введено обозначение $\operatorname{ctg}\varphi^{(\pm)} = z^{(\pm)}$. Здесь знаменатель больше нуля, в силу неравенства

$$z_*^2 = \frac{4 - \sigma_*^2}{12\sigma_*^2} < \left(\frac{2\sigma_*^2 + 1}{6\sigma_*^2}\right)^2,$$

которое имеет место при $\sigma_*^2 > 1$.

Следующее утверждение дает ответ на вопрос, какая из компонент $\Sigma_\pm$ кривой соответствует пересечению критической поверхности с плоскостью $\varepsilon = \mathrm{const}$.

Теорема 3. *Критическая кривая представляется компонентой Σ_+ двухсвязной кривой Σ_ε.*

□ Необходимо установить какая из непрерывных компонент кривой, из указанных в Следствии 1, удовлетворяет условию (12). Компоненты кривой могут пересекаться с гиперболами $G_\pm = 0$ либо в точках оси $\sigma^2 = 0$, либо в точках соприкосновения с эллипсом $\Delta = 0$ (см. Замечания 2 и 3). Из формулы (11) следует, что гиперболы могут пересекать ось $\sigma^2 = 0$ (λ-ось) в точках с $\lambda = 0, \pm 1$. Однако, из (9) получаем, что точки $(\pm 1, 0)$ на плоскости (λ, σ^2) не лежат на кривой Σ_ε при $\varepsilon \neq 1/2$.

Кривая Σ_+ не проходит через точку $(0,0)$ на плоскости (λ, σ^2), которая имеет полярные координаты $((\sigma_*^4 + \lambda_*^2)^{1/2}, \varphi_0)$ относительно (λ_*, σ_*^2), где $\mathrm{ctg}\varphi_0 = \lambda_*/\sigma_*$, $\sin\varphi_0 < 0$, так как $\rho_+(\varphi_0) < 0$. Так как кривая Σ_ε проходит через точку $(0,0)$ ($P(0,0,\alpha) = 0$), то через эту точку должна проходить кривая Σ_-.

Кривая Σ_-, согласно ее определению, не проходит через точку соприкосновения, в которой допустимо пересечение гипербол $G_\pm = 0$ с Σ_ε (см. Замечание 3). Поэтому компонента Σ_- может иметь общие точки с этими гиперболами только при $\sigma^2 = 0$, но такое пересечение, согласно вышесказанному, имеет место только в точке $(0,0)$, которая принадлежит им обоим.

Докажем, теперь, что кривая Σ_- при $\varphi \neq \varphi_0$ находятся внутри области, определяемой неравенством $G_+ G_- < 0$. Так как компонента Σ_- может иметь только одну общую точку $(0,0)$ с каждой из гипербол $G_\pm = 0$, то она будет находиться в указанной области, если неравенство имеет место в окрестности этой общей точки.

Доказательство выполнимости неравенства $G_-G_+ < 0$ для точек кривой Σ_-, сколь угодно близких к декартовой точке $(0,0)$, основано на уравнении $P(\lambda, \sigma^2, \varepsilon) = 0$, которому она удовлетворяет. Определим, исходя из него, направление касательной к этой компоненте в точке $(0,0)$, где $\varphi = \varphi_0$.

Так как $\left(\partial P/\partial\sigma^2\right)_{(0,0)} = -4$, $\left(\partial P/\partial\lambda\right)_{(0,0)} = 0$, то по теореме о неявной функции $\sigma^2(\lambda)$, $(d\sigma^2/d\lambda)_{(0,0)} = 0$, то есть касательная к кривой $\rho_-(\varphi)$ в нулевой точке направлена по прямой с $\sigma^2 = 0$.

Каждая из гипербол пересекает компоненту в нулевой точке. Покажем, что каждая из них имеет в этой точке касательную, пересекающую ось $\sigma^2 = 0$, рассматривая эти гиперболы как функции $\sigma^2_\pm(\lambda)$. Из уравнений (11), следует, что неявные функции $\sigma^2_\pm(\lambda)$ в точке $(0,0)$ имеют касательные с коэффициентами

$$\left(\frac{d\sigma^2_\pm}{d\lambda}\right)_{(0,0)} = [3(1 \mp 3\varepsilon)]^{-1} \neq 0\,.$$

Тогда, точки $(\lambda \in \mathbb{R}, 0)$ компоненты Σ_-, достаточно близкие к нулевой точке, находятся в области $G_-G_+ < 0$, так как гиперболы в этих точках принимают значения $G_\pm(\lambda, 0, \varepsilon) = \pm\, 4\lambda + O(\lambda^2)$ при $\lambda \to 0$.

Рассмотрим возможность пересечения гипербол компонентой Σ_+. Такая возможность имеется только в точке соприкосновения $(\lambda_*(\varepsilon), \sigma_*(\varepsilon))$, то есть в центре полярной системы координат. Компонента Σ_+ разделяет полуплоскость $(\lambda, \sigma^2 \geq 0)$ на две части. Если имеется пересечение какой-либо из гипербол $G_+ = 0$ или $G_- = 0$ с этой компонентой, то такая гипербола должна, при непрерывном изменении угла φ, перейти из одной части плоскости в другую, проходя через точку соприкосновения так, что $\rho^{(+)}(\varphi^{(+)}) = 0$, соответственно $\rho^{(-)}(\varphi^{(-)}) = 0$. Покажем, что такие переходы невозможны.

Так как компонента Σ_+ обладает каспом в точке соприкосновения (λ_*, σ_*), то есть имеет точку поворота, при $\varphi = \varphi_*$ с касательной в виде луча, исходящего под углом φ_* из этой точки, то, для доказательства невозможности перехода гипербол из одной части полуплоскости в другую, достаточно показать, что $\varphi^{(-)} > \varphi_* > \varphi^{(+)}$, то есть имеет место $z^{(+)} < z_* < z^{(-)}$. Эти неравенства эквивалентны, в силу $z_*^2 = (4 - \sigma_*^2)/12\sigma_*^2$, неравенствам $(1 \pm 2z_*)(\sigma_*^2 - 1) > 0$. Последние справедливы при $z_* \in (-1/2, 1/2)$ и $\sigma_*^2 > 1$. ■

Следствие 2. *При* $\sigma^2 \to \infty$ *ветви* $\lambda_\pm(\sigma^2)$ *критической кривой* Σ_+ *в плоскости* (λ, σ^2), *при фиксированном значении* ε, *удовлетворяют неравенствам*

$$-\frac{1}{2}(\sigma^2 - \sigma_*^2) + \lambda_* < \lambda_-(\sigma^2) < \lambda_+(\sigma^2) < \frac{1}{2}(\sigma^2 - \sigma_*^2) + \lambda_*$$

и имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\lambda_-(\sigma^2) = -\frac{\sigma^2}{2} + \sigma\sqrt{2(1-2\varepsilon)} + O(1)\,, \quad \lambda_+(\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{2} - \sigma\sqrt{2(1+2\varepsilon)} + O(1)\,.$$

□ Так как критическая кривая определяется функцией $\rho_+(\varphi)$ при $\varphi \in (\psi, \pi - \psi)$, то неравенства следуют из (15) и ограничения на угол $|\mathrm{ctg}\varphi| = |z| < 1/2$.

Разделим уравнение (9) на $\sigma^8/16$ и введем новую переменную $a = 2\lambda/\sigma^2$,

$$\tilde{P}(a, \sigma^2, \varepsilon) \equiv$$
$$\equiv a^4 + 4a^2\Big(\sigma^{-4} - 5\sigma^{-2} - 1/2\Big) - 8\varepsilon a(9\sigma^{-2} + 18\sigma^{-4} - a^2\sigma^{-2}) -$$
$$- \Big(4/\sigma^2 - 1\Big)^3 - 432\sigma^{-4}\varepsilon^2 = 0\,.$$

Согласно Теореме 1 и (15) ветви $\lambda_\pm(\sigma^2)$ компоненты Σ_+ стремятся к бесконечности при $\sigma^2 \to \infty$. Поэтому асимптотики функций $a_\pm(\sigma^2) = 2\lambda_\pm(\sigma^2)/\sigma^2$, которые удовлетворяют этому уравнению, вычисляются на его основе переходом к пределу $\sigma^2 \to \infty$. В силу доказанных неравенств для ветвей $\lambda_\pm(\sigma^2)$, функции $a_\pm(\sigma^2)$ ограничены. Тогда каждая из них имеет предел a_*. Для этих предельных значений получаем уравнение $(a_*^2 - 1)^2 = 0$ так, что $a_* = \pm 1$ – его двукратно вырожденные корни. Подстановка выражений $a = \pm 1 + b$ в уравнение, где $b = o(1)$ при $\sigma^2 \to \infty$ приводит, с точностью до $O(b^3)$, к уравнению $b^2 - 8\sigma^{-2} + 16\varepsilon\sigma^{-2}\mathrm{sgn}(a_*) = 0$, что дает четыре значения для функций $b = \pm 2\sqrt{2}(1 + 2\varepsilon\,\mathrm{sgn}(a_*))^{1/2}/\sigma$.

Из Теоремы 3 следует, что наименьшее и наибольшее из этих четырех значений соответствуют асимптотическам кривой Σ_- при $\sigma^2 \to \infty$, что завершает доказательство утверждения. ■

Пример. В качестве примера рассмотрим критическую кривую в симметричном случае, когда $\alpha = 1/2$, которая описывается биквадратным уравнением. Кривая, определяемая им, двухсвязна. Его решение, соответствующее разрешенной области значений параметров, имеет вид

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sigma^4}{2} + 5\sigma^2 - 1 - (2\sigma^2+1)^{3/2}\Big].$$

Из условия положительности $\lambda^2 > 0$ следует ограничение $\sigma^2 \geq 4$, то есть критическая кривая расположена выше эллипса.

В точке соприкосновения $(0,4)$ кривая $\sigma^2(\lambda)$ имеет «касп», который характеризуется *критическим индексом* $2/3$, так как асимптотика кривой в точке $\lambda = 0$ имеет вид $\sigma^2 = 4 + 3(2|\lambda|)^{2/3}(1+o(1))$. График функции $\sigma^2(\lambda)$ приведен на рис. 1.

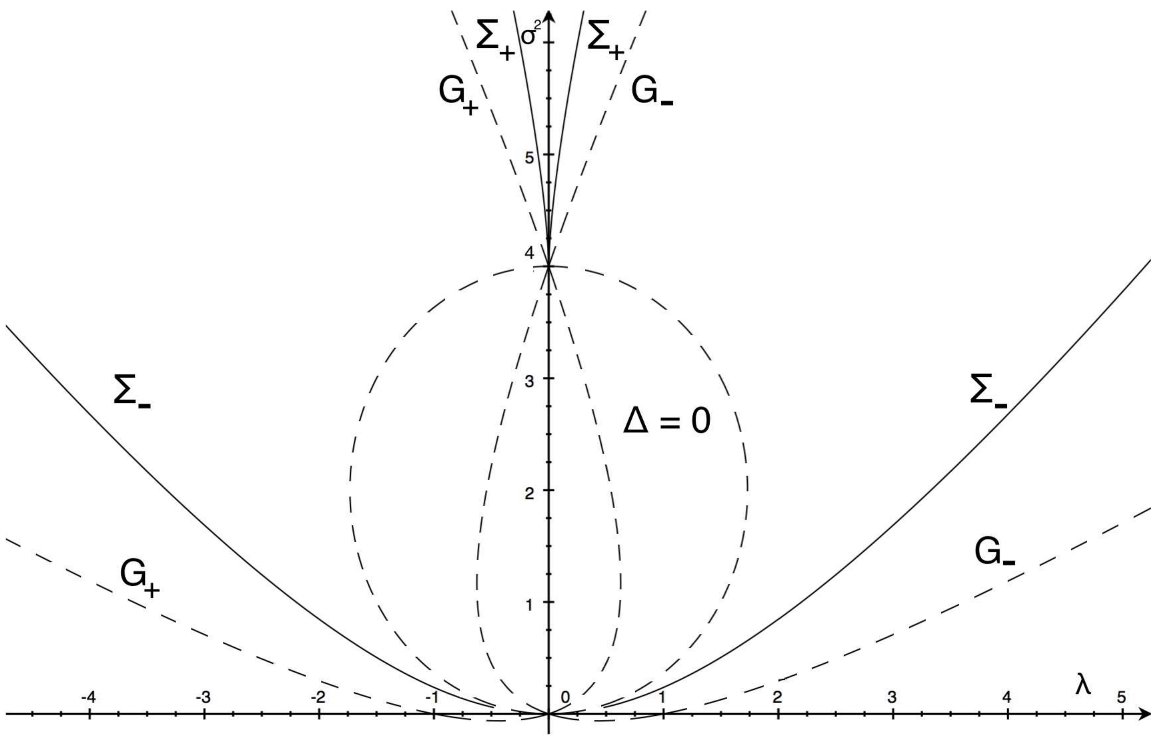

Рис. 1. Кривые Σ_+ и Σ_- в симметричном случае. Сплошные линии описывают кривые. Пунктирные линии описывают гиперболы $G_\pm$ и эллипс $\Delta = 0$.

Глава 4. Исследование критической кривой в предельных случаях

Выводы, полученные в предыдущем разделе, справедливы при любых значениях $\varepsilon \in (-1/2, 1/2)$. Однако, с точки зрения получения удобных расчетных формул для критической кривой, в разложении выражения (17) для $\rho_+(\varphi)$ вблизи точки каспа можно ограничиться первыми слагаемыми только в случае, когда $|\varepsilon|$ не очень близок к значению $1/2$. В этом разделе мы изучим противоположный случай, когда $(1/2-|\varepsilon|)$ является малым параметром. Такой анализ опирается на решения уравнения (9) при $|\varepsilon| = 1/2$, несмотря на то, что они являются нефизическими. Эти решения представляются явными формулами для кривой Σ_ε. Принимая во внимание симметрию критической поверхности при замене ε на $-\varepsilon$, мы изучим решения только в случае $\varepsilon = -1/2$. Непосредственно проверяется, что они описываются следующим образом. Кривая Σ_ε состоит из: двукратной прямой $\lambda_0 = 1+\sigma^2/2$ и кривой, состоящей из двух полупарабол $\lambda_\pm = (-\sigma^2 \pm 4\sigma)/2$, которые сшиваются в точке $\lambda = 3/2$, $\sigma^2 = 1$.

В рассматриваемом нами случае, нужно построить теорию возмущений для формы кривой Σ_+ при малых значениях α. Для того, чтобы установить тип асимптотического разложения, которое мы строим в виде степенного разложения по дробным степеням α, совершим подстановку

$$\lambda = (3+u+v)/2\,, \quad \sigma^2 = 1+v-u \tag{20}$$

так, что уравнение (9) и уравнение эллипса в этих переменных принимают вид

$$u^2(v^2+4u) + \alpha\{36u^2 + 6uv(u+v-3) - 4(u^3+v^3)\} - 27\alpha^2(1+v-u)^2 = 0\,,$$

$u^2+v^2-uv+3u = 0$, соответственно.

Найдем правильную асимптотику изменения переменных u, v в окрестности точки $(0,0)$ при $\alpha \to 0$. Для этого произведем замену $u \to \alpha^a u$, $v \to \alpha^b v$ с показателями $a > 0$, $b > 0$, которые выбираются из условия существования в левой части уравнения группы не менее чем из двух слагаемых с одинаковыми минимальными значениями степеней. Анализ возможностей такого выбора параметров a и b после произведенной замены приводит к единственным значениям $a = 2/3$, $b = 1/3$.

В результате, производя баланс слагаемых с минимальной степенью величины α, равной 2, и отбрасывая слагаемые более высокого порядка по степеням α, имеем

$$R(u) \equiv 4(u^3 - v^3 - 27) + (uv - 9)^2 = 0\,. \tag{21}$$

Уравнение (21) описывает кривую третьего порядка на плоскости (u, v). Покажем, что она двухсвязна и выделим из ее компонент ту, которая, как и кривая Σ_+, обладает точкой поворота.

При $v \to \infty$ неявная функция $u(v)$ не может быть ограниченной. Поэтому имеются асимптотики кривой $u(v) \to \infty$ при $v \to \infty$. Из (21) следует, что возможны следующие типы асимптотического поведения: $u \sim v^2$, $u \sim v^{1/2}$. Положим $u = kv^2(1 + o(1))$. После подстановки этого выражения в (21) с удержанием главных членов $\sim v^6$, получаем условие $k = -1/4$ для их исчезновения. После этого находим, что $o(1) = -2/v + o(v^{-1})$ является главным поправочным слагаемым. Асимптотика второго типа получается из первой на основе соображений симметрии уравнения (21) относительно u и v.

Применим алгоритм Евклида к паре полиномов $R(u)$ и $R'(u)$. Остаток, после применения алгоритма пропорционален $(v^3 - 27)^3$, который обращается в нуль при $v = 3$. Следовательно, имеется точка $(-3, 3)$, в которой $R(u)$ имеет кратный корень, то есть в ней может реализоваться либо самопересечение кривой, либо точка поворота («касп»).

Кривая симметрична относительно диагонали $u = -v$ и имеет с ней две точки пересечения. Эти точки определяются из уравнения $(u-1)(u+3)^3 = 0$. Откуда видно, что точка $(-3, 3)$ является особой. Во второй точке $(1, -1)$ кривая пересекает трансверсально диагональ $v = -u$, так как в ней невозможно ее самопересечение.

По топологическим соображениям, наличие двух точек пересечения с побочной диагональю, вместе с неограниченностью кривой, позволяет сделать заключение о ее двухсвязности.

Таким образом, согласно поставленной выше задаче, нужно выбрать компоненту кривой, на которой находится точка $(-3, 3)$ и исследовать эту компоненту в окрестности этой особой точки. С этой целью перейдем к полярным координатам с центром в точке $(-3,3)$, $u = -3 + \rho\cos\varphi$, $v = 3 + \rho\sin\varphi$. В результате, после исключения тривиального корня $\rho = 0$, получаем следующее квадратное относительно ρ уравнение

$$(\rho^2/4)\sin^2 2\varphi + \rho(\cos\varphi - \sin\varphi)(4 + 5\sin 2\varphi) - 27(1 + \sin 2\varphi) = 0\,.$$

Так как последнее слагаемое отрицательно, то положительное решение $\rho(\varphi)$ имеет вид

$$\rho(\varphi) = \frac{2}{\sin^2 2\varphi}\left[(\sin\,\varphi - \cos\,\varphi)(4 + 5\sin\,2\varphi) + \big(2(2 + \sin 2\varphi)\big)^{3/2}\right]\,. \qquad (22)$$

Для того чтобы выяснить характер особенности при $\rho = 0$, нужно найти углы, при которых $\rho(\varphi)$ стремится к нулю в особой точке с $\rho = 0$. При этом можно пренебречь слагаемым пропорциональным ρ^2 в уравнении. Отсюда находим, что функция $\rho(\varphi)$ стремится к нулю при $\varphi \to -\pi/4$, либо $\varphi \to 3\pi/4$. Вводя отклонения $\chi = \varphi + \pi/4$, либо $\chi = \varphi - 3\pi/4$ от этих значений угла φ, находим из уравнения, что в окрестности каждого из них, то есть при $\chi \to 0$, выполняется $\rho^2 \pm 4\sqrt{2}\,\rho - 216\chi^2 + o(\chi^2) = 0$, где верхние знаки соответствуют $\varphi = 3\pi/4$, а нижние — $\varphi = -\pi/4$. Отсюда следует, что $\rho(\varphi) = 27\sqrt{2}\,\chi^2 + o(\chi^2)$ при знаке $(+)$, при знаке $(-)$ решение $\rho(\varphi)$, обращающееся в нуль при $\chi = 0$, ввиду неотрицательности $\rho(\varphi)$, возможно только для изолированного значения $\chi = 0$. Это означает, что кривая $\rho(\varphi)$ может подходить к особой точке только под углом $\varphi = 3\pi/4$. Поэтому она является точкой поворота кривой, то есть в ней реализуется «касп».

Перейдем теперь на выбранной компоненте кривой (22), которая содержит касп, к исходным переменным λ, σ^2. Учитывая все сделанные выше, в процессе анализа, замены переменных, находим

$$\lambda = \frac{1}{2}\big[3(1 + \alpha^{1/3} - \alpha^{2/3}) + \alpha^{1/3}\rho\sin\,\varphi - \alpha^{2/3}\rho\cos\,\varphi\big] + O(\alpha)\,,$$

$$\sigma^2 = 1 + 3\big(\alpha^{1/3} + \alpha^{2/3}\big) + \alpha^{1/3}\rho\sin\,\varphi - \alpha^{2/3}\rho\cos\,\varphi + O(\alpha)\,,$$

где $\rho(\varphi)$, определяется (22). Эти формулы, параметрически, определяют приближенно, с точностью до $\alpha^{2/3}$, критическую кривую при малых значениях α. При $\rho = 0$ они описывают сдвиг точки каспа $(\lambda_*(\varepsilon), \sigma_*^2(\varepsilon))$ при ε вблизи значения $(-1/2)$.

5. Заключение

Проведен полный, в отличие от работ других авторов, анализ критической поверхности Σ модели Хорстхемке-Лефевра, разбивающей ее пространство параметров $(\lambda, \sigma^2 > 0, \alpha \in (0,1))$ на две области, в каждой из которых она имеет два качественно различных стационарных динамических режима. Переход между этими двумя режимами при достаточно медленным (квазистатическом) изменении параметров системы представляет, с физической точки зрения, фазовый переход между двумя «фазами»: унимодальной и бимодальной. Динамический режим в бимодальной фазе состоит из последовательно сменяющих друг друга временных интервалов случайной длительности, в которых относительная концентрация реагентов флуктуирует вблизи значения одного из двух максимумов плотности $p(x)$.

Рассматривая бифуркационную перестройку динамического режима системы как термодинамический фазовый переход, для его количественной характеризации нужно ввести параметр порядка. В качестве такового, по-видимому, нужно выбрать половину расстояния между концентрациями, соответствующими двум модам плотности распределения $p(x)$. Проклассифицируем фазовые переходы в рассмотренной системе, приняв за основу их разделение на два типа согласно следующему признаку: появляется ли в результате перехода отличное от нуля значение параметра порядка скачкообразно (переход 1-го рода) или непрерывно (переход 2-го рода). Тогда, в том случае, когда перестройка плотности $p(x)$ происходит с образованием не более чем двукратного корня уравнения $dp(x)/dx = 0$, то второй максимум плотности возникает отдельно от уже существующего у нее максимума. Поэтому расстояние между этими максимумами не равно нулю в момент перехода и можно говорить о переходе первого рода. С аналитической точки зрения переход реализуется в виде катастрофы *складки*, согласно классификации Тома. Если же перестройка плотности происходит так, что уравнение $dp(x)/dx = 0$ имеет трехкратный корень, то из исчезающего максимума рождается сразу два новых максимума. Поэтому, в этом случае, параметр порядка непрерывным образом начинает возрастать начиная с нулевого значения и нужно говорить о фазовом переходе второго рода. В соответствии с проделанным анализом модели, второй случай реализуется в точке каспа критической кривой, которая находится на эллипсе $\Delta = 0$. При этом мода, в которой происходит бифуркация, расположена в точке $x_0 = 1/2 - \lambda/3\sigma^2$. Согласно классификации Тома этот переход происходит в результате катастрофы *сборки*. Применимость такой классификации связана с тем, что $p(x)$ аналитически зависит от параметров λ и σ^2. Если положить, что роль температуры в рассматриваемой системе выполняет интенсивность шума σ^2, то критический индекс параметра порядка в точках соприкосновения критической кривой равен $1/2$, как это имеет место для катастрофы сборки:

$$(\sigma^2 - \sigma_*^2)\left(\frac{\partial p'}{\partial \sigma^2}\right)_{x_*} + \frac{1}{2}(x_0 - x_*)^2 p'''(x_*) = 0\,, \quad (x_0 - x_*) \sim (\sigma^2 - \sigma_*^2)^{1/2}\,.$$

Вместе с тем, нужно отметить, что фазовый переход 1-го рода в системе происходит без дополнительных затрат теплоты на образование новой фазы, если в качестве термодинамической энтропии S системы выбрать энтропию Шеннона $\int_0^1 p(x) \ln p(x) dx$, которая изменяется непрерывно с изменением параметров системы. Тогда термодинамическая связь $\delta Q = T\delta S$ указывает на отсутствие теплового скачка при переходе из унимодальной фазы в бимодальную.

6. Литература

1. Kimura M., Ohta T. Theoretical aspects of Population genetics / Boston: Princeton University Press, 1971.

2. Arnold L., Horsthemke W., Lefever R. White and coloured external noise and transition phenomena in nonlinear systems // Zs. Phys. – 1978. – B29. – P.367-373.

3. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 11(154);31. – С.130-146.

4. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / Пер. с англ. /М.: Мир, 1987. – 400 с.

5. Kabashima S., Kawakubo T. Observation of noise-induced phase transition in parametric oscillator // Phys. Lett. – 1979. – 70A. – P.375-376.

6. Smythe J., Moss F., McClintock P.V.E. Observation of noise-induced phase transition with an analog simulator / Phys. Rev. Lett. – 1983. – 51; 12. – P.1062-1065.

7. Landa P.S., McClintock P.V.E. Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise / Physics Reports. – 2000. – 323. – P.1-80.

8. Horsthemke W. Noise-Induced Transitions // in: Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology / Eds. L. Arnold, F. Lefever / Berlin : Springer-Verlag, 1981. – P.116-126.

9. Lefever R. Noise-Induced Transitions in Biological Systems // in: Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology / Eds. L. Arnold, F. Lefever / Berlin : Springer-Verlag, 1981. – P.127-136.

10. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions // in: Noise and nonlinear dynamical systems V.2 Theory of noise induced processes in special applications / Eds. Moss F., Mc-Clintock P.V.E. / Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – P.179-208.

11. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology / Berlin : Springer, 2006. - 318 p.

12. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ фазовой диаграммы в стохастической модели химической кинетики бинарной циклической реакции // Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics. – 2013. – 26(169);33. – С.57-63.

13. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Исследование критической поверхности стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции. Сильно асимметричный случай // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – 5(176);34. – С.103-111.

14. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ критической поверхности стохастической модели бинарной циклической реакции с фазовым переходом // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – №25(196); 37. – С.108-118.

15. Яблонский Г.С., Быков В.И., Горбань А.Н. Кинетические модели каталитических реакций / Новосибирск: Наука (Сиб. отделение), 1983. – 256 с.

16. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы /М.: Наука, 1990. – 628 с.

17. Stratonovich R. L. A new representation for stochastic integrals and equations // SIAM J. Control. – 1966. – 4. – P.362.

18. Ito K. Stochastic differential equations on a differentiable manifold // Nagoya Math. J.. – 1950. – 1. – P.35.

19. Van Kampen N.G. Ito versus Stratonovich // J.Stat.Phys. – 1981. – 24. – P.175-187.

20. Moon W., Wettlaufer J.S. On the interpretation of Stratonovich calculus // New Journal of Physics. – 2014. – 16. – P.055017.

21. Wong E., Zakai M. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals / Ann. Math. Stat. – 1965. – 36. – P.1560-1564.

22. Blankenship G., Papanicolaou G.C. Stability and control of stochastic systems wide-band noise disturbances // CIAM J.Appl.Math. – 1978. – 34. – P437-476.

23. Smythe J., Moss F., McClintock P.V.E., Clarkson D. Ito versus Stratonovich revisited / Phys. Lett A. – 1983. – 97. – P.95-98.

24. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения / Киев: Наукова Думка, 1968. – 356 с.

25. Ласкин Н.В., Пелетминский С.В., Приходько В.И. К кинетической теории систем в случайных полях / Теор. мат.физ. – 1978. – 34. – P.244-255.

26. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Корректность стохастического уравнения генетической модели // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – №11(208); 39. – С.161-166.

27. Вирченко Ю.П., Ласкин Н.В. Огрубленное описание распределения решений уравнения Ланжевена / Теор. мат. физ. – 1979. – 41;3. – P.406-417.

28. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.: Изд. МГУ, 1999. – 798 с.

29. Elliott J. Eigenfunction expansions associated with singular differential operators // Trans. Am. Math. Soc. – 1955. – 78. – P.406-425.

30. Савелов А.А. Плоские кривые, систематика, свойства и применение / М.: Физ.-мат. лит. – 1960. – 296 с.