Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Ли Инь

Выпускная квалификационная работа

Динамическая устойчивость принципов оптимальности в кооперативных многошаговых играх с остовным деревом

Специальность 01.01.09
Дискретная математика и математическая кибернетика

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Петросян Л. А.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Петросян Л. А.

Рецензент,
кандидат технических наук,
Асфар С. В.

Санкт-Петербург
2017

Оглавление

Стр.

Введение

В данной диссертации мы исследуем временную состоятельность и представляем формулу для процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации. С помощью формулы процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации мы исследуем пример, чтобы каждый игрок удовлетворил условию индивидуальной рациональности. Далее построим стратегии наказания. Потому что некоторые игроки обращаются к иррациональному поведению. Мы используем стратегии наказания и накажем их. С помощью стратегий наказания мы построим теорему 2 и докажем, что существует равновесие по Нэшу, в котором выигрыш равен выигрышу вдоль оптимальной траектории по Парето.

Далее мы исследуем сильную динамическую устойчивость принципов оптимальности в многошаговых кооперативных играх с полной информацией. С помощью понятия процедуры распределения дележа построено динамическое ядро и доказывается его сильная динамическая устойчивость. Из-за сложности построения динамического ядра предложно его упрощение, которое существенно уменьшает объём вычислений. В ряде случаев упрощенное динамическое ядро принадлежит динамическому ядру. Далее, мы исследуем динамический Вектор Шепли в двухшаговой игре с минимальным остовным деревом. На каждом шаге игроки строят минимальное остовное дерево, и вычисляется Вектор Шепли. На втором шаге один из игроков выбывает из игры с вероятностью p, зависящей от предыдущих стратегий игроков. Используя процедуру распределения дележа проводится регуляризация исходной игры. В конце мы исследуем временную состоятельность для процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации с остовным деревом. Предполагается, что на каждом ребре и в каждой окончательной позиции происходит игра n-лиц с остовным деревом. С помощью формулы процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации мы исследуем пример, в котором каждый игрок удовлетворяет условию индивидуальной рациональности.

Теорию математических моделей принятия оптимальных решений принято называть исследованием операций, поэтому теорию игр можно рассматривать как составную часть исследования операций. [1]

Кооперативные игры предполагают собой способность расширения выгоды участников в ситуациях, включающих в себя стратегические взаимодействия. Различные типы кооперативных решений предлагались:устойчивое множество (фон Нейман и Моргенштерн 1954г.), решение Нэша для переговоров (1950г., 1953 г.).

Индивидуальная рациональность- это основное свойство кооперативных игр. Это значит, что выигрыши, получаемые каждым игроком в кооперативной игре, не меньше, чем выигрыши, получаемые в изначальной некооперативной игре. И выигрыши всех игроков в кооперативных играх должны удовлетворять условиям – эффективности по Парето. Эффективность по Парето гарантирует, что любой игрок не может повысить свои выигрыши без снижения выигрышей других игроков. Кооперация - это одно из основных форм человеческого поведения. Поэтому по многим практическим причинам нам нужно исследовать кооперацию, чтобы она была устойчивой на всей траектории её реализации в многошаговой игре кооперации. В данной диссертации мы исследуем временную состоятельность в многошаговой игре кооперации. см..Петросян (1979 г.) [2], Петросян и Зенкевич (1996 г.), Yeung и Петросян (2004 г. и 2006 г.) [3].

Исследования Петросяна (1979 г.) предлагают метод, с помощью которого легко исследовать временную состоятельность. Мы предполагаем, что если игрок в любой момент кооперации отклоняется от оптимальной траектории, то кооперация будет нарушаться и игроки используют стратегии как в случае антагонистической игры.

Мы предоставляем формулу процедуры распределения выигрыша для того, чтобы никто не захотел отклоняться от оптимальной траектории в многошаговой игре кооперации с полной информацией. Однако в многошаговой игре кооперации с полной информацией игрок может обратиться к иррациональному поведению с целью вымогательства дополнительных выгод, если дальшейшая ситуация позволяет. Это почему мы построить стратегии наказания и накажем их.

Сначала мы представляем основные понятия кооперативной многошаговой игры с полной информацией и временной состоятельности (динамической устойчивости) в многошаговой игре кооперации. Далее приведём пример о временной несостоятельности. Чтобы решить эту проблему, мы представляем формулу для процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации.

$$\beta_i^k = \frac{H_i(z_0) - V^i(z_0;\{i\}, N/\{i\})}{l+1} - [V^i(z_{k+1};\{i\}, N/\{i\}) - V^i(z_k;\{i\}, N/\{i\})]$$

where β_i^k - это процедура распределения выигрыш (ПРВ) в игре Γ_{z_0}. $H_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(l)$ - выигрыш игрока i, вдоль оптимальной по Парето траектория $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_l)$. $V^i(z_k;\{i\}, N/\{i\})$ - характеристическая функция в игре, которая исходная позиция z_k. l - длины игры, под которым будем понимать длину наибольшего пути в графе.

Потом мы выводим эту формулу процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации.(формула для β_i^k) Эта формула выводится в теореме 1 в данной диссертации.

С помощью формулы процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации мы пересматриваем и снова исследуем пример 1, чтобы каждый игрок удовлетворил условию индивидуальной рациональности.

При исследовании многошаговых неантагонистических игр с полной информацией можно выявить множество ситуаций равновесия, сужения которых не всегда являются ситуациями равновесия во всех подыграх исходной игры. К числу таких ситуаций равновесия относятся равновесия в стратегиях наказания. [4]

Мы составляем стратегию наказания с помощью теоремы для того, чтобы доказать, что существует равновесие по Нэшу, в котором выигрыш равен выигрышу вдоль оптимальной траектории по Парето. Потом приводим пример 2.

В второй главе исследуем сильную динамическую устойчивость принципов оптимальности в многошаговых кооперативных играх с полной информацией. Сильная динамическая устойчивость была определена и исследована в работе [8]. Используя результаты этой работы, введём основные понятия. Определим процедуру распределения дележа (ПРД) β_i^k (β_i^k — выплаты игроку i на шаге k игры Γ_{z_0}) и сильную динамическую устойчивость.

В четвёртой главе исследуем динамический Вектор Шепли в двухшаговой игре с минимальным остовным деревом.

В пятой главе исследуем многошаговую игру с остовным деревом.

Глава 1. Определение многошаговой игры

Определение. Кооперативная игра в развёрнутой форме с полной информацией $\Gamma = (N, \{U_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N})$, где $N = \{1, \ldots, i, \ldots, N\}$ - множество игроков, U_i - множество стратегий игрока - i, K_i - функция выигрыша игрока i [4].

Определение. Пусть X - множество вершины дерева игры, $\Gamma = (N, \{U_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N})$ игра на древовидном конечном графе.

Определение. Пусть F - отображение X в X, и $A \subset X$. Под образом множества A будем понимать множество $F(A) = \cup_{x \in A} F_x$.

Полагаем $F(\emptyset) = \emptyset$. Можно убедиться в том, что если $A_i \subset X$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$F(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} F(A_i), F(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} F(A_i)$$

Определение. Рассмотрим разбиение множества вершин X на $n+1$ множество $X_1, X_2, X_3 \ldots, X_n, X_{n+1}$,

$$\underset{i=1}{\overset{n+1}{\cup}} X_i = X, X_k \cap X_l = \emptyset, k \neq l$$

здесь $F_x = \emptyset$, $x \in X_{n+1}$.

X_i - это множество очередности игрока i. X_{n+1} - это множество окончательное позиций.

Определение. Пара (X, F) называется графом, если X - некоторое конечное множество, а F - отображение X в X.

Граф (X, F) будем обозначать символом G. В дальнейшем элементы множества X будем изображать точками на плоскости, а пары точек x и y, для которых $y \in F_x$, соединять непрерывной линией со стрелкой, направленной от x к y. Тогда каждый элемент множества X называется вершиной или узлом графа, а пара элементов (x, y), в которой $y \in F_x$ - ребром графа. Для ребра $p = (x, y)$ вершины x и y называются граничными вершинами ребра, причем x - начало, а y - конец дуги. [4]

Вершина y, которая находится непосредственно после позиции x, называется альтернативой в позиции x ($y \in F_x$).

Определение. Пусть кооперативная игра $\Gamma = (N, \{U_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N})$ в развёрнутой форме с полной информацией имеет вид древовидного графа $G(X, F)$, где $i \in N$.

Для каждого $x \notin X_{n+1}$ и $y \in F_x$ определен ребро (x,y) в древовидном графе $G(X, F)$. На каждом ребре (x,y) определены n действительных чисел $h_i(x,y), i = 1, \ldots, n, h_i \geq 0$ (выигрыш i-го игрока на ребре (x,y)), и для каждой окончательной позиций $x \in X_{n+1}$ определены $g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, n$.

Определение. Будем предполагать, что для каждого пути игры $z = (z_0, \ldots, z_k, \ldots, z_l)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}, z_l \in X_{n+1}$ выигрыш i-го игрока определяется как

$$H_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l), h_i \geq 0, g_i \geq 0$$

Определение. Если $z = (z_0, \ldots, z_k, \ldots, z_l), z_l \in X_{n+1}$ путь реализованный ситуацией $u(\cdot) = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n), i \in N$, и существует соответственный вектор весов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$,

такой, что

$$\max_{z_0, \ldots, z_k, \ldots, z_l} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \alpha_i h_i(z_k, z_{k+1}) + \alpha_i g_i(z_l) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \alpha_i h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + \alpha_i g_i(\bar{z}_l) \right)$$

$$z_k \notin X_{n+1}, z_{k+1} \in F_{z_k}, z_l \in X_{n+1}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, h_i \geq 0, g_i \geq 0$$

Игра Γ_{z_0} развивается вдоль траектории $\bar{z} = (\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_k, \ldots, \bar{z}_l)$, $\bar{z}_l \in X_{n+1}$, которую будем назывется оптимальной траекторией.

Определение. Для игры Γ_{z_0} набор стратегий $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, \bar{u}_n)$, $i \in N$, соответствует пути $\bar{z} = (\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_k, \ldots, \bar{z}_l)$, $\bar{z}_l \in X_{n+1}$. Выигрыш игрока i в Γ_{z_0}:

$$H_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l)$$

$$\forall i \in N, z_k \notin X_{n+1}, z_{k+1} \in F_{z_k}, z_l \in X_{n+1}, h_i \geq 0, g_i \geq 0$$

Определение. β_i^k - это процедура распределения выигрыша (ПРВ). То.

$$H_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l) = \sum_{k=0}^{l} \beta_i^k$$

1.1 Условия временной состоятельности кооперативного решения

Пусть вектор значений игр $V^i(z_0;\{i\},N/\{i\})$ в антагонистической игре 2 игроков $\Gamma(z_0;\{i\},N/\{i\})$, игроки $\{i\},N/\{i\}$, в которой игре игрок i играет против игрока $N/\{i\}$. Т.е.

$$V^{N/\{i\}}(z_0;\{i\},N/\{i\}) = -V^i(z_0;\{i\},N/\{i\})$$

Пусть $V^i(z_k;\{i\},N/\{i\}), V^i(z_k)$ - значения подыгр в которой исходная позиция подыгры в $z_k, k = 1,\ldots,l$.

То значение игр в играх $\Gamma(z_0;\{i\},N/\{i\})$.

$$V^1(z_0;\{1\},N/\{1\}), V^2(z_0;\{2\},N/\{2\}),\ldots,V^i(z_0;\{i\},N/\{i\}), \forall i \in N$$

В игре Γ_{z_0}, должно выполняться условие

$$H_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l) \geq V^i(z_0;\{i\},N/\{i\})]$$

(условие индивидуальной рациональности)

Игра Γ_{z_0} развивается вдоль оптимальной траектории $\bar{z} = (\bar{z}_0,\ldots,\bar{z}_k,\ldots,\bar{z}_l)$, $\bar{z}_l \in X_{n+1}$

Для выполнения определения условия временной состоятельности, должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^{l-1} h_i(\bar{z}_k,\bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) \geq V^i(\bar{z}_1;\{i\},N/\{i\})$$

$$\sum_{k=2}^{l-1} h_i(\bar{z}_k,\bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) \geq V^i(\bar{z}_2;\{i\},N/\{i\})$$

$$\cdots$$

$$\sum_{k=m}^{l-1} h_i(\bar{z}_k,\bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) \geq V^i(\bar{z}_m;\{i\},N/\{i\})$$

$$\cdots$$

$$g_i(\bar{z}_l) \geq V^i(\bar{z}_l; \{i\}, N/\{i\})$$

$$m \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$$

Т.К. если это не имеет место, то игроки может быть отклонятся от ранее выбранной траектории;

Если

$$\sum_{k=m}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) < V^i(\bar{z}_m; \{i\}, N/\{i\})], m \in \{0, 1, \ldots, l\}$$

для некоторых $i \in N$.

Это временная несостоятельность решения. Здесь $\bar{z}_k \notin X_{n+1}$, $\bar{z}_{k+1} \in F_{\bar{z}_k}$, $\bar{z}_l \in X_{n+1}$, $h_i \geq 0$, $g_i \geq 0$

1.2 Пример временной временной несостоятельности кооперативного решения

Пример 1.

Пусть кооперативная многошаговая игра Γ_{z_0} с полной информацией.

Игроки $N = \{1, 2\}$. Обозначаем вершины где ходит игрок 1 через кольцо, и вершины где ходит игрок 2 прямоугольником. Стратегии игроков i - $u_i^{z_0}, i \in \{1, 2\}$, ситуация $u = \{u_1^{z_0}, u_2^{z_0}\}$, соответствующая траектория $(z_0, \ldots, z_k, \ldots, z_l)$.

Выигрыши игроков i - $H_i(z_0) = \sum\limits_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l)$. Пусть вектор весов $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, тогда для оптимальной по Парето траектории выполняется $\bar{z} = (\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_k, \ldots, \bar{z}_l)$.

$$\max \alpha_1 \left(\sum_{k=0}^{l-1} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_l) \right) + \alpha_2 \left(\sum_{k=0}^{l-1} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_l) \right), \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

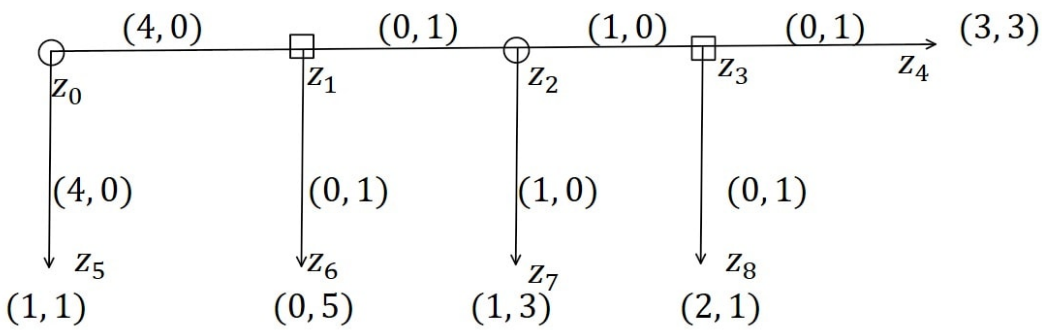

Рисунок 1.1

Нашли что оптимальная по Парето траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$. Т.к.

$$\max \frac{1}{2} \times \left(\sum_{k=0}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4) \right) + \frac{1}{2} \times \left(\sum_{k=0}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_4) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 5 = 6.5$$

Т.е.

$$H_1(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4) = 4 + 0 + 1 + 0 + 3 = 8$$

$$H_2(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_4) = 0 + 1 + 0 + 1 + 3 = 5$$

В этой игре

Значение игры для игрока 1: $V^1(z_0) = 5$, и

$$H_1(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4) = 4 + 0 + 1 + 0 + 3 = 8 \geq V^1(z_0) = 5$$

Значение игры для игрока 2: $V^2(z_0) = 1$, и

$$H_2(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_4) = 0 + 1 + 0 + 1 + 3 = 5 \geq V^2(z_0) = 1$$

Оптимальная по Парето траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Продолжаем исследовать подыгру Γ_{z_1} - исходная позиция игры в z_1

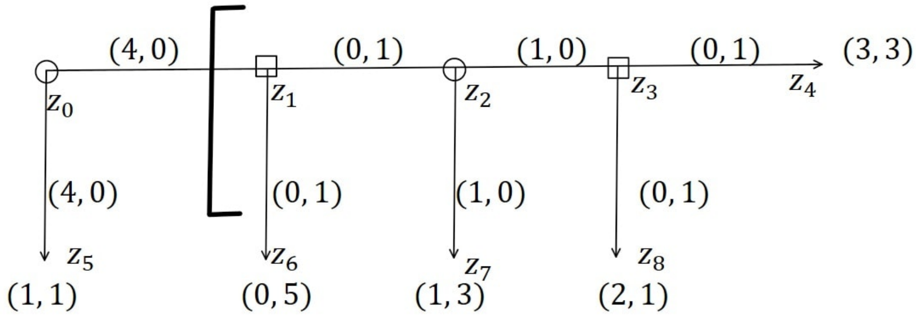

Рисунок 1.2

Значение подыгры для игрока 1: $V^1(z_1) = 0$, и

$$\sum_{k=1}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4) = 0 + 1 + 0 + 3 = 4 \geq V^1(z_1) = 0$$

Значение подыгры для игрока 2: $V^2(z_1) = 6$, и

$$\sum_{k=1}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_4) = 1 + 0 + 1 + 3 = 5 < V^2(z_1) = 6$$

Т.е. на оптимальной траектории $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ по Парето имеет место временная несостоятельность.

Т. к. Существует $m \in \{0, 1, \ldots, l\}$, такой что

$$\sum_{k=m}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l) < V^i(z_m; \{i\}, N/\{i\})$$

где $z_l \in X_{n+1}$, $z_k \notin X_{n+1}$, $z_{k+1} \in F_{z_k}$.

1.3 Формула для временной состоятельности

Мы представляем ПРВ β_i^k, чтобы решать это вопрос. Из определения процедура распределения выигрыша, β_i^k (ПРВ) должна удовлетворять следующим условиям

$$\sum_{k=1}^{l} \beta_i^k \geq V^i(z_1; \{i\}, N/\{i\})$$

$$\sum_{k=2}^{l} \beta_i^k \geq V^i(z_2; \{i\}, N/\{i\}) \tag{1.1}$$

$$\ldots$$

Вдоль траектории оптимальной по Парето

Теорема 1.

Пусть β_i^k ПРВ в Γ_{z_0}, и

$$\beta_i^k = \frac{H_i(\bar{z}_0) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} - [V^i(\bar{z}_{k+1}; \{i\}, N/\{i\}) - V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\})] \tag{1.2}$$

здесь $H_i(\bar{z}_0) = \sum\limits_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l)$. Вдоль оптимальной траектории $\bar{z} = (\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_k, \ldots, \bar{z}_l)$ по Парето, тогда она удовлетворяет условию 1.1.

Доказательство:

$$\beta_i^k = \frac{H_i(\bar{z}_0) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} - [V^i(\bar{z}_{k+1}; \{i\}, N/\{i\}) -$$

$$-V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\})] = \frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} -$$

$$-[V^i(\bar{z}_{k+1}; \{i\}, N/\{i\}) - V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\})]$$

$$\sum_{k=0}^{l} \beta_i^k = \sum_{k=0}^{l} \Bigg(\frac{\sum_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} -$$

$$-[V^i(\bar{z}_{k+1}; \{i\}, N/\{i\}) - V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\})] \Bigg) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{\sum_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} -$$

$$-\sum_{k=0}^{l} [V^i(\bar{z}_{k+1}; \{i\}, N/\{i\}) - V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\})] =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{\sum_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} -$$

$$-\Bigg[\sum_{k=0}^{l} V^i(\bar{z}_{k+1}; \{i\}, N/\{i\}) - \sum_{k=0}^{l} V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\}) \Bigg] =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{\sum_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} -$$

$$-[V^i(\bar{z}_{k+1}; \{i\}, N/\{i\}) + V^i(\bar{z}_{k+2}; \{i\}, N/\{i\}) + \cdots +$$

$$+V^i(\bar{z}_l; \{i\}, N/\{i\}) - V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\}) - V^i(\bar{z}_{k+1}; \{i\}, N/\{i\}) -$$

$$- \cdots - V^i(z_l; \{i\}, N/\{i\})] =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{\sum_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} -$$

$$-[-V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\})] = \sum_{k=0}^{l} \frac{\sum_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} +$$

$$+V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\})) \geq V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\}))$$

Так как

$$= \sum_{k=0}^{l} \frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} \geq 0$$

То

$$\sum_{k=0}^{l} \beta_i^k = \sum_{k=0}^{l} \frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) - V^i(\bar{z}_0; \{i\}, N/\{i\})}{l+1} +$$

$$+ V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\})) \geq V^i(\bar{z}_k; \{i\}, N/\{i\}))$$

Т.е.

$$\sum_{k=m}^{l} \beta_i^k \geq V^i(\bar{z}_m; \{i\}, N/\{i\})); m = 0, 1, \ldots, l$$

$\square$

1.4 Пример о временной состоятельности кооперативного решения с процедурой распределения выигрыша

Введём ПРВ и проверим предыдущий пример, чтобы индивидуальная рациональность выполнялась для всех игроков.

В игре Γ_{z_0}, пусть игроки $N = \{1,2\}$. Выигрыши игроков i: $H_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l)$, $z_k \notin X_{n+1}$, $z_{k+1} \in F_{z_k}$, $z_l \in X_{n+1}$.

Вектор весов $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, т.е. $\bar{z} = (z_0, \dots, z_k, \dots, z_l)$ выполняется на оптимальной по Парето траектории

$$\max \alpha_1 \left(\sum_{k=0}^{l-1} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_l) \right) + \alpha_2 \left(\sum_{k=0}^{l-1} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_l) \right)$$

Нашли, что в этой игре Γ_{z_0} на оптимальной по Парето траектории $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$

$$H_1(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4) = 8, H_2(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_4) = 5$$

Теперь мы найдём значение игры $V^1(z_k)$ и $V^2(z_k)$ в антагонистическом игре двух игроков $V(z_0; \{1\}, \{2\})$. $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Далее мы обозначаем $V^i(z_k; \{1\}, \{2\})$ упрощённым образом через $V^i(z_k)$ $k \in \{0, \dots, 1, \dots, l\}, i \in N$.

Случай 1. В игре z_0. Как показано на рисунке 1.3.

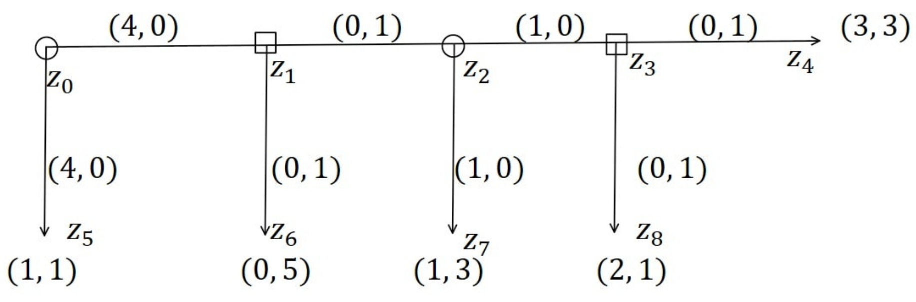

Рисунок 1.3

Тогда значение игры:

Для игрока 1: $V^1(z_0) = 5$,

Для игрока 2: $V^2(z_0) = 1$.

Случай 2. В подыгре Γ_{z_1}, в этой игре исходная позиция z_1. Как показано на рисунке 1.4.

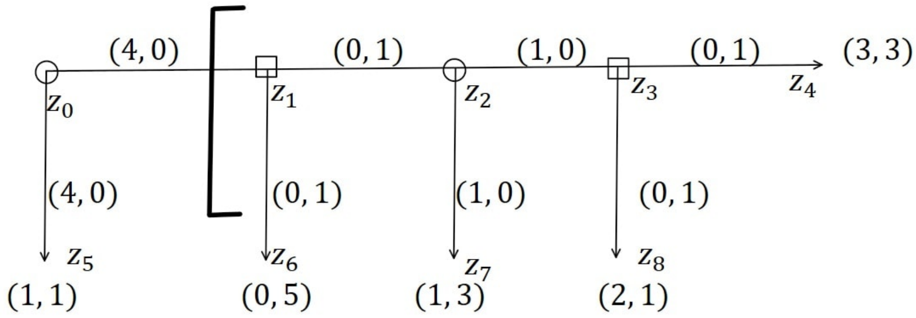

Рисунок 1.4

Тогда значение игры:

Для игрока 1: $V^1(z_1) = 0$,

Для игрока 2: $V^2(z_1) = 6$.

Случай 3. В подыгре Γ_{z_2}, в этой игре исходная позиция игры z_2. Как показано на рисунке 1.5.

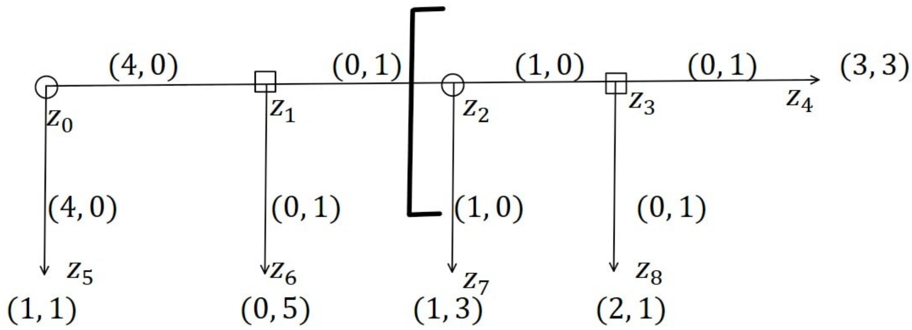

Рисунок 1.5

Тогда значение игры:

Для игрока 1: $V^1(z_2) = 3$,

Для игрока 2: $V^2(z_2) = 3$.

Случай 4. В подыгре Γ_{z_3}, в этой игре исходная позиция игры z_3. Как показано на рисунке 1.6.

Тогда значение игры:

Для игрока 1: $V^1(z_3) = 2$,

Для игрока 2: $V^2(z_3) = 4$.

Случай 5. При этом на множестве окончательном позиций

Тогда значение игры:

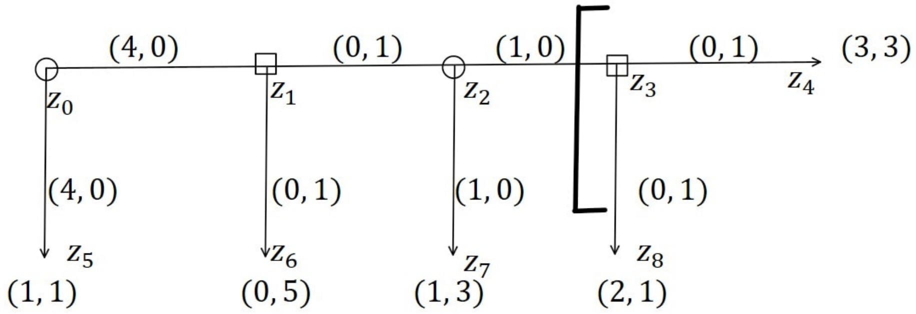

Рисунок 1.6

Для игрока 1: $V^1(\bar{z}_4) = 3$,

Для игрока 2: $V^2(\bar{z}_4) = 3$.

Используем теорему 1 (1.2).

$$\beta_i^k = \frac{H_i(z_0) - V^i(z_0; \{1\}, \{2\})}{l+1} - [V^i(z_{k+1}; \{1\}, \{2\}) - V^i(z_k; \{1\}, \{2\})] \tag{1.3}$$

здесь β_i^k процедура распределения выигрыш (ПРВ) в Γ_{z_0}, $i \in \{1, 2\}$, $H_i(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_4)$. $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

По оптимальной траектории $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ по Парето

Для игрока 1

$$\beta_1^0 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [V^1(z_1) - V^1(z_0)] = \frac{8-5}{5} - [0-5] = 5.6$$

$$\beta_1^1 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [V^1(z_2) - V^1(z_1)] = \frac{8-5}{5} - [3-0] = -2.4$$

$$\beta_1^2 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [V^1(z_3) - V^1(z_2)] = \frac{8-5}{5} - [2-3] = 1.6$$

$$\beta_1^3 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [V^1(z_4) - V^1(z_3)] = \frac{8-5}{5} - [3-2] = -0.4$$

$$\beta_1^4 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [0 - V^1(z_4)] = \frac{8-5}{5} - [0-3] = 3.6$$

Для игрока 2

$$\beta_2^0 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [V^1(z_1) - V^2(z_0)] = \frac{5-1}{5} - [6-1] = -4.2$$

$$\beta_2^1 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [V^1(z_2) - V^2(z_1)] = \frac{5-1}{5} - [3-6] = 3.8$$

$$\beta_2^2 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [V^1(z_3) - V^2(z_2)] = \frac{5-1}{5} - [4-3] = -0.2$$

$$\beta_2^3 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [V^1(z_4) - V^2(z_3)] = \frac{5-1}{5} - [3-4] = 1.8$$

$$\beta_2^4 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [0 - V^2(z_4)] = \frac{5-1}{5} - [0-3] = 3.8$$

С помощью $\beta_i^k, i \in \{1,2\}, k \in \{0,1,2,3,4\}$ (ПРВ) мы построим новую игру Γ'_{z_0}.

Случай 1. Как показано на рисунке 1.7.

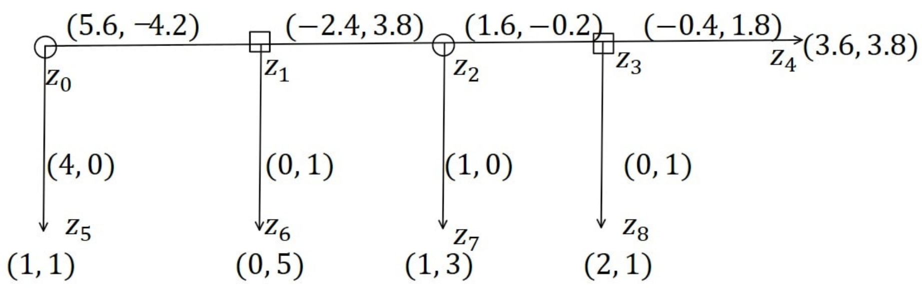

Рисунок 1.7

Найдём значение игры $V^1(z_0)$ и $V^2(z_0)$ в антагонистической игре 2-х игроков Γ'_{z_0}.

Значение игры для игрока 1: $V^1(z_0) = 5.6$. Тогда

$$H_1(z_0) = \beta_1^0 + \beta_1^1 + \beta_1^2 + \beta_1^3 + \beta_1^4 = 5.6 - 2.4 + 1.6 - 0.4 + 3.6 = 8 \geq V^1(z_0) = 5.6$$

Значение игры для игрока 2: $V^2(z_0) = 1$, То

$$H_2(z_0) = \beta_2^0 + \beta_2^1 + \beta_2^2 + \beta_2^3 + \beta_2^4 = -4.2 + 3.8 - 0.2 + 1.8 + 3.8 = 5 \geq V^2(z_0) = 1$$

Оптимальная траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ по Парето

Случай 2. Продолжаем исследовать игру Γ'_{z_1}, в которой исходная позиция игры z_1. Как показано на рисунке 1.8.

Значение подыгры для игрока 1: $V^1(z_1) = 0$, и

$$\beta_1^1 + \beta_1^2 + \beta_1^3 + \beta_1^4 = -2.4 + 1.6 - 0.4 + 3.6 = 2.4 \geq V^1(\bar{z}_1) = 0$$

Значение подыгры для игрока 2: $V^2(\bar{z}_1) = 6.8$, и

$$\beta_2^1 + \beta_2^2 + \beta_2^3 + \beta_2^4 = 3.8 - 0.2 + 1.8 + 3.8 = 9.2 \geq V^2(\bar{z}_1) = 6.8$$

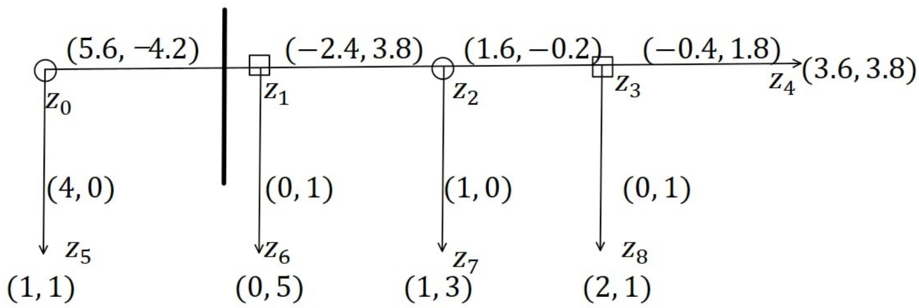

Рисунок 1.8

Оптимальная траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ по Парето.

Случай 3. Продолжаем исследовать подыгру Γ'_{z_2}, в которой исходная позиция игры z_2. Как показано на рисунке 1.9.

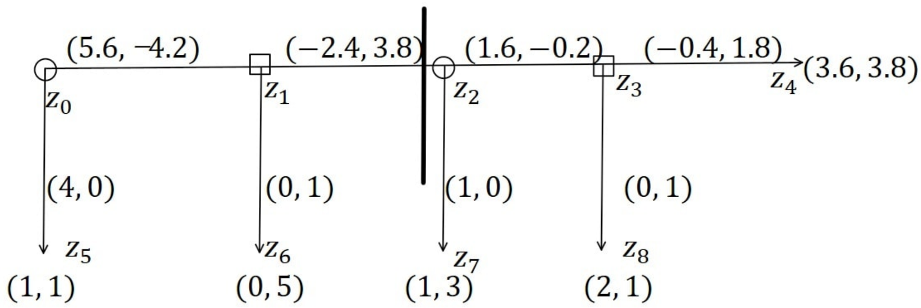

Рисунок 1.9

Значение подыгры для игрока 1: $V^1(z_2) = 3.6$, и

$$\beta_1^2 + \beta_1^3 + \beta_1^4 = 1.6 - 0.4 + 3.6 = 4.8 \geq V^1(z_2) = 3.6$$

Значение подыгры для игрока 2: $V^2(z_2) = 3$, и

$$\beta_2^2 + \beta_2^3 + \beta_2^4 = -0.2 + 1.8 + 3.8 = 5.4 \geq V^2(z_2) = 3$$

Оптимальная по Парето траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Случай 4. Продолжаем исследовать игру Γ'_{z_3}. Как показано на рисунке 1.10.

Значение подыгры для игрока 1: $V^1(z_3) = 2$, и

$$\beta_1^3 + \beta_1^4 = -0.4 + 3.6 = 3.2 \geq V^1(z_3) = 2$$

Значение подыгры для игрока 2: $V^2(z_3) = 5.6$, и

$$\beta_2^3 + \beta_2^4 = 1.8 + 3.8 = 5.6 \geq V^2(z_3) = 5.6$$

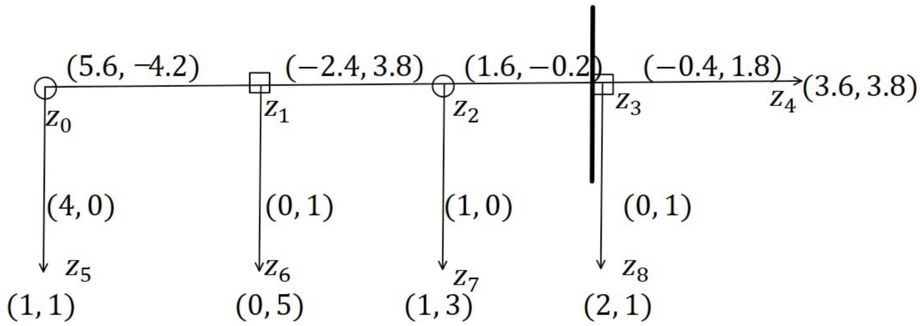

Рисунок 1.10

Оптимальная по Парето траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Случай 5. Очевидно

$$\beta_1^4 = 3.6 \geq V^1(z_4) = 3.6$$

$$\beta_2^4 = 3.8 \geq V^2(z_4) = 3.8$$

Резюмируя вышесказанное, используя теорему, получили β_i^k, $i \in \{1, 2\}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ в примере, β_i^k удовлетворяет

$$\sum_{k=m}^{4} \beta_i^k \geq V^i(z_m; \{i\}, N/\{i\}), i \in \{1, 2\}, m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Глава 2. Стратегическая поддержка Парето-оптимальных решений

Пусть, для кооперативной многошаговой игры Γ_{z_0} с остовным деревом мы имеем оптимальную по Парето траекторию $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ и β_i^k (ПРВ).

Будем определять стратегий наказания. Для упрощения ограничимся случаем неантагонистической игры 2-х лиц

$$\Gamma = \langle \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{K}_1, \bar{K}_2 \rangle$$

С игрой Γ свяжем две антагонистические игры Γ_1 и Γ_2: Антагонистическая игра Γ_1, построенная на основе игры Γ, в этой игре Γ_1 второй игрок играет против первого игрока, $K_2 = -K_1$. Антагонистическая игра Γ_2, построенная на основе игры Γ, в этой игре Γ_2 первый игрок играет против второго игрока, $K_1 = -K_2$. Ситуация равновесия в игре Γ_1: (u_{11}^*, u_{21}^*). Ситуация равновесия в игре Γ_2: (u_{12}^*, u_{22}^*).

Обозначим через Γ_{1x}, Γ_{2x} подыгры игр Γ_1, Γ_2. И обозначим значения этих подыгр через $v_1(x)$, $v_2(x)$. То в играх Γ_{1x}, Γ_{2x}, ситуации $\{u_{11}^{*x}, u_{21}^{*x}\}$ и $\{u_{12}^{*x}, u_{22}^{*x}\}$ называются равновесными. $v_1(x) = K_1^x(u_{11}^{*x}, u_{21}^{*x})$, $v_2(x) = K_2^x(u_{12}^{*x}, u_{22}^{*x})$.

Продумываем пару (u_1, u_2) стратегий в игре Γ. Заметно, эта пара стратегий является таковой в играх Γ_1, Γ_2. Предполагается, что путь $z = (z_0, \ldots, z_l)$, реализуемый в ситуации (u_1,u_2). Пусть $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_l\}$ - здесь $\bar{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_l)$ путь, реализуемый в ситуации (u_1, u_2).

Определение. Стратегия $\tilde{u}_1(\cdot)$ называется стратегией наказания [5] игрока 1, если:

$$\tilde{u}_1(z_k) = z_{k+1}, z_k \in Z \cap X_1$$

$$\tilde{u}_1(y) = u_{12}^*(y), y \in X_1, y \notin Z$$

Стратегия $\tilde{u}_2(\cdot)$ называется стратегией наказания игрока 2, если:

$$\tilde{u}_2(z_k) = z_{k+1}, z_k \in Z \cap X_2$$

$$\tilde{u}_2(y) = u_{21}^*(y), y \in X_2, y \notin Z$$

Теперь. Мы заменим выигрыши $h_i(z_k, z_{k+1})$ и $g_i(z_l)$, $i = 1, \ldots, n$, $z_k \notin X_{n+1}$, $z_{k+1} \in F_{z_k} \cap Z$, $z_l \in X_{n+1} \cap Z$, $h_i \geq 0$, $g_i \geq 0$ соответственно через β_i^k (ПРВ).

Далее найдём равновесие по Нэшу в стратегиях наказания, чтобы путь $\bar{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_l), z_l \in X_{n+1}$ стал оптимальной траекторией так же в равновесии по Нэшу.

Вдоль пути $\bar{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_l), z_l \in X_{n+1}$, при стратегиях наказания $(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$ имеет место

$$K_1(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) = \sum_{k=0}^{l} \beta_1^k$$

$$K_2(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) = \sum_{k=0}^{l} \beta_2^k$$

2.1 Существование ситуации равновесия по Нэшу в стратегиях наказания с ПРВ

Теперь мы представляем теорему 2 и покажем, что существует равновесие по Нэшу в стратегиях наказания и что выигрыш в этом равновесии равен выигрышу вдоль оптимальной траектории по Парето.

Из теоремы 1 мы получили β_i^k (ПРВ) для кооперативной многошаговой игры Γ_{z_0} с полной информацией. После того, как мы заменили соответственные выигрыши $h_i(z_k, z_{k+1})$ и $g_i(z_l)$ на (ПРВ) β_i^k, здесь $i = 1, \ldots, n$, $k = 0, \ldots, l$, $z_k \notin X_{n+1}$, $z_{k+1} \in F_{z_k} \cap Z$, $z_l \in X_{n+1} \cap Z$, $h_i \geq 0$, $g_i \geq 0$, $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_l\}$ и $\bar{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_l)$ путь, реализуемый в ситуации (u_1, u_2). Потом мы получим новую игру Γ'_{z_0}. Однако стратегии игроков, которые добились пути $\bar{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_l), z_l \in X_{n+1}$, могут быть не равновесными по Нэшу.

Для того, чтобы путь $\bar{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_l)$, $z_l \in X_{n+1}$ был оптимальным траектория в игре Γ_{z_0}. Мы используем стратегии наказания. Выше мы определили, что стратегии наказания $(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$ в кооперативной многошаговой игре Γ_{z_0} двух лиц с полной информацией.

2.2 Теорема о стратегической поддержке Парето-оптимальных решений

В игре Γ_{z_0}, пусть $(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$ - ситуация в стратегиях наказания, в которых реализовался путь $\bar{z} = (z_0, z_1, \dots, z_l), z_l \in X_{n+1}$.

Для всех $K = (0, 1, \dots, l-1)$, стратегии наказания $(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$ образуют равновесия по Нэшу, если выполняется неравенства

$$K_1(z_k; \tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) \geq V^1(z_k)$$

$$K_2(z_k; \tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) \geq V^2(z_k)$$

где $\bar{z} = (z_0, z_1, \dots, z_l), z_l \in X_{n+1}$ - путь, реализовавшийся в ситуации $(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$.

Доказательство

Во-первых построим стратегий наказания.

$\tilde{u}_1(\cdot)$ - это стратегии наказания игрока 1

$$\tilde{u}_1(z_k) = z_{k+1}, z_k \in Z \cap X_1$$

$$\tilde{u}_1(y) = u_{12}^*(y), y \in X_1, y \notin Z$$

$\tilde{u}_2(\cdot)$ – это стратегий наказания игрока 2

$$\tilde{u}_2(z_k) = z_{k+1}, z_k \in Z \cap X_2$$

$$\tilde{u}_2(y) = u_{21}^*(y), y \in X_2, y \notin Z$$

$Z = \{z_0, z_1, \dots, z_l\}$ - здесь $\bar{z} = (z_0, z_1, \dots, z_l)$, $z_l \in X_{n+1}$ путь, реализуемый в ситуации $(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$.

Т.е.

$$\sum_{k=0}^{l} \beta_1^k = K_1(z_0; \tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)), \sum_{k=0}^{l} \beta_2^k = K_2(z_0; \tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$$

Из определения теоремы 1, будет

$$\sum_{k}^{l} \beta_1^k \geq V^1(z_k), \sum_{k}^{l} \beta_2^k \geq V^2(z_k), k = 0, 1, \ldots, l$$

Т.е.

$$K_1(\tilde{u}_1(z_0), \tilde{u}_2(z_0)) = \sum_{k=0}^{l} \beta_1^k \geq V^1(z_0), K_2(\tilde{u}_1(z_0), \tilde{u}_2(z_0)) = \sum_{k=0}^{l} \beta_2^k \geq V^2(z_0)$$

$$k = 0, 1, \ldots, l$$

Пусть игрок 1 использует стратегию $u_1(\cdot)$, отличную от стратегии наказания $\tilde{u}_1(\cdot)$ для $\forall z_k \in Z \cap X_1$. Из определения наказывающей стратегии $\tilde{u}_2(\cdot)$ следует, что игрок 2 проиграет не больше значения подыгры $V^1(z_k)$, а игрок 1 в Γ_1' выиграет не больше, чем $V^1(z_k)$

$$K_1(z_k; u_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) \leq V^1(z_k)$$

$$\forall z_k \in Z \cap X_1$$

Аналогично, если игрок 2 использует стратегию $u_2(\cdot)$ для $\forall z_k \in Z \cap X_2$, то из определения наказывающей стратегии $\tilde{u}_1(\cdot)$ следует, что игрок 1 проиграет не больше значения подыгры $V^2(z_k)$, а игрок 2 в Γ_2' выиграет не больше, чем $V^2(z_k)$

$$K_2(z_k; \tilde{u}_1(\cdot), u_2(\cdot)) \leq V^2(z_k)$$

$$\forall z_k \in Z \cap X_2$$

Теперь, предположим, что вышеуказанные неравенства имеют место.

Докажем, что $(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$ - равновесия по Нэшу. На основании определения равновесия по Нэшу,

$$K_1(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) \geq K_1(u_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$$

$$K_2(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) \geq K_1(\tilde{u}_1(\cdot), u_2(\cdot)),$$

однако

$$K_1(z_0; \tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) \geq V^1(z_0),$$

и

$$K_1(z_k; u_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) \leq V^1(z_k),$$

$$\forall z_k \in Z \cap X_1,$$

и

$$K_2(z_0; \tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) \geq V^2(z_0),$$

в то же время

$$K_2(z_k; \tilde{u}_1(\cdot), u_2(\cdot)) \leq V^2(z_k),$$

$$\forall z_k \in Z \cap X_2$$

Следовательно, определение равновесий по Нэшу выполняется и ситуация $(\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot))$ – равновесия по Нэшу.

□

2.3 Пример Стратегической поддержки Парето-оптимальных решений.

Пример 3

Для кооперативной многошаговой игры Γ_{z_0} с полной информацией. Как показано на рисунке 2.1.

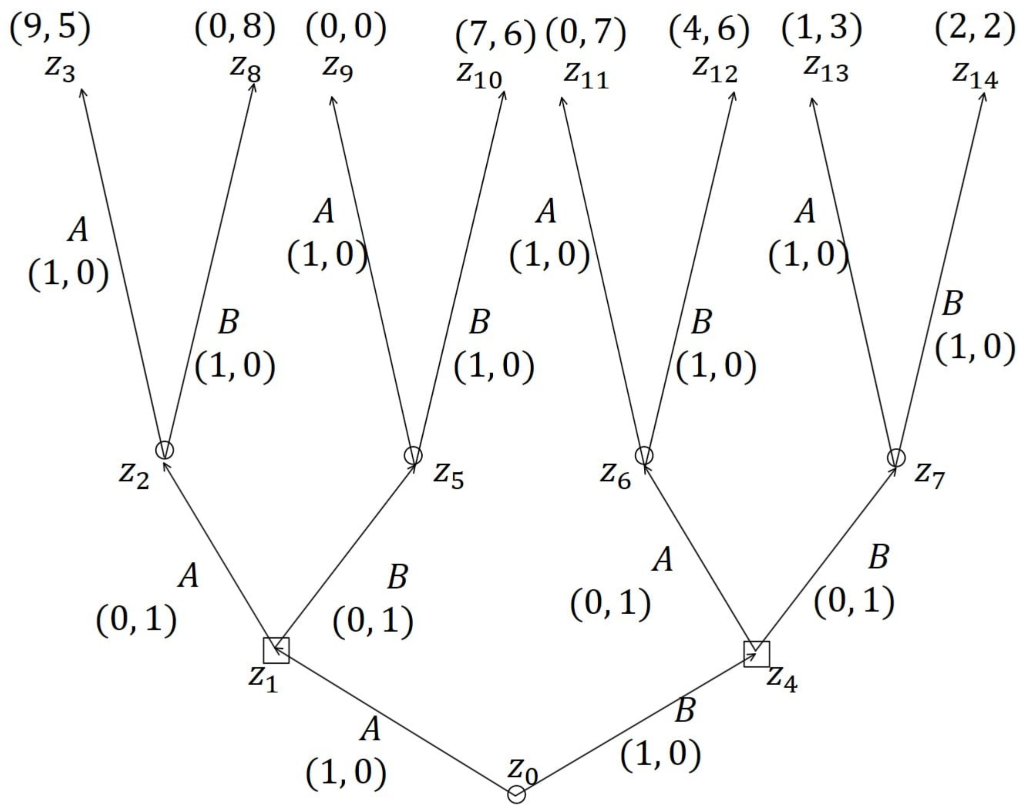

Рисунок 2.1

Выигрыши игроков i - $H_i(z_0) = \sum\limits_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l)$, $z_k \notin X_{n+1}$, $z_{k+1} \in F_{z_k}$, $z_l \in X_{n+1}$, $h_i \geq 0$, $g_i \geq 0$. Вектор весов $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Для оптимальной по Парето траектории выполняется $\bar{z} = (z_0, \ldots, z_k, \ldots, z_l), l \in X_{n+1}$.

$$\max \alpha_1 \left(\sum_{k=0}^{l-1} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_l) \right) + \alpha_2 \left(\sum_{k=0}^{l-1} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_l) \right)$$

Получили оптимальную траекторию основании результата. Обозначим $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ оптимальную траекторию. Т.е.

$$H_1(z_0) = h_1(z_0, z_2) + h_1(z_1, z_2) + h_1(z_2, z_3) + g_1(z_3) = 11$$

$$H_2(z_0) = h_2(z_0, z_2) + h_2(z_1, z_2) + h_2(z_2, z_3) + g_2(z_3) = 6$$

Вдоль пути $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3)$, получили значения игр для игроков.

$$V^1(z_0) = 9, V^1(z_1) = 8, V^1(z_2) = 10, V^1(z_3) = 9$$

$$V^2(z_0) = 6, V^2(z_1) = 6, V^2(z_2) = 5, V^2(z_3) = 5$$

По теореме 1 (1.2), пусть β_i^k процедура распределения выигрыш (ПРВ) в Γ_{z_0}, и

$$\beta_i^k = \frac{H_i(z_0) - V^i(z_0)}{l+1} - [V^i(z_{k+1}) - V^i(z_k)]$$

здесь $H_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l)$. Вдоль оптимальной траектории $\bar{z} = (z_0, \ldots, z_k, \ldots, z_l)$.

Игрок 1 - $\beta_i^k, k \in \{0, 1, 2, 3\}$(ПРВ)

$$\beta_1^0 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{4} - [V^1(z_1) - V^1(z_0)] = \frac{11-9}{4} - [8-9] = 1.5$$

$$\beta_1^1 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{4} - [V^1(z_2) - V^1(z_1)] = \frac{11-9}{4} - [10-8] = -1.5$$

$$\beta_1^2 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{4} - [V^1(z_3) - V^1(z_2)] = \frac{11-9}{4} - [9-10] = 1.5$$

$$\beta_1^3 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{4} - [-V^1(z_3)] = \frac{11-9}{4} - [0-9] = 9.5$$

Игрок 2 - $\beta_2^k, k \in \{0, 1, 2, 3\}$(ПРВ)

$$\beta_2^0 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{4} - [V^2(z_1) - V^2(z_0)] = \frac{66-6}{4} - [6-6] = 0$$

$$\beta_2^1 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{4} - [V^2(z_2) - V^2(z_1)] = \frac{66-6}{4} - [5-6] = 1$$

$$\beta_2^2 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{4} - [V^2(z_3) - V^2(z_2)] = \frac{66-6}{4} - [5-5] = 0$$

$$\beta_2^3 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{4} - [0 - V^2(z_3)] = \frac{66-6}{4} - [0-5] = 5$$

Т.е. Мы заменим $\beta_i^k, i \in 1, 2, k \in \{0, 1, 2, 3\}$(ПРВ) соответственными выигрышами $h_i(z_0, z_1)$, $h_i(z_1, z_2)$, $h_2(z_2, z_3)$ и $g_i(z_3)$, $i \in 1, 2$.

Получили новую игру Γ'_{z_0}, как показано на рисунке 2.2.

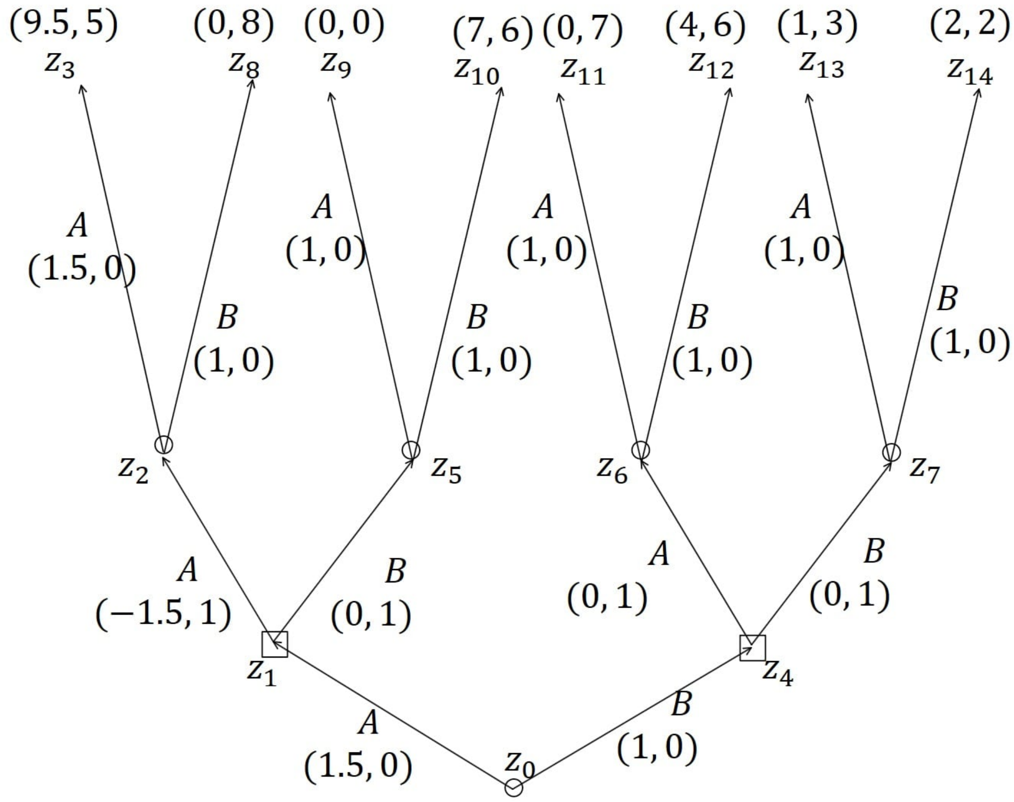

Рисунок 2.2

Для игрока 1:

$$u_1 = \{(AABAA), (AABAB), (AABBA), (AABBB)\},$$

Для игрока 2:

$$u_2 = \{(BA), (BB)\},$$

когда дают одни и те же выигрыши. Чтобы путь $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ был оптимальной траектории так же, мы построим стратегии наказания.

Пусть Γ'_1 - это антагонистическая игра, построенная на основе игры Γ'_{z_0} в которой игрок 2 играет против игрока 1, Т.е. $K_2 = -K_1$. Игра Γ'_2 это антагонистическая игра, построенная на основе игры Γ'_{z_0}, в которой игрок 1 играет против игрока 2, Т.е. $K_1 = -K_2$.

Графы игры Γ'_1, Γ'_2, Γ'_{z_0} и множества стратегий в них совпадают. Обозначим через (u^*_{11}, u^*_{21}), (u^*_{12}, u^*_{22}) ситуации абсолютного равновесия в играх Γ'_1 и Γ'_2. Пусть $V_1(z_k)$, $V_2(z_k)$ значения этих подыгр. Тогда ситуации (U^*_{11}, U^*_{21}), (U^*_{12}, U^*_{22}) являются равновесными в играх Γ'_1 и Γ'_2 соответственно и $V_1(z_k) = K_1(u^*_{11}, u^*_{21})$, $V_2(z_k) = K_2(u^*_{12}, u^*_{22})$

Т.е. Γ_1', как показано на рисунке 2.3.

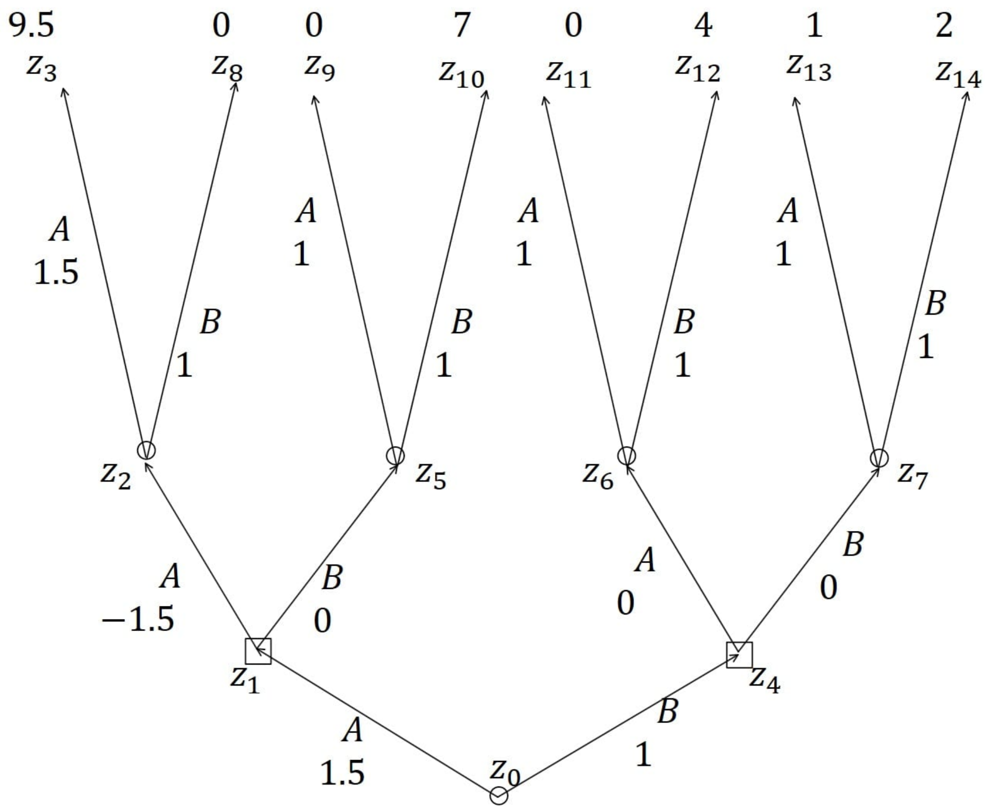

Рисунок 2.3

$$u_{11}^* = (AABBB)$$

$$u_{21}^* = (BB)$$

Т.е. Γ_2', как показано на рисунке 2.4.

$$u_{12}^* = (AAABB)$$

$$u_{22}^* = (AA)$$

Из определение стратегий наказания имеем
$\tilde{u}_1(\cdot)$ - это стратегии наказания игрока 1

$$\tilde{u}_1(z_k) = z_{k+1}, z_k \in Z \cap X_1$$

$$\tilde{u}_1(y) = u_{12}^*(y), y \in X_1, y \notin Z$$

$$Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$X_1 = \{z_0, z_2, z_5, z_6, z_7\}$$

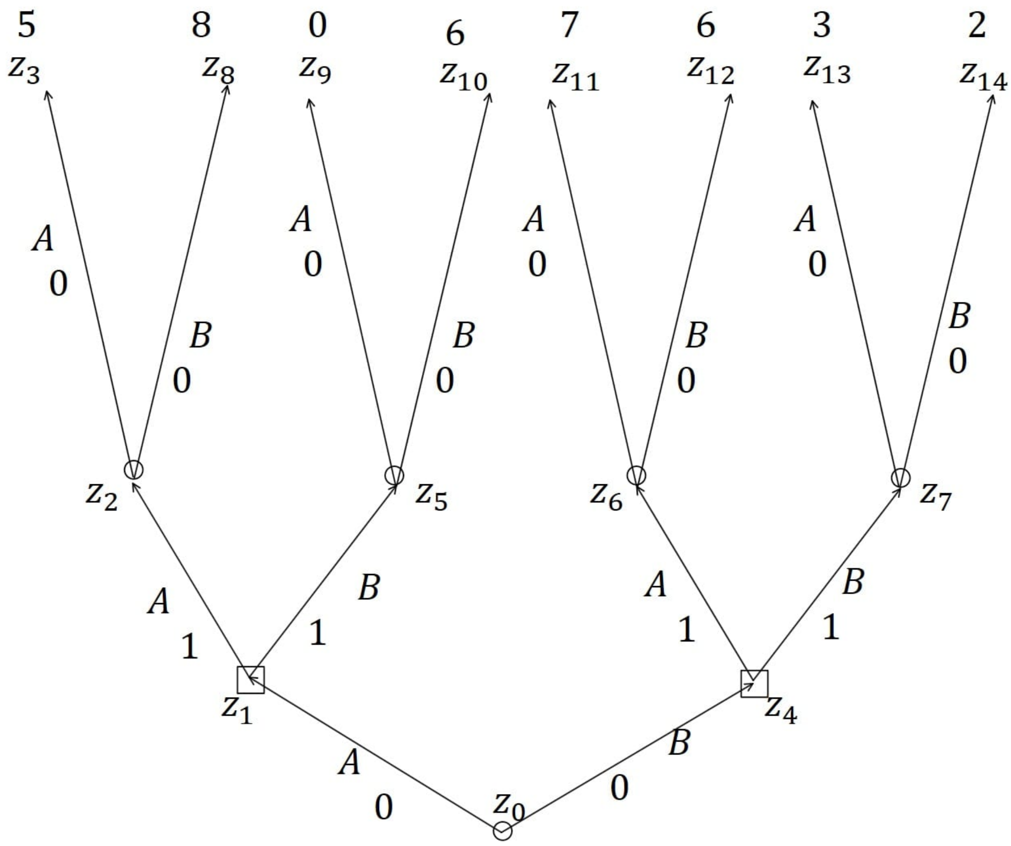

Рисунок 2.4

$\tilde{u}_2(\cdot)$ - это стратегии наказания игрока 2

$$\tilde{u}_2(z_k) = z_{k+1}, z_k \in Z \cap X_2$$

$$\tilde{u}_2(y) = u_{21}^*(y), y \in X_2, y \notin Z$$

$$Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$X_2 = \{z_1, z_4\}$$

Путь $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ оптимальная траектория, тогда равновесие по Нэшу в стратегиях наказания имеет вид.

В этой ситуации выигрыши игроков равны соответственно 11 для игрока 1 и 6 для игрока 2.

Случая игрока 1:

В z_0, игрок 1:

$\tilde{u}_1(z_0) = A$ и до позиции z_1.

В z_1, если игрок 2 выбирает стратегию В. То в z_5. Игрок 1 будет действовать согласно стратегии наказания:

$$\tilde{u}_1(z_5) = \tilde{u}_{12}(z_5) = A$$

В z_2, игрок 1 выбирает стратегию:А и до позиции z_3.

Случая игрока 2:

В z_0, если игрок 1 выбирает стратегию В. то в z_4. Игрок 2 будет действовать согласно стратегии наказания:

$$\tilde{u}_2(z(z_4)) = \tilde{u}_{21}(z_4) = B$$

Потом до позиции z_7, игрок 1 выбирает стратегию: В.

Резюмируя вышесказанное, нашли равновесия по Нэшу в стратегиях наказания.

□

Глава 3. Построение сильно динамически устойчивого ядра в кооперативных играх с полной информацией

Как уже было отмечено, в многошаговой кооперативной игре Γ_{z_0} с полной информацией сильная динамическая устойчивость означает, что если выигрыши осуществляются в соответствии с ПРД β, то, получая на первых k шагах суммы $\beta^1 + \cdots + \beta^k$, игроки (если принципы оптимальности в подыгре Γ_{z_k} и в игре Γ_{z_0} одинаковые), пересматривая оптимальный дележ в этой подыгре, во всяком случае получат в результате в игре Γ_{z_0} выигрыш в соответствии с некоторым дележом, оптимальным в предшествующем смысле, т. е. дележом, принадлежащим принципу оптимальности игры Γ_{z_0}.

В игре Γ_{z_0} максимальная сумма выигрышей игроков реализовывается на траектории $\bar{z} = \{\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_k, \ldots, \bar{z}_l\}$, т. е. кооперативная игра $\Gamma_{\bar{z}_k}$ развивается по траектории $\bar{z} = (\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_k, \ldots, \bar{z}_l)$, которую будем называть оптимальной траекторией [9]. Определяется подыгра $\Gamma_{\bar{z}_k}$, $k = 1, \ldots, l$, начинающаяся в позиции $\bar{z}_k$ на оптимальной траектории $\bar{z} = (\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_k, \ldots, \bar{z}_l)$.

Предполагаем, что С-ядро $C(\bar{z}_0)$ не является пустым в игре $\Gamma_{\bar{z}_0}$, и вычисляем С-ядро $C(\bar{z}_0)$, также предполагаем, что С-ядро $C(\bar{z}_k)$ не является пустым в подыгре $\Gamma_{\bar{z}_k}$, и вычисляем С-ядро $C(\bar{z}_k), k = 1, \ldots, l$.

Выбираем дележи

$$\xi^0, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^l,$$

где $\xi^k \in C(\bar{z}_k), k = 0, \ldots, l$.

Пусть $\beta^k = \xi^k - \xi^{k+1}$ ($\beta^l = \xi^l$). Получаем ПРД $\beta^0, \ldots, \beta^k, \ldots, \beta^l$.

Определим $\bar{\beta}^k = \{\beta_i^k, i \in N\}$, $k = 0, \ldots, l$, N - множество игроков.

Для разных дележей $\xi^0, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^l$, где $\xi^k \in C(\bar{z}_k)$, получаем разные $\bar{\beta}^k$, $k = 0, \ldots, l$.

Пусть $\bar{B}^k$ — множество всевозможных $\bar{\beta}^k$ для всех $\xi^k \in C(\bar{z}_k)$, $k = 0, \ldots, l$. Получив такие множества $\bar{B}^k$, $k = 0, \ldots, l$, построим множество

$$\bar{M}(\bar{z}_0) = \{\bar{\xi}^0 : \bar{\xi}^0 = \bar{\xi}^0 + \cdots + \bar{\xi}^k + \cdots + \bar{\xi}^l, \bar{\beta}^k \in \bar{B}^k\}$$

Множество $\bar{M}(\bar{z}_0)$ будем называть обобщенным динамическим ядром.

Из-за сложности построения обобщенного динамического ядра, предлагается его упрощение, которое существенно уменьшает объём вычислений. Упрощенное динамическое ядро строится с помощью вспомогательных величин α^k, $k = 0, \dots, l$.

Выбираем последовательность дележей

$$\xi^0, \dots, \xi^k, \dots, \xi^l,$$

где $\xi^k \in C(\bar{z}_k)$, $k = 0, \dots, l$.

Пусть ПРД $\tilde{\beta}^k = \alpha^k \xi^k$, $k = 0, \dots, l$. Тогда соответственно получаем ПРД $\tilde{\beta}^0, \dots, \tilde{\beta}^k, \dots, \tilde{\beta}^l$.

Определим $\tilde{\tilde{\beta}}^k = \{\tilde{\beta}_i^k, i \in N\}$, $k = 0, \dots, l$. Для разных дележей

$$\xi^0, \dots, \xi^k, \dots, \xi^l,$$

где $\xi^k \in C(\bar{z}_k)$, $k = 0, \dots, l$, получаем разные значения $\tilde{\beta}^0, \dots, \tilde{\beta}^k, \dots, \tilde{\beta}^l$, и таким образом разные $\tilde{\tilde{\beta}}^k$, $k = 0, \dots, l$.

Пусть $\tilde{B}^k$ — множество всевозможных $\tilde{\tilde{\beta}}^k$ для всех $\xi^k \in C(\bar{z}_k), k = 0, \dots, l$.

С помощью $\tilde{B}^k, k = 0, \dots, l$, строим множество

$$\tilde{\tilde{M}}(\bar{z}_0) = \{\tilde{\tilde{\xi}}^0 : \tilde{\tilde{\xi}}^0 = \tilde{\tilde{\beta}}^0 + \dots + \tilde{\tilde{\beta}}^k + \dots + \tilde{\tilde{\beta}}^l, \tilde{\tilde{\beta}}^k \in \tilde{B}^k\},$$

которое называется упрощенным динамическим ядром.

3.1 Динамическое ядро

В первую очередь напомним основные понятия многошаговых кооперативных игр [8]. Предполагаем, что в многошаговых кооперативных играх n лиц с полной информацией для любого пути игры $z = (z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_l)$, выигрыш i-го игрока в позиции z_k, выражается как $h_i(z_k)$, $k = 0, \ldots, l$, $i \in N$.

Пусть в игре $\Gamma_{\bar{z}_0}$ характеристическая функция $V(S)$, $S \subset N$, определяется как значение игры с нулевой суммой, которая происходит между коалицией $S \subset N$ и $N \backslash S$. Аналогично, в подыгре $\Gamma_{\bar{z}_k}$, $k = 1, \ldots, l$ определяется характеристическая функция $V(S, \bar{z}_k)$.

Определение Предположим, что

$$\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n\} \in I(z_0)$$

Всякая матрица $\beta = \{\beta_i^k\}, i = 1, \ldots, n, k = 0, \ldots, l$, такая, что

$$\xi_i = \beta_i^0 + \cdots + \beta_i^l$$

называется процедурой распределения дележа (ПРД).

Здесь $I(z_0)$ — множество дележей игры Γ_{z_0}, β_i^k — выплата игроку i на шаге k игры Γ_{z_0}.

Сумма $\beta_i(k) = \beta_i^0 + \cdots + \beta_i^k$ получатся игроком i на первых k шагах игры Γ_{z_0} [10].

Определение Принцип оптимальности $M(z_0)$ называется сильно динамически устойчивым, если для каждого $\xi \in M(z_0)$ существует ПРД β такая, что

$$\beta(k) \oplus M(\bar{z}_k) \subset M(z_0), k = 1, \ldots, l$$

где $a \oplus A = \{a + a' : a' \in A, a \in R^n, A \subset R^n\}$ [8].

Используя предыдущий подход, можно представить динамическое ядро

$$\bar{M}(\bar{z}_0) = \{\bar{\xi}^0 : \bar{\xi}^0 = \sum_{k=0}^{l} \bar{\beta}^k, \bar{\beta}^k \in \bar{B}^k\}$$

в игре $\Gamma_{\bar{z}_0}$, $k = 0, \ldots, l$.

Далее сформулируем теорему, в которой доказывается сильная динамическая устойчивость обобщенного динамического ядра.

Теорема

Если ПРД β определена как $\bar{\beta}^k$, $k = 0, \ldots, l$. то всегда выполняется

$$\bar{\beta}(k) \oplus \bar{M}(\bar{z}_k) \subset \bar{M}(\bar{z}_0)$$

Т. е. динамическое ядро $\bar{M}(z_0)$ — сильно динамически устойчиво.

$$\bar{\beta}(k) = \bar{\beta}^0 + \cdots + \bar{\beta}^m + \cdots + \bar{\beta}^{k-1}, \bar{\beta}^m \in \bar{B}^m$$

Здесь множество $\bar{\beta}(k) \oplus \bar{M}(\bar{z}_k)$ есть множество всех векторов $\bar{\beta}(k) + \bar{\xi}^k$, где $\bar{\xi}^k \in \bar{M}(\bar{z}_k)$.

Доказательства

Пусть $\bar{\xi} \in \bar{\beta}(k) \oplus \bar{M}(\bar{z}_k)$. Тогда

$$\bar{\xi} = \sum_{m=0}^{k-1} \bar{\beta}^m + \bar{\xi}^k,$$

$\bar{\beta}^m \in \bar{B}^m$, $m = 0, \ldots, k-1$.

Но $\bar{\xi}^k = \bar{\bar{\beta}}^m + \cdots + \bar{\bar{\beta}}^l, \bar{\bar{\beta}}^m \in \bar{B}^m, m = k, \ldots, l$

Рассмотрим

$$(\bar{\bar{\bar{\beta}}})^m = \begin{cases} \bar{\bar{\beta}}^m, & m = k, \ldots, l, \\ \bar{\beta}^m, & m = 0, \ldots, k-1, \end{cases}$$

Так как $\bar{\bar{\beta}}^m \in \bar{B}^m, m = k, \ldots, l$ и $\bar{\beta}^m \in \bar{B}^m, m = 0, \ldots, k-1$, следовательно, $\bar{\bar{\bar{\beta}}}^m \in \bar{B}^m, m = 0, \ldots, l$. Из определения $\bar{\xi} = \bar{\bar{\bar{\beta}}}^0 + \cdots + \bar{\bar{\bar{\beta}}}^l$ получаем, что $\bar{\xi} \in \bar{M}(z_0)$. Теорема доказана.

$\square$

3.2 Пример динамического ядра

Пусть Γ_{z_0} — кооперативная многошаговая игра с полной информацией (рис. 1). Игроки $N = \{1, 2, 3\}$. Будем обозначать вершины, где ходит игрок 1, значком $\circ$, вершины, где ходит игрок 2, — значком $\star$, и вершины, где ходит игрок 3, — значком $\bullet$. С помощью MATLAB найдена оптимальная траектория $\bar{z} = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$, для которой имеет место

$$\max_{\bar{z}_0,\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3,\bar{z}_4} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=0}^{4} h_i(z_k) = 137.$$

Вычисляем С-ядро $C(\bar{z}_k), k = 0, \dots, l$, и строим динамическое ядро $\bar{M}(\bar{z}_k), k = 0, \dots, l$, в игре Γ_{z_0} и подыграх $\Gamma_{z_k}, k = 1, \dots, l$.

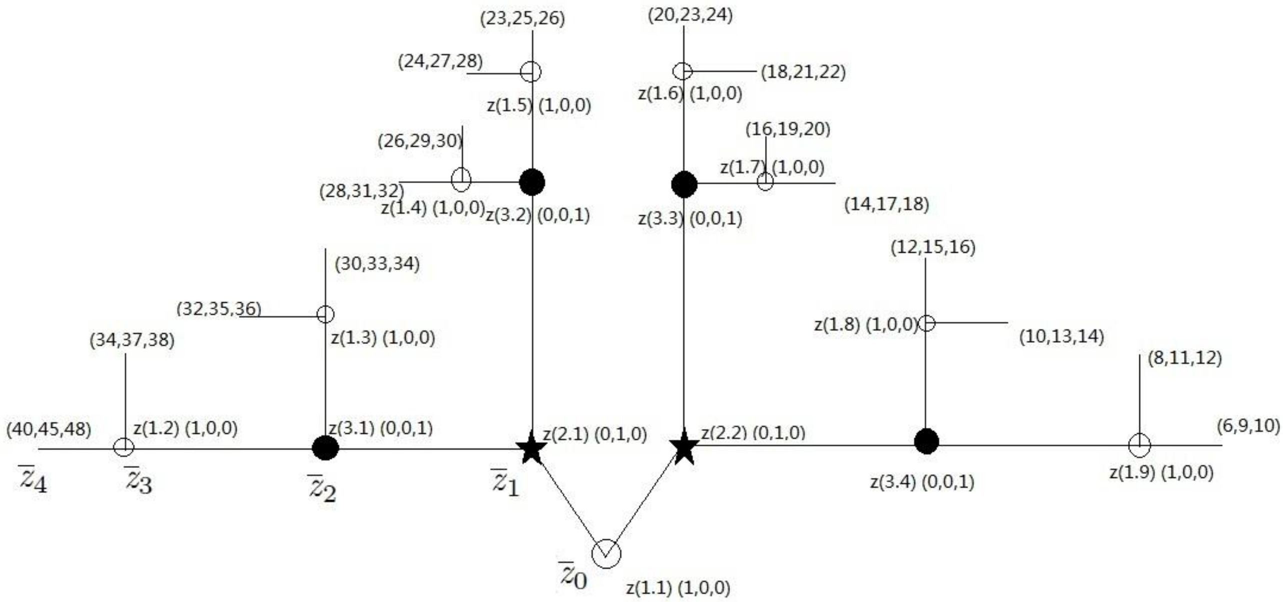

Рисунок 3.1 — Кооперативная многошаговая игра Γ_{z_0} с полной информацией

Рассмотрим некоторые дележи.

Пусть это будут $(70, -15, 82) \in \bar{M}(\bar{z}_0)$ и $(44, 41, 50) \in \bar{M}(\bar{z}_2)$. Согласно данным результатам MATLAB, выбираем дележ

$$\xi^0 = (80, 20, 37) \in C(\bar{z}_0)$$

$$\xi^1 = (50, 70, 16) \in C(\bar{z}_1)$$

$$\xi^{'1} = (40, 35, 61) \in C(\bar{z}_1)$$

$$\xi^{'2} = (44, 41, 50) \in C(\bar{z}_2)$$

ПРД будет $\beta^0 = (30, -50, 21), \beta^1 = (-4, -6, 11)$.

Таким образом, выполняется выражение

$$(30, -50, 21) + (-4, -6, 11) + +(44, 41, 50) = (70, -15, 82) \in \bar{M}(\bar{z}_0)$$

Это значит, что для дележа $(70, -15, 82) \in \bar{M}(\bar{z}_0)$ существует ПРД

$$\beta^0 = (30, -50, 21), \beta^1 = (-4, -6, 11)$$

такая, что $\beta^0 + \beta^1 + (44, 41, 50) \in \bar{M}(\bar{z}_0)$, здесь $(44, 41, 50) \in \bar{M}(\bar{z}_2)$.

С помощю MATLAB можно выбрать любой $\xi \in \bar{M}(\bar{z}_0)$, и найдётся $\beta(k)$, такая $\beta(k) + \xi^k \in \bar{M}(\bar{z}_0)$, если $\xi^k \in \bar{M}(\bar{z}_k)$.

3.3 Упрощение динамического ядра

Для того чтобы уменьшить объём вычислений при построении динамического ядра, упростим его.

Определяется вспомогательный вектор $\alpha = (\alpha^0, \ldots, \alpha^k, \ldots, \alpha^l), k = 0, \ldots, l$

$$\alpha^k = \frac{V(\bar{z}_k, N) - V(\bar{z}_{k+1}, N)}{V(\bar{z}_k, N)},$$

где $V(\bar{z}_k, N) = \xi_1^k + \cdots + \xi_i^k$, $i \in N$, дележ $\xi_i^k \in C(\bar{z}_k)$, $k = 0, \ldots, l$, $i \in N$.

Для построения упрощенного динамического ядра в игре $\Gamma_{\bar{z}_0}$ используем предыдущий подход

$$\tilde{\tilde{M}}(\bar{z}_0) = \{\tilde{\tilde{\xi}}^0 : \tilde{\tilde{\xi}}^0 = \sum_{k=0}^{l} \tilde{\tilde{\beta}}^k, \quad \tilde{\tilde{\beta}}^k \in \tilde{\tilde{B}}^k\}.$$

Множество $\tilde{\tilde{M}}(\bar{z}_0)$ - новый принцип оптимальности в игре $\Gamma_{\bar{z}_0}$. Теперь сформулируем теорему о динамической устойчивости упрощенного динамического ядра.

Теорема

Если ПРД β определена как $\tilde{\tilde{\beta}}^k$, $k = 0, \ldots, l$. то всегда выполняется

$$\tilde{\tilde{\beta}}(k) \oplus \tilde{\tilde{M}}(\bar{z}_k) \subset \tilde{\tilde{M}}(\bar{z}_0)$$

т. е. упрощенное динамическое ядро $\tilde{\tilde{M}}(z_0)$ — сильно динамически устойчиво,

$$\tilde{\tilde{\beta}}(k) = \tilde{\tilde{\beta}}^0 + \cdots + \tilde{\tilde{\beta}}^m + \cdots + \tilde{\tilde{\beta}}^{k-1}, \tilde{\tilde{\beta}}^m \in \tilde{\tilde{B}}^m$$

Здесь множество $\tilde{\tilde{\beta}}(k) \oplus \tilde{\tilde{M}}(\bar{z}_k)$ есть множество всех векторов $\tilde{\tilde{\beta}}(k) + \tilde{\tilde{\xi}}^k$, где $\tilde{\tilde{\xi}}^k \in \tilde{\tilde{M}}(\bar{z}_k)$.

Доказательства

Пусть $\tilde{\tilde{\xi}} \in \tilde{\tilde{\beta}}(k) \oplus \tilde{\tilde{M}}(\bar{z}_k)$, тогда

$$\tilde{\tilde{\xi}} = \sum_{m=0}^{k-1} \tilde{\tilde{\beta}}^m + \tilde{\tilde{\xi}}^{\bar{z}_k}, \quad \tilde{\tilde{\beta}}^m \in \tilde{\tilde{B}}^m, \quad m = 0, \ldots, k-1$$

Но $\tilde{\tilde{\xi}}^{\bar{z}_k} = \bar{\tilde{\tilde{\beta}}}^k + \dots + \bar{\tilde{\tilde{\beta}}}^m + \dots + \bar{\tilde{\tilde{\beta}}}^l$, $\bar{\tilde{\tilde{\beta}}}^m \in \tilde{\tilde{B}}^m$, $m = k, \dots, l$. Рассмотрим

$$(\bar{\bar{\tilde{\tilde{\beta}}}})^m = \begin{cases} \bar{\tilde{\tilde{\beta}}}^m, & m = k, \dots, l, \\ \tilde{\tilde{\beta}}^m, & m = 0, \dots, k-1, \end{cases}$$

Так как $\bar{\tilde{\tilde{\beta}}}^m \in \tilde{B}^m$, $m = k, \dots, l$ и $\tilde{\tilde{\beta}}^m \in \tilde{B}^m$, $m = 0, \dots, k-1$, следовательно, $\bar{\bar{\tilde{\tilde{\beta}}}}^m \in \tilde{B}^m$, $m = 0, \dots, l$. Из определения $\tilde{\tilde{\xi}} = \bar{\bar{\tilde{\tilde{\beta}}}}^0 + \dots + +\bar{\bar{\tilde{\tilde{\beta}}}}^l$, тогда $\tilde{\tilde{\xi}} \in \bar{\bar{M}}(z_0)$. Теорема доказана. $\square$

Глава 4. Динамический Вектор Шепли в игре с остовным деревом

В этой главе, исследуется динамический Вектор Шепли в двухшаговой игре с минимальным остовным деревом. На каждом шаге игроки строят минимальное остовное дерево, и вычисляется Вектор Шепли. На втором шаге один из игроков выбывает из игры с вероятностью p, зависящей от предыдущих стратегий игроков. Используя процедуру распределения дележа проводится регуляризация исходной игры.

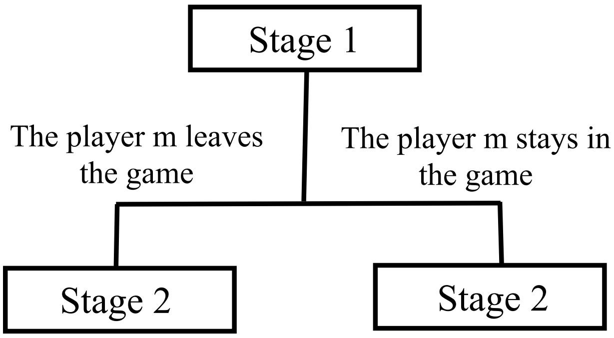

Рисунок 4.1

4.1 Построение двухшаговой игры с минимальным остовным деревом

Пусть $N' = N \cup \{0\}$ конечное множество, интерпретируемое как множество вершин конечного полного графа G. Вершину $\{0\}$ назовём истоком. Элементы множества N являются игроками в игре. На первом шаге игроки выбирают стратегии

$$x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,i-1}, x_{i,i+1}, \ldots, x_{i,n}),$$

где $x_{i,j}$ подразумевает воздействие игрока i на игрока j. Для $i, j \in N$ положим расходы на ребре (i, j) равными

$$c_{ij} = c_{ji} = f_c(x_{i,j}, x_{j,i}), c_{i0} = c_{0i} > 0, \forall i, j \in N.$$

Обозначим через E множество всех рёбер графа G. Получаем сеть $G(N', E)$ с единственном истоком $\{0\}$.

Обозначим через $T(N', C)$ минимальное остовное дерево сети $G(N', E)$. Очевидно, что $G(N', E)$ зависит от ситуации $x = (x_1, \ldots, x_n)$, поэтому естественно писать $T_x(N', C)$. Обозначим через $C(T_x(N', C))$ суммарные расходы в остовном дереве $T_x(N', C)$ в ситуации x. $P(m)$ будем называться непосредственным предшественником m, если имеет место $P(m) \in P_{m0}$ и $(P(m), m) \in T_x(N', C)$.

Где P_{m0} - путь из истока $\{0\}$ в вершину m. Последовательность $i_1, \ldots, i_{K-1}$ разный и все отличные от m и 0, $(i_k, i_{k+1}) \in P_{m0}$, $k \in [0, K-1]$, $K \geqslant 1$. Если $j \in P_{m0}$, j - предшественник-m. Множество $B(m)$ называется веткой, если $\exists S$, $|S| \geqslant 1$, когда $m \in S$, iff $\forall i \in S$, m - предшественник - i. Обозначим через $B(m)$ множество дуг (i, j) в поддереве остовного дерева с корнем m: $B(m) = S$. Зафиксируем некоторого игрока $m \in N$. В данной постановке считаем, что на втором шаге игры игрок m может покинуть игру с вероятностью

$$p = \frac{\sum_{(i,j)\in B(m)} c_{ij}}{C(T_x(N', C))}$$

и игра повторяется или на прежней сети или на сети без игрока m.

4.2 Динамической устойчивости

Предположим что затраты игрока $i \in N$ в двухшаговой игре суммируются из затрат на первом и втором шаге. Рассмотрим кооперативный вариант игры. Сперва определим характеристическую функцию в двухшаговой игре. Для этого определим минимальные суммарные затраты за два шага.

$$V^1(N) = \min_x [C(T_x(N', C)) + [pC(T_x(N' \setminus \{m\}, C)) + (1-p)C(T_x(N', C))]]$$

$$= C(T_{x^\star}(N', C)) + [pC(T_{x^\star}(N' \setminus \{m\}, C)) + (1-p)C(T_{x^\star}(N', C))].$$

Ситуацию $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star, \ldots, x_n^\star)$ будем называть кооперативным поведением игроков. Аналогично, значение характеристической функции для коалиции $S \subseteq N$, определяется по формуле

$$V^1(S) = \min_{x_s}[C(T_{x_s}(S', C)) + [pC(T_{x_s}(S' \setminus \{m\}, C)) + (1-p)C(T_{x_s}(S', C))]]$$

$$= C(T_{x_s^\star}(S', C)) + [pC(T_{x_s^\star}(S' \setminus \{m\}, C)) + (1-p)C(T_{x_s^\star}(S', C))]$$

если $m \in S$, $S' = S \cup \{0\}$.

$$V^1(S) = \min_{x_s}[2C(T_{x_s}(S', C))] = 2C(T_{x_s}(S', C)), S' = S \cup \{0\}.$$

если $m \notin S$, где $x_s = \{x_i, i \in S\}$. Вектор Шепли для двухшаговой игры равен

$$Sh_i^1(N', C) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi \in \Pi}[V^1(S_{\pi(i)} \cup \{i\}) - V^1(S_{\pi(i)})], \forall i \in N, S \subset N.$$

Где Π множество упорядочений множества игроков N. Характеристическая функция V^2 на втором шаге в одношаговой игре на сети порождённой ситуацией $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star, \ldots, x_n^\star)$ имеет вид

$$V^2(N) = \min_{x}[pC(T_x(N' \setminus \{m\}, C)) + (1-p)C(T_x(N', C))]$$

$$= pC(T_{x^\star}(N' \setminus \{m\}, C)) + (1-p)C(T_{x^\star}(N', C))$$

и

$$V^2(S) = \min_{x_s}[pC(T_{x_s}(S' \setminus \{m\}, C)) + (1-p)C(T_{x_s}(S', C))]$$

$$= pC(T_{x_s^\star}(S' \setminus \{m\}, C)) + (1-p)C(T_{x_s^\star}(S', C)),$$

если $m \in S$, $S' = S \cup \{0\}$

$$V^2(S) = \min_{x_s}[C(T_{x_s}(S', C))] = C(T_{x_s^\star}(S', C)),$$

если $m \notin S$, $S' = S \cup \{0\}$, где $x_s = \{x_i, i \in S\}$. Аналогично Вектор Шепли в одношаговой игре на втором шаге

$$Sh_i^2(N', C) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} [V^2(S_{\pi(i)} \cup \{i\}) - V^2(S_{\pi(i)})], \forall i \in N, S \subset N.$$

Где Π множество упорядочений множества игроков N. Для получения состоятельного во времени (динамически устойчивого) Вектора Шепли вводим ПРД (процедура распределения дележа $\beta = (\beta^1, \beta^2)$). По формулам

$$\beta^1 = Sh^1(N', C) - Sh^2(N', C)$$

$$\beta^2 = Sh^2(N', C)$$

если игроки на каждом шаге будут распределять затраты согласно ПРД β, то вектор Шепли будет динамически устойчив.

Глава 5. Многошаговая игра с остовным деревом

5.1 Определение многошаговой игры с остовным деревом

Определение Будем предполагать, что для каждого пути игры $z = (z_0, \ldots, z_l)$, $z_l \in X_{n+1}$ пусть на каждом ребре (z_k, z_{k+1}), $z_k \notin X_{n+1}$, $z_{k+1} \in F_{z_k}$ и в каждом окончательном позиции $z_l \in X_{n+1}$ задана игра n-лиц с остовным деревом и определяется как

$$G(N', E, (z_k, z_{k+1})), z_k \notin X_{n+1}, z_{k+1} \in F_{z_k}$$

$$G(N', E, z_k), z_k \in X_{n+1}$$

где $N' = N \cup \{0\}$ конечное множество, интерпретируемое как множество вершин конечного полного графа G. Вершину $\{0\}$ назовём истоком. Обозначим через E множество всех рёбер графа G. $E = \{(i, j) : \forall i \neq j, i, j \in N'\}$.

Определение Пусть C_e матрица расходов рёбер графа G. $C_e = (c_{ij})_{(i,j)\in E}$. c_{ij} расход ребра $(i, j), i, j \in N'$.

Определение Цикл p_{ll} - в графе G существуют K рёбра (i_k, i_{k+1}), $K \geq 3$, $k \in [0, K-1]$ такой, что $i_0 = i_K = l$ и последовательность $i_1, \ldots, i_{K-1}$ разная и все отличные от l.

Определение Путь p_{lm} - в графе G существуют K ребер (i_k, i_{k+1}), $K \geq 1$, $k \in [0, K-1]$ таких, что $i_0 = l, i_K = m$. Последовательности $i_1, \ldots, i_{K-1}$ разные и отличны от l и m.

Определение Граф $G(N', E, (z_k, z_{k+1}))$, $z_k \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, $z_{k+1} \in F_{z_k}$ или $G(N', E, z_k)$, $z_k \in X_{n+1}$ называется связным, если для каждой пары вершин $i, j \in N'$, в графе есть путь из вершины i в вершину j.

Определение Дерево - это связный граф без циклов.

Определение Остовное дерево графа $G(N', E, (z_k, z_{k+1}))$, $z_k \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, $z_{k+1} \in F_{z_k}$ или $G(N', E, z_k)$, $z_k \in X_{n+1}$ - это любой его подграф, которой содержает все вершины графа G и являет деревом.

Определение Обозначим через $T(N', C_e, (z_k, z_{k+1}))$ минимальное остовное дерево сети $G(N', E, (z_k, z_{k+1}))$, $z_k \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, $z_{k+1} \in F_{z_k}$.

$$T(N', C_e, (z_k, z_{k+1})) = \arg \min_{\bar{G} \in G(N', E, (z_k, z_{k+1}))} \sum_{(i,j) \in \bar{G}} c_{ij}$$

где $\bar{G}$ - подграф $G(N', E, (z_k, z_{k+1}))$, который включает все вершин N'.

Аналогично, обозначим через $T(N', C_e, z_k)$ минимальное остовное дерево сети $G(N', E, z_k)$, $z_k \in X_{n+1}$.

$$T(N', C_e, z_k) = \arg \min_{\bar{G} \in G(N', E, z_k)} \sum_{(i,j) \in \bar{G}} c_{ij}$$

где $\bar{G}$ - подграф $G(N', E, z_k)$, который включает все вершин N'.

Определение Обозначим через $C(T(N', C_e, (z_k, z_{k+1})))$ суммарные расходы в остовном дереве $T(N', C_e, (z_k, z_{k+1}))$, $z_k \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, $z_{k+1} \in F_{z_k}$.

$$C(T(N', C_e, (z_k, z_{k+1}))) = \sum_{(i,j) \in T(N', C_e, (z_k, z_{k+1}))} c_{ij}$$

Аналогично, обозначим через $C(T(N', C_e, z_k))$ суммарные расходы в остовном дереве $T(N', C_e, z_k)$, $z_k \in X_{n+1}$.

$$C(T(N', C_e, z_k)) = \sum_{(i,j) \in T(N', C_e, z_k)} c_{ij}$$

Определение На каждом графе $G(N', E, (z_k, z_{k+1}))$, $z_k \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, $z_{k+1} \in F_{z_k}$ определены n действительных чисел $c_i(z_k, z_{k+1})$, $i = 1, \ldots, n$, $c_i(z_k, z_{k+1}) \geq 0$ так чтобы выполнялись следующее условие

$$C(T(N', C_e, (z_k, z_{k+1}))) = \sum_{i=1}^{n} c_i(z_k, z_{k+1})$$

$(c_1(z_k, z_{k+1}), \ldots, c_n(z_k, z_{k+1}))$ является вектором распределений расходов графа $G(N', E, (z_k, z_{k+1}))$.

Аналогично, на каждом графе $G(N', E, z_k)$, $z_k \in X_{n+1}$ определены n действительных чисел $c_i(z_k)$, $i = 1, \ldots, n$, $c_i(z_k) \geq 0$ так чтобы выполнялись следующее условие

$$C(T(N',C_e,z_k))=\sum_{i=1}^{n}c_i(z_k)$$

$(c_1(z_k),\ldots,c_n(z_k))$ является вектором распределений расходов графа $G(N',E,z_k)$.

Определение На основании исследования Bird(1976), определим Bird-распределение расходов между игроками. Для любой вершины i в графе $G(N',E,(z_k,z_{k+1})), z_k \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i, z_{k+1} \in F_{z_k}$ или $G(N',E,z_k)$, $z_k \in X_{n+1}$, пусть p_{i0} это путь между игроком i и источником $\{0\}$, и пусть (i,m) это ребро, которое содержит вершины i и m, в пути p_{i0},

такой что

$$h_i(z_k,z_{k+1})=c_i(z_k,z_{k+1})=c_{im}, z_k \notin X_{n+1}, z_{k+1} \in F_{z_k}$$

$$g_i(z_k)=c_i(z_k)=c_{im}, z_k \in X_{n+1}$$

где $i \neq m \in N'$, c_{im} - это расход ребра (i,m) в графе.

Определение. Если $\bar{z}=(\bar{z}_0,\ldots,\bar{z}_k,\ldots,\bar{z}_l), \bar{z}_l \in X_{n+1}$ путь реализованный ситуацией $\bar{u}(\cdot)=(\bar{u}_1,...,\bar{u}_i,...,\bar{u}_n), i \in N$, и существует соответственный вектор весов $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1, \alpha_i \geq 0$,

такой,что

$$\min_{z_0,\ldots,z_i,\ldots,z_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\alpha_i h_i(z_k,z_{k+1})+\alpha_i g_i(z_l)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{l-1}\alpha_i h_i(\bar{z}_k,\bar{z}_{k+1})+\alpha_i g_i(\bar{z}_l)$$

$$h_i \geq 0, h_i \geq 0, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$$

тогда кооперативная игра Γ_{z_0} развивается вдоль траектории $\bar{z}=(\bar{z}_0,\ldots,\bar{z}_l)$, $\bar{z}_l \in X_{n+1}$, которую будем казывется оптимальной траекторией.

Для игры Γ_{z_0} набор стратегий $\bar{u}(\cdot)=(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_i,\ldots,\bar{u}_n)$, $i \in N$, соответствует пути $\bar{z}=(\bar{z}_0,\ldots,\bar{z}_k,\ldots,\bar{z}_l)$, $\bar{z}_l \in X_{n+1}$.

Выигрыш игрока i в Γ_{z_0}:

$$\bar{H}_i(z_0)=\sum_{k=0}^{l-1}h_i(\bar{z}_k,\bar{z}_{k+1})+g_i(\bar{z}_l), h_i, g_i \geq 0$$

Как выше, пусть β_i^k процедура распределения выигрыша (ПРВ). Т.е.

$$\bar{H}_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) = \sum_{k=0}^{l} \beta_i^k$$

5.2 Временная состоятельность кооперативного решения (оптимальность по Парето)

Вдоль оптимальной траектории $\bar{z} = (z_0, \ldots, z_l)$ нашли минимальную сумму расходов игроков в многошаговых кооперативных играх с остовным деревом. Т.е. в игре Γ_{z_0}, должно выполняться условие

$$\bar{H}_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) \leq V^i(z_0; \{i\}, N/\{i\})$$

(условие индивидуальной рациональности)

Игра Γ_{z_0} развивается вдоль оптимальной траектории $\bar{z} = (\bar{z}_0, \ldots, \bar{z}_l)$, $\bar{z}_l \in X_{n+1}$. Для выполнения условия временной состоятельности, должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) \leq V^i(z_1; \{i\}, N/\{i\})$$

$$\sum_{k=2}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) \leq V^i(z_2; \{i\}, N/\{i\})$$

$$\ldots$$

$$\sum_{k=m}^{l-1} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) \leq V^i(z_m; \{i\}, N/\{i\})$$

$$\ldots$$

$$g_i(\bar{z}_l) \leq V^i(z_l; \{i\}, N/\{i\})$$

$$m \in \{1,2,...,l\}$$

Аналогично выше, если

$$\sum_{k=m}^{l} h_i(\bar{z}_k, \bar{z}_{k+1}) + g_i(\bar{z}_l) > V^i(z_m; \{i\}, N/\{i\}), m \in \{0,1, \ldots, l\}$$

для некоторых $i \in N$, то это временная несостоятельность решения.

5.3 Пример временной несостоятельности кооперативного решения

Пример

Пусть кооперативная многошаговая игра Γ_{z_0} с остовным деревом.

Игроки $N = \{1{,}2\}$. Мы будем обозначать вершины где ходит игрок 1 через кольцо, и вершины где ходит игрок 2 прямоугольником. Стратегии игроков i - $u_i^{z_0}, i \in \{1{,}2\}$, ситуация $u = \{u_1^{z_0}, u_2^{z_0}\}$, соответствующая траектория $(z_0, \ldots, z_k, \ldots, z_l)$.

На каждом ребре и в каждой окончательной позиции определена 2-х игра с остовным деревом. Как показано на рисунке ниже, граф $G(N', E, (z_0, z_1))$ на ребре (z_0, z_1). $\{0\}$ - источник.

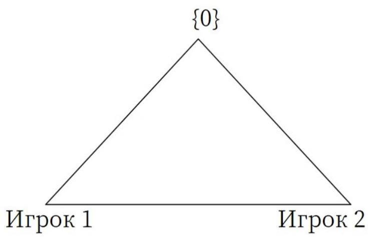

Рисунок 5.1

C_{z_0,z_1} матрица расходов рёбер графа $G(N', E, (z_0, z_1))$.

$$C_{z_0,z_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 6 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимальное остовное дерево $T(N', C_{z_0,z_1}, (z_0, z_1))$

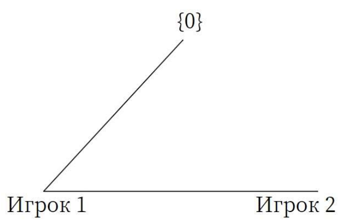

Рисунок 5.2

Суммарные расходы в остовное дерево $T(N', C_{z_0,z_1}, (z_0, z_1))$:

$$C(T(N', C_{z_0,z_1}, (z_0, z_1))) = 2 + 6 = 8$$

Нашли что Bird-распределение расходов в графе $G(N', E, (z_0, z_1))$:

$$h_1(z_0, z_1) = c_1(z_0, z_1) = c_{01} = 2$$

$$h_2(z_0, z_1) = c_2(z_0, z_1) = c_{21} = 6$$

Аналогично, определим матрицы расходов рёбер графа на других рёбрах и в окончательном позиции.

$$C_{z_0,z_5} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 6 \\ 10 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1(z_0, z_5) = c_1(z_0, z_5) = 2 \\ h_2(z_0, z_5) = c_2(z_0, z_5) = 6 \end{matrix}$$

$$C_{z_1,z_2} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 6 & 0 & 5 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1(z_1, z_2) = c_1(z_1, z_2) = 6 \\ h_2(z_1, z_2) = c_2(z_1, z_2) = 5 \end{matrix}$$

$$C_{z_1,z_6} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 6 & 0 & 5 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1(z_1, z_6) = c_1(z_1, z_6) = 6 \\ h_2(z_1, z_6) = c_2(z_1, z_6) = 5 \end{matrix}$$

$$C_{z_2,z_3} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 19 \\ 5 & 0 & 6 \\ 19 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1(z_2, z_3) = c_1(z_2, z_3) = 5 \\ h_2(z_2, z_3) = c_2(z_2, z_3) = 6 \end{matrix}$$

$$C_{z_2,z_7} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 19 \\ 5 & 0 & 6 \\ 19 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1(z_2, z_7) = c_1(z_2, z_7) = 5 \\ h_2(z_2, z_7) = c_2(z_2, z_7) = 6 \end{matrix}$$

$$C_{z_3,z_4} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 6 & 0 & 5 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1(z_3, z_4) = c_1(z_3, z_4) = 6 \\ h_2(z_3, z_4) = c_2(z_3, z_4) = 5 \end{matrix}$$

$$C_{z_3,z_8} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 6 & 0 & 5 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h_1(z_3,z_8) = c_1(z_3,z_8) = 6 \\ h_2(z_3,z_8) = c_2(z_3,z_8) = 5 \end{matrix}$$

$$C_{z_4} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 10 \\ 3 & 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} g_1(z_4) = c_1(z_4) = 3 \\ g_2(z_4) = c_2(z_4) = 3 \end{matrix}$$

$$C_{z_5} = \begin{pmatrix} 0 & 23 & 23 \\ 23 & 0 & 100 \\ 23 & 100 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} g_1(z_5) = c_1(z_5) = 23 \\ g_2(z_5) = c_2(z_5) = 23 \end{matrix}$$

$$C_{z_6} = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 13 \\ 18 & 0 & 90 \\ 13 & 90 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} g_1(z_6) = c_1(z_6) = 18 \\ g_2(z_6) = c_2(z_6) = 13 \end{matrix}$$

$$C_{z_7} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 9 \\ 11 & 0 & 70 \\ 9 & 70 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} g_1(z_7) = c_1(z_7) = 11 \\ g_2(z_7) = c_2(z_7) = 9 \end{matrix}$$

$$C_{z_8} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 17 \\ 5 & 17 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} g_1(z_8) = c_1(z_8) = 4 \\ g_2(z_8) = c_2(z_8) = 5 \end{matrix}$$

Выигрыши игроков i, $i \in \{1, 2\}$:

$$H_i(z_0) = \sum_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l)$$

Пусть вектор весов $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, тогда для оптимальной по Парето траектории выполняется $\bar{z} = (z_0, \ldots, z_k, \ldots, z_l)$.

$$\min \alpha_1 [\sum_{k=0}^{l-1} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_l)] + \alpha_2 [\sum_{k=0}^{l-1} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_l)], \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

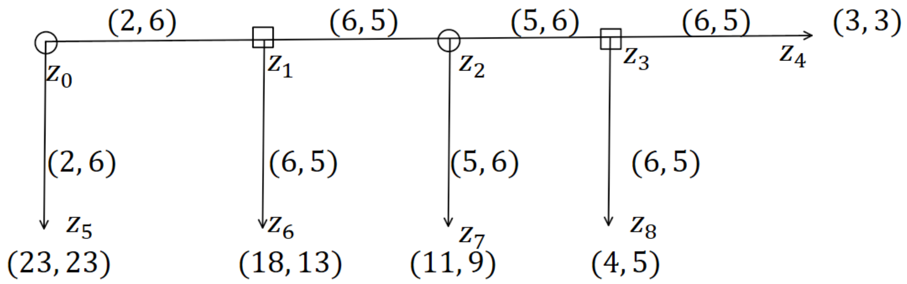

Рисунок 5.3

Оптимальная по Парето траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ т.к.

$$\min \frac{1}{2} \times [\sum_{i=0}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4)] + \frac{1}{2} \times [\sum_{i=0}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_4)] =$$

$$= \frac{1}{2} \times 22 + \frac{1}{2} \times 25 = 23.5$$

Т.е.

$$H_1(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4) = 2 + 6 + 5 + 6 + 3 = 22$$

$$H_2(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4) = 6 + 5 + 6 + 5 + 3 = 25$$

В этой игре:

Игрок 1 $V^1(z_0) = 25$, и

$$H_1(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4) = 22 \leq V^1(z_0) = 25$$

Игрок 2 $V^2(z_0) = 29$, и

$$H_2(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_4) = 25 \leq V^2(z_0) = 29$$

Оптимальная по Парето траектория$\bar{z} = (\bar{z}_0,\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3,\bar{z}_4)$.

В подыгре Γ_{z_1}

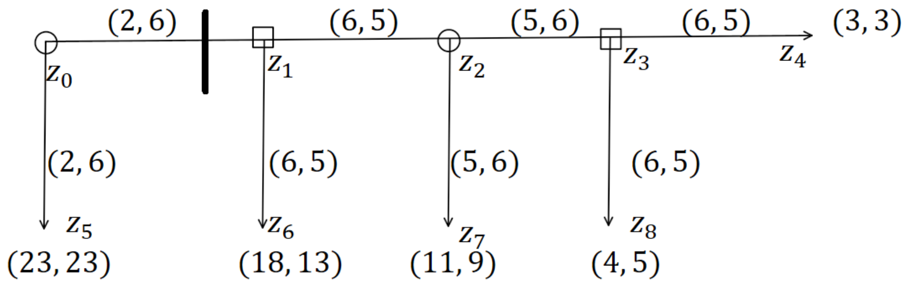

Рисунок 5.4

Игрок 1: $V^1(z_1) = 24$

$$\sum_{k=1}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_4) = 20 \leq V^1(z_1) = 24$$

Игрок 2: $V^2(z_1) = 18$

$$\sum_{k=1}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_4) = 19 > V^2(\bar{z}_1) = 18$$

Т.е. на оптимальной траектории $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ по Парето имеет место временная несостоятельность

Т. к. существует $m \in \{0{,}1, \ldots, l\}$, такой что

$$\sum_{k=m}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l) > V^i(z_m; \{i\}, N/\{i\})$$

5.4 Пример временной состоятельности кооперативного решения с процедурой распределения выигрыша (ПРВ)

Аналогично выше, введём β_i^k ПРВ и проверим пример 1 (1.2), чтобы индивидуальная рациональность выполнялась для каждого игрока.

Как показано на рисуноке ниже, граф $G(N', E, (z_0, z_1))$ на ребере (z_0, z_1). $\{0\}$ - источник. Матрицы расходов в графах, на рёбрах, определены как выше.

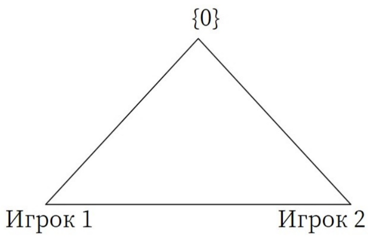

Рисунок 5.5

Игроки $N = \{1{,}2\}$. Выигрыши игроков i: $H_i(z_0) = \sum\limits_{k=0}^{l-1} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_l)$. Пусть вектор весов $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, то на оптимальной по Парето траектории выполняется $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_l)$

$$\min \alpha_1[\sum_{k=0}^{l-1} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_l)] + \alpha_2[\sum_{k=0}^{l-1} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_l)], \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Вычислили, что в этой игре Γ_{z_0} на оптимальной по Парето траектории $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_l)$

$$H_1(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_1(z_k, z_{k+1}) + g_1(z_k) = 22$$

$$H_2(z_0) = \sum_{k=0}^{3} h_2(z_k, z_{k+1}) + g_2(z_k) = 25$$

Найдём значение игры $V^1(z_k)$ и $V^2(z_k)$ в антагонистическом игре двух игроков $V(z_0; \{1\}, \{2\}))$. $k \in \{0{,}1{,}2{,}3{,}4\}$. Обозначаем $V^i(z_k; \{1\}, \{2\})$ упрощённым образом через $V^i(z_k)$, $k \in \{0{,}1, \ldots, l\}, i \in N$.

Случай 1. В игре z_0.

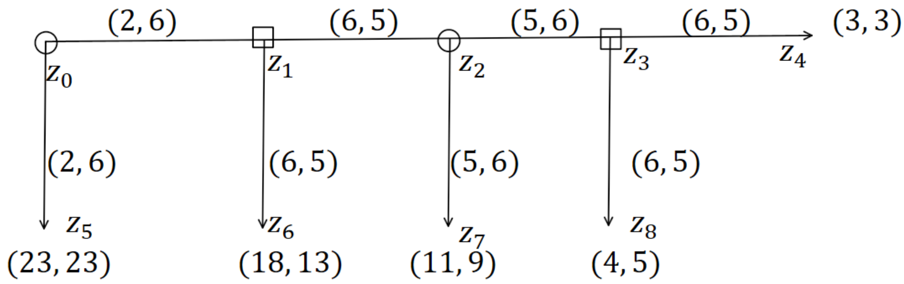

Рисунок 5.6

Игрок 1: $V^1(z_0) = 25$.

Игрок 2: $V^2(z_0) = 29$.

Случай 2. В подыгре Γ_{z_1}

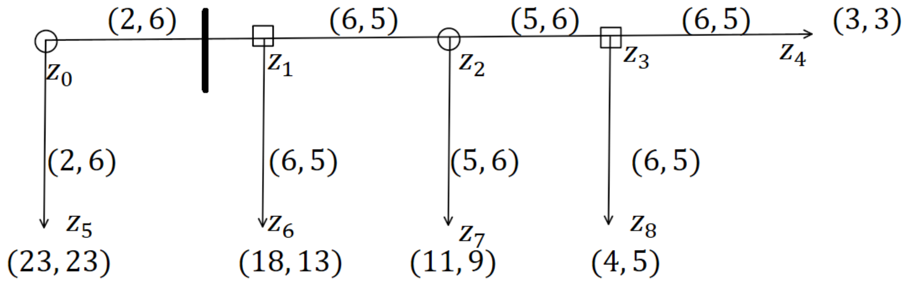

Рисунок 5.7

Игрок 1: $V^1(z_1) = 24$.

Игрок 2: $V^2(z_1) = 18$.

Случай 3. В подыгре Γ_{z_2}.

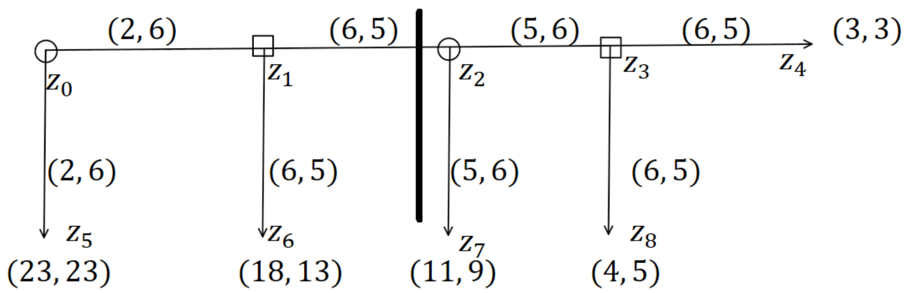

Рисунок 5.8

Игрок 1: $V^1(z_2) = 15$.

Игрок 2: $V^2(z_2) = 15$.

Случай 4. В подыгре Γ_{z_3}

Игрок 1: $V^1(z_3) = 10$.

Игрок 2: $V^2(z_3) = 8$.

Случай 5. При этом на множестве окончательном позиций.

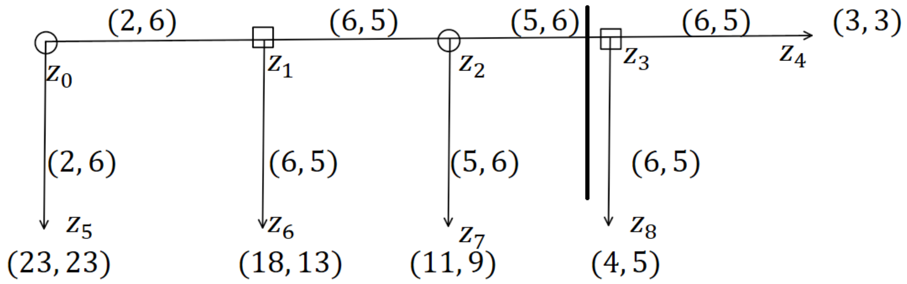

Рисунок 5.9

Игрок 1: $V^1(z_4) = 3$.

Игрок 2: $V^2(z_4) = 3$.

Используем теорему 1

$$\beta_i^k = \frac{H_i(z_0) - V^i(z_0; \{1\}, \{2\})}{l+1} - [V^i(z_{k+1}; \{1\}, \{2\}) - V^i(z_k; \{1\}, \{2\})]$$

β_i^k ПРВ в Γ_{z_0} и $H_i(z_0) = \sum\limits_{k=0}^{3} h_i(z_k, z_{k+1}) + g_i(z_4)$, $i \in \{1, 2\}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

По оптимальной траектории $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ по Парето:

Для игрока 1

$$\beta_1^0 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [V^1(z_1) - V^1(z_0)] = \frac{22-25}{5} - [24 - 25] = 0.4$$

$$\beta_1^1 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [V^1(z_2) - V^1(z_1)] = \frac{22-25}{5} - [15 - 24] = 8.4$$

$$\beta_1^2 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [V^1(z_3) - V^1(z_2)] = \frac{22-25}{5} - [10 - 15] = 4.4$$

$$\beta_1^3 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [V^1(z_4) - V^1(z_3)] = \frac{22-25}{5} - [3 - 10] = 6.4$$

$$\beta_1^4 = \frac{H_1(z_0) - V^1(z_0)}{5} - [0 - V^1(z_4)] = \frac{22-25}{5} - [0 - 3] = 2.4$$

Для игрока 2

$$\beta_2^0 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [V^2(z_1) - V^2(z_0)] = \frac{25-29}{5} - [18 - 29] = 10.2$$

$$\beta_2^1 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [V^2(z_2) - V^2(z_1)] = \frac{25-29}{5} - [15 - 18] = 2.2$$

$$\beta_2^2 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [V^2(z_3) - V^2(z_2)] = \frac{25-29}{5} - [8-15] = 6.2$$

$$\beta_2^3 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [V^2(z_4) - V^2(z_3)] = \frac{25-29}{5} - [3-8] = 4.2$$

$$\beta_2^4 = \frac{H_2(z_0) - V^2(z_0)}{5} - [0 - V^2(z_4)] = \frac{25-29}{5} - [0-3] = 2.2$$

С помощью $\beta_i^k, i \in \{1,2\}, k \in \{0,1,2,3,4\}$ (ПРВ) построим новую игру Γ'_{z_0}.

Случай 1.

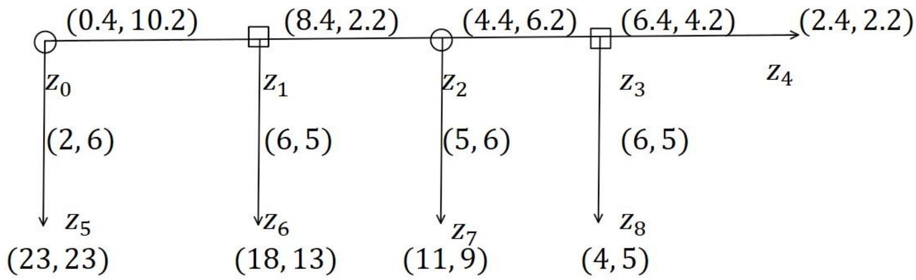

Рисунок 5.10

Значение игры $V^1(z_0)$ и $V^2(z_0)$ в антагонистической игре 2 игроков Γ'_{z_0}.

Игрок 1: $V^1(z_0) = 24.4$

Тогда

$$H_1(z_0) = \beta_1^0 + \beta_1^1 + \beta_1^2 + \beta_1^3 + \beta_1^4 = 22 \leq V^1(z_0) = 24.4$$

Игрок 2: $V^2(z_0) = 29$,То

$$H_2(z_0) = \beta_2^0 + \beta_2^1 + \beta_2^2 + \beta_2^3 + \beta_2^4 = 25 \leq V^2(z_0) = 29$$

Оптимальная траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ по Парето.

Случай 2. В игре Γ'_{z_1}.

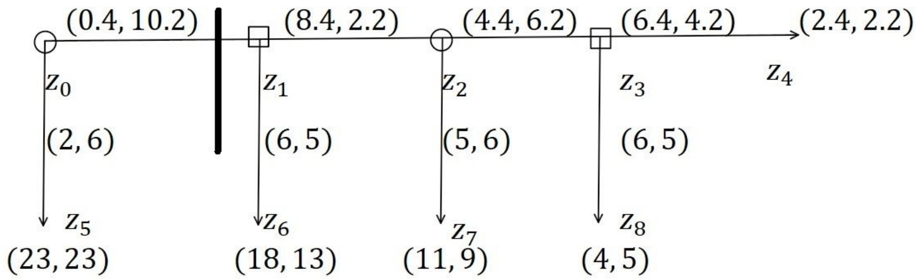

Рисунок 5.11

Игрок 1: $V^1(z_1) = 24$,

$$\beta_1^1 + \beta_1^2 + \beta_1^3 + \beta_1^4 = 21.6 \leq V^1(z_1) = 24$$

Игрок 2: $V^2(z_1) = 17.2$,

$$\beta_2^1 + \beta_2^2 + \beta_2^3 + \beta_2^4 = 14.8 \leq V^2(z_1) = 17.2$$

Оптимальная траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ по Парето.
Случай 3. В подыгре Γ'_{z_2}.

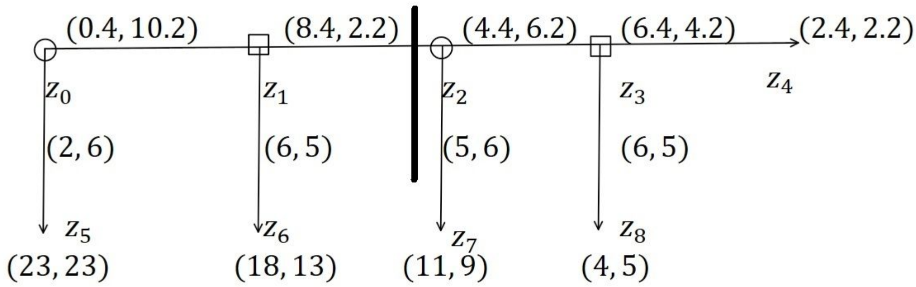

Рисунок 5.12

Игрок 1: $V^1(z_2) = 14.4$

$$\beta_1^2 + \beta_1^3 + \beta_1^4 = 13.2 \leq V^1(z_2) = 14.4$$

Игрок 2: $V^2(z_2) = 15$

$$\beta_2^2 + \beta_2^3 + \beta_2^4 = 12.6 \leq V^2(z_2) = 15$$

Оптимальная по Парето траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$.
Случай 4. В игре Γ'_{z_3}.

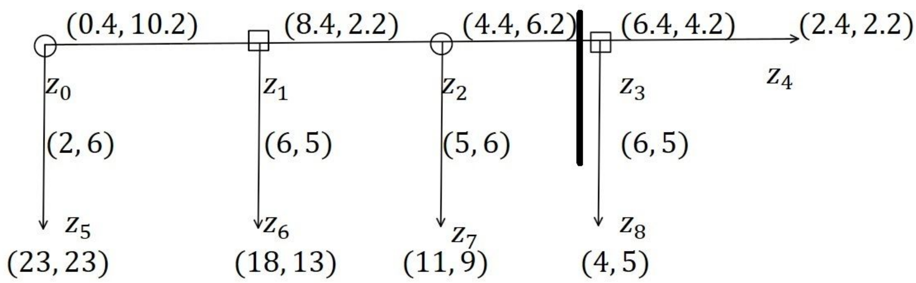

Рисунок 5.13

Игрок 1: $V^1(z_3) = 10$, и

$$\beta_1^3 + \beta_1^4 = 8.8 \leq V^1(z_3) = 10$$

Игрок 2: $V^2(z_3) = 6.4$, и

$$\beta_2^3 + \beta_2^4 = 6.4 \leq V^2(z_3) = 6.4$$

Оптимальная по Парето траектория $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Случай 5. Очевидно

$$\beta_1^4 = 2.4 \leq V^1(z_4) = 2.4$$

$$\beta_2^4 = 2.2 \leq V^2(z_4) = 2.2$$

Используя теорему 1, получили $\beta_i^k, i \in \{1{,}2\}, k \in \{0{,}1{,}2{,}3{,}4\}$ (ПРВ) в примере, и $\beta_i^k, i \in \{1{,}2\}, k \in \{0{,}1{,}2{,}3{,}4\}$ удовлетворяет

$$\sum_{k=m}^{4} \beta_i^k \leq V^i(z_m; \{i\}, N/\{i\}), i \in \{1{,}2\}, m \in \{0{,}1{,}2{,}3{,}4\}$$

Заключение

В данной диссертации во-первых мы исследуем временную состоятельность и представляем формулу для процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации. Мы предоставляем формулу процедуры распределения выигрыша для того, чтобы никто не захотел отклоняться от оптимальной траектории в многошаговой игре кооперации с полной информацией. Это значит с помощью формулы процедуры распределения выигрыша мы преобразуем игру, чтобы кооперация была устойчивой при её реализации в многошаговой игре кооперации. В части исследования теоремы 2 мы построили стратегии наказания и накажем игроков, которые обращаются к иррациональному поведению. С помощью стратегий наказания игроки придерживаются одного и того же принципа оптимальности в любой момент, и поэтому не имеют объективных мотивов, чтобы отклоняться от ранее выбранного решения кооперации. Во-вторых мы исследуем сильную динамическую устойчивость принципов оптимальности в многошаговых кооперативных играх с полной информацией. С помощью понятия процедуры распределения дележа построено динамическое ядро и доказывается его сильная динамическая устойчивость. Из-за сложности построения динамического ядра предложно его упрощение, которое существенно уменьшает объём вычислений. В ряде случаев упрощенное динамическое ядро принадлежит динамическому ядру. Далее, мы исследуем динамический Вектор Шепли в двухшаговой игре с минимальным остовным деревом. На каждом шаге игроки строят минимальное остовное дерево, и вычисляется Вектор Шепли. На втором шаге один из игроков выбывает из игры с вероятностью p, зависящей от предыдущих стратегий игроков. Используя процедуру распределения дележа проводится регуляризация исходной игры. В конце мы исследуем временную состоятельность для процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации с остовным деревом. С помощью формулы процедуры распределения выигрыша в многошаговой игре кооперации мы исследуем пример, в котором каждый игрок удовлетворяет условию индивидуальной рациональности.

Список литературы

1. Neumann L J, Morgenstern O. Theory of games and economic behavior. Princeton, NJ: Princeton university press, 1947.

2. Петросян Л А, Данилов Н Н. Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с трансферабельными выигрышами// Вестник Ленинградского университета, 1979, 1: 52-59.

3. Yeung D W K. Technical Note:"An Irrational-Behavior-Proof Condition In Cooperative Differential Games"// International Game Theory Review, 2006, 8(04): 739-744.

4. Петросян Л А, Зенкевич Н А, Семина Е А. Теория игр: Учебное пособие для университетов// М.: Высшая школа, 1998.

5. Петросян Л А, Принципы оптимальности в многошаговых играх// Соросовский образовательный журнал, 1996 (10): 120-125.

6. Р.Ф. Хабибуллин ,Игры с непротивоположными интересами: учеб. пособие//сост. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 24 с.

7. Nash Jr J F. The bargaining problem[J]. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1950: 155-162.

8. Петросян Л. А., Козловская Н. В., Ильина А. В. Коалиционное решение в задаче сокращения выбросов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 2. С. 46–59.

9. Петросян Л. А., Кузютин Д. В. Устойчивые решения позиционных игр. СПБ.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. 77 с.

10. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А. Принципы устойчивой кооперации // Математическая теория игр и её приложения. 2009. Т. 1. №1. С. 106-–123.

11. L.A. Petrosyan, Vestnik of the Leningrad State University. 13, 1977.

12. L.A. Petrosyan and N.N. Danilov, Vestnik of the Leningrad State University. 1, 1979

13. C. Trudeau, Minimum cost spanning tree problems with indifferent agents. Games and Economic Behavior, 84, pp. 137-151, 2014.

14. D. Granot and G. Huberman, Minimum cost spanning tree games. Mathematical programming, 21(1), pp. 1-18, 1981.

15. L. Petrosyan, Cooperative stochastic games. Advances in dynamic games. Birkhauser Boston, pp. 139-145, 2006.

16. Bird C G. On cost allocation for a spanning tree: a game theoretic approach. Networks, 6(4), pp. 335-350, 1976.

17. Kar A. Axiomatization of the Shapley value on minimum cost spanning tree games. Games and Economic Behavior, 38(2), pp. 265-277, 2002.

Публикации по теме диссертации

1. Li Yin, Построение сильно динамически устойчивого ядра в кооперативных играх с полной информацией, Процессы управления и устойчивость (CPS'15). 2015 2(1):63

2. Li Yin, The dynamic Shapley Value in the game with spanning tree//Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), 2016 International Conference. IEEE, 2016: 1-4. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541206

3. Li Yin, Dynamic Shapley value in the game with spanning forest (принято к печати)//Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics, St. Petersburg, Russia, 2017 International Conference. IEEE.

4. Li Yin, Dynamic Shapley Value for 2-stage cost sharing game with perishable products (принято к печати)//The 29th Chinese Control and Decision Conference (CCDC), Chongqing, China 2017 International Conference. IEEE.

5. Li Yin, Petrosyan L.A., Dynamic Shapley Value for Irreducible Networks (тезис)//SING12 European Meeting on Game Theory, Odense, Denmark, 2016

6. Li Yin, Dynamic Shapley Value for 2-stage cost sharing game with optimistic players (тезис)//Seventh Workshop on Dynamic Games in Management Science, Paris, France, 2016

7. Li Yin, Dynamic Shapley Value for n-stage cost sharing game with spanning tree (тезис)//Game Theory and Management(GTM2016), Saint Petersburg, Russia, 2016

8. Li Yin, NTU solution formula for finite games with perfect information (тезис)//SING11 European Meeting on Game Theory, Saint Petersburg, Russia, 2015