ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ФОРМИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ У СТАРШЕКЛАССНИКОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика
очной формы обучения, группы 02041302
Чупахиной Юлии Александровны

Научный руководитель
к. ф.- м. н., доцент
Зинченко Н.А.

БЕЛГОРОД 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В условиях развивающегося современного общества и с учётом новейших технологий выясняется, что должны быть изменены цели и задачи образования. Теперь учителям нужно не просто передать учащимся знания в готовом виде, а помочь им добыть эти знания самостоятельно. Таким образом, получается, что школьная программа должна помочь ученикам в получении опорных знаний, развитии их мышления. Обучение различным предметам в совокупности должно сформировать способность оценивать новые факты, явления, идеи, которые могут встретиться в общественной жизни, в труде. Школьники должны быть готовыми к восприятию, осмыслению, отбору и использованию вновь получаемых знаний [8]. Сегодня общеобразовательная школа должна обеспечить ученика такой системой знаний и умений, которые необходимы для дальнейшего образования и самообразования, а также развить его познавательные интересы, сформировать способность ориентироваться и применять знания в нестандартных ситуациях [17, с.10].

Проверкой выполнения указанных выше целей обучения является успешная сдача выпускниками единого государственного экзамена. Поэтому главной целью для выпускников средней школы является усвоение учебного материала. В рамках изучения предмета математики важной составляющей успеха является формирование у учеников старших классов критического мышления.

Проанализировав психолого-педагогическую и специальную литературу, мы выяснили, что вопросами изучения критического мышления занимались такие учёные, как Д.А. Браус, Д. Вуд [6], Д. Халперн [14]. Однако следует заметить, что проблема формирования критического мышления у старшеклассников в педагогической науке и практике ещё полностью не решена.

В поисках путей решения этой проблемы некоторые учёные исходят из того, что для формирования у учащихся критического мышления учитель может использовать современные технологии обучения.

Проблемами технологий обучения занимались учёные: И.Я. Лернер [9], В.П. Беспалько [4], В.В. Гузеев [7], М.А. Чошанов [16] и др.

Одной из таких технологий является технология критического мышления, что и позволило определить тему нашей работы: «Формирование критического мышления у старшеклассников при решении логарифмических уравнений и неравенств».

В ходе работы была предпринята попытка разрешения следующей проблемы: какова роль применения технологии критического мышления для улучшения качества знаний старшеклассников?

Решение этой проблемы составляет цель исследования.

Объект исследования: процесс развития мышления учащихся в условиях уроков математики.

Предмет исследования: формирование критического мышления у старшеклассников при обучении решению логарифмических уравнений и неравенств.

Проблема, цель, объект и предмет исследования потребовали решения следующих задач:

1. Изучить и проанализировать психолого-педагогическую и специальную литературу по исследуемой проблеме.

2. Разработать и апробировать методику изучения темы «Логарифмические уравнения и неравенства» с целью формирования критического мышления у старшеклассников, а также для повышения уровня подготовки учащихся к сдаче единого государственного экзамена.

3. Выявить уровень усвоения материала по указанной выше теме учащимися 11 класса МБОУ «Курасовская СОШ» Ивнянского района Белгородской области по окончании работы.

В основу исследования была положена гипотеза, согласно которой изучение старшеклассниками тем «Логарифмическая функция, её свойства и график», «Логарифмы и их свойства» и «Логарифмические уравнения и неравенства» с использованием технологии формирования критического мышления будет способствовать формированию этого мышления у учащихся, а также поможет лучше усвоить данные темы.

В русле данной гипотезы для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования: теоретический анализ психолого-педагогической и специальной литературы по теме исследования; педагогический эксперимент.

Структура работы: выпускная квалификационная работа включает в себя введение, три главы, заключение, список использованной литературы, приложения.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, ставится проблема и цель исследования, определяется объект, предмет, задачи и методы исследования, выдвигается гипотеза.

В первой главе «Логарифмическая функция в школьном курсе математики» рассмотрены определение и свойства логарифмов, логарифмическая функция и её свойства, представлены логарифмические уравнения и неравенства и примеры их решения.

Во второй главе «Методики и технологии обучения решению логарифмических уравнений и неравенств» описаны методические приёмы при обучении свойствам логарифмической функции, рассмотрены различные образовательные технологии при организации обучения логарифмам, в частности, изучена технология формирования критического мышления.

В третьей главе «Опытно - экспериментальная работа» проанализирован уровень знаний учащихся 11 класса МБОУ «Курасовская СОШ» Ивнянского района Белгородской области. Произведён анализ требований ЕГЭ, тематического планирования, учебника. Описана своя методика, применявшаяся в процессе проведения занятий.

В заключении представлены обобщённые результаты исследования, изложены его основные выводы, подтверждающие решение задач исследования.

В приложении представлены разработанные нами задания самостоятельной и контрольной работ, позволяющие оценить уровень усвоения изученного материала учащимися.

ГЛАВА I. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Изучение логарифмической функции традиционно входит в школьный курс математики в старших классах. В настоящее время в МБОУ «Курасовская СОШ» Ивнянского района Белгородской области действует такой комплект учебников по математике: Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы под ред. А.Н. Колмогорова [1]. Но учебник данного автора используется последний год, по нему работают учащиеся 11 класса.

Структура тематического планирования по учебнику Колмогорова построена так, что сначала изучаются функции, их определения и свойства. Таким образом, при подходе к теме «Логарифмическая функция, её свойства и график» учащиеся уже достаточно обладают знаниями о функциях, их графиках. Особенно при усвоении учебного материала детям помогает тот факт, что они уже знакомы с показательной функцией.

Что касается следующего поколения учебников в старших классах, а именно учебника Колягина Ю.М. [2], то его структура отличается от структуры учебника Колмогорова. Логарифмы изучается в нём во втором полугодии 10 класса. В этом можно выделить преимущество данного учебника по сравнению со своим предшественником: учащиеся раньше знакомятся с данной темой и, следовательно, у них будет больше времени на решение заданий ЕГЭ на применение логарифмов.

Приступим к рассмотрению логарифмической функции, изучаемой в школьном курсе математики.

1.1. Логарифмы и их свойства

Определение. Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b.

Формулу $a^{\log_a b} = b$ (где $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$) называют основным логарифмическим тождеством [1, с.233].

Логарифм определяется только для положительного числа по положительному не равному единице основанию, т.е. для любого $a \leq 0$, $a = 1$ и любого $b \leq 0$ понятие логарифма лишено смысла: утверждение, что число 3 является логарифмом числа -8 по основанию -2 лишено смысла. Итак, в определении логарифма $\log_a b$ всегда $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Пользуясь определением логарифма, получаем, что $\log_a a = 1$ и $\log_a 1 = 0$. Используя единственность логарифма, имеем, что если $\mu > 0$ и $\mu \neq 1$, то всегда $\log_a \mu \neq 0$. Перейдём к рассмотрению основных свойств логарифмов [11, с.197].

Пусть числа M, N, a, b, α и β таковы, что $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, α и β – любые действительные числа ($\beta \neq 0$). Тогда:

а) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$;

б) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

в) $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$;

г) $\log_{a^\beta} M^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a M$;

д) $\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$ (правило перехода от логарифмов по одному основанию к логарифмам по другому основанию);

е) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$;

ж) для $a > 1$ $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M < N$;

з) для $0 < a < 1$ $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M > N$;

г’) $\log_{a^\alpha} M^\alpha = \log_a M$ для $\alpha \neq 0$;

д’) $\log_b a \log_a b = 1$ [11, с.197-198].

Приведём доказательства этих свойств.

а) Рассмотрим $a^{\log_a MN}$.

По основному логарифмическому тождеству

$a^{\log_a MN} = MN = a^{\log_a M} a^{\log_a N}$.

По свойству степени положительного числа

$a^{\log_a M} a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N}$.

Итак, $a^{\log_a (MN)} = a^{\log_a M + \log_a N}$.

Для доказательства последнего равенства обратимся к утверждению свойств степеней: Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то условия $a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2}$ и $\alpha_1 = \alpha_2$ равносильны, т.е. если $a > 0$ и $a \neq 1$, то

$$a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2. \quad (*)$$

Применяя к последнему равенству (*), получим, что

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N.$$

Свойство б) доказывается аналогично.

в) Рассмотрим $a^{\log_a (M^\alpha)}$.

По основному логарифмическому тождеству

$a^{\log_a (M^\alpha)} = M^\alpha = (a^{\log_a M})^\alpha$.

По свойству степени положительного числа $(a^{\log_a M})^\alpha = a^{\alpha \log_a M}$.

Итак, $a^{\log_a (M^\alpha)} = a^{\alpha \log_a M}$. Применяя (*), получим

$$\log_a (M^\alpha) = \alpha \log_a M.$$

г) Рассмотрим $(a^\beta)^{\log_a \beta (M^\alpha)}$.

По основному логарифмическому тождеству

$(a^\beta)^{\log_a \beta (M^\alpha)} = M^\alpha = a^{(\log_a M)\alpha}$.

По свойству степени положительного числа $a^{(\log_a M)\alpha} = a^{\alpha \log_a M}$.

Так как $\beta \neq 0$, то $1 = \beta \frac{1}{\beta}$, поэтому $a^{\alpha \log_a M} = (a^{\beta \frac{1}{\beta}})^{\alpha \log_a M}$.

По свойству степени положительного числа $(a^{\beta \frac{1}{\beta}})^{\alpha \log_a M} = (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta} \log_a M}$.

Итак, $(a^{\beta})^{\log_{a^{\beta}}(M^{\alpha})} = (a^{\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}\log_a M}$. Применяя к последнему равенству (*), получим $\log_{a^{\beta}} M^{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}\log_a M$.

д) Рассмотрим $a^{\log_a M}$.

По основному логарифмическому тождеству

$a^{\log_a M} = M = b^{\log_b M} = (a^{\log_a b})^{\log_b M}$.

По свойству степени положительного числа

$(a^{\log_a b})^{\log_b M} = a^{\log_a b \log_b M}$.

Итак, $a^{\log_a M} = a^{\log_a b \log_b M}$. Применяя к последнему равенству (*), получим, что $\log_a M = \log_a b \log_b M$. По свойству равенств обе части этого равенства можно умножить на число $\frac{1}{\log_a b}$ (так как $b \neq 1$, то $\log_a b \neq 0$) и получить справедливость равенства $\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$.

е) По основному логарифмическому тождеству $M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$, следовательно,

$$M = N \Leftrightarrow a^{\log_a M} = a^{\log_a N}. \quad (1)$$

По формуле (*) имеем

$$a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N. \quad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N.$$

ж) По основному логарифмическому тождеству

$M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$, следовательно,

$$M < N \Leftrightarrow a^{\log_a M} < a^{\log_a N}. \quad (3)$$

Теперь обратимся к утверждению свойств степеней: Если $a > 1$, то условия $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ и $\alpha_1 > \alpha_2$ равносильны, кроме того, равносильны условия $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$ и $\alpha_1 < \alpha_2$, т.е. если $a > 1$, то

$$a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2, \qquad (**)$$

$$a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2.$$

На основании (**) имеем

$$a^{\log_a M} < a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N. \quad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$M < N \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N.$$

Свойство з) доказывается аналогично. Свойства ж) и з) имеют следующую словесную формулировку.

При основании, большем единицы, меньшему числу из двух положительных чисел соответствует меньший логарифм и меньшему логарифму соответствует меньшее число.

При основании, меньшем единицы, меньшему из двух положительных чисел соответствует больший логарифм и большему логарифму соответствует меньшее число [11, с.198-200].

Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными логарифмами* и вместо обозначения $\log_{10} M$ употребляется обозначение lg M.

Логарифмы по основанию e (e – иррациональное число, приближённое значение которого 2,718281828459045…) называются *натуральными логарифмами* и вместо обозначения $\log_e N$ употребляется обозначение ln N. Натуральные логарифмы чаще всего используются в высшей математике и в прикладных науках.

Свойства логарифмов используются для преобразования различных логарифмических выражений как с числами, так и с буквами [11, с.202].

1.2. Логарифмическая функция

Определение. Функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется *логарифмической* функцией [11, с.174]. Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

1. Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел $\mathbb{R}_+$, т.е. $D\ (\log_a) = \mathbb{R}_+$.

Действительно, каждое положительное число x имеет логарифм по основанию a.

2. Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел.

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при $a > 1$) или убывает (при $0 < a < 1$).

Докажем, например, что при $a > 1$ функция возрастает (в случае $0 < a < 1$ проводится аналогичное рассуждение).

Пусть x_1 и x_2 – произвольные положительные числа и $x_2 > x_1$. Надо доказать, что $\log_a x_2 > \log_a x_1$. Допустим противное, т.е., что

$$\log_a x_2 \leq \log_a x_1. \quad (1)$$

Так как показательная функция $y = a^x$ при $a > 1$ возрастает, из неравенства (1) следует:

$$a^{\log_a x_2} \leq a^{\log_a x_1}. \quad (2)$$

Но $a^{\log_a x_2} = x_2$, $a^{\log_a x_1} = x_1$ (по определению логарифма), т.е. неравенство (2) означает, что $x_2 \leq x_1$. Это противоречит допущению $x_2 > x_1$ [1, с.238].

4. Логарифмическая функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу.

5. Функция не принимает экстремальных значений.

6. Функция не является периодической.

7. Логарифмическая функция не является ни чётной, ни нечётной.

8. Точка (1;0) – единственная точка пересечения с осями координат [11, с.175].

Для построения графика заметим, что значение 0 логарифмическая функция принимает в точке 1 (свойство 8); $\log_a 1 = 0$ при любом $a > 0$, так как $a^0 = 1$.

Вследствие возрастания функции при $a > 1$ получаем, что при $x > 1$ логарифмическая функция принимает положительные значения, а при $0 < x < 1$ – отрицательные.

Если $0 < a < 1$, то $y = \log_a x$ убывает на $\mathbb{R}_+$, поэтому $\log_a x > 0$ при $0 < x < 1$ и $\log_a x < 0$ при $x > 1$ [1].

Опираясь на свойства логарифмической функции, можно построить график функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ (рис. 1, а) и $0 < a < 1$ (рис. 1, б).

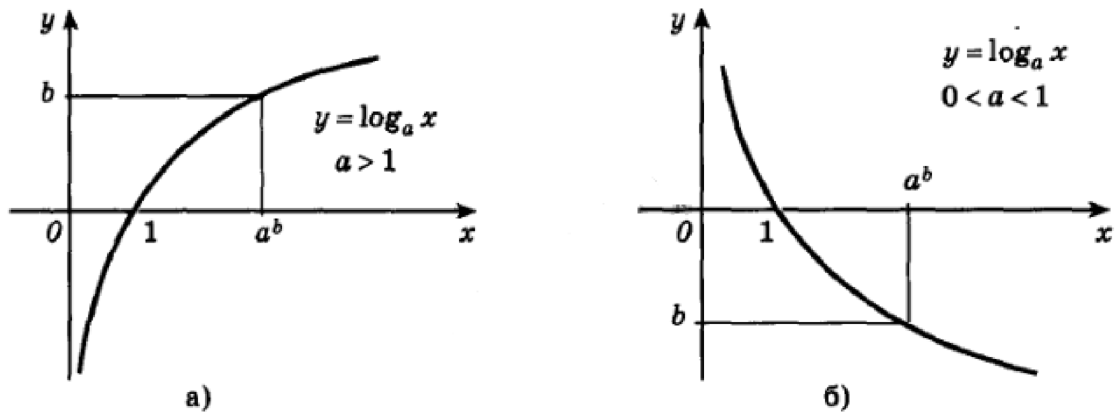

Рис. 1

1.3. Логарифмические уравнения

Определение. Уравнения, содержащие неизвестное только под знаком логарифма или в основании логарифма, называются *логарифмическими*.

Простейшими логарифмическими уравнениями являются следующие: $\log_a x = b$ и $\log_x m = n$.

При решении логарифмических уравнений используются определение логарифма, различные логарифмические тождества. Рассмотрим часто встречающиеся виды логарифмических уравнений [5, с.67].

<u>1. Логарифмические уравнения, решаемые с помощью определения логарифма.</u>

Известно, что логарифмом данного числа n по данному основанию a называется показатель степени α, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить данное число n, т.е. из записи $\log_a n = \alpha$ следует: $a^\alpha = n$, где α – любое действительное число ($\alpha \in \mathbb{R}$), n – логарифмируемое число ($n > 0$), a – основание логарифма ($a > 0;\ a \neq 1$).

Переход от записи $\log_a n = \alpha$ к $a^\alpha = n$ возможен на основании *теоремы*: при любом основании a ($a > 0;\ a \neq 1$) для любого положительного числа n существует, и притом единственный, его логарифм, т.е. такое число α, что имеет место равенство $a^\alpha = n$. Из определения логарифма вытекает основное логарифмическое тождество [5, с.67-68].

2. Уравнения первой степени относительно логарифма, решаемые потенцированием.

Рассмотрим уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Замена этого уравнения уравнением $f(x) = g(x)$ называется *потенцированием* уравнения [10, с.320].

Возможность такого перехода основана на предыдущей теореме. Действительно, из этой теоремы следует, что если логарифмы равны, то при равных основаниях на множестве действительных чисел равны и логарифмируемые числа.

$\log_a x = \log_a n_1 + \log_a n_2 = \log_a(n_1 n_2)$, отсюда получаем: $x = n_1 n_2$ ($x > 0,\ n_1 > 0, n_2 > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$).

$\log_a x = \log_a n_1 - \log_a n_2 = \log_a \frac{n_1}{n_2},\ x = \frac{n_1}{n_2}$;

$\log_a x = k \log_a n = \log_a n^k, x = n^k\ (n > 0)$;

$\log_a x = \frac{1}{n} \log_a m = \log_a m^{\frac{1}{n}}, x = m^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{m}\ \ (m > 0)$;

$\log_a x = \frac{m}{k} \log_a n = \ \log_a n^{\frac{m}{k}}, x = n^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{n^m}\ (n > 0)$ [2].

Пример.

Решить уравнение $\frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg \sqrt[3]{x-40}} = 3$.

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ x-40>0, \\ x \neq 41, \end{cases} \begin{cases} x>-1, \\ x>40, \\ x \neq 41, \end{cases}$ откуда $x \in (40; +\infty)$ и $x \neq 41$.

Выполним преобразования, которые приводят к равносильным уравнениям:

$\lg(\sqrt{x+1}+1) = 3\lg\sqrt[3]{x-40}$

$\lg(\sqrt{x+1}+1) = \lg(x-40)$, откуда получим:

$\sqrt{x+1}+1 = x-40$, так как если логарифмы равны, то при равных основаниях равны и логарифмируемые числа

$\sqrt{x+1} = x-41$.

Пусть $\sqrt{x+1} = y$, тогда $x+1 = y^2$, $x = y^2-1$.

Уравнение примет вид:

$y = y^2 - 42;\ y^2 - y - 42 = 0;\ y_1 = -6,\ y_2 = 7$.

а) $\sqrt{x+1} = -6$ – уравнение не имеет корней.

б) $\sqrt{x+1} = 7;\ x+1 = 49;\ x = 48$.

Проверка

$\frac{\lg(\sqrt{48+1}+1)}{\lg\sqrt[3]{48-40}} = 3;\ \frac{\lg 8}{\lg 2} = 3;\ \log_2 8 = 3$.

Проверка подтверждает, что значение $x = 48$ – корень уравнения.

Ответ: 48 [5, с.68-69].

3. Уравнение второй и выше степени относительно логарифма.

При решении уравнений этого типа нужно обратить внимание на следующее:

1. $\log_a{}^2 x^3 = (\log_a x^3)^2 = (3\log_a x)^2 = 9\log_a{}^2 x$.

2. $\log_a{}^3 x^4 = (\log_a x^4)^3 = (4\log_a x)^3 = 64\log_a{}^3 x$, где $x > 0$.

В общем случае $\log_a{}^n x^k = k^n \log_a{}^n x$, где $x > 0$.

3. $\log_a{}^3 \sqrt{x} = (\log_a \sqrt{x})^3 = (\frac{1}{2}\log_a x)^3 = \frac{1}{8}\log_a{}^3 x$.

4. $\log_a{}^4 \sqrt[3]{x} = \frac{1}{81}\log_a{}^4 x$.

В общем случае $\log_a{}^n \sqrt[k]{x} = \frac{1}{k^n}\log_a{}^n x$, где $x > 0$ [5, с.90].

Пример.

Решить уравнение $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \log_x{}^2 \sqrt{5}$.

Решение

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

$\log_x 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 1{,}25 = \log_x{}^2 5^{\frac{1}{2}}$; $\log_x 5^{\frac{3}{2}} - 1{,}25 = \frac{1}{4}\log_x{}^2 5$;

$\frac{3}{2}\log_x 5 - 1{,}25 = \frac{1}{4}\log_x{}^2 5$; $\frac{1}{4}\log_x{}^2 5 - \frac{3}{2}\log_x 5 + 1{,}25 = 0$.

После умножения уравнения на 4, получим:

$\log_x{}^2 5 - 6\log_x 5 + 5 = 0$

Пусть $\log_x 5 = t,\ t > 0$. Уравнение примет вид:

$t^2 - 6t + 5 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 5$.

$\log_x 5 = 1,$ $\qquad\qquad$ $\log_x 5 = 5,$

$x_1 = 5$ $\qquad\qquad$ $x^5 = 5;\ x = \sqrt[5]{5}$.

Ответ: 5; $\sqrt[5]{5}$ [5, с.70-71].

4. Логарифмические уравнения, решаемые с помощью дополнительных сведений из теории логарифмов.

При решении уравнений, связанных с логарифмической функцией, иногда можно использовать дополнительные сведения из теории логарифмов. Рассмотрим некоторые из них.

I. Формула для перехода от одной системы логарифмов к другой.

Под системой логарифмов (для краткости) понимается совокупность логарифмов, вычисленных по одному и тому же основанию.

Пусть дан логарифм по основанию a

$$\log_a n = x, \quad (1)$$

тогда по определению имеем:

$$a^x = n. \quad (2)$$

Прологарифмируем равенство (2) по основанию b. Получим:

$$x\log_b a = \log_b n, \text{ откуда } x = \log_b n\frac{1}{\log_b a}. \quad (3)$$

Подставив значение x из равенства (3) в равенство (1), получим:

$$\log_a n = \log_b n \cdot \frac{1}{\log_b a}. \quad (4)$$

Выражение $\frac{1}{\log_b a}$ называется *модулем перехода* от одной системы логарифмов к другой.

Равенство (4) называется *формулой перехода* от одной системы логарифмов к другой.

Из (4) видно, что логарифм числа при данном основании равен логарифму этого же числа при другом основании, умноженному на модуль перехода [5, с.92-93].

Примеры.

1) $\log_3 7 = \log_5 7 \cdot \frac{1}{\log_5 3}$; 2) $\log_9 13 = \lg 13 \cdot \frac{1}{\lg 9}$.

Установим зависимость между десятичными и натуральными логарифмами.

Пусть дан десятичный логарифм некоторого положительного числа x, т.е. $\lg x$, тогда по формуле (4) получим:

$$\lg x = \ln x \cdot \frac{1}{\ln 10}. \quad (5)$$

Равенство (5) выражает собой переход от натуральных логарифмов к десятичным, а именно если известен натуральный логарифм числа x, то десятичный логарифм этого числа находится путём умножения на множитель $M = \frac{1}{ln10} \approx 0{,}434294$, не зависящий от x. Число M называется *модулем перехода*:

$$\lg x = M \cdot \ln x. \quad (6)$$

Если положить в тождестве (6) $x = e$, то получим выражение числа M через десятичный логарифм: $\lg e = M$ $(\ln e = 1)$.

Натуральные логарифмы через десятичные выражаются так:

$\ln x = \frac{1}{M} \lg x$, где $\frac{1}{M} \approx 2{,}302585 \approx 2{,}3026$.

Рассмотрим следствия из формулы (4).

Следствие 1. Пусть $n = b$, тогда равенство (4) примет вид:

$$\log_a b = \log_b b \cdot \frac{1}{\log_b a},$$

или $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, (7)

или $\log_a b \cdot \log_b a = 1.$ (8)

Из равенств (7) и (8) видно, что $\log_b a$ и $\log_a b$ являются взаимно обратными числами.

Следствие 2. Отношение логарифмов двух чисел при данном основании равно отношению логарифмов тех же чисел при другом основании.

Действительно, $\frac{\log_a n_1}{\log_a n_2} = \frac{\log_b n_1 \frac{1}{\log_b a}}{\log_b n_2 \frac{1}{\log_b a}} = \frac{\log_b n_1}{\log_b n_2}$.

Итак, $\frac{\log_a n_1}{\log_a n_2} = \frac{\log_b n_1}{\log_b n_2}$ [5, с.74].

Пример.

$$\frac{\log_4 5}{\log_4 10} = \frac{\lg 5}{\lg 10} = \frac{\lg 5}{1} = \lg 5.$$

Используя следствие 1, можно решить следующую задачу:

Известны логарифмы некоторого числа при разных основаниях. Найти логарифм того же числа при основании, равном произведению данных оснований.

Дано: $\log_a x = m$; $\log_b x = n$; $\log_c x = p$.

Найти: $\log_{abc} x$.

Решение

$$\log_{abc} x = \frac{1}{\log_x(abc)} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{np+mp+mn}{mnp}} = \frac{mnp}{np + mp + mn}.$$

II. Рассмотрим ещё некоторые свойства, встречающиеся при решении логарифмических уравнений и при тождественных преобразованиях логарифмических выражений.

1. Рассмотрим тождество, вытекающее из определения логарифма:

$$a^{\log_a n} = n. \quad (9)$$

Возведём обе части этого тождества в степень k. Получим: $(a^{\log_a n})^k = n^k$, что можно переписать так: $a^{k\log_a n} = n^k$, или $(a^k)^{\log_a n} = n^k$, откуда по определению логарифма получим:

$$\log_a n = \log_{a^k} n^k. \quad (10)$$

Если логарифмируемое число и основание логарифма возвести в одну и ту же целую степень, то значение логарифма не изменится (слева направо).

Если из логарифмируемого числа и основания логарифма извлечь арифметический корень одной и той же степени, то значение логарифма не изменится (справа налево) [5, с.75-76].

Примеры.

а) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{9} = \log_3 9 = 2$; б) $2^{\log_{\sqrt{2}} 5} = 2^{\log_2 25} = 25$;

в) $5^{\log_{125} 8} = 5^{\log_{\sqrt[3]{125}} \sqrt[3]{8}} = 5^{\log_5 2} = 2$.

2. Перепишем равенство (9) в следующем виде:

$$(a^k)^{\frac{1}{k}\log_a n} = n,$$

откуда по определению логарифма имеем:

$$\log_{a^k} n = \frac{1}{k}\log_a n. \quad (11)$$

Если из основания логарифма извлечь арифметический корень целой степени k, оставив логарифмируемое число без изменения, то логарифм увеличится в k раз.

Если основание логарифма возвести в целую степень k, оставив логарифмируемое число без изменения, то логарифм уменьшится в k раз [5, с.77].

Примеры.

а) $\log_8 5 = \frac{1}{3}\log_2 5$; б) $\log_2 7 = 5\log_{32} 7$.

Рассмотрим решение логарифмических уравнений, использующих указанные соотношения вида (1) – (11).

1. Решить уравнение $\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$.

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$

Считая, что x и a удовлетворяют области определения уравнения, выполним следующие преобразования:

$\frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_x a = 1;\ \log_a x + \log_x a = 2;\ \log_a x + \frac{1}{\log_a x} = 2;$

$\log_a{}^2 x - 2\log_a x + 1 = 0;\ (\log_a x - 1)^2 = 0;\ \log_a x = 1;\ x = a.$

Проверка

$\log_{a^2} a + \log_{a^2} a = 1;\ \frac{1}{2}\log_a a + \frac{1}{2}\log_a a = 1;\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1; 1 = 1.$

Проверка подтверждает, что значение $x = a$ служит корнем данного уравнения.

2. Решить уравнение $\log_7 x + \log_{\frac{1}{x}} \frac{1}{7} = \log_{\frac{1}{7}}{}^2 \frac{1}{x} + \log_x{}^2 7 - \frac{7}{4}$.

Решение

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1.$

Считая, что x принадлежит области определения уравнения, выполним следующие преобразования:

$$\log_7 x + \log_x 7 = \log_7{}^2 x + \log_x{}^2 7 - \frac{7}{4}.$$

Пусть $\log_7 x + \log_x 7 = y$, тогда

$$\log_7{}^2 x + 2\log_7 x \cdot \log_x 7 + \log_x{}^2 7 = y^2$$

$\log_7{}^2 x + \log_x{}^2 7 = y^2 - 2$, после чего уравнение примет вид:

$y^2 - 2 - \frac{7}{4} = y, 4y^2 - 4y - 15 = 0.$

$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16 + 240 = 256, \sqrt{D} = 16,\ y_1 = -\frac{3}{2};\ y_2 = \frac{5}{2}.$

а) $\log_7 x + \log_x 7 = -\frac{3}{2}$ – решений нет, так как сумма двух взаимно обратных положительных чисел больше или равна 2;

б) $\log_7 x + \log_x 7 = \frac{5}{2}$

$\log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} = 2 + \frac{1}{2}$, откуда следует, что

$\log_7 x = 2,\ x_1 = 49$ и $\log_7 x = \frac{1}{2},\ x_2 = \sqrt{7}.$

Проверка

При $x_1 = 49$

$$\log_7 49 + \log_{\frac{1}{49}} \frac{1}{7} = \log_{\frac{1}{7}}{}^2 \frac{1}{49} + \log_{49}{}^2 7 - \frac{7}{4}$$

$$2 + \log_{(\frac{1}{7})^2} \frac{1}{7} = (\log_{\frac{1}{7}} (\frac{1}{7})^2)^2 + (\log_{7^2} 7)^2 - \frac{7}{4}$$

$$2 + \frac{1}{2} = (2\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7})^2 + (\frac{1}{2}\log_7 7)^2 - \frac{7}{4}$$

$$2 + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{4} - \frac{7}{4}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

При $x_2 = \sqrt{7}$

$$\log_7 \sqrt{7} + \log_{\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{1}{7} = \log_{\frac{1}{7}}{}^2 \frac{1}{\sqrt{7}} + \log_{\sqrt{7}}{}^2 7 - \frac{7}{4}$$

$$\log_7 7^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{7^{\frac{1}{2}}}} \frac{1}{7} = (\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}})^2 + (\log_{7^{\frac{1}{2}}} 7)^2 - \frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{4} + 4 - \frac{7}{4}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

Проверка подтверждает, что найденные значения x - корни данного уравнения [5, с.77-79].

1.4. Логарифмические неравенства

При решении неравенств или их систем необходимо знать свойства неравенств, свойства логарифмической функции и её график. Рассмотрим некоторые часто встречающиеся виды неравенств [5, с.80].

1. Потенцирование неравенств.

Пусть a – некоторое положительное число, отличное от единицы. Замена неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad (1)$$

в случае $a > 1$ неравенством

$$f(x) < g(x),$$

а в случае $0 < a < 1$ неравенством

$$f(x) > g(x)$$

называется потенцированием неравенства (1).

В общем случае переход от неравенства (1) к неравенству $f(x) < g(x)$ либо к неравенству $f(x) > g(x)$ неравносилен. Например, замена неравенства $\log_2 x < \log_2 x^2$ неравенством $x < x^2$ есть неравносильный переход, ведь числа $x < 0$, являющиеся решениями неравенства $x < x^2$, не являются решениями неравенства $\log_2 x < \log_2 x^2$.

При решении неравенств вида (1) пользуются утверждениями:

а) $\log_a x > b,\ a > 1$.

При любом b множество решений неравенства есть промежуток $a^b < x < +\infty$.

б) $\log_a x < b,\ a > 1$.

При любом b множество решений неравенства есть промежуток $0 < x < a^b$.

Согласно этим утверждениям неравенства вида (1) решают следующим образом:

1. Находят ОДЗ неравенства.

2. Решают неравенство на ОДЗ, учитывая, что потенцирование есть равносильное преобразование на этом множестве [10, с.347].

Пример.

Решить неравенство $\log_3(x^2 - 1) \leq 1$.

Решение

ОДЗ: $x^2 - 1 > 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 1$. Графиком этой функции является парабола, «ветви» которой направлены вверх, т.к. $a = 1 > 0$.

Найдём нули функции: $y = 0$.

$$x^2 - 1 = 0; x^2 = 1; x = \pm 1.$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

Перепишем исходное неравенство в виде $\log_3(x^2 - 1) \leq \log_3 3$.

Так как функция $y = \log_3 t$ возрастает на области определения $(3 > 1)$, то $x^2 - 1 \leq 3$, откуда $x \in [-2; 2]$.

С учётом ОДЗ имеем: $x \in [-2;\ -1) \cup (1; 2]$.

Ответ: $-2 \leq x < -1$, $1 < x \leq 2$ [10, с.348].

2. Неравенства, содержащие неизвестную в основании логарифма.

Если в основании логарифма есть x, то при определении ОДЗ неравенства надо учитывать, что основание логарифма всегда больше нуля и не равно единице. Кроме того, надо учитывать, что свойства логарифмов при основании, большем чем единица, одни, а при основании, меньшем чем единица, другие.

Поэтому неравенства вида

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x) \quad (2)$$

решаются обычно следующим образом:

1. Находят ОДЗ неравенства.

2. ОДЗ разбивают на два множества M_1 и M_2:

M_1 – та часть ОДЗ, где $\varphi(x) > 1$,

M_2 - та часть ОДЗ, где $0 < \varphi(x) < 1$.

3. На M_1 решают неравенство $f(x) < g(x)$, равносильное на множестве M_1 неравенству (2).

4. На M_2 решают неравенство $f(x) > g(x)$, равносильное на множестве M_2 неравенству (2).

Объединив решения, найденные на M_1 и M_2, получают решение исходного неравенства (2).

Из сказанного также следует, что неравенство (2) равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) > g(x) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Это позволяет решать неравенства вида (2) переходом к равносильной совокупности неравенств (3) [10, с.349-350].

Пример.

Решить неравенство $\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 \geq 4$.

Решение

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x + 1 > 1, \\ (x^2 + x - 6)^2 \geq (x + 1)^4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0 < x + 1 < 1, \\ 0 < (x^2 + x - 6)^2 \leq (x + 1)^4. \end{cases}$$

Заметим, что в первой системе не написано неравенство $(x + 1)^4 > 0$, поскольку оно вытекает из неравенства $x + 1 > 1$.

Решим сначала первую систему. Второе неравенство этой системы равносильно каждому из следующих неравенств:

$$(x^2 + x - 6)^2 - (x + 1)^4 \geq 0$$

$$((x^2 + x - 6) - (x + 1)^2)((x^2 + x - 6) + (x + 1)^2) \geq 0$$

$$((x^2 + x - 6) - (x^2 + 2x + 1))(x^2 + x - 6 + x^2 + 2x + 1) \geq 0$$

$$(-x - 7)(2x^2 + 3x - 5) \geq 0$$

$$(x + 7)(x - 1)(x + \frac{5}{2}) \leq 0$$

Решая последнее неравенство, получаем, что $x \in (-\infty;\ -7] \cup \left[-\frac{5}{2}; 1\right]$. Значит, множество решений первой системы есть промежуток $0 < x \leq 1$.

Теперь решим вторую систему. Неравенство $(x^2 + x - 6)^2 \leq (x + 1)^4$ равносильно неравенству $(x + 7)(x - 1)(x + \frac{5}{2}) \geq 0$.

Решая последнее неравенство, получаем, что $x \in \left[-7;\ -\frac{5}{2}\right] \cup [1;\ +\infty)$.

Множество решений неравенства $0 < x + 1 < 1$ есть промежуток $-1 < x < 0$.

Неравенство $(x^2 + x - 6)^2 > 0$ справедливо для всех x, кроме тех, для которых $x^2 + x - 6 = 0$, т.е. кроме $x = 2$ и $x = -3$. Теперь очевидно, что вторая система неравенств решений не имеет.

Множеством решений исходного неравенства является объединение множеств решений первой и второй системы, т.е. промежуток $0 < x \leq 1$.

Ответ: $0 < x \leq 1$ [10, с.351].

3. Решение неравенств нестандартными способами.

При решении неравенств знание ОДЗ и применение некоторых оценок позволяет быстро найти решение неравенства.

Пример.

Решить неравенство

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right)\log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x}\left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) \leq 0 \quad (4)$$

Решение

Область допустимых значений исходного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям

$$x > 0, \qquad x^2 - 4x + 3 \geq 0, \qquad 8x - 2x^2 - 6 \geq 0. \quad (5)$$

Разделив третье неравенство (5) на (-2), получим, что условия (5) можно записать в виде

$$x > 0, \qquad x^2 - 4x + 3 \geq 0, \qquad x^2 - 4x + 3 \leq 0.$$

Отсюда ясно, что ОДЗ состоит их всех x, удовлетворяющих условиям

$$x > 0 \text{ и } x^2 - 4x + 3 = 0. \quad (6)$$

Поскольку корнями квадратного уравнения (6) являются $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, каждое из которых положительно, то ОДЗ исходного уравнения состоит из $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Так как решения исходного неравенства лежат в ОДЗ, то его решения находятся среди чисел $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

Пусть $x = 1$. Подставляя это значение в исходное неравенство, получаем: $\log_5 \frac{1}{5} + 1 = -1 + 1 = 0$, т.е. значение $x = 1$ является его решением.

Пусть $x = 3$, тогда левая часть исходного неравенства равна

$$\log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \log_5 3 - \log_5 5 + \frac{1}{3} = \log_5 3 - \frac{2}{3} = \log_5 3 - \frac{2}{3}\log_5 5 = \log_5 \frac{3}{5^{\frac{2}{3}}}.$$

Поскольку $27 > 25$, т.е. $3^3 > 5^2$, то $3 > 5^{\frac{2}{3}}$ и $\frac{3}{5^{2/3}} > 1$

Таким образом, $\log_5 \frac{3}{5^{2/3}} > \log_5 1 = 0$.

Следовательно, значение $x = 3$ не является решением исходного неравенства.

Ответ: $x = 1$ [10, с.352-353].

ГЛАВА II. МЕТОДИКИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

2.1. Методические приёмы при обучении свойствам логарифмической функции

Для того, чтобы понять, как лучше построить структуру урока при организации темы «Логарифмическая функция, её свойства и график», мы познакомились с планами уроков разных учителей и проанализировали методические приёмы, которые они использовали.

Нас заинтересовала разработка урока по теме: «Логарифмическая функция, её свойства и график» учителя математики из Мурманской области Кукановой Ирины Анатольевны.

Тип урока: открытие нового знания (ОНЗ) [23].

Прежде чем приступить к изучению новой темы, учитель предлагает учащимся вспомнить, что они уже знают о функциях и их графиках. Повторение проходит в форме фронтального опроса.

На этапе актуализации знаний Ирина Анатольевна использует интерактивный плакат «Графики элементарных функций» (презентация) для того, чтобы ученики самостоятельно определили функции по их графикам.

Отдельным этапом урока учитель выделяет выявление места и причины затруднения. С учениками обсуждаются непонятные для них моменты. На наш взгляд, это правильное решение со стороны учителя – сразу же обратить внимание на затруднения учащихся. После уяснения всех вопросов дети смогут позитивно настроиться на изучение нового материала.

Затем приступают к формулировке темы и целей урока. Включается презентация. Учитель даёт ученикам краткую справку о Л. Эйлере, рассказывает о его роли в теории логарифмической функции. На вопрос: «Где мы можем встретить логарифмы?» отвечает одна из учениц, которая заранее подготовила сообщение по данному вопросу. Привлечение учащихся к объяснению на уроке помогает учителю привлечь внимание остальных учеников. Затем учащимся предложено вспомнить определение показательной функции и её свойства.

Далее учитель предлагает ученикам в координатной плоскости построить точку с координатами (c;b) и предположить, что она принадлежит графику показательной функции. Подсказкой к выполнению данного задания служит презентация. Ирина Анатольевна говорит ученикам, что в данном случае получается, что $b = a^c$. На «языке логарифмов» это можно переписать иначе: $c = \log_a b$ [23].

После этого ученики получают задание построить график функции по вариантам: $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. На монитор выведена презентация, где уже построена таблица координат точек для каждого варианта. Предлагается также описать свойства построенного ими графика. После выполнения задания правильный вариант выводится на экран.

Первичное закрепление материала осуществляется при помощи устной речи, учитель проводит опрос среди учеников по изученному на уроке материалу.

Затем начинается самостоятельная работа с самопроверкой по эталону. Ученики выполняют созданный в программе Excel тест. Затем сразу проверяют правильность его выполнения. Кроме этого теста учащимся предлагается ещё один тест, также с использованием презентации.

На этапе рефлексии проводится блиц-опрос по теме урока, вопросы выведены на экран.

В завершение урока Ирина Анатольевна объявляет домашнее задание и даёт учащимся последнее задание - используя предложенные клише, подвести итог урока [23].

По нашему мнению, на этом уроке учащимся будет интересно. Ведь учебный процесс построен на переключении внимания с одного вида деятельности (устной) на другую (письменную). Кроме того, данный урок предполагает быстрый темп работы, ученикам предложено выполнение большого количества заданий. На протяжении всего урока присутствуют объяснения учителя, наглядно дополняет урок презентация. Все эти методы в совокупности могут дать положительный результат – усвоение учащимися темы урока.

Ещё один урок, который мы проанализировали, разработан Филимоновой Ольгой Николаевной и размещён на сайте социальной сети работников образования «Наша сеть».

Тема урока: «Логарифмическая функция и её свойства».

Тип урока: урок закрепления, проверки, оценки, коррекции знаний, умений, навыков.

В качестве материально-технического оснащения на уроке используется компьютер, экран, проектор, диск с презентацией темы. По мнению учителя, благодаря презентации «работа становится разнообразнее, красочней, эмоциональней» [28]. Ольга Николаевна считает, что использование современных технологий на уроке позволяет ученикам занять активную учебную позицию.

Эпиграфом к уроку учитель выбрала слова Я.В. Успенского: «С точки зрения вычислительной практики, изобретение логарифмов по важности можно смело поставить рядом с другим, более древним великим изобретением индусов – нашей десятичной системой нумерации» [28].

Учитель объявляет тему урока, затем предлагает учащимся решить устно примеры, пользуясь таблицей «Степени некоторых чисел». Для привлечения внимания учеников Ольга Николаевна читает детям стихотворение:

Есть в математике тема одна,

Логарифмической функцией называется она.

Логарифм появился, чтобы легче считать,

Логарифм – п о к а з а т е л ь, это надо знать! [28].

В ходе урока учитель использует ещё один интересный приём – заранее привлекает учащегося к подготовке рассказа об истории открытия логарифмов. На наш, взгляд это хороший способ заинтересовать учеников темой, когда в её объяснении участвует не только учитель, но и их товарищ.

После формулирования целей урока учащиеся повторяют то, что узнали на прошлом уроке о логарифмах. Затем начинается устная фронтальная работа, работа у доски и в тетрадях. После повторения учитель предлагает старшеклассникам самостоятельную работу.

Пока учитель проверяет работы учеников, один из учащихся выступает с рассказом об использовании логарифмов в жизни человека и в природе, используя презентацию.

После объявления домашнего задания начинается подведение итогов урока и обязательный элемент – рефлексия.

На наш взгляд, данный урок очень интересно построен. Во-первых, весь урок сопровождается презентацией. Наглядность является важным критерием при понимании и усвоении учебного материала. Во-вторых, учитель использует разные методы и формы обучения (индивидуальная, фронтальная), это помогает учащимся переключать внимание, снижает утомляемость и повышает интерес к работе на уроке. В-третьих, в разработке данного урока присутствуют все этапы урока, что говорит о педагогической грамотности учителя. И самое главное – задания к уроку составлены таким образом, чтобы ученики могли лучше разобраться в теме «Логарифмическая функция и её свойства» и закрепить свои знания.

2.2. Применение образовательных технологий при организации обучения логарифмам

В настоящее время учителя, в частности математики, используют различные технологии обучения. Остановимся подробнее на нескольких технологиях, которые можно использовать на уроках математики при изучении темы «Логарифмы».

Одна из таких технологий – технология проблемно-модульного обучения, теоретические основы которой описаны М.А. Чошановым [16, с.14]. Теоретическая значимость этой технологии в том, что в ней принципы системного квантования, проблемности и модульности рассматриваются в целостности. Технология включает в себя целевую компоненту, ведущие принципы, специальные способы содержания обучения, систему задач и упражнений, конструирование дидактических материалов, рейтинговую систему контроля и оценки учебных достижений.

Существуют различные точки зрения на понимание модуля и технологии его построения как в плане структурирования содержания обучения, так и разработки форм и методов обучения. Под модулем В. Гольдшнидт и М. Гольдшнидт [16, с.19] понимают формирование самостоятельно планируемой единицы учебной деятельности, помогающей достичь чётко определённых целей. Дж. Рассел определяет суть модуля как построение автономных порций учебного материала.

Ю.К. Балашов и В.А. Рыжов [3, с.97] отмечают следующие преимущества и особенности метода модульного обучения:

- разбивка специальности на законченные части, имеющие самостоятельное значение;

- отсеивание материала, являющегося «лишним» для данного конкретного вида работ;

- максимальная индивидуализация продвижения в обучении.

Модуль может быть представлен как учебный элемент в форме стандартизированного буклета, состоящего из компонентов:

- точно сформулированная учебная цель;

- список необходимого оборудования, материалов и инструментов;

- список смежных учебных элементов;

- собственно учебный материал в виде краткого конкретного текста, сопровождаемого подробными иллюстрациями;

- практические занятия для обработки необходимых навыков, относящихся к данному учебному элементу;

- контрольная работа, которая строго соответствует целям, поставленным в данном учебном элементе.

По оценкам исследователей, модульное обучение позволяет сократить время учебного курса на 30% без ущерба для полноты и глубины усвоения материала [16, с.15].

М.А. Чошанов отмечает, что организация процесса обучения на проблемно-модульной основе позволяет:

1) интегрировать и дифференцировать содержание обучения путём группировки проблемных модулей учебного материала, обеспечивающих разработку курса в полном, сокращённом и углублённом вариантах;

2) осуществлять самостоятельный выбор учащимися варианта курса в зависимости от уровня обученности и обеспечить индивидуальный темп продвижения по программе;

3) использовать проблемные модули в качестве сценариев для создания различных педагогических средств;

4) акцентировать работу преподавателя на консультативно-координирующие функции управления познавательной деятельностью учащихся;

5) сократить курс обучения без особого ущерба для полноты изложения и глубины усвоения учебного материала на основе адекватного комплекса методов и форм обучения [16, с.17-18].

Общая структура проблемного модуля представлена на рисунке 2.

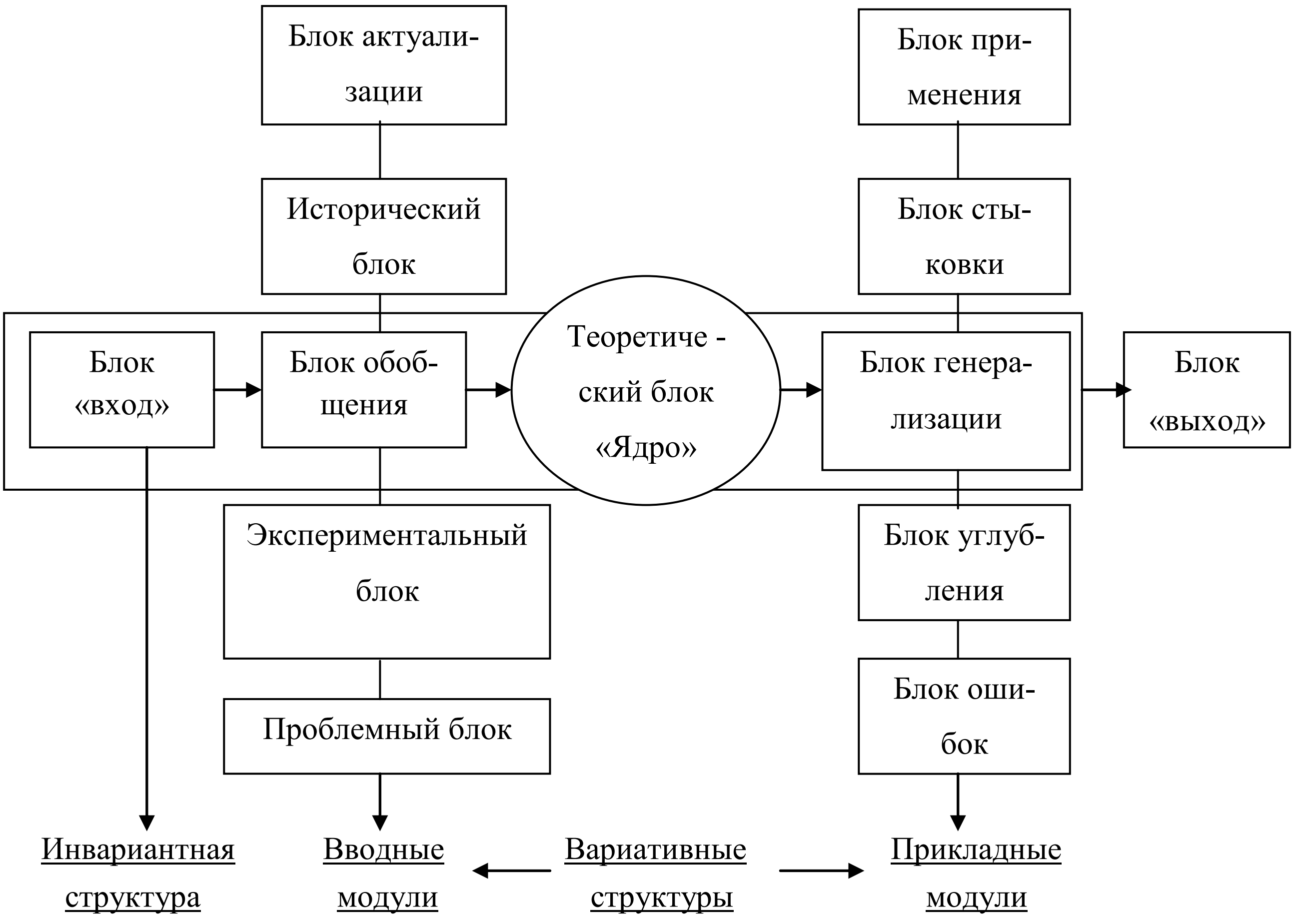

Рис.2. Общая структура проблемного модуля.

Основной дидактической функцией блока «вход» является осуществление актуализирующего контроля. Главная особенность этого контроля заключается в том, что тестовые задания предполагают актуализацию тех опорных знаний и способов действий, которые необходимы для усвоения содержания всего проблемного модуля. Наряду с этим актуализирующий контрольный тест снабжён соответствующим указателем, отсылающим учащегося к тому учебному материалу, знание которого нужно для успешного выполнения данного теста. Если обращение к учебному материалу не даёт должного эффекта, учащийся может получить консультацию у учителя [17, с.22].

Блок актуализации включает в себя опорные понятия и способы действий, необходимые для усвоения нового учебного материала, представленного в проблемном модуле [17, с.22].

Исторический блок - это краткий экскурс, раскрывающий генезис понятия, теоремы, задачи с анализом возникавших при этом заблуждений и ошибок посредством постановки историко-научных проблем, здесь могут быть рассмотрены вопросы этимологии изучаемых понятий и т.д. [17, с.22].

Блок обобщения выполняет функцию первичного системного представления содержания проблемного модуля. Структурно этот блок может быть скомпонован с использованием различных моделей инженерии знаний [17, с.23].

Экспериментальный блок содержит описание эмпирического материала (учебного эксперимента, лабораторной работы и т.д.) для ввода формулировок, экспериментальных формул [17, с.23].

Проблемный блок выполняет функцию постановки укрупнённой проблемы, на решение которой и направлен проблемный модуль. Иногда проблемный блок может быть совмещён с историческим, если историко-научная проблема имеет укрупнённую профессионально-прикладную ориентацию [17, с.23].

Основной учебный материал проблемного модуля располагается в теоретическом блоке. Учебные элементы (блок-рисунки) этой части проблемного модуля отличаются от других элементов и имеют свою логику построения, совпадающую со схемой решения проблем. Структурно-учебный элемент теоретического блока представляет собой фрейм, включающий следующие слоты (ячейки): дидактическая цель; формулировка проблемы (задачи); обоснование гипотезы; решение проблемы; контрольный тест. [17, с.23-24].

Блок применения включает в себя решение историко-научной проблемы, постановка которой была осуществлена в историческом блоке, а так же может содержать систему задач на отработку новых способов действия и применения изученного материала на практике [17, с.24].

Блок стыковки представляет решение укрупнённой проблемы, постановка которой была произведена в проблемном блоке, а так же точки пересечения пройденного материала с содержанием смежных дисциплин [17, с.24].

Основной функцией блока генерализации является отражение решения укрупнённой проблемы и конечное обобщение содержания проблемного модуля [17, с.24].

Блок углубления содержит учебный материал повышенной сложности и предназначен для учащихся, проявляющих особый интерес к предмету [17, с.24].

Блок ошибок предназначен для организации деятельности учащихся по выработке представления о типичных ошибках при решении логарифмических уравнений и неравенств. Необходимо научиться распознавать причины и способы исправления ошибок, освоить приёмы самоконтроля [17, с.24-25].

Блок «выход» служит своего рода «контролёром», преграждающим путь бракованной продукции. Учащийся, не выполнивший то или иное требование блока «выход», возвращается к тому элементу модуля, в котором он допустил «брак». Причём блок «выход» варьируется в зависимости от полного, сокращённого или углублённого варианта проблемного модуля [17, с.25].

Технология проблемно-модульного обучения имеет свои преимущества и недостатки. При наличии определённых условий реализации этой техники даёт самые эффективные результаты, в других же условиях она может быть малоэффективной и её целесообразно заменить другой технологией.

Познакомимся с методическим приёмом, который называется «Принцип опоры на ошибки».

Принцип опоры на ошибки (далее - ПОО) был выделен как составная часть образовательной технологии проблемно-модульного обучения, разработанной М.А. Чошановым [16]. Использование в обучении анализа причин и способов исправления ошибок может стать составной частью методической системы учителя. Обучающиеся «должны хорошо понимать, что знание причин и детальный анализ ошибок помогают их избежать в дальнейшем» [18].

В статье [18] описан опыт использования ПОО в углублённом обучении математике. Эти идеи могут быть использованы учителем математики в работе со всеми обучающимися при подготовке к единому государственному экзамену (ЕГЭ). При выполнении экзаменационных заданий очень важно уметь критически осмысливать каждый этап решения. Необходимо научить школьников не только обнаруживать ошибки и исправлять их, но и предвидеть те трудности, которые могут возникнуть при решении задач определённого вида или из какого-то раздела. Надо помочь старшеклассникам «постараться избежать типичных ошибок, возникающих из-за формального применения теории или неполного анализа условий задачи» [18].

Применение ПОО может выглядеть так: на уроках учитель предлагает учащимся заполнять таблицу ошибок, состоящую из следующих разделов: № п/п, признаки ошибки, ошибочный пример, причины ошибки и способы её исправления, правильный пример.

По каждому разделу программы учитель совместно с учащимися проводит анализ типичных ошибок и проводит их классификацию. Выявляются причины ошибок и способы их исправления. По каждому разделу программы составляется своя таблица ошибок. Примеры в неё заносятся не только на уроке, но и по итогам индивидуальной работы над ошибками. Учитель может посоветовать внести в таблицу пример, который разбирался на уроке, или вызвал затруднения при выполнении домашнего задания. Учащиеся вносят в свои тетради и примеры, подобранные самостоятельно, предварительно проконсультировавшись с учителем.

Принцип опоры на ошибки связан с технологией формирования критического мышления, которая была взята за основу нашего исследования. Данная технология была разработана в конце XX века в США (Ч. Темпл, Д. Стил, К. Мередит). Известна в России с 1997 года (М.В. Кларин, С.И. Заир-Бек, И.О. Загашев, И.В. Муштавинская и др.) [25]. В ней обобщены идеи и методы отечественных технологий коллективных и групповых способов обучения, а также сотрудничества, развивающего обучения. Данную технологию называют общепедагогической, надпредметной [26].

О том, что целенаправленное развитие критического мышления играет в образовании важную роль, говорилось и раньше. Например, ещё в начале двадцатого века князь Николай Жевахов писал о том, что ближайшей задачей образования должно являться «стремление пробудить в ученике его личное самосознание… заставить его критически отнестись к своим мыслям…» [24].

Критическое мышление - это один из видов интеллектуальной деятельности человека, характеризующийся высоким уровнем восприятия, понимания, объективности подхода к окружающему его информационному полю [26]. Обычно ученики стремятся к однозначности определений, классификаций и взглядов на одну и ту же проблему. Задача учителя – помочь им понять, что отсутствие однозначности часто не является недостатком или проблемой, а наоборот является хорошей возможностью глубже проникнуть в сущность вещей, больше узнать. Джуди А.Браус и Дэвид Вуд определиликритическое мышление как разумное рефлексивное мышление, сфокусированное на решении того, во что верить и что делать [6, с.59]. Американский психолог Дайана Халперн предложила такое определение критического мышления: «Использование таких когнитивных навыков и стратегий, которые увеличивают вероятность получения желаемого результата. Отличается взвешенностью, логичностью и целенаправленностью. Другое определение - направленное мышление» [14, с.311]. Американские учёные предложили такое определение: «Критическое мышление - это интеллектуально организованный процесс, направленный на активную деятельность по осмыслению, применению, анализу, обобщению или оценке информации, полученной или создаваемой путём наблюдения, опыта, рефлексии, рассуждений или коммуникации как руководство к действию или формированию убеждения» [27]. Следует отметить, что определение критического мышления во многом пересекается с характеристикой математического мышления. Например, советский математик А.Я. Хинчин [15, с.141-144] среди главных характеристик математического мышления выделяет логичность и умение выделить главное, а А. Пуанкаре [12, с.30] акцентирует внимание на способности математика к анализу и обобщению. Л.М. Фридман [13, с.162] отмечает, что процесс обучения математике тесно связан с развитием мышления учащихся, в том числе с развитием критического мышления.

Перейдём к рассмотрению технологии критического мышления. Её целью является развитие мыслительных навыков учащихся, которые могут быть необходимы не только в учёбе, но и в обычной жизни. Например, умение работать с информацией, принимать взвешенные решения и др., т.е. всё то, что составляет коммуникативные и рефлексивные умения и действия учащихся [26]. Как отмечено в [22], критически мыслящий школьник готов к использованию различных источников информации, умеет их сравнивать и оценивать, выделять противоречия, учитывать различные точки зрения.

К особенностям технологии развития критического мышления можно отнести то, что она предполагает равные партнёрские отношения как в плане общения, так и в плане конструирования знания, получаемого в процессе обучения. Кроме того, учитель не является главным источником информации, а превращает обучение в совместный и интересный поиск [26]. Таким образом, роль учителя при использовании технологии критического мышления в основном координирующая.

Технология критического мышления способствует формированию творчески развитой личности, которая самостоятельно ориентируется в образовательном пространстве под руководством учителя [19].

Выделяют 5 характеристик, присущих критическому мышлению:

1) самостоятельность;

2) обобщённость;

3) проблемность и оценочность;

4) аргументированность;

5) социальность [21].

По мнению автора работы [24], в технологии развития критического мышления учебный процесс строится на научно-обоснованных закономерностях взаимодействия личности и информации; этапы этой технологии (вызов, осмысление, рефлексия) построены так, что учитель в каждой учебной ситуации в любой момент времени может быть максимально гибким; стратегии технологии позволяют всё обучение строить в сотрудничестве, совместном планировании и осмысленности. В данном случае понятие «технология» понимают как открытую систему стратегий, обусловливающих процесс формирования самостоятельного, критически мыслящего специалиста.

Структура технологии развития критического мышления построена на логике, так как её этапы соответствуют закономерным этапам когнитивной деятельности личности. В данной технологии выделяют три основных этапа:

I. Стадия вызова. Происходит пробуждение имеющихся знаний, интереса к полученной информации, актуализация жизненного опыта. Другими словами, начинается «создание мотива к обучению». На этой стадии у ребёнка возникают собственные цели и мотивы для изучения нового [26].

II. Осмысление содержания (получение новой информации). На этом этапе учитель может предложить учащимся не только текст учебника, но и альтернативные источники информации. Постепенно учащиеся начинают более вдумчиво читать, слушать, задавать разнообразные вопросы.

На данной стадии выдвигают следующие задачи:

1. Помочь учащимся активно воспринимать изучаемый материал.

2. Помочь при сопоставлении старых знаний с новыми данными [26].

III. Стадия рефлексии. Необходима для того, чтобы учитель проверил память своих учеников, а также для того, чтобы дети сами смогли проанализировать уровень достижения поставленных целей и решить возникшие вопросы.

К задачам стадии рефлексии относят:

1. Помочь ученикам обобщить изученный материал.

2. Помочь самостоятельно определить направления в дальнейшем изучении материала.

В [26] говорится о том, что рефлексия обращает познание человека на самого себя, помогает проанализировать своё психологическое состояние. При проведении рефлексии мы испытываем сомнения, делаем выводы, осознаём новое.

При использовании технологии развития критического мышления учителя могут использовать различные методические приёмы работы, например, такие как метод Инсерт, разбивка на кластеры, интерактивная стратегия «Знаем – Узнали новое – Хотим узнать», синквейн [19]. Остановимся подробнее на тех из них, которые, на наш взгляд, удобно использовать при изучении логарифмической функции.

Метод Инсерт

Данный приём предполагает, что во время чтения текста ученики делают на полях пометки карандашом. Эти пометки обозначаются следующим образом:

V - если материал вам знаком;

\- - если материал противоречит тому, что вы уже знали, или думали, что знали;

\+ - если материал является новым для вас;

? - материал вам не понятен, или же вы хотели бы более подробно ознакомиться с данным вопросом.

После чтения текста с добавлением пометок ученики заполняют маркировочную таблицу Insert, которая состоит из 4-х колонок. Причём, заполняется сначала 1-я колонка по всему тексту, затем 2-я и т.д.

V	-	+	?

Интерактивная стратегия «Знаем -Узнали новое -Хотим узнать» («З-У-Х»)

Данный приём заключается в том, что в начале урока дети составляют таблицу:

Знаем	Узнали новое	Хотим узнать

Урок начинается с активизации того, что ученики уже знают по данной теме [24]. По ходу урока учащимся необходимо заполнять каждую из колонок. Обращаться к этой таблице можно несколько раз за урок. На этапе Вызова заполняется первая колонка, на этапе Осмысления – вторая, на этапе Рефлексии – третья колонка.

Анализируя технологию формирования критического мышления, можно сделать вывод, что данная технология позволяет ученикам по-новому смотреть на изучаемые явления, лучше усваивать незнакомый материал, с интересом относиться к познанию нового. Понятно, что первостепенная роль в данном случае отводится учителю, потому что именно он способен направить усилия учеников в определённое русло, столкнуть различные суждения, создать условия, побуждающие к принятию самостоятельных решений, дать учащимся возможность самостоятельно делать выводы, подготовить новые познавательные ситуации внутри уже существующих [21].

ГЛАВА III. ОПЫТНО – ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ РАБОТА

3.1. Характеристика базы исследования

Исследование изучения тем «Логарифмическая функция, её свойства и график» и «Логарифмические уравнения и неравенства» проходило на базе МБОУ «Курасовская СОШ» Ивнянского района Белгородской области.

Проанализировав конкретные условия микрорайона школы, которые способствовали бы формированию гармонично развитых личностей учащихся, можно сделать вывод, что в настоящее время едва ли ни единственным источником на селе, способным дать детям не только программные знания, но и привлечь их к духовному самосовершенствованию, является учитель. Учитель должен убедить своих учеников в том, что радость познания чего-то нового в области науки – это противовес культу выгоды.

В Курасовской средней общеобразовательной школе 136 учеников. В 11 классе обучаются 7 человек. Созданная в школе программа «Одарённые дети» предусматривает целенаправленную работу с одарёнными учащимися, начиная с начальной школы и до осознанного выбора жизненного пути, поэтому урочная и внеурочная деятельность строится так, чтобы каждый учащийся мог проявить свои возможности в самых разных сферах деятельности.

В школе действует научное общество учащихся, руководителем которого является учитель математики Чупахин А.В. НОУ состоит из 6 секций, одной из которых является физико-математическая. Основным структурным подразделением научного общества являются творческие группы учащихся, объединённые в секции по различным областям знаний и возглавляемые учителями-предметниками, которые являются научными руководителями.

В.А. Сухомлинский сказал: «Если хотите, чтобы уроки не превратились в скучную однообразную повинность, ведите каждого ученика на счастливую тропинку исследования…». Так и поступают учителя на уроках математики и занятиях научного общества учащихся в Курасовке, давая возможность всем учащимся экспериментировать, заниматься творческой, исследовательской деятельностью.

Полнота исследовательской деятельности зависит и от меры увлечённости ученика этой деятельностью, и от умения её выполнять. Представляется необычайно полезным прививать школьникам вкус к исследованию, вооружать их методами научно-исследовательской деятельности. По объёму осваиваемой методики исследования выделяются уроки с элементами исследования и уроки-исследования.

На уроке с элементами исследования учащиеся отрабатывают отдельные учебные приёмы, составляющие исследовательскую деятельность. По содержанию элементов исследовательской деятельности проводятся уроки по выбору темы или метода исследования, по выработке умения формулировать цели исследования, уроки с проведением эксперимента, работа с источниками информации, заслушивание сообщений, защита рефератов и т.д.

На уроке-исследовании учащиеся овладевают методикой научного исследования, усваивают этапы научного познания. По уровню самостоятельности учащихся, проявляемой в результате исследовательской деятельности на уроке, уроки-исследования соответствуют начальному уровню (урок «Образец исследования»), продвинутому уровню (урок «Исследование») и высшему уровню (урок «Собственно исследование»).

Потенциал задач, имеющихся в учебниках математики, они широко используют для воспитания исследовательских умений. К исследовательским умениям относят те, которые позволяют учащимся с разных сторон подойти к одной и той же задаче и указать несколько её решений. Большой простор для исследовательской деятельности дают темы «Логарифмическая функция, её свойства и график» и «Логарифмические уравнения и неравенства».

Все учащиеся11 класса входят в состав научного общества, с интересом занимаются математикой. Среди них есть победители и призёры различных математических конкурсов и олимпиад.

На начало исследования качество знаний по изучению предмета математики в 11 классе составляло 67,1%, на конец исследования – 71,4%.

3.2. Организация изучения тем «Логарифмическая функция, её свойства и график», «Логарифмы и их свойства» и «Логарифмические уравнения и неравенства»

а) анализ требований ЕГЭ

ЕГЭ по математике – один из двух обязательных экзаменов, необходимых для получения аттестата зрелости.

Демонстрационный вариант ЕГЭ даёт представление о структуре контрольно-измерительных материалов, количестве заданий, их форме, уровне сложности. Структура работы приводится в спецификации, а полный перечень вопросов освещается в кодификаторах требований и элементов содержания по математике.

Ежегодно на ЕГЭ по математике встречаются задания на использование логарифмов и их свойств. Среди заданий базового и профильного уровня есть задания на решение логарифмических уравнений и логарифмических неравенств.

В материалах ЕГЭ последних лет встречаются задания на исследование некоторой функции, при решении которых необходимо решить логарифмическое уравнение (неравенство). Среди заданий профильного уровня встречаются задания на решение систем логарифмических уравнений.

Анализируя демонстрационный вариант ЕГЭ 2017 года базового и профильного уровня, видно, что 3 задания в том или ином объёме затрагивают тему «Логарифмическая функция».

Для решения этих заданий необходимо знать свойства логарифмов и логарифмической функции, чётко ими оперировать. Поэтому изучение данной темы играет важную роль в школьном курсе математики для старшеклассников.

б) тематическое планирование

Учебный предмет «Алгебра и начала математического анализа» в 11 классе МБОУ «Курасовская СОШ» Ивнянского района Белгородской области изучается в объёме 2,5 часа в неделю по учебнику «Алгебра и начала математического анализа: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; под. ред. А.Н. Колмогорова. - М.: Просвещение, 2011 [1].

Рабочая программа учебного предмета «Алгебра и начала математического анализа» разработана с учётом примерной программы по математике и авторской программы по алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов: Программы общеобразовательных учреждений. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Составитель: Т. А. Бурмистрова. – М.: «Просвещение», 2010 г. в соответствии с Федеральным компонентом государственного стандарта среднего (полного) общего образования на базовом уровне, 2004 г.

Темы «Логарифмическая функция, её свойства и график» и «Логарифмические уравнения и неравенства» по учебнику А.Н. Колмогорова изучаются в 11 классе: глава 4 «Показательная и логарифмическая функции» (§10 «Показательная и логарифмическая функции», пункт 38 «Логарифмическая функция», пункт 39 «Решение логарифмических уравнений и неравенств») [1].

В тематическом планировании учителем на изучение темы «Показательная и логарифмическая функция» вместо 18 часов отведено 20 часов, из них на изучение логарифмов - 10 часов.

№ урока	**Наименование раздела и тем**	**Часы учебного времени**
	Показательная и логарифмическая функции (20 ч.)	
42-43.	Показательная функция, её свойства и график	2 ч.
44-45.	Показательные уравнения	2 ч.
46-47.	Показательные неравенства	2 ч.
48.	Решение показательных уравнений и неравенств. Тест	1 ч.
49-51.	Логарифмы и их свойства	3 ч.
52-53.	Логарифмическая функция, её свойства и график	2 ч.
54-55.	Логарифмические уравнения	2 ч.
56-57.	Логарифмические неравенства	2 ч.
58.	Решение логарифмических уравнений и неравенств. Тест	1 ч.
59.	Показательная и логарифмическая функции	1 ч.
60.	Контрольная работа по теме «Показательная и логарифмическая функции»	1 ч.
61.	Показательная и логарифмическая функции	1 ч.

Основная цель изучения темы «Логарифмы» – обучение решению логарифмических уравнений и неравенств на основании свойств логарифмической функции. На экзаменах данная тема контролируется на двух уровнях: базовом, где задачи берутся из открытого банка заданий, и профильном, где предполагается более глубокое знание математики.

В связи с этим для успешной сдачи ЕГЭ учителю необходимо планировать изучение данной темы таким образом, чтобы учащиеся получили максимальный объём информации, успели закрепить навыки на достаточном количестве примеров. Для этого необходимо расширение набора упражнений, не вошедших в школьный учебник алгебры и начал математического анализа, направленных на успешное выполнение заданий в ЕГЭ по данной теме.

Учебный предмет «Алгебра и начала математического анализа» в 10 классе МБОУ «Курасовская СОШ» Ивнянского района Белгородской области изучается на профильном уровне в объёме 4 часа в неделю по учебнику «Алгебра и начала математического анализа: Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин – М.: Просвещение, 2008 (базовый и профильный уровни) [2].

Отличительная особенность учебников А.Н. Колмогорова и Ю.М. Колягина состоит в том, что темы «Логарифмическая функция, её свойства и график» и «Логарифмические уравнения и неравенства» по учебнику Ю.М. Колягина изучаются в 10 классе, что даёт больше возможности и времени для подготовки к ЕГЭ.

№ урока	**Наименование раздела и тем**	**Часы учебного времени**
	Логарифмическая функция (17 часов)	
72-73.	Логарифмы.	2 ч.
74-75.	Свойства логарифмов	2 ч.
76-77.	Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода.	2 ч.
78-79.	Логарифмическая функция, её свойства и график	2 ч.
80-81.	Логарифмические уравнения	2 ч.
82-83.	Логарифмические неравенства	2 ч.
84.	Решение логарифмических уравнений и неравенств.	1 ч.
85-86.	Логарифмическая функция.	2 ч.
87.	Контрольная работа по теме «Логарифмическая функция».	1 ч.
88.	Логарифмическая функция	1 ч.

в) анализ учебника

Тема «Логарифмы» является традиционной в курсе алгебры и начал математического анализа средней школы, но очень трудно даётся учащимся из-за сложности материала, концентрированности изложения.

По учебнику А.Н. Колмогорова, по которому работают учащиеся 11 класса Курасовской средней общеобразовательной школы, изучение показательной и логарифмической функций планируется в конце курса алгебры и начал математического анализа, поэтому недостаточно времени отводится на изучение данного материала, хотя учебник написан на высоком научном уровне, основные теоретические положения иллюстрируются конкретными примерами. Каждый пункт учебника содержит образцы решения типичных задач, соответствующих обязательному уровню подготовки по данной теме, и более трудные задачи для сильных учащихся, претендующих на сдачу ЕГЭ профильного уровня. Вопросы и задачи на повторение, которыми заканчивается IV глава учебника, позволяют учащимся проконтролировать свои знания и умения, а также могут быть использованы учителем при проведении итогового опроса или зачёта. Упражнения для повторения всех тем данного курса помещены в главе V «Задачи на повторение», а задачи повышенной трудности содержит заключительная глава VI.

При подготовке к уроку учитель пользуется несколькими учебниками и различными методическими пособиями. Хорошим подспорьем является учебник алгебры и начал математического анализа Ю.М. Колягина базового и профильного уровня.

г) описание методики (своей)

Технология формирования критического мышления была применена на уроках математики в МБОУ «Курасовская СОШ» Ивнянского района Белгородской области. Совместно с учителем математики Чупахиным Александром Валентиновичем мы разработали планы уроков по темам: «Логарифмическая функция, её свойства и график», «Логарифмы и их свойства» и «Логарифмические уравнения и неравенства». Опишем основные моменты данных уроков.

В процессе изучения свойств логарифмов и логарифмической функции ученикам предлагается записывать в тетради для подготовки к ЕГЭ все основные формулы. Рассматривая методы решения логарифмических уравнений, учитель обращает внимание на «опасности», которые могут возникнуть при формальном применении формул или невнимательном использовании свойств логарифмической функции. После выполнения индивидуальных домашних заданий проводится анализ ошибок, связанных с появлением посторонних или с «потерей» корней [20].

Учитель предлагает классу найти ошибки в решении нескольких уравнений:

$$1)\ \log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$$

$$2x+1 = x+1$$

$$x = -2$$

Подставив в уравнение найденное значение x, ученики замечают, что под знаками логарифма появляются отрицательные значения, что противоречит определению логарифма. Значит, число -2 является посторонним корнем, а исходное уравнение не имеет корней. Этот пример помогает сформировать критическое отношение к результатам решения уравнений и подсказывает, что надо либо делать проверку, либо сразу определять область допустимых значений неизвестного.

Правильное решение уравнения будет выглядеть так:

$$\log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x+3 = x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{корней нет}$$

Ответ: решений нет.

$$2)\ \log_{2x} x = \log_{\frac{8}{x}} x$$

$$\frac{1}{\log_x 2x} = \frac{1}{\log_x \frac{8}{x}}$$

$$x = 2$$

Ученики выясняют, что при решении данного уравнения причиной ошибки является формальное применение формулы перехода к другому основанию [20].

В данном случае не был найден ещё один корень – $x = 1$. Чтобы избежать потери корней, надо переходить к численному основанию. Например:

$$\log_{2x} x = \log_{\frac{8}{x}} x$$

$$\frac{\log_2 x}{1 + \log_2 x} = \frac{\log_2 x}{3 - \log_2 x}$$

$$(2 - 2\log_2 x)\log_2 x = 0$$

$x = 2, \quad x = 1 -$ множество корней уравнения.

При решении логарифмических неравенств также могут быть ошибки, в результате которых появляются «посторонние» решения или происходит их «потеря». Эти ошибки могут быть связаны как с незнанием свойств логарифмической функции, так и с формальным применением формул. Рассматривая различные примеры, учитель просит учащихся перечислить особенности конкретного неравенства, без учёта которых нельзя получить правильное решение. Школьники, приученные к критическому анализу ситуации, обращают внимание на основание логарифма (для числовых положительных оснований выделяют случаи оснований, меньших или больших единицы, а для оснований, зависящих от неизвестной, ещё исключают случай, когда это основание может быть равным единице) [20]. Анализируя решения логарифмических неравенств, учащиеся делают вывод о необходимости использования обобщённых формул для логарифма произведения, частного или степени:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|; \log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|;$$

$$\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|. \qquad (*)$$

Хотим обратить внимание на то, что появление знака модуля связано с тем, что, если его не поставить, то сужается область определения, а, следовательно, теряется часть решений, что и происходит в решениях экзаменационных заданий выпускников.

Обобщённые формулы для логарифма произведения, частного и степени можно записать так:

$$\log_a xy = \begin{cases} \log_a x + \log_a y, \text{если } x > 0, y > 0 \\ \log_a(-x) + \log_a(-y), \text{если } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \begin{cases} \log_a x - \log_a y, \text{если } x > 0, y > 0 \\ \log_a(-x) - \log_a(-y), \text{если } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$$\log_a x^{2k} = \begin{cases} 2k \log_a x, \ \textit{если } x > 0 \\ 2k \log_a(-x), \ \textit{если } x < 0 \end{cases}$$

При выполнении заданий относительно логарифма второй и выше степени целесообразно применять следующее свойство, напрямую вытекающее из свойства возведения в степень произведения, изученного в 7 классе:

$$\log_a{}^k x^m = m^k \log_a{}^k x, \text{ т.к. } \log_a{}^k x^m = (\log_a x^m)^k.$$

В процессе подготовки к ЕГЭ у школьников вырабатывается подход к решению логарифмических неравенств: обязательно надо находить область допустимых значений аргумента, учитывая определение логарифмической функции, правильно использовать формулы для преобразования логарифмических выражений, учитывать величину основания логарифма [20].

Приведём примеры неравенств, решение которых и анализ возможных ошибок проводится в процессе подготовки к ЕГЭ по математике.

1. Решить неравенство

$\log_3^2 x^2 - 12 \log_3(-3x) + 21 > 0$

Решение

Найдём область допустимых значений переменных

ОДЗ $\begin{cases} -3x > 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ откуда $x<0$

Заметим, что

$$\log_3 x^2 = 2\log_3|x| = 2\log_3(-x)\text{, а}$$

$\log_3(-3x) = \log_3 3 + \log_3(-x) = 1 + \log_3(-x).$

Имеем: $(2\log_3(-x))^2 - 12(1 + \log_3(-x) + 21 > 0$

$4\log_3^2(-x) - 12\log_3(-x) + 9 > 0$

Делаем замену: $\log_3(-x) = t$

$4t^2 - 12t + 9 > 0$

$(2t-3)^2 > 0$ при 2t-3≠0

t≠1,5

$\log_3(-x) \neq 1{,}5$*, откуда* $x \neq -3\sqrt{3}$

($\log_3(-x) = 1{,}5$, $-x = 3^{\frac{3}{2}}$, $-x = \sqrt{27}$, $x = -3\sqrt{3}$)

<u>С учётом ОДЗ имеем: </u>$x \in (-\infty; -3\sqrt{3}) \cup (-3\sqrt{3}; 0)$

Ответ: $(-\infty; -3\sqrt{3}) \cup (-3\sqrt{3}; 0)$.

2. Решить неравенство

$$\log_5((3^{-x^2} - 5)(3^{-x^2+9} - 1)) + \log_5\frac{3^{-x^2} - 5}{3^{-x^2+9} - 1} > \log_5(3^{3-x^2} - 2)^2$$

Решение

Пусть $3^{-x^2} = t$, где $0 < t \leq 1$. *Неравенство примет вид:*

$$\log_5(t-5)(3^9 t - 1) + \log_5\frac{t-5}{3^9 t - 1} > \log_5(27t - 2)^2$$

$t - 5 < 0$ (т.к. $0 < t \leq 1$), поэтому $3^9 t - 1 < 0$, т.е. $0 < t < \frac{1}{3^9}$

$$\begin{cases} \log_5(t-5)^2 > \log_5(27t-2)^2, \\ 0 < t < \dfrac{1}{3^9}, \end{cases} \begin{cases} 2\log_5|t-5| > 2\log_5|27t-2|, \\ 0 < t < \dfrac{1}{3^9}, \end{cases}$$

$\begin{cases} |t-5| > |27t-2|, \\ 0 < t < \frac{1}{3^9}, \end{cases} \begin{cases} 5 - t > 2 - 27t \\ 0 < t < \frac{1}{3^9} \end{cases}$, откуда $0 < t < \frac{1}{3^9}$

$$3^{-x^2} < 3^{-9}$$

$$-x^2 < -9$$

$$x^2 > 9$$

$$(x-3)(x+3) > 0$$

$$x > 3$$

$$x < -3$$

Ответ:$(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ [20].

Для проверки сформированности навыков критического мышления нами были проведены самостоятельная работа по теме «Решение логарифмических уравнений и неравенств» и контрольная работа по теме «Логарифмы. Логарифмические уравнения и неравенства».

В самостоятельной работе учащимся были предложены по одному уравнению и неравенству из подготовительных заданий к ЕГЭ (тексты представлены в приложениях). Также ученикам нужно было ответить на вопросы:

1. Какие свойства логарифмической функции надо использовать для решения этого уравнения (неравенства)?

2. Какие шаги решения могут привести к ошибке?

3. Какие способы или приёмы помогут избежать ошибки?

4. Какие есть способы проверки правильности решения?

Все учащиеся готовятся сдавать базовый и профильный экзамен по математике. Поэтому навыки критического мышления им очень нужны. Двое одиннадцатиклассников успешно справились и с самостоятельной, и с контрольной работой – получили отметку «5» (29%). С самостоятельной работой трое учащихся справились на «4» (42%), двое – на «3» (29%).

По итогам самостоятельной и контрольной работ

С вопросом №1 справились все учащиеся. Вопрос №2 вызвал затруднения у некоторых учеников. Что касается 3 и 4 вопросов, то они оказались самыми трудными для учащихся. Однако в вопросе №4 один из способов проверки, подстановку ответов в условие, понимают все. Это говорит о том, что учащиеся имеют твёрдо закреплённые первичные навыки решения логарифмических уравнений и неравенств.

В контрольной работе были представлены задания из вариантов ЕГЭ (см. приложение 2). Как было отмечено выше, двое учеников справились с заданиями на «5», трое – на «4», двое получили «3». В процентном соотношении результаты выглядят так: 29% - «5», 42% - «4», 29% - «3».

Таким образом, можно сделать вывод, что применимая нами методика формирования критического мышления принесла позитивные результаты. Учащиеся имеют положительные отметки по проведённым самостоятельной и контрольной работам, что свидетельствует о том, что ученики успешно освоили тему «Логарифмическая функция, её свойства и график», овладели приёмами решения логарифмических уравнений и неравенств (кто-то в большей, кто-то в меньшей мере), самостоятельно могут проанализировать свои ошибки, либо же найти ошибку в ответах в сборнике для подготовки к экзаменам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ изученной литературы позволил сделать следующие выводы:

1. Критическое мышление - это интеллектуально организованный процесс, направленный на активную деятельность по осмыслению, применению, анализу, обобщению или оценке информации, полученной или создаваемой путём наблюдения, опыта, рефлексии, рассуждений или коммуникации как руководство к действию или формированию убеждения.

2. Определение критического мышления во многом пересекается с характеристикой математического мышления, главной характеристикой которого считают логичность и умение выделить главное, а также способность к анализу и обобщению. Процесс обучения математике тесно связан с развитием мышления учащихся, в том числе с развитием критического мышления.

3. Образовательная технология развития критического мышления – система учебных стратегий, методов и приёмов, направленных на развитие критического мышления у учащихся. Общим для всех учебных стратегий является построение образовательного процесса на основе трёх фаз: Вызов – Реализация смысла (осмысление) – Рефлексия.

4. Технология критического мышления способствует общему развитию учащихся, тем самым выполняя задачу «научить учиться».

5. Критическое мышление позволяет эффективно анализировать информацию и правильно работать с ней, поэтому оно является одним из проявлений математического мышления.

6. При изучении темы «Логарифмы» достаточно эффективным представляется применение технологии проблемно-модульного обучения, в частности, принципа опоры на ошибки (ПОО), который был выделен как её составная часть. Использование в обучении анализа причин и способов исправления ошибок может стать составной частью методической системы учителя.

Учащиеся «должны хорошо понимать, что знание причин и детальный анализ ошибок помогают их избежать в дальнейшем».

7. ПОО может стать одним из инструментов формирования критического мышления на уроках математики.

Так как одним из индикаторов достижения целей школьного образования является ЕГЭ, а в КИМах по математике есть задания, связанные с решением логарифмических уравнений и неравенств, то в работе была рассмотрена связь этого раздела с навыками опоры на ошибки.

В работе было проведено исследование возможностей применения технологии формирования критического мышления, в частности, реализации принципа опоры на ошибки при обучении теме «Логарифмы». Базой исследования являлась МБОУ «Курасовская СОШ» Ивнянского района Белгородской области.

Проведя анализ учебника математики, по которому работают в Курасовской СОШ, была разработана методика обучения решению логарифмических уравнений и неравенств. Эта методика способствует развитию критического мышления учащихся, которое в итоге необходимо для овладения математическими знаниями.

Проведённые самостоятельная и контрольная работы по этой теме показали, что разработанная методика способствует успешному усвоению программы учащимися.

Подводя итог нашей работы, мы можем сказать, что поставленные нами задачи были выполнены, гипотеза подтверждена. Это свидетельствует о правильно разработанном направлении работы и методически грамотной организации исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений с прил. на электрон. носителе / А.Н. Колмогоров [и др.]; под ред. А.Н. Колмогорова. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 384 с.
2. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Ю.М. Колягин [и др.]; под. ред. А.Б. Жижченко. – М.: Просвещение, 2008. – 368 с.
3. Балашов, Ю.К. Профессиональная подготовка кадров в условиях капитализма / Ю.К. Балашов, В.А. Рыжов. – М.: Высшая школа, 1987. – 176 с.
4. Беспалько, В.П. Слагаемые педагогической технологии / В.П. Беспалько. – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.
5. Бородуля, И.Т. Показательная и логарифмическая функции (задачи и упражнения): пособие для учителя / И.Т. Бородуля. – М.: Просвещение, 1984. – 112 с.
6. Браус, Дж. Инвайронментальное образование в школах: руководство: как разработать эффективную программу / Дж. Браус, Д. Вуд; пер. с англ. – СПб.: NAAEE, 1994. – 102 с.
7. Гузеев, В.В. Методы и организационные формы обучения / В.В. Гузеев. – М.: Народное образование, 2001. – 128с.
8. Калмыкова, З.И. Психологические принципы развивающего обучения / З.И. Калмыкова. – М.: Знание, 1979. – 48 с.
9. Лернер, И.Я. Дидактические основы методов обучения / И.Я. Лернер. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 186 с.
10. Потапов, М.К. Конкурсные задачи по математике: справ. пособие / М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 480 с.
11. Потапов, М.К. Лекции по алгебре и элементарным функциям /

М.К. Потапов, В.В. Александров, П.И. Пасиченко. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 384 с.

12. Пуанкаре, А. Наука и гипотеза / А. Пуанкаре; под ред. А.Г. Генкель; пер. с фр. А.Г. Чернявский. – СПб.: Слово, 1906. – 238 с.

13. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений / Л.М. Фридман. – М.: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998. – 224 с.

14. Халперн, Д. Психология критического мышления / Д. Халперн. – СПб.: Питер, 2000. – 512 с.

15. Хинчин, А.Я. Педагогические статьи / А.Я. Хинчин; под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Акад. пед. наук РСФСР, 1963. – 204 с.

16. Чошанов, М.А. Гибкая технология проблемно-модульного обучения: методическое пособие / М.А. Чошанов. – М.: Народное образование, 1996. – 160с.

17. Щукина, Г.И. Педагогика школы / Г.И. Щукина [и др.]. – М.: Просвещение, 1977. – 384 с.

18. Зинченко, Н.А. Воспитание критичности мышления на основе опоры на ошибки / Н.А. Зинченко // Роль инновационных учреждений интернатного типа в обучении сельских школьников: материалы Всероссийского совещания-семинара. – Белгород, 2003. – С. 56 – 59

19. Трубинова, Е.А. Технология развития критического мышления в учебно-воспитательном процессе / Е.А. Трубинова // Молодой учёный. – 2015. – №23. – С. 946 – 948.

20. Чупахина, Ю.А. Опора на ошибки как средство формирования критического мышления старшеклассников / Ю.А. Чупахина, Н.А. Зинченко // В мире науки и инноваций: сборник статей Международной научно-практической конференции. – Казань, 2017. – С. 183-185

21. Григорьева, Э.С. «Использование технологии критического мышления на уроках химии» [Электронный ресурс]. Режим доступа:

http://festival.1september.ru/articles/528850, свободный. (Дата обращения: 23.04.2017 г.).

22. Загашев, И.О. Новые педагогические технологии в школьной библиотеке: образовательная технология развития критического мышления средствами чтения и письма [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://lib.1september.ru/2004/17/15.htm, свободный. (Дата обращения: 17.04.2017 г.).

23. Куканова, И.А. Урок «Логарифмическая функция, её свойства и график», 11 класс [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://урок.рф/library/urok_logarifmicheskaya_funktciya_eyo__svojstva_i_grafik_213158.html, свободный. (Дата обращения: 21.03.2017 г.).

24. Кунаева, Т.В. Критическое мышления как образовательная технология и технология учебной дискуссии [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://nsportal.ru/shkola/materialy-metodicheskikh-obedinenii/library/2015/10/23/kriticheskoe-myshlenie-kak, свободный. (Дата обращения: 14.04.2017 г.).

25. Понятие «критическое мышление» и его характеристика [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://refdb.ru/look/2292490-pall.html, свободный. (Дата обращения: 29.04.2017 г.).

26. Технология критического мышления - эффективный инструмент познания в образовательном процессе [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://aneks.spb.ru/obrazovatelnye-tekhnologii/tekhnologiia-kriticheskogo-myshleniia-effektivnyi-instrument-poznaniia-v-obrazovatelnom-protcesse.html, свободный. (Дата обращения: 17.04.2017 г.).

27. Технология развития критического мышления [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://videouroki.net/razrabotki/tekhnologiya-razvitiya-kriticheskogo-myshleniya-1.html, свободный. (Дата обращения: 15.04.2017 г.).

28. Филимонова, О.Н. Разработка урока по теме «Логарифмическая функция и её свойства» [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2013/11/29/razrabotka-uroka-po-teme-logarifmicheskaya-funktsiya-i-eyo, свободный. (Дата обращения: 22.03.2017 г.).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Самостоятельная работа по теме

«Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Вариант 1	Вариант 2
1. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) > 2$	1. Решить неравенство $\log_2(x-5) < 3$
2. Решить уравнение $\log_{x-2} 16 = 2.$	2. Решить уравнение $\log_{x+1} 49 = 2.$

Приложение 2

Контрольная работа по теме

«Логарифмы. Логарифмические уравнения и неравенства»

Вариант 1	Вариант 2
1. Вычислить: *а)* $\frac{2\,log_7 6 - log_7 3}{log_7 144}$; *б)* $\frac{log_2(2-\sqrt{3})}{log_4(2+\sqrt{3})}$ *в)*$(log_{\frac{1}{4}}(log_2 3 \cdot log_3 4))^2$.	1. Вычислить: *а)* $\frac{log_5 64}{log_5 48 - log_5 3}$; *б)* $\frac{log_2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{log_4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$; *в)* $log_{\sqrt{2}}\frac{2}{3} + (log_9 2)^{-1}$.
2. Решить уравнение: *а)* $log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = -1$; *б)* $\log_3(2x-1) = 2 - \log_3(x-4)$.	2. Решить уравнение: *а)* $log_5(x+4) = 2$; *б)* $log_{\frac{1}{13}}(x+10) + 1 = log_{13}(x-2)$;
3. Решить неравенство: *а)* $log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}(2x^2 + x) \geq -3$; *б)* $log_x(1-x) < 1$.	3. Решить неравенство: *а)* $log_{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}}(3x^2 - 5x) > -4$; *б)* $log_{2x}(x-2) < 1$.
4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 8^{\log_8(x-y)} = 2, \\ 2^x - 2^y = 6\log_4 2\,. \end{cases}$	4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 5^{\log_5(x-y)} = 1, \\ 3^x - 3^y = 6\log_2 8\,. \end{cases}$
5. Решить систему неравенств: $\begin{cases} 8^x + 8 \geq 4^{x+1} + 2^{x+1}, \\ \log_{x-1} 7 > 2 \end{cases}$	5. Решить систему неравенств: $\begin{cases} \log_{x-1}(x^2 - 12x + 36) \leq 0, \\ 4^{x-2} - 35 \cdot 2^{x-4} + 6 \leq 0 \end{cases}$