ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ»

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, профиль Математика и информатика
очной формы обучения, группы 02041203
Гетмановой Юлии Сергеевны

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Мотькина Н.Н.

БЕЛГОРОД 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время принципиальным положением организации школьного образования является дифференциация обучения – уровневая дифференциация в основной школе и профильная на старшей ступени образования, так как сегодня школа должна учитывать индивидуальные особенности каждого ученика, его профессиональные интересы, социальный заказ семьи и общества.

Математические знания, представления о роли математики в современном мире являются необходимыми компонентами общей культуры, при этом темпы обновления научной информации постоянно растут и практически каждому человеку, желающему продуктивно работать, приходится совершенствовать свои знания и образование.

Одним из важнейших факторов, который обеспечивает готовность человека к дальнейшему обучению в различных областях деятельности, является математическое развитие, поэтому одной из основных задач современного математического образования является повышение эффективности процесса обучения, разработка более совершенных методов, приёмов и организационных форм обучения.

В связи с тем, что на сегодняшний день организация школьного образования строится на принципах дифференциации обучения, т.е. у обучающихся имеется возможность выбора интересующего его профиля, то разработка новых учебных пособий, методических рекомендаций, учебных программ является важной задачей.

Особенно актуально введение элективных курсов, которые не изменяют целиком школьную программу, а дополняют ее новым содержанием, тем самым помогают углубленно изучить определенный предмет.

Элективные курсы – это обязательные для посещения курсы по выбору учеников, которые представляют широкие возможности для реализации принципов дифференцированного обучения, так как позволяют учитывать интересы обучающихся, которые хотели бы получить углубленные знания по интересующему их направлению.

Элективные курсы связаны, прежде всего, с удовлетворением индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника [36].

Поскольку курсы по выбору – важнейшая часть реализации принципов профильного обучения, то проблема разработки элективных курсов, на наш взгляд, является весьма актуальной, поэтому для исследования нами была выбрана тема: изучение задач линейного программирования на элективном курсе по математике для обучающихся 10 класса.

Выбор данной темы был обусловлен тем, что предлагаемое в элективном курсе: изучение задач линейного программирования и методов их решения позволит расширить рамки математических знаний обучающихся, взглянуть по-новому на практическое применение математики, на её связь с другими отраслями знаний. В школьном курсе математики рассмотрение этих вопросов часто остается в стороне, но линейное программирование, на наш взгляд, представляет собой один из наиболее значимых разделов математики, где осуществляется изучение теоретических и методических основ решения определенных задач, так как данная математическая дисциплина широко используется в последние годы в разнообразных экономических и технических областях, где не последняя роль отведена математическому планированию и использованию автоматических систем вычисления.

Охарактеризуем методологический аппарат исследования.

Объект исследования: процесс обучения математике на старшей ступени общеобразовательной школы в рамках элективного курса.

Предмет исследования: процесс организации элективного курса по математике: его содержание, организационные формы, основные цели и задачи.

Цель исследования: разработка элективного курса «Задачи линейного программирования в школьном курсе математики» для обучающихся 10 класса.

Гипотеза исследования: данный элективный курс обеспечит более высокий уровень знаний, умений и навыков обучающихся по данной теме, а также расширит объём знаний по математике.

Для решения данной проблемы были поставлены следующие *задачи*:

1. Изучить и проанализировать научную, учебно-методическую и психолого-педагогическую литературу по созданию элективных курсов.
2. Охарактеризовать цели, функции и задачи организации элективных курсов, выделить типологии.
3. Определить требования к оформлению рабочей программы элективных курсов.
4. Рассмотреть основные методы решения задач линейного программирования.
5. Разработать элективный курс «Задачи линейного программирования в школьном курсе математики», оформить его рабочую программу.
6. Экспериментально проверить эффективность разработанного курса.

Для решения сформулированных задач были применены следующие *методы* исследования: анализ учебно-методической и психолого-педагогической литературы по созданию и организации элективных курсов; изучение и анализ математической литературы при отборе учебного материала для использования на элективных занятиях; педагогический эксперимент.

Апробация материалов элективного курса проводилась на занятиях по математике с учениками 10 класса Новоуколовской СОШ.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников. В первой главе рассмотрены общие положения по созданию и организации элективных курсов. Вторая глава посвящена разработке элективного курса «Задачи линейного программирования в школьном курсе математики» для обучающихся 10 класса и описанию апробации.

Работа завершается заключением, списком использованных источников и приложением.

ГЛАВА 1. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ

1.1 История возникновения и развития элективных курсов

В настоящее время, когда объём знаний, получаемых ребёнком в школе возрастает – переход к профильному обучению становится одним из средств оптимизации учебного процесса и решения возникающих проблем.

В соответствии с распоряжением Правительства Российской Федерации от 29 декабря 2001 г. №1756 об одобрении Концепции модернизации российского образования перед школой стала задача создания «системы специализированной подготовки (профильного обучения) в старших классах общеобразовательной школы, ориентированной на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся, в том числе с учетом реальных потребностей рынка труда <…> отработки гибкой системы профилей и кооперации старшей ступени школы с учреждениями начального, среднего и высшего профессионального образования» [28, с.14].

В большинстве европейских стран профильное обучение начинается уже в средней школе, когда каждый ребенок должен определиться в выборе своего дальнейшего пути.

История российской школы свидетельствует о немалом опыте в вопросе дифференцированного обучения. Уже в 1864 году было организовано два вида гимназий: классическая (для подготовки в университет) и реальная (для поступления в специальные учебные заведения) [34].

Первый Всероссийский съезд работников просвещения в 1918 году выделил три направления профильного обучения: гуманитарное, естественно-математическое и техническое, а уже в 1966 году была предложена широкая система факультативов и курсов с более углубленным изучением отдельных предметов по тому или иному профилю [33].

Профильное обучение – это средство дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющее за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности обучающихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования [28]. Тот или иной профиль складывается из курсов трёх типов:

1. базовые общеобразовательные предметы,
2. профильные,
3. элективные (курсы по выбору).

Базовые общеобразовательные предметы обязательны для всех обучающихся во всех профилях обучения. Знания, умения и навыки школьников определяются содержанием учебников (программ), рекомендованных МО РФ для общеобразовательных школ.

Профильные общеобразовательные предметы – это курсы повышенного уровня, углубляющие базовые предметы, при освоении которых деятельность учителя и ученика направлена на освоение знаний, умений, которые определены государственным стандартом.

На данный момент, профильное обучение на старшей ступени общего образования предусматривает возможность введения пяти профилей:

– естественно-математический (профильные предметы – математика, физика, химия, география, биология);

– социально-экономический (профильные предметы – история, экономика, право, экономическая и социальная география, социология);

– гуманитарный (профильные предметы – русский язык и литература, иностранный язык, история, обществознание, искусство);

– технологический (профильные предметы – информационные технологии, агротехника, индустриальные технологии, технологии сферы обслуживания, медицина, педагогика и т.п.);

– универсальный / общеобразовательный (для непрофильных классов и школ) [14].

Элективные курсы – курсы, входящие в состав профиля, способствующие углублению индивидуализации профильного обучения. В информационном письме Минобразования РФ от 13 ноября 2003 г. №14-51-277 говорится о том, что «именно они по существу и являются важнейшим средством построения индивидуальных образовательных программ, так как в наибольшей степени связаны с выбором каждым школьником содержания образования в зависимости от его интересов, способностей, последующих жизненных планов» [28, с. 75].

Для Российской школы понятие «элективные курсы» достаточно новое. В связи с этим возникает ряд проблем, связанных с их разработкой и внедрением. Идея элективных курсов в системе профильного обучения нашла отражение в работах Э.Н. Абдуллаева, А.В. Баранникова, А.Г. Каспржака, Н.А. Гужавиной, Н.В. Добрецовой, Д.С. Ермакова, Д.А. Ершова, А.А.Зубрилина, Г.Д. Петровой, Н. Савицкой и др.

В советской школе первые попытки внедрения элективной дифференциации были предприняты в 1960-х гг. Широкого распространения данные занятия не получили. Видимо, поэтому в современной литературе элективные курсы чаще сопоставляют с факультативами, которые начиная с 1966 г. были организованы практически во всех школах страны.

Прилагательное «элективный» *(electus в переводе с латинского)* означает «избранный, отобранный» [22], т.е. иными словами любой курс, намеченный в учебном плане элективным должен выбираться. В Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования – приказ Минобразования РФ от 18 июля 2002 г. №2783 дано следующее определение: «Элективные курсы – обязательные для посещения курсы по выбору обучающихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы» [28, с. 16].

То есть основным отличием элективных курсов от факультативов и различных образовательных кружков является то, что они обязательны для посещения и позволяют школьникам развить интерес к тому или иному предмету и четко определиться со своим дальнейшим выбором в рамках того или иного профиля [21].

Таким образом, элективные курсы играют большую роль в совершенствовании школьного образования и являются важной содержательной частью профильного обучения, что позволяет удовлетворять разнообразные познавательные интересы обучающихся.

1.2 Цель, задачи и функции элективных курсов. Типы курсов профильного обучения

Основной целью преподавания элективных курсов является ориентация обучающихся на индивидуализацию обучения и социализацию, на подготовку к осознанному и ответственному выбору сферы будущей профессиональной деятельности [12].

Выделим три основные функции, которые выполняют курсы по выбору:

1. являются «надстройкой» профильного курса, тогда такой дополненный профильный курс становится в полной мере углубленным;
2. развивают содержание одного из базисных курсов, изучение которого осуществляется на минимальном общеобразовательном уровне, что позволяет поддерживать изучение смежных учебных предметов на профильном уровне или получить дополнительную подготовку для сдачи единого государственного экзамена по выбранному предмету;
3. способствуют удовлетворению познавательных интересов в различных областях деятельности человека [13].

В соответствии с целью и функциями, курсы по выбору должны быть направлены на решение 3-х основных задач:

1) расширить знания по изучаемому предмету;

2) способствовать профессиональному самоопределению;

3) формировать и развивать познавательный интерес к предмету [15].

Рассмотрим основные виды элективных учебных курсов профильного обучения. Анализ педагогической литературы показал, что существует несколько типологий. К примеру, Каспржак А.Г. выделил следующие типологию и обозначил её как виды курсов по разрешаемым задачам, которые рассмотрим в таблице 1 [20].

№	*Вид элективного курса*	*Задачи курса*
1	«Пробный»	Создание условий для того, чтобы ученик утвердился или отказался от сделанного им выбора направления дальнейшего обучения, связанного с определённым видом профессиональной деятельности
2	«Ориентационный»	Помощь обучающемуся в его профессиональном и социальном самоопределении, оценке своих собственных способностей, склонностей, интересов; ознакомление с многообразием видов деятельности
3	«Общекультурный»	Удовлетворение естественного любопытства школьника какой-то области предмета, оставленной за рамками учебного плана
4	«Углубляющий»	Углубление, расширение знаний по какому-либо учебному предмету, либо его разделам

Таблица 1. Типология элективных курсов по разрешаемым задачам

Следующую типологию можно условно обозначить «По связи с предметом», представленную на схеме 1 [25].

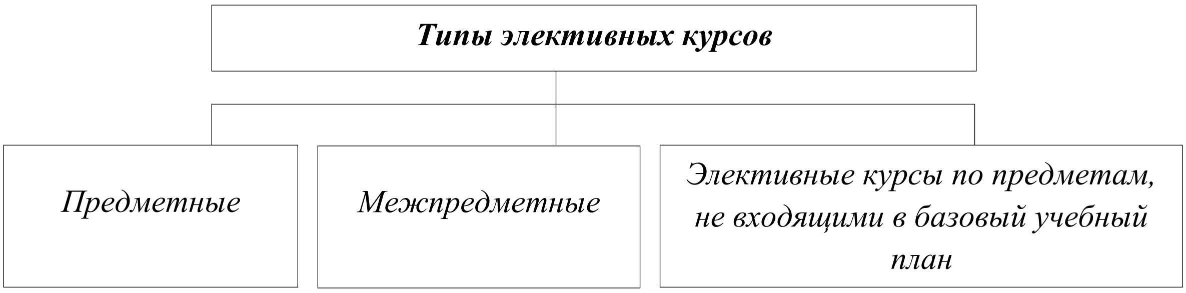


Схема 1. Типы элективных курсов «По связи с предметом»

I. Предметные курсы – элективные курсы, задача которых состоит в углублении и расширении знаний по предметам, входящих в базисный учебный план школы.

II. Межпредметные курсы – элективные курсы, которые предполагают выход за рамки традиционных предметов, знакомят обучающихся с комплексными задачами, требующими синтеза знаний по ряду предметов, формируют общеучебные и общекультурные умения и навыки, коммуникативные и социальные компетентности.

III. Элективные курсы по предметам, не входящими в базисный учебный план – элективные курсы, посвященные психологическим, социальным, культурологическим, искусствоведческим проблемам [25].

В свою очередь, предметные курсы можно разделить по содержанию, тем самым, выделив ещё одну типологию элективных курсов, которую рассмотрим на схеме 2.

Типы элективных курсов

Элективные курсы повышенного уровня, направленные на углубление того или иного учебного предмета, имеющие как тематическое, так и временное согласование с этим учебным предметом;

Элективные спецкурсы, в которых углубленно изучаются отдельные разделы основного курса, входящие в рабочую программу данного предмета;

Элективные спецкурсы, в которых углубленно изучаются отдельные разделы основного курса, не входящие в рабочую программу данного предмета;

Прикладные элективные курсы, направленные на знакомство обучающихся с важнейшими путями и методами применения знаний на практике;

Элективные курсы, посвященные изучению методов познания природы;

Элективные курсы, посвященные изучению истории предмета, как входящего в учебный план школы, так и не входящего;

Элективные курсы, посвященные изучению методов решения задач, составлению и решению задач на основе физического, химического, биологического эксперимента.

Схема 2. Типы элективных курсов по содержанию

Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что существуют различные виды элективных курсов, которые отличны по своему содержанию, целям, задачам и функциям, но все они должны соответствовать общим целям обучения и потребностям обучающихся.

1.3 Требования к оформлению программы элективного курса

Рассмотрим некоторые требования и рекомендации, которых желательно придерживаться при разработке элективного курса.

При разработке программы элективного курса необходимо [31]:

– определить цель курса и его функцию в рамках выбранного профиля;

– выявить отличительные особенности содержания элективного курса от содержания соответствующего учебного предмета в рамках данного профиля;

– разделить содержание программы курса по темам и определить необходимое количество часов на каждую из них;

– продумать образовательные продукты, создаваемые в процессе освоения материалов курса;

– выяснить обеспеченность курса различными учебно-методическими материалами и при необходимости доработать их;

– составить список литературы для учителя и обучающихся;

– выделить основные виды деятельности школьников и определить долю их самостоятельности, творчества при изучении курса;

– определить критерии, позволяющие оценить успешность освоения курса;

– продумать форму отчетности обучающихся по итогам освоения программы (контрольная работа, проект, реферат, выступление и т.д.).

В качестве рекомендаций, предъявляемых непосредственно к организации элективного курса можно выделить следующие. Он должен:

1. Иметь социальную и личностную значимость, актуальность как с точки зрения подготовки квалифицированных кадров, так и для личностного развития обучающихся;

2. Способствовать социализации и адаптации школьников в профессиональном самоопределении, предоставлять возможность для выбора индивидуального образовательного пути;

3. Обладать значительным развивающим потенциалом, способствовать формированию целостной картины мира, развитию

общеучебных, интеллектуальных и профессиональных навыков, ключевых компетенций обучающихся.

Элективные курсы могут иметь различный объем: от 12–20 до 68–72 и более часов. Количество учебных часов, отведенных на их изучение, определяется учебным планом школы и программой курса.

При проведении курсов по выбору допускается деление класса на подгруппы. Группа создаётся из учеников класса или параллельных классов и должна включать не менее 5-7 человек.

Преподавание занятий ведётся в рамках учебного расписания, составленного с учётом требований Санитарных норм и нормативами учебного времени.

Проведение элективных курсов может осуществляться как педагогическими работниками школы, так и с привлечением сторонних преподавателей из других школ, средних и высших учебных заведений. Обучение курсу ведётся по программе, созданным самим учителем, по его так называемому авторскому проекту [17].

Остановимся более подробно на создании авторской учебной программы при разработке элективного курса. Для этого дадим определение учебной программе.

Учебная программа – это нормативный документ, в котором очерчивается круг основных знаний, навыков и умений, подлежащих усвоению по каждому отдельно взятому учебному предмету. Она включает перечень тем изучаемого материала, рекомендации по количеству времени на каждую тему, распределение их по годам обучения и время, отводимое для изучения всего курса [27].

Учебные программы подразделяются на примерные (типовые), рабочие и авторские, определения которых представлены на схеме 3.

Учебная программа

Примерная (типовая)	*Рабочая*	*Авторская*
документ, который детально раскрывает обязательные (федеральные) компоненты содержания обучения и параметры качества усвоения учебного материала по конкретному предмету базисного учебного плана	документ, разработанный педагогом на основе примерной учебной программы для конкретного образовательного учреждения и определенного класса (группы), имеющий изменения и дополнения в содержании	документ, созданный на основе государственного образовательного стандарта и примерной учебной программы, имеющий авторскую концепцию построения содержания учебного курса, предмета, разрабатываемый одним или группой авторов

Схема 3. Типы учебных программ

Тем самым, можно сказать, что авторская программа – это учебная программа, созданная на основе типовой программы, обладающая актуальностью, оригинальностью и новизной. Она полностью создана педагогом (или коллективом педагогов) и должна быть рекомендована к использованию методическим советом и утверждена руководителем учреждения. Чаще всего, как было сказано выше, это программа преподавания элективного курса, факультативных занятий, предмета, ну или же собственного подхода учителя к традиционным темам.

Несмотря на то, что структура программы элективного курса предполагает некоторую вариативность, можно выделить следующие традиционные компоненты программы, основные требования которых рассмотрим на схеме 4 [18]:

Схема 4. Структура программы элективного курса

Опишем подробно каждый элемент программы [18]:

Титульный лист должен включать:

– наименование образовательного учреждения;

– сведения о том, где, когда и кем утверждена программа;

– название элективного курса;

– класс, на который рассчитана программа;

– ФИО, должность автора (авторов) программы;

– название города, населенного пункта;

– год разработки программы.

Пояснительная записка должна отражать:

– кому адресована программа: тип (общеобразовательное, специальное и др.), вид (гимназия, лицей, др.) учебного учреждения и определение класса обучающихся;

– концепция (основная идея) программы;

– обоснованность (актуальность, новизна, значимость);

– указание на место и роль курса в обучении;

– цели, задачи;

– сроки реализации программы;

– основные принципы отбора материала и краткое пояснение логики структуры программы;

– методы, формы обучения и режим занятий;

– предполагаемые результаты.

При разработке содержания и методической системы элективного курса важно показать, каково место курса в соотношении, как с общеобразовательными, так и профильными предметами: какие межпредметные связи реализуются при изучении элективного курса; какие общеучебные и профильные умения и навыки при этом развиваются; каким образом создаются условия для активизации познавательного интереса обучающихся; как введение курса в учебный план школы поможет в решении проблемы школьника профессионального самоопределения.

Под целью курса следует понимать прогнозируемые результаты обучения. Цель программы должна отражать запросы обучающихся, родителей, школьного сообщества, ну и общества в целом.

В соответствии с целью формулируются задачи изучения курса – что необходимо для достижения целей; над чем конкретно предстоит работать учителю и обучающимся при изучении курса. Традиционное разделение задач на три группы: обучение, воспитание, развитие не обязательно.

В учебно-тематическом плане должны описываться:

– перечень тем или разделов, последовательность их изучения;
– количество часов на изучение каждой темы;
– вид занятий;
– формы и методы контроля.

Ведущее место в обучении в рамках изучения элективного курса следует отвести методам поискового и исследовательского характера, стимулирующим познавательную активность учеников. Значительной должна быть доля самостоятельной работы с различными источниками учебной информации, но все используемые методы и формы обучения должны быть основаны на совместной деятельности учителя и обучающихся и направлены на достижение общей образовательной цели.

Не менее важной является и система контроля уровня достижений обучающихся и разработка критериев оценки. Необходимо разработать как формы промежуточного контроля, так и формы итоговой зачетной работы по курсу. Оценка может выставляться как в форме «зачтено/не зачтено», так и по балльной шкале [16].

Для контроля уровня достижений учеников могут быть использованы такие способы, как наблюдение активности на занятиях, беседы, анализ творческих, исследовательских работ, результатов выполнения диагностических заданий учебного пособия или рабочей тетради, тестирование. Важно использовать оценку промежуточных достижений, прежде всего, как инструмент положительной мотивации, а также своевременной коррекции деятельности как обучающихся, так и учителя.

Содержательная часть включает в себя последовательный перечень тем с их кратким содержанием, как теоретических, так и практических видов занятий.

В информационном обеспечении указывается литература, использованная при подготовке программы, литература, рекомендованная для обучающихся. Здесь же, прописываются методические рекомендации, дидактический и лекционный материалы, темы для подготовки рефератов, проектов.

Из вышеописанного следует, что разработка элективного курса достаточно трудоемкий процесс, при котором необходимо придерживаться ряда правил, а так же иметь большой запас знаний и умений.

Таким образом, мы рассмотрели общие теоретические основы по созданию и проведению элективных курсов, которые будут учтены при разработке нашего курса по выбору «Задачи линейного программирования в школьном курсе математики» для обучающихся 10 класса.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ»

2.1 История развития линейного программирования как науки

Важнейший этап появления и развития линейного программирования пришелся на Вторую мировую войну и послевоенные годы. В это время математика как наука в целом к ставшим уже традиционным областям приложений (естествознанию и инженерии) прибавила ряд новых. Наиболее заметным из них стало применение математического аппарата для решения проблем управления (военными подразделениями, в экономике, производстве и других областях). Требовалась разработка научных методов такого управления. Назрела объективная необходимость повышения научного уровня экономических решений [2].

Первые попытки использования математического и статистического анализа для решения экономических задач в нашей стране датируются с 1910–1920-е гг.: среди этих работ необходимо отметить труды Е. Е. Слуцкого и А.А.Конюса, в которых ученые изучали модели потребления, исследования Г. А. Фельдмана по моделям роста, труды Н. Д. Кондратьева по «длинным циклам» [2].

Впоследствии, данное направление было математизированно и усовершенствованно В. В. Леонтьевым с широким использованием сведений и материалов экономики США. В тот же временной период Л. Юшков выдвинул идею сформулировать оптимальные подходы к понятию норматива эффективности, которая впоследствии получила чрезвычайно плодотворное развитие в творчестве В. В. Новожилова.

Первые исследования по линейному программированию можно отнести к 1938-1939 гг. Они были начаты в Ленинградском университете при решении Л. В. Канторовичем «задачи фанерного треста». Задача заключалась в оптимальном распределении работы по станкам. В процессе исследования было установлено, что критерием оптимальности плана является существование так называемых разрешающих множителей для всех ингредиентов продукции и ресурсов. Сами разрешающие множители получили экономическую интерпретацию и позднее были названы объективно обоснованными оценками (ООО). По сути, Канторович проинтерпретировал разрешающие множители как цены [2].

Примерно через 10 лет метод линейного программирования в другой форме был переоткрыт в США. Первые статьи по линейному программированию были опубликованы в США лишь в 1949 г. В них американский ученый Дж.Б.Данциг выступил тогда с изложением своего симплексного метода. Симплексный метод Дж.Б.Данцига имеет очень много общего с методом последовательного улучшения плана, применявшимся в дальнейшем (после 1939 г.) Л.В. Канторовичем и его сотрудниками для решения ряда практических задач, представляющих конкретную реализацию метода разрешающих множителей [8].

Еще до Л.В. Канторовича в нашей стране были опубликованы работы, которые можно считать зародышами линейного программирования. Так, в 1930 г. советские экономисты-транспортники (А.Н. Толстой и др.) для построения оптимального плана перевозок составили транспортную задачу в сетевой форме и решили ее без математического обоснования, применяя метод последовательного улучшения плана [35].

Расцвет работ по линейному программированию падает на 50-е годы XX столетия. В эти годы были детально разработаны основные методы решения, создано много разных алгоритмов, началось практическое применение новых методов, появилась обширная литература.

В 1949 г. Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным в совместной статье был изложен метод потенциалов (в сетевой постановке) для решения транспортных задач [8].

Несколько позднее в 1951 г. Дж.Б.Данцигом был разработан аналогичный метод, получивший название модифицированного распределительного метода. Это название является общим и относится по существу к целой группе близких друг другу методов, включающей как частные виды: симплексный метод Дж.Б.Данцига, метод разрешающих слагаемых А.Л. Лурье и др.

В 1958 г. советский ученый А.Л. Лурье разработал метод разрешающих слагаемых для решения транспортных задач [8].

Таким образом, на основе сочетания трех фундаментальных наук математики, экономики и кибернетики учеными был разработан значительный арсенал экономико-математических методов, которые можно объединить под одним названием – методы разработки оптимальных решений (или исследования операций).

Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации, к числу задач, которых относятся следующие: задачи рационального использования сырья и материалов; задачи оптимизации раскроя; оптимизации производственной программы предприятий; оптимального размещения и концентрации производства; составления оптимального плана перевозок, работы транспорта; управления производственными запасами и многие другие, принадлежащие сфере оптимального планирования.

Итак, линейное программирование – это наука о методах исследования и отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

2.2 Постановка общей задачи линейного программирования

Среди множества оптимизационных задач существуют особые задачи, которые называют задачами линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования (ОЗЛП) называют задачу, в которой функция цели, которую надо оптимизировать, представляет собой линейную комбинацию известных коэффициентов c_j $(j = \overline{1,n})$ и неизвестных переменныхx_j $(j = \overline{1,n})$ вида:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \textbf{(2.1)}$$

Функцию f называют также целевой функцией или критерием эффективности задачи. Неизвестные неотрицательные переменные x_j называются управляющими переменными.

Ограничения, накладываемые на область возможных решений, имеют вид линейных неравенств или равенств:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases} \qquad \textbf{(2.2)}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \qquad \textbf{(2.3)}$$

где a_{ij}, b_i $(j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m})$ – известные величины.

Решить задачу линейного программирования – это значит найти значения управляющих переменных x_j , удовлетворяющих ограничениям (2.2), при которых целевая функция (2.1) принимает минимальное или максимальное значение [8].

Допустимым решением задачи линейного программирования будем называть любую совокупность неотрицательных переменных $(x_1, x_2 \dots x_n)$, удовлетворяющих условиям системы (2.2), а множество всех допустимых решений ЗЛП ***допустимой областью*** [26].

Оптимальным решением $\vec{X}_{opt} = (x_1, x_2 \dots x_n)$ будем называть то из допустимых решений, для которого линейная функция f (2.1) обращается в максимум (минимум) [8].

Совокупность целевой функции (2.1), системы ограничений (2.2) при заданных условиях неотрицательных переменных (2.3) называется ***математической моделью*** задачи линейного программирования [26].

Для составления математической модели задачи линейного программирования, заданной в текстовой форме необходимо:

1. Ввести обозначения для неизвестных переменных задачи;
2. Проанализировать и зафиксировать ограничения для них (например, неотрицательность);
3. Составить систему ограничений задачи;
4. Составить целевую функцию и установить вид экстремума [23].

Проиллюстрируем на примере составление математической модели для следующей задачи линейного программирования:

Фермер выращивает два типа культуры: пшеницу и кукурузу. Необходимо найти такое оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га., чтобы прибыль от реализации данных культур была максимальной. По плану должно быть собрано не менее 1500ц пшеницы и 4500ц кукурузы. Цена 1ц пшеницы 6 руб., кукурузы – 4 рубля [30].

Данные об урожайности приведены в таблице 1.

Культура	*Урожайность участка, ц/га*	
	1	**2**
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

Таблица 1. Урожайность культур с двух участков

Опишем математическую модель задачи:

Описание неизвестных: Обозначим через x_1 площадь, отводимую под посев пшеницы на участке 1, через x_2– на участке 2, через x_3 и x_4– площади, отводимые под посев кукурузы соответственно на участках 1 и 2. Величины площадей выражаются неотрицательными числами, т.е.

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Описание системы ограничений: Так как на участке 1 планируется x_1 га засеять пшеницей и x_3га – кукурузой, то должно выполнятся равенство:

$$x_1 + x_3 = 100 \qquad \textbf{(2.5)}$$

Для участка 2 аналогичное условие запишется так:

$$x_2 + x_4 = 200 \qquad \textbf{(2.6)}$$

С участка 1 предполагается собрать $20x_1$, а с участка 2 – $15x_2$ ц пшеницы. Всего же необходимо собрать не менее 1500ц. Это требование можно выразить неравенством:

$$20x_1 + 15x_2 \geq 1500 \qquad \textbf{(2.7)}$$

Аналогичное требование к сбору кукурузы приводит к неравенству:

$$35x_3 + 30x_4 \geq 4500 \qquad \textbf{(2.8)}$$

Описание целевой функции: Стоимость пшеницы, которую предполагается собрать с обоих участков, составит: $6(20x_1 + 15x_2)$ руб., стоимость кукурузы: $4(35x_3 + 30x_4)$ руб., а общая стоимость продукции (максимизируемая функция цели) выразится суммой:

$$f = 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120x_4 \qquad \textbf{(2.9)}$$

Соотношения (2.4) – (2.9) и будут являться математической моделью задачи. Таким образом, она примет вид:

$$f = 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120x_4 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 100 \\ x_2 + x_4 = 200 \\ 20x_1 + 15x_2 \geq 1500 \\ 35x_3 + 30x_4 \geq 4500 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Рассмотрим три основные формы задач линейного программирования, представленные в таблице 2 [24]:

№ п/п	**Форма модели**	**Требования**
1	Общая	Смешенная система функциональных ограничений (равенства и неравенства); не на все переменные может быть наложено условие неотрицательности переменных.
2	Каноническая	Все функциональные ограничения равенства с неотрицательными свободными членами ($b_i \geq 0$); на все переменные есть условие неотрицательности.
3	Симметричная	Все функциональные ограничения–неравенства; на все переменные есть условие неотрицательности,

Таблица 2. Формы задач линейного программирования

Чтобы перейти к канонической форме модели задачи линейного программирования, нужно:

1. перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам;
2. заменить переменные, которые не подчинены условию неотрицательности неотрицательными переменными.

Преобразование неравенств в равенства основано на следующей *лемме*: Неравенство вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ эквивалентно уравнению вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$ и неравенству $x_{n+1} \geq 0$.

Аналогично, что неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ эквивалентно уравнению вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$ и неравенству $x_{n+1} \geq 0$ [9].

Таким образом, ограничение-неравенство задачи линейного программирования, имеющее тип «≤», можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство типа «≥» – вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Эти переменные называют ***балансовыми (дополнительными) переменными*** [24].

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Если по условиям задачи требуется отыскать минимум функции *f:*

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \ min \tag{2.10}$$

то задачу можно свести к задаче максимизации функции f', связанной с функцией *f* следующим образом:

$$f' = -f = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_n x_n = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.11}$$

Максимум функции (2.10) и минимум функции (2.11) будут достигаться при одном и том же наборе переменных ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), удовлетворяющих условиям неотрицательности переменных и уравнениям, задающим область допустимых решений [1].

Приведем пример приведения математической модели к канонической форме записи:

$$F = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + 7x_2 - 6x_3 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Решение: Для перехода к канонической форме необходимо перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Система ограничений состоит из трёх неравенств, поэтому надо ввести три дополнительные переменные. К первым двум неравенствам прибавляем по одной неотрицательной переменной, а из последнего – вычитаем. Тогда система ограничений принимает вид:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 - 6x_3 - x_6 = 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

Целевая функция остаётся прежней. Тем самым, сделав небольшие преобразования, мы привели задачу к канонической записи.

Используя каноническую форму модели задачи линейного программирования, рассмотрим основные формы ее записи, представленные в таблице 3 [24].

№ п/п	*Наименование формы записи*	*Представление и обозначения*
1	Развернутая	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ $x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$ $F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max\ (min)$
2	Сокращённая	$\{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = b_i \quad i = \overline{1,m}$ $x_j \geq 0, j = \overline{1,n}$ $F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to max\ (min)$
3	Матричная	$A{\cdot}X{=}B;\ X \geq 0$ $F(X){=}C{\cdot}X{\to}\ max\ (min)$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ $C = (c_1, c_2, \dots c_n)$ где A – матрица системы ограничений, X – матрица-столбец переменных, В – матрица свободных членов, С – матрица-строка коэффициентов целевой функции.

Таблица 3. Формы канонической записи

В основе теории линейного программирования лежат несколько теоретических утверждений. Сформулируем их.

Теорема 1.

Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Теорема 2.

Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное (минимальное) значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многоугольника решений (в угловой точке). Если оптимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин. Такое решение называется ***альтернативным оптимумом***.

Теорема 3.

Каждому допустимому базисному решению (опорному решению) задачи линейного программирования соответствует угловая точка многоугольника решений. И наоборот, каждой угловой точке многоугольника решений соответствует допустимое базисное решение основной задачи линейного программирования [24].

Таким образом, теоремы 2 и 3 указывают принципиальный путь решения линейного программирования: вместо исследования бесконечного множества допустимых решений для нахождения оптимального решения необходимо исследовать лишь конечное число угловых точек (конечное число опорных решений).

2.3 Методы решения задач линейного программирования

Для решения задач линейного программирования разработано множество методов, но наиболее популярными из них являются графический, симплексный и двойственный методы, которые мы и рассмотрим далее в нашей исследовательской работе.

2.3.1 Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме записи с двумя переменными $f(x) = (c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n) \rightarrow max$ **(3.1)**
при условиях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \leq b_m \end{cases} \quad \textbf{(3.2)}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad \textbf{(3.3)}$$

Необходимо найти вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий данной математической модели.

При решении, прежде всего, необходимо найти область допустимых решений системы неравенств (3.2). Рассмотрим декартову систему координат x_1Ox_2 . Заменив каждое из неравенств (3.2) равенством, строим соответствующую ему граничную прямую $\{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, i = \overline{1, m}$. На рисунке 1 видно, как эта прямая делит плоскость x_1Ox_2 на две полуплоскости [3].

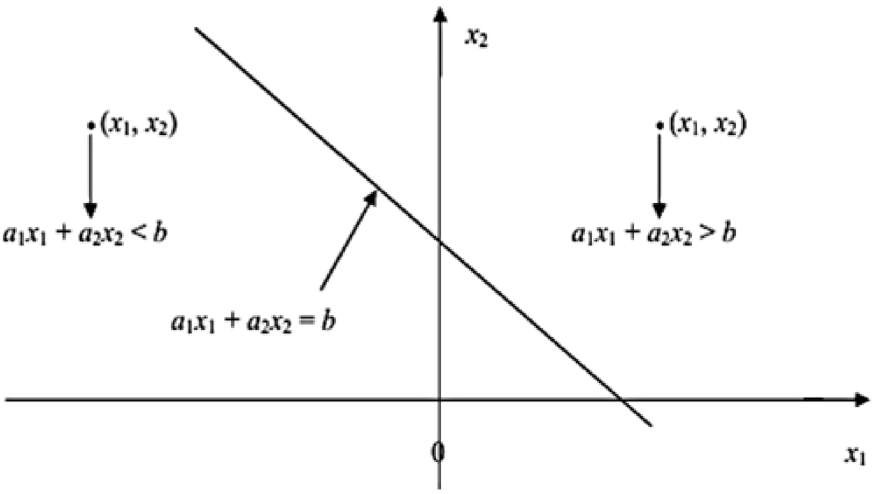


Рисунок 1

Чтобы определить, какую именно полуплоскость определяет данное неравенство, достаточно взять произвольную точку плоскости (x_1, x_2) (например, начало координат) и подставить в неравенство числа x_1, x_2. Если оно удовлетворится, то полуплоскость, в которой лежит данная точка –

искомая. В противном случае нужная полуплоскость лежит по другую сторону прямой $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ [26].

Для нахождения области допустимых решений строим граничные прямые полуплоскости, соответствующие всем неравенствам. Общая часть («пересечение») всех этих полуплоскостей будет решением системы неравенств данной задачи.

При нахождении области допустимых решений (ОДР) задачи линейного программирования может встретиться один из четырех случаев, рассмотренных в таблице 4:

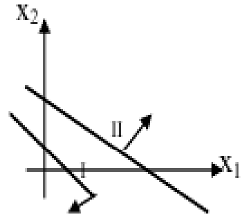
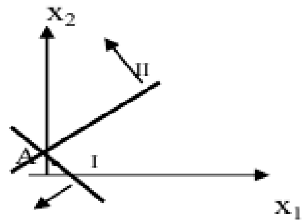
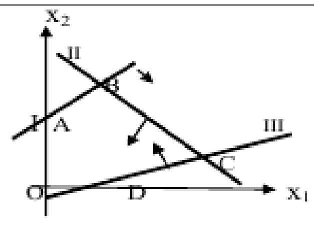
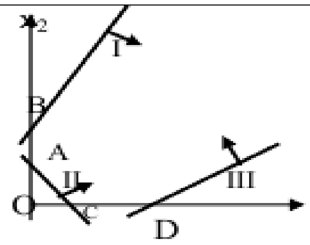
1	ОДР – пустое множество	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	
2	ОДР – единственная точка	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ -x_1 + x_2 \ge \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	
3	ОДР – выпуклый многоугольник	$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 5x_2 \le 5 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	
4	ОДР – неограниченная выпуклая область	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -x_1 + 3x_2 \ge -3 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	

Таблица 4. Виды областей допустимых решений

Рассмотренные примеры позволяют сделать вывод о том, что область допустимых решений системы неравенств может быть пустой, одной точкой, выпуклым многоугольником или неограниченной выпуклой областью.

Согласно теореме, описанной в предыдущем параграфе, оптимальное решение ЗЛП находится в одной из угловых точек многоугольника допустимых решений. Поэтому решение задачи с ограниченной целевой функцией и не слишком большим числом угловых точек может быть найдено перебором этих угловых точек.

Рассмотрим целевую функцию $c_1x_1 + c_2x_2 \to max\ (min)$. Уравнение $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ при фиксированном значении F определяет прямую, а при изменении F – семейство параллельных прямых с параметром F. Вдоль каждой из этих прямых функция цели принимает одно и то же фиксированное значение, поэтому эти линии называют ***линиями уровня*** целевой функции [24].

Для решения задачи необходимо среди точек области допустимых решений найти такую точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение.

Для этого построим вектор-градиент $\vec{C} = (c_1, c_2)$, компонентами которого являются коэффициенты при неизвестных целевой функции, и линию уровня целевой функции, которая имеет уравнение $F = c_1x_1 + c_2x_2 = const$ и обладает тем свойством, что она перпендикулярна вектору $\vec{C}$.

Линию уровня в направлении вектора $\vec{C}$ перемещаем до тех пор, пока она не сместится в область недопустимых значений, и все еще будет иметь одну общую точку с ОДР, координаты которой находим из пересечения соответствующих прямых [5].

Если требуется найти минимум целевой функции, то линия уровня перемещается в направлении противоположном вектору-градиенту также до крайнего положения [24].

Таким образом, можно определить алгоритм геометрического (графического) решения задач линейного программирования.

1. Записать уравнения прямых, соответствующих ограничениям, и построить их на плоскости x_1Ox_2.

2. Определить области, в которых выполняются ограничения задачи.

3. Определить область допустимых решений задачи как область пересечения m полуплоскостей, соответствующих ограничениям задачи.

4. Определить направление возрастания (убывания) целевой функции f.

5. Определить граничную точку или точки области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение.

6. Определить координаты найденной точки, решая систему уравнений, состоящую из уравнений прямых, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

2.3.2 Симплексный метод решения задач линейного программирования

Симплексный метод применим к решению любой задачи линейного программирования. Из геометрического смысла задачи линейного программирования следует, что для ее решения необходимо вычислить координаты всех вершин многоугольника ограничений и значения целевой функции в них [8].

Суть его состоит в том, что, отправляясь из некоторой произвольной вершины многоугольника ограничений, переходят к вычислению только такой вершины, в которой значение линейной функции будет больше, чем в предыдущей. Остальные варианты не вычисляются. Тогда при конечном сравнительно малом числе шагов может быть найден оптимальный план. Таким образом, производится упорядоченный перебор вершин, при котором происходит постоянное увеличение линейной функции. Поэтому симплексный метод называется также методом последовательного улучшения плана [8].

Впервые, симплексный метод был предложен американским учёным Дж.Данцингом в 1949 году, однако ещё в 1939 г. идеи метода были разработаны российским учёным Л.В. Канторовичем [24].

Обобщенный алгоритм симплекс-метода состоит из следующих этапов:

1) Из канонической формы линейной модели определяется начальное допустимое базисное решение $\overrightarrow{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, путем приравнивания к нулю m – n переменных.

2) Из числа текущих небазисных переменных выбирается включаемая в новый базис переменная, увеличение которой обеспечивает улучшение значения целевой функции. Если такой переменной нет, то базисное решение оптимально.

3) Из числа переменных текущего базиса выбирается исключаемая переменная, которая должна принять нулевое значение при введении в состав базиса новой переменной.

4) Определяется новое базисное решение, производится переход к пункту 2 [5].

Для удобства перехода от одного опорного решения системы условий задачи линейного программирования, имеющей предпочтительный вид, к другому, на котором целевая функция принимает значение не меньшее, чем на предыдущем, составляют так называемую симплекс-таблицу [8].

Она имеет следующий вид: *(n + 3)* столбцов, где n – число переменных в предпочтительном виде, *(m + 2)* строк, где m – число ограничений равенств. Сверху записывают строку коэффициентов целевой функции, снизу находится индексная строка. В столбце, к примеру, БП записываются базисные переменные. Столбец $C_Б$ содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Столбец A_0 – столбец свободных членов системы ограничений. Основное поле таблицы занимают коэффициенты a_{ij} системы ограничений [8].

К примеру, необходимо максимизировать целевую функцию $Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$, т.е. система уравнений приведена к опорному решению $(b_1, b_2, 0,\ 0)$. Значение целевой функции на этом решении равно: $Z_{max} = c_1b_1 + c_2b_2$. Заполним симплекс-таблицу:

№ итерации	*БП*	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	*Симплексные отношения*
				c_1	c_2	c_3	c_4	
	x_1	c_1	b_1	1	0	a_{13}	a_{14}	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
	x_2	c_2	b_2	0	1	a_{23}	a_{24}	
	$Z_j - c_j$		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	

Остановимся подробнее на заполнении индексной строки $Z_j - c_j$. Здесь расположены значение функции цели для начального опорного плана x_0, т.е. $Z(x_0) = \Delta_0 = C_Б \cdot A_0$ и оценки индексной строки $\Delta_j = C_Б \cdot A_0 - c_j$.

По симплексной таблице можно чётко увидеть результаты исследования, проведенные на предыдущей итерации:

1. *Критерий оптимальности.* Если индексная строка симплексной таблицы не содержит отрицательных элементов, то достигнутое опорное решение является оптимальным.

2. *Критерий неразрешимости.* Если индексная строка симплексной таблицы содержит отрицательный элемент, например $\Delta_j < 0$, и в соответствующем этому элементу столбце нет положительных элементов $a_{1j} < 0$ и $a_{2j} < 0$, то задача линейного программирования не имеет решения: $Z \to \infty$.

3. *Критерий улучшения решения.* Если индексная строка симплексной таблицы содержит отрицательный элемент, например $\Delta_j < 0$, и в соответствующем этому элементу столбце есть положительные элементы, то, совершив с помощью симплексных преобразований переход к новому базису (при соответствующем Δ_j разрешающем столбце), получим другое опорное решение, на котором целевая функция Z примет значение, не меньшее, чем на предыдущем опорном решении [8].

Примечание 1. Так как число опорных решений системы конечно, конечным будет и процесс решения задачи линейного программирования.

Примечание 2. Если в задаче линейного программирования необходимо найти минимум целевой функции Z, то вводится функция $F = –Z$. Вследствие равенства $Z + F = 0$, $Z_{min} = -F_{max}$, а поэтому, решая задачу максимизации F, мы одновременно решаем задачу минимизации Z [8].

Рассмотрим пример решения задачи линейного программирования симплекс-методом:

Для реализации трех групп товаров коммерческое предприятие располагает тремя видами ограниченных материально-денежных ресурсов в количестве $b_1 = 240$, $b_2 = 200$, $b_3 = 160$ единиц. При этом для продажи 1 группы товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется ресурса первого вида в количестве $a_{11} = 2$ единицы, ресурса второго вида в количестве $a_{21} = 4$ единицы, ресурса третьего вида в количестве $a_{31} = 4$ единицы. Для продажи 2 и 3 групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота расходуется соответственно ресурса первого вида в количестве $a_{12} = 3$, $a_{13} = 6$ единицы, ресурса второго вида в количестве $a_{22} = 2$, $a_{23} = 4$ единицы, ресурса третьего вида в количестве $a_{32} = 6$, $a_{33} = 8$ единиц. Прибыль от продажи трех групп товаров на 1 тыс. руб. товарооборота составляет соответственно $c_1 = 4$, $c_2 = 5$, $c_3 = 4$ (тыс. руб.). Необходимо определить плановый объем и структуру товарооборота так, чтобы прибыль торгового предприятия была максимальной.

Решение:

Пусть x_1 , x_2, x_3 – количество реализованных товаров, в тыс. руб., 1, 2, 3- ей групп, соответственно. Тогда математическая модель задачи имеет вид: $F = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow max$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 240 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 160 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Введём дополнительные переменные $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, чтобы неравенства преобразовать в равенства и тем самым, привести систему ограничений к канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 240 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 200 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_6 = 160 \end{cases}$$

В качестве базиса возьмём $x_4 = 240, x_5 = 200, x_6 = 160$.

Занесем данные в симплекс таблицу 1.

$\boldsymbol{C_i}$	**БП**	$\boldsymbol{b_i}$	**4**	**5**	**4**	**0**	**0**	**0**
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	240	2	3	6	1	0	0
0	x_5	200	4	2	4	0	1	0
0	x_6	160	4	6	8	0	0	1

Симплекс таблица 1.

Вычислим оценки по формуле: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} C_i \cdot a_{ij} - C_j$

$\Delta_0 = 0 \cdot 240 + 0 \cdot 200 + 0 \cdot 160 = 0;$ $\Delta_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 - 4 = -4;$

$\Delta_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 6 - 5 = -5;$ $\Delta_3 = 0 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 - 4 = -4;$

$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$ $\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$

$\Delta_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0;$

Поскольку есть отрицательные оценки, то план не оптимален. Наименьшая оценка $\Delta_2 = -5$. Вводим переменную x_2 в базис. Определяем переменную, выходящую из базиса. Для этого находим наименьшее неотрицательное отношение $Q_i = \frac{b_i}{a_{i2}}$ для столбца x_2.

$Q_1 = \frac{240}{3} = 80;\ Q_2 = \frac{200}{2} = 100;\ Q_3 = \frac{160}{6} = 26.6$

Заполним таблицу с найденными оценками и симплексными отношениями.

$\boldsymbol{C_i}$	**БП**	$\boldsymbol{b_i}$	**4**	**5**	**4**	**0**	**0**	**0**	**Q**
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	240	2	3	6	1	0	0	80
0	x_5	200	4	2	4	0	1	0	100
0	x_6	160	4	6	8	0	0	1	26.6
	Δ_i	0	–4	–5	–4	0	0	0	

Симплекс таблица 2

Наименьшее неотрицательное $Q_3 = 26.6$. На пересечении ключевого столбца и ключевой строки находим разрешающий элемент, т.е. 6. Выводим переменную x_6 из базиса. В новой таблице на месте разрешающего элемента записываем 1, все остальные элементы ключевого столбца – нули. Элементы ключевой строки делятся на разрешающий элемент, остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу (прямоугольника).

Правило прямоугольника: чтобы получить элемент a_{ij} новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и полученное число разделить на разрешающий элемент [8].

Получаем новую симплекс таблицу:

	$\boldsymbol{C_i}$		**4**	**5**	**4**	**0**	**0**	**0**	
C_i		b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Q
0	x_4	160	0	0	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	–
0	x_5	$\frac{440}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	55
5	x_2	$\frac{80}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	40
	Δ_i	$\frac{400}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{5}{6}$	

Симплекс таблица 3.

Проверяем план на оптимальность, вычисляя оценки по формуле: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{3} C_i \cdot a_{ij} - C_j$:

$\Delta_0 = 0 \cdot 160 + 0 \cdot \frac{440}{3} + 5 \cdot \frac{80}{3} = \frac{400}{3}$; $\Delta_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{8}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$;

$\Delta_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 5 = -0$; $\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot \frac{4}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} - 4 = \frac{8}{3}$;

$\Delta_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 0 = 0$; $\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 0 = 0$;

$\Delta_6 = 0 \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 \cdot (-\frac{1}{3}) + 5 \cdot \frac{1}{6} - 0 = \frac{5}{6}$;

Поскольку есть снова отрицательная оценка $\Delta_1 = -\frac{2}{3}$, план не является оптимальным, продолжаем процесс итерации. Вводим переменную x_1 в базис и определяем переменную, выходящую из него.

Снова находим наименьшее неотрицательное отношение для $Q_i = \frac{b_i}{a_{i2}}$ для столбца x_1.

$$Q_1 = \frac{160}{0} = \infty; \; Q_2 = \frac{\frac{440}{3}}{\frac{8}{3}} = 5; \; Q_3 = \frac{\frac{80}{3}}{\frac{2}{3}} = 40$$

Наименьшее неотрицательное: $Q_3 = 40$. На пересечении ключевого столбца и ключевой строки находим разрешающий элемент, т.е. $\frac{2}{3}$ и выводим переменную x_2 из базиса. Элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс таблицу.

C_i	**БП**	b_i	**4**	**5**	**4**	**0**	**0**	**0**	Q
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	160	0	0	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	
0	x_5	40	0	-4	-4	0	1	-1	
4	x_1	40	1	$\frac{3}{2}$	2	0	0	$\frac{1}{4}$	
	Δ_i	160	0	1	4	0	0	1	

Симплекс таблица 4.

Проверяем снова наш план на оптимальность: $\Delta_0 = 0 \cdot 160 + 0 \cdot 40 + 4 \cdot 40 = 160$; $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 1$; $\Delta_3 = 4$; $\Delta_4 = 0$; $\Delta_5 = 0$; $\Delta_6 = 1$.

Отрицательных оценок нет, следовательно, план является оптимальным.

Решение задачи на этом закончено: $x_1 = 40$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 160$; $x_5 = 40$; $x_6 = 0$; $F_{max} = 160$, то есть необходимо реализовать товар первого вида в объеме 40 тыс. руб., товар 2-го и 3-го видов реализовывать не надо. При этом максимальная прибыль составит 160 тыс. руб.

Таким образом, симплекс метод реализует рациональный перебор базисных допустимых решений, в виде конечного итеративного процесса, необходимо улучшающего значение целевой функции на каждом шаге.

2.2.3 Понятие двойственности задач линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие некоторую другую ЗЛП, называемую двойственной, которая формулируется с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной, или прямой задачи.

Рассмотрим на примере следующую задачу. Предприятие имеет в качестве отходов m видов сырья, которые могут быть использованы для производства n видов продукции ширпотреба или реализованы на сторону.

В первом случае возникает задача: найти план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при котором выручка от реализации продукции будет максимальной:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max \qquad \textbf{(4.1)}$$

при условии, что затраты каждого вида ресурсов не превосходят имеющихся запасов:

$$\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \qquad \textbf{(4.2)}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \qquad \textbf{(4.3)}$$

где a_{ij} —число единиц i-ресурса, необходимого для производства j-товара, b_i– максимальное число i-го ресурса, имеющегося в распоряжении фирмы, c_j — прибыль (выручка) от реализации единицы j-товара.

При принятии решения о реализации отходов производства на сторону, возникает задача определения оптимальной оценки отходов (оптимальных цен) $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Оптимальными следует считать цены, которые выгодны как предприятию, так и покупателю ресурсов. Предприятие заинтересовано в том, чтобы полученная выручка от продажи отходов была не менее той суммы, которая может быть получена при переработке ресурсов в готовую продукцию, а покупатель заинтересован в том, чтобы общая стоимость ресурсов была минимальной. Возникает следующая задача: найти такой набор цен (оценок) ресурсов $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, при котором суммарная стоимость имеющихся ресурсов будет минимальна:

$$T(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to min \qquad \textbf{(4.4)}$$

при условии выполнения ограничений:

$$\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_i, j = \overline{1, n} \qquad \textbf{(4.5)}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1, m} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Сформулированная задача (4.4-4.6) называется двойственной задачей линейного программирования к задаче (4.1-4.3) [24].

Правила построения двойственных задач

Перед построением двойственной задачи модель исходной ЗЛП всегда должна быть преобразована таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

1. все ограничения–неравенства исходной модели должны быть одного типа (все типа ≤, или все типа ≥);

2. если исходная модель имеет ограничения-неравенства типа ≤, то целевая функция этой задачи должна максимизироваться и наоборот, если ограничения-неравенства типа ≥, целевая функция должна минимизироваться.

Несоблюдение названных условий приводит к нарушению основных положений теории двойственности.

Сформулируем правила построения двойственной задачи для случая общей формы представления исходной задачи:

– каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи (причем ограничению-неравенству соответствует неотрицательная переменная, а ограничению-равенству соответствует переменная, не ограниченная в знаке);

– каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи (причем, неотрицательной переменной соответствует ограничение типа неравенства, а переменной, не ограниченной в знаке – ограничение-равенство);

– матрицы системы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными по отношению друг к другу;

– свободные члены ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи;

– коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся свободными членами ограничений двойственной задачи;

– максимизации целевой функции в исходной задаче соответствует минимизация целевой функции в двойственной задаче [24].

Эти правила являются наиболее общими в том смысле, что применимы ко всем другим формам представления исходной задачи. Двойственные задачи можно записать следующим образом [10]:

Исходная задача (прямая):

$$\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = \overline{1,p}$$

$$\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ \ i = \overline{p+1,m} \qquad \textbf{(4.7)}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,l};$$

x_j не ограничена в знаке, $j = \overline{1+l,n}$

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

Двойственная задача:

$y_i \geq 0, i = \overline{1, p;}$

y_iне ограничена в знаке, $i = \overline{p+1, m}$

$\{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, j = \overline{1, l}$

$\{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, j = \overline{l+1, m}$ **(4.8)**

$T(\overrightarrow{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min$

Рассмотрим 2 основные теоремы двойственности.

Первая теорема двойственности.

1. Если одна из ЗЛП двойственной пары (4.7) и (4.8) имеет оптимальное решение, то другая задача также имеет оптимальное решение, при этом значения целевых функций для оптимальных планов X^* и Y^*совпадают, т. е. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

2. Если линейная форма одной из задач двойственной пары не ограничена на множестве своих планов ($F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \infty$), то другая задача не имеет ни одного плана.

Таким образом, свойство оптимального плана состоит в совпадении с точки зрения принятых оценок результата производства и его затрат. При любом другом плане производства (отличном от оптимального) производство будет убыточным в силу того, что возможности производства используются не полностью [11].

Вторая теорема двойственности.

Для того, чтобы планы $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ ЗЛП двойственной пары (4.7) и (4.8) были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы эти планы удовлетворяли условиям дополняющей нежесткости:

$$\{x_j^* (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\{y_i^* (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Эти условия можно сформулировать следующим образом: если какое-либо ограничение одной из задач оптимальным решением этой задачи обращается в строгое неравенство, то соответствующая этому ограничению переменная оптимального решения двойственной задачи должна равняться нулю; если же значение какой-либо переменной в оптимальном решении одной из задач положительно, то соответствующее ей ограничение в двойственной задаче оптимальным решением этой задачи должно обращаться в точное равенство.

Иными словами,

a. Если $x_j^* > 0$ для некоторого j, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$ **(4.9)**

b. Если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$, то $x_j^* = 0$ **(4.10)**

Условия (4.9) и (4.10) характеризуют производимый продукт с точки зрения рентабельности: если *j-ый* вид продукции включен в оптимальный план выпуска ($x_j^* > 0$), то стоимость затраченных на единицу этого продукта производственных факторов будет равна стоимости единицы этого продукта. Следовательно, производство которого будет рентабельно; если производство *j-ого* вида продукции не рентабельно (затраты ресурсов на производство единицы продукта превышают его стоимость), то этот продукт не включается в оптимальный план $x_j^* = 0$.

c. Если $y_i^* > 0$ для некоторого i, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$ **(4.11)**

d. Если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* > b_i$, то $y_i^* = 0$ **(4.12)**

Условия (4.11) и (4.12) характеризуют используемые факторы производства с точки зрения их дефицитности: если оценка *i-ого* фактора положительна ($y_i^* > 0$), то весь его запас полностью используется в оптимальном плане производства, т.е. этот фактор является «дефицитным»; если *i-ый* фактор в процессе производства используется не полностью, т.е. этот фактор является «недефицитным», то он имеет нулевую оценку ($y_i^* = 0$) [11].

Рассмотрим на примере использование метода двойственной задачи.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_i > 0, i = \overline{1{,}3}$$

$$F(x) = 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 \to min$$

Построим двойственную задачу, перейдя от трех переменных к двум:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \leq 4 \\ y_1 + y_2 \leq 8 \\ y_1 - 5y_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$F(x) = 2y_1 + 3y_2 \to max$$

Двойственная задача допускает графическое решение, представленное на рисунке 2.

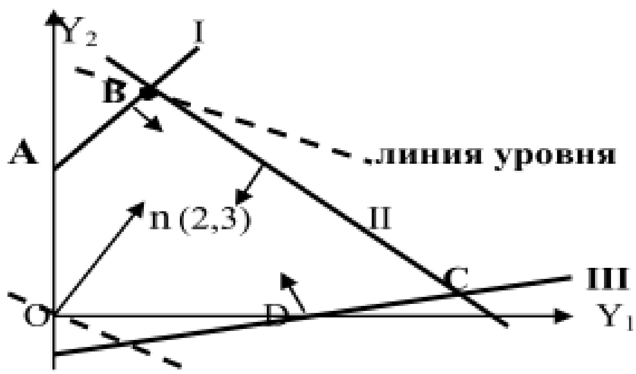


Рисунок 2

Искомое оптимальное решение соответствует точке B, координаты которой можно определить путем совместного решения двух уравнений, соответствующих первой и второй граничным прямым.

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = -4 \\ y_1 + y_2 = 8 \end{cases}$$

Получаем $Y_{max} = (2, 6)$ и $F_{max} = 22$. Для определения оптимального решения исходной задачи используем 2-ю теорему двойственности. Подставим $Y_{max} = (2, 6)$ в ограничения двойственной задачи:

$$\begin{cases} -2 + 6 = 4 \\ 2 + 6 = 8 \\ 2 - 5 \cdot 6 = -28 \leq 5 \quad \to x_3 = 0 \end{cases}$$

Так как третье ограничение обращается в строгое неравенство, переменная x_3 в оптимальном решении прямой задачи обращается в ноль. Так как обе переменные в оптимальном решении двойственной задачи ненулевые, то ограничения исходной задачи на оптимальном решении обращаются в равенства.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Решаем эту систему при условии, что $x_3 = 0$ находим, что $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

Ответ: $X_{\text{опт}} = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $F(X_{\text{опт}}) = 22$.

Таким образом, эффективность данного метода обусловлена тем, что вычисления при решении двойственной задачи могут оказаться менее сложными и трудоёмкими, чем при решении прямой задачи линейного программирования.

2.4 Программа элективного курса

Пояснительная записка

Математика в наши дни проникает во все сферы общественной жизни. Овладение практически любой современной профессии требует тех или иных знаний по математике.

В школе математика является опорным предметом, обеспечивающим изучение на современном уровне ряда других дисциплин, как естественных, так и гуманитарных, а также и трудового обучения.

Основная задача обучения математике заключается в обеспечении прочного и сознательного овладения обучающимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Для жизни в современном обществе важным является формирование математического стиля мышления, проявляющегося в определенных умственных навыках. Именно математика оказывает огромное воздействие на формирование алгоритмического мышления, воспитании умений действовать по заданному алгоритму и конструировать новое.

В конце XIX - начале XX веков развитие математики складывалось под влиянием запросов физики и механики. Общество решало задачу создания мощной техники и искало источники запасов больших энергий, но большое количество техники, огромное количество энергии и сырья потребовали, со своей стороны, ответов на вопросы: как правильно управлять созданной техникой, как использовать накопленную энергию, как оптимально расходовать имеющееся сырье. Эти вопросы актуальны и в настоящее время.

Поэтому жизнь выдвинула на первый план развития общества вопросы организации производства, управления промышленностью, сельским хозяйством, техникой. В настоящее время ставится задача выбора наиболее эффективного варианта, при котором был бы достигнут наилучший результат. Такие задачи и привели к появлению математического программирования, а в частности и линейного программирования.

Все это свидетельствует в пользу необходимости изучения математического программирования в школьном курсе математики.

Ценность преподавания данного курса заключается в том, что, изучив задачи линейного программирования и методы их решения, ученики научатся строить простейшие математические модели, переводить практические задачи на математический язык, интерпретировать полученный результат, оценивать его, проверяя практикой. Необходимо отметить, что фундаментом для решения простейших задач линейного программирования являются умения и навыки решения неравенств, систем неравенств, линейных уравнений, а также построения графиков линейной функции на плоскости.

Программа курса дает возможность обучающимся изучить основные положения теории линейного программирования, знания которого необходимы в различных областях человеческой деятельности.

Цель предлагаемого курса: сформировать умения и навыки по решению задач линейного программирования.

Задачи курса:

– познакомить обучающихся с основными понятиями линейного программирования;

– показать связь математических методов с практической деятельностью человека через методы линейного программирования;

– развить интерес школьников к изучению математики;

– расширить математический и общенаучный кругозор обучающихся;

– способствовать развитию логического мышления, самообразования и самоопределения старшеклассников.

По типу данный курс является предметным, главная задача которого состоит в расширении знаний по математике.

Содержание курса рассчитано на изучение в течение 18 часов, программа которого предназначена для обучающихся 10 класса.

Темы занятий тесно связаны с практическими заданиями, что стимулирует познавательную деятельность школьников, способствует развитию практических навыков и умений, определению своих возможностей в данной области, самопознанию и саморазвитию.

Программный материал курса соответствует возрастному восприятию и пониманию обучающихся.

Основными типами занятий являются: урок изучения нового материала и урок-практикум. Занятия состоят из теоретической и практической частей, причём большее количество времени занимает практическая часть.

Прогнозируемым результатом освоения данного курса является формирование у обучающихся навыков решения задач линейного программирования, умений анализировать текст задачи, составлять целевую функцию и, учитывая условия задачи, находить максимальное (минимальное) значение функции различными методами.

В завершении обучения элективному курсу итоговым контролем является контрольная работа, заключающаяся в выполнении заданий по применению методов решения задач линейного программирования. Текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется по результатам выполнения практических заданий.

Учебно-тематический план

№ п/п	*Тема занятия*	*Кол-во часов*	*Форма проведения занятия*	*Форма контроля*
1	История возникновения линейного программирования как науки	1	Урок изучения нового материала	
2	Постановка общей задачи линейного программирования. Основные определения	1	Урок изучения нового материала	Предваритель-ный контроль по теме «Линейная функция, её график»
3	Построение математических моделей ЗЛП. Их приведение к каноническому виду	1	Урок изучения нового материала	Фронтальный опрос
4	Приведение математических моделей ЗЛП к каноническому виду	1	Урок-практикум	Решение задач
5	Графический метод решения ЗЛП	1	Изучение нового материала	Фронтальный опрос
6	Графический метод решения ЗЛП	3	Урок-практикум	Решение задач
7	Решение ЗЛП симплекс-методом	1	Изучение нового материала	Фронтальный опрос
8	Решение ЗЛП симплекс-методом	3	Урок-практикум	Решение задач
9	Двойственный метод решения ЗЛП	1	Изучение нового материала	Фронтальный опрос
10	Двойственный метод решения ЗЛП	3	Урок-практикум	Решение задач
11	Подготовка к итоговой контрольной работе	1	Урок обобщения и закрепления знаний	Итоговый тест (приложение 1), решение задач
12	Итоговое занятие «Основы линейного программирования»	1	Урок контроля знаний, умений и навыков	Контрольная работа

Содержание курса

<table>
<tr><td colspan="3">Занятие 1. «Постановка общей задачи линейного программирования. Основные определения»</td></tr>
<tr><td>Тип занятия:</td><td colspan="2">урок изучения нового материала.</td></tr>
<tr><td>Цель:</td><td colspan="2">познакомить обучающихся с разделом математики – математическое программирование.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Задачи:</td></tr>
<tr><td><u>Образовательная:</u>
актуализировать опорные знания по теме «Линейная функция и её график», ввести понятие линейного программирования, привести примеры задач линейного программирования;</td><td><u>Развивающая:</u>
развивать умения применять знания на практике, способствовать развитию логического мышления;</td><td><u>Воспитательная:</u>
способствовать воспитанию познавательной активности обучающихся, воспитанию интереса к изучаемой теме.</td></tr>
<tr><td>Актуализация знаний:</td><td colspan="2">Предварительный контроль по теме: «Линейная функция, её график»</td></tr>
<tr><td>Изучение нового материала:</td><td colspan="2">Знакомство с понятиями: математическое программирование, линейное программирование, целевая функция, допустимое и оптимальное решение задачи линейного программирования, математическая модель ЗЛП; примеры задач линейного программирования</td></tr>
<tr><td colspan="3">Подведение итогов</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Занятие 2. «Построение математических моделей. Их приведение к каноническому виду»</td></tr>
<tr><td>Тип занятия:</td><td colspan="2">комбинированный урок.</td></tr>
<tr><td>Цель:</td><td colspan="2">сформировать умения анализировать текст задачи, составлять целевую функцию с учетом условий ограничений.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Задачи:</td></tr>
<tr><td><u>Образовательная:</u>
научить составлять математическую модель ЗЛП; ввести понятие канонической формы записи ЗЛП; обучить приводить математическую модель задачи к каноническому виду;</td><td><u>Развивающая:</u>
развивать умения анализировать, сравнивать, обобщать, делать выводы; развивать внимание;</td><td><u>Воспитательная:</u>
воспитывать умения слушать, работать в группе, участвовать в коллективном обсуждении проблем.</td></tr>
<tr><td>Актуализация знаний:</td><td colspan="2">Фронтальный опрос.
1. Дайте определение линейного программирования.
2. Что называют целевой функцией?
3. Что понимается под оптимальным решением задачи линейного программирования?</td></tr>
<tr><td>Изучение нового материала:</td><td colspan="2">Продолжение знакомства с понятием математическая модель ЗЛП, введение понятия канонической формы записи ЗЛП.</td></tr>
<tr><td>Первичное закрепление знаний:</td><td colspan="2">Составление математических моделей ЗЛП, приведение их каноническому и стандартному видам. Решение задач 1-7</td></tr>
<tr><td colspan="3">Подведение итогов, постановка домашнего задания</td></tr>
</table>

<u>Задача 1.</u> Фармацевтическая фабрика ежедневно производит не менее 800 фунтов пищевой добавки – смеси кукурузной и соевой муки, состав которой представлен в следующей таблице:

Мука	*Кукуруза*	*Соевая*
Белок	0,09	0,6
Клетчатка	0,02	0,06
Стоимость (в дол/фунт)	0,3	0,9

Диетологи требуют, чтобы в пищевой добавке было не менее 30 % белка и не более 5 % клетчатки. Определите фирме рецептуру смеси минимальной стоимости с учётом требований диетологов.

Задача 2. Рацион питания животных на ферме состоит из двух видов корма: I и II. Питательные вещества, их норма содержания и стоимость корма представлена в таблице:

Химические вещества	*Содержание питательных веществ*		*Норма содержания*
	I	II	
Жиры	1	3	6
Белки	3	1	9
Углеводы	1	8	8
Нитраты	2	4	16
Стоимость	80	10	

Составьте наиболее дешёвый рацион питания.

Задача 3. В цеху №4 фабрики по производству мягких игрушек выпускают зайца и медвежонка, для пошива которых используют ткань и поролон. Нормы расхода этих материалов, а также цены готовой продукции приведены в таблице.

Исходные материалы	*Нормы расхода на одно изделие*		*Суточный запас материалов*
	Заяц	Медвежонок	
Ткань, м	3	4	600
Поролон, кг	1,5	2	400
Цена одного изделия, руб.	240	310	

При этом установлено, что суточный спрос на зайцев не превышает 300 шт. Определите план производства фабрики игрушек, обеспечивающий максимальный доход от реализации.

Задача 4. Запишите математическую модель задачи в канонической форме:

a. $F = 3x_1 - 2x_2 + 5x_4 + x_5 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

b. $F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

c. $F = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

<u>Задача 5.</u> Приведите математическую модель задачи к стандартному виду:

$$F = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 7x_6 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 120 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 180 \\ x_1 + x_4 = 70 \\ x_2 + x_5 = 140 \\ x_3 + x_6 = 90 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

<table>
<tr><td colspan="3">Занятие 3. «Графический метод решения задач линейного программирования»</td></tr>
<tr><td>Тип занятия:</td><td colspan="2">изучение нового материала.</td></tr>
<tr><td>Цель:</td><td colspan="2">познакомить обучающихся с графическим методом решения ЗЛП.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Задачи:</td></tr>
<tr><td><u>Образовательная:</u>
формировать навыки и умения по решению ЗЛП графическим методом и использовать их на практике;</td><td><u>Развивающая:</u>
развивать познавательный интерес обучающихся к линейному программированию, навыки творческой, познавательной, мыслительной деятельности, логическое мышление;</td><td><u>Воспитательная:</u>
воспитывать у обучающихся трудолюбие, взаимоуважение, чувство товарищества.</td></tr>
<tr><td>Актуализация знаний:</td><td colspan="2">Фронтальный опрос:
1. Что называется математической моделью и как она строится?
2. Как привести математическую модель задачи к канонической форме?
3. Какие переменные называются дополнительными и какой коэффициент соответствует им в линейной функции задачи линейного программирования?</td></tr>
<tr><td>Изучение нового материала:</td><td colspan="2">Ознакомление с алгоритмом решения ЗЛП графическим методом; разбор задач; исследование области допустимых решений задачи линейного программирования.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Подведение итогов</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Занятие 4. «Графический метод решения задач линейного программирования»</td></tr>
<tr><td>Тип занятия:</td><td colspan="2">урок-практикум.</td></tr>
<tr><td>Цель:</td><td colspan="2">отработать графический способ решения задач линейного программирования.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Задачи:</td></tr>
<tr><td><u>Образовательная:</u>
отработать умения и навыки по применению алгоритма решения ЗЛП графическим способом; закрепить навыки построения графиков функций:</td><td><u>Развивающая:</u>
развивать любознательность, умение преодолевать трудности при решении задач;</td><td><u>Воспитательная:</u>
воспитывать сознательное отношение к обучению, прививать аккуратность при выполнении записей в тетрадях;</td></tr>
<tr><td>Практикум по решению задач</td><td colspan="2">Решение задач 1-6</td></tr>
<tr><td colspan="3">Подведение итогов, постановка домашнего задания</td></tr>
</table>

<u>Задача 1.</u> Экспериментальная лаборатория «Эвента» в качестве новейшей разработки начала выпуск и продажу опытной партии образцов – крема для быстрого роста ногтей и крема для тела, способствующего снижению веса. Для изготовления каждого уникального крема используются активные вещества – гиалурон, карбопол и аллантоин (остальные ингредиенты имеются в избытке). Поскольку партия является опытной, дневной запас ресурсов невелик. Затраты каждого ресурса на изготовление одного флакона крема и количество ресурсов, которыми лаборатория располагает на один день, приведены в таблице. Прогнозируемая прибыль от продажи одного флакона крема для тела составляет 6 у.е., а от продажи одного флакона крема для ногтей – 5 у.е.

Ресурсы	Крем для ногтей, г	Крем для тела, г	Дневной запас ресурса, г
Гиалурон	1	1	5
Карбопол	3	2	12
Аллантоин	5	1	15

Необходимо составить дневной план выпуска продукции, при котором лаборатория получит наибольшую прибыль.

<u>Задача 2.</u> Фирма выпускает 2 вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы даны в таблице.

Исходный продукт	*Расход исходного продукта на кг*		*Запас*
	сливочное	шоколадное	
Молоко	2	3	400
Наполнители	4	1	394

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 р., шоколадного — 14 р. Какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Задача 3. Для кормления подопытного кролика ему необходимо ежедневно потреблять не менее 15 единиц химического вещества A_1 и A_2. Не имея возможности давать вещество A_1 или A_2 в чистом виде, можно приобретать вещество B_1 по 1 ден.ед. или B_2 по 3 ден.ед. за 1 кг., причем каждый кг. B_1 содержит 1 ед. A_1 и 3 ед. A_2, а кг. B_2 содержит 6 ед. A_1 и 2 ед. A_2. Запасы веществ на складе составляют B_1– 7 кг., B_2 – 9 кг. Определите оптимальную закупку веществ B_1и B_2 для ежедневного рациона.

Задача 4.Определите максимум функции $F = x_1 + x_2 \to max$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 30 \\ 5x_1 - x_2 \le 25 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Задача 5. Определите минимум функции $F = x - 2y \to min$ при условиях:

$$\begin{cases} 5x + 3y \ge 30 \\ x - y \le 3 \\ -3x + 5y \le 15 \end{cases}$$

$$x \ge 0, y \ge 0.$$

Задача 6. Определите максимум функции $F = 2x_1 - 5x_2 \to max$ при условиях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Занятие 5. «Решение задач линейного программирования симплекс-методом»		
Тип занятия:	изучение нового материала.	
Цель:	познакомить обучающихся с симплекс-методом решения ЗЛП.	
Задачи:		
Образовательная: формировать навыки и умения по решению задач линейного программирования симплекс-методом;	*Развивающая:* развивать наблюдательность, самостоятельность в решении учебных проблем, умения пользоваться приемами сравнения, обобщения, делать выводы;	*Воспитательная:* воспитывать у обучающихся последовательность и поэтапность действия, логику мышления.
Актуализация знаний:	Фронтальный опрос: 1. На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования? 2. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом? 3. Как определить по рисунку, имеет задача линейного программирования решение или ее оптимум находится в $\pm\infty$?	
Изучение нового материала:	Ознакомление с алгоритмом симплекс-метода решения задач линейного программирования; правило прямоугольника; разбор задач.	
Подведение итогов		

Занятие 6. «Решение задач линейного программирования симплекс-методом»		
Тип занятия:	урок-практикум.	
Цель:	отработать симплекс-метод решения задач линейного программирования.	
Задачи:		
Образовательная: отработать умения и навыки по применению симплекс-метода к решению задач линейного программирования;	*Развивающая:* способствовать развитию умения анализировать, сравнивать, делать выводы;	*Воспитательная:* формировать умение вести дискуссию, аргументировать свою позицию и умения работать в коллективе.
Практикум по решению задач	Решение задач 1-3	
Подведение итогов, постановка домашнего задания		

Задача 1. Экспериментальная лаборатория «Эвента» в качестве новейшей разработки начала выпуск и продажу опытной партии образцов – крема для быстрого роста ногтей и крема для тела, способствующего снижению веса. Для изготовления каждого уникального крема используются активные вещества – гиалурон, карбопол и аллантоин (остальные ингредиенты имеются в избытке). Поскольку партия является опытной, дневной запас ресурсов невелик. Затраты каждого ресурса на изготовление одного флакона крема и количество ресурсов, которыми лаборатория располагает на один день, приведены в таблице. Прогнозируемая прибыль от продажи одного флакона крема для тела составляет 6 у.е., а от продажи одного флакона крема для ногтей – 5 у.е.

Ресурсы	Крем для ногтей, г	Крем для тела, г	Дневной запас ресурса, г
Гиалурон	1	1	5
Карбопол	3	2	12
Аллантоин	5	1	15

Необходимо составить дневной план выпуска продукции, при котором лаборатория получит наибольшую прибыль.

Задача 2. В ресторанах «McDonald's» был проведен конкурс на самую популярную продукцию. Наибольшее признание получили два вида сэндвичей: чизбургеры и гамбургеры. Для приготовления сэндвичей требуется горчица, кетчуп, мясо, и сыр в пропорциях, которые указаны в таблице.

Ингредиент	*Вид сэндвича*		*Запас ресурсов на 1 час*
	чизбургер	гамбургер	
Горчица	0,6 мл	0,6 мл	27 мл
Кетчуп	8 мл	5 мл	300 мл
Мясо	40 г	65 г	2600 г
Сыр	15 г	0 г	450
Цена	20 у.е.	15 у.е.	

Какое количество сэндвичей каждого вида нужно изготавливать в час, чтобы прибыль ресторана была максимальной?

<u>Задача 3.</u>Определите минимум функции $F = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \to min$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 + 5x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Занятие 7. «Двойственный метод решения задач линейного программирования»</td></tr>
<tr><td align="center">Тип занятия:</td><td colspan="2">комбинированный урок.</td></tr>
<tr><td align="center">Цель:</td><td colspan="2">познакомить обучающихся с понятием двойственности задач линейного программирования.</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Задачи:</td></tr>
<tr><td><u>Образовательная:</u>
сформировать знание о принципе построения двойственной задачи к исходной, показать важность данного метода в решении задач линейного программирования;
выработать умения построения двойственной задачи;</td><td><u>Развивающая:</u>
развивать логическое мышление, память, умение правильно формулировать свою мысль; способствовать расширению знаний обучающихся, способности самоанализа, формированию навыков самостоятельной работы;</td><td><u>Воспитательная:</u>
продолжить формирование умений: принимать совместное решение, включаться в диалог, слушать других.</td></tr>
<tr><td align="center">Изучение нового материала</td><td colspan="2">Знакомство с понятием двойственности задач линейного программирования, правилами построения двойственной задачи к исходной, основными теоремами, используемыми при решении.</td></tr>
<tr><td align="center">Первичное закрепление знаний</td><td colspan="2">Составление двойственных задач, их решение одним из изученных методов. Решение задач 1-2.</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Подведение итогов, постановка домашнего задания</td></tr>
</table>

<u>Задача 1</u>. Найдите решение задачи: $F = 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 \to min$ при условиях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

<u>Задача 2.</u> В ресторанах «McDonald's» был проведен конкурс на самую популярную продукцию. Наибольшее признание получили два вида сэндвичей: чизбургеры и гамбургеры. Для приготовления сэндвичей требуется горчица, кетчуп, мясо, и сыр в пропорциях, которые указаны в таблице.

Ингредиент	*Вид сэндвича*		*Запас ресурсов на 1 час*
	чизбургер	гамбургер	
Горчица	0,6 мл	0,6 мл	27 мл
Кетчуп	8 мл	5 мл	300 мл
Мясо	40 г	65 г	2600 г
Сыр	15 г	0 г	450
Цена	20 у.е.	15 у.е.	

Предположим, что по некоторым обстоятельствам потребитель отказался от заказа, и предприятие решило продать сырье, не выпуская продукцию. По каким ценам будут продаваться ингредиенты? Составьте двойственную задачу.

<table>
<tr><td colspan="3">Итоговое занятие: «Основы линейного программирования»</td></tr>
<tr><td>Тип занятия:</td><td colspan="2">урок контроля знаний, умений и навыков.</td></tr>
<tr><td>Цель:</td><td colspan="2">определить уровень овладения знаниями, умениями и навыками по теме линейное программирование.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Задачи:</td></tr>
<tr><td><u>Образовательная:</u>
выявить качество и уровень усвоения знаний по теме «Задачи линейного программирования и методы их решения», а также определить недостатки в знаниях, и установить их причины;</td><td><u>Развивающая:</u>
развивать логическое мышление, память, внимание, умение самоконтроля и самопроверки;</td><td><u>Воспитательная:</u>
содействовать формированию культуры общения, сознательной дисциплины, взаимопомощи, активности, организованности, умению работать в группе.</td></tr>
<tr><td>Контроль знаний</td><td colspan="2">Выполнение итоговой дифференцированной контрольной работы по 2 вариантам. Решение задач под №1, №2 – «отлично», решение задач №1, №3 или №2,№3 – «хорошо», решение задачи №1 или №2, или №3 – «удовлетворительно»</td></tr>
<tr><td colspan="3">Подведение итогов</td></tr>
</table>

Вариант I

<u>Задача 1.</u> Комбинат по переработке фруктово-ягодной продукции производит мармелад и фруктовый концентрат. Для изготовления каждого вида продукции необходимы вода, сахар и фрукты. Пропорции, в которых они используются, указаны в таблице.

Ресурсы	Мармелад, т	Фруктовый концентрат	Дневной запас ресурса, т
Вода	0,5	1	6
Сахар	1	1	8
Фрукты	2	1	14

Прибыль от реализации 1 т мармелада равна 7 у.е., а от реализации 1 т фруктового концентрата – 10 у.е. Сколько тонн мармелада и фруктового концентрата должен выпускать комбинат, чтобы получить максимальную прибыль?

Решите данную задачу графическим и симплексным методами.

Задача 3. Приведите математическую модель задачи к каноническому виду записи:

$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$ при условиях:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 7x_1 + 10x_2 \ge 28 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Вариант II

Задача 1. На звероферме могут выращиваться черно-белые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество единиц корма, расходуемых на одно животное, запасы кормов и цена одной шкурки указаны в таблице.

Вид корма	*Кол-во ед. на 1 животное*		*Общее кол-во корма*
	лисица	песец	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Цена	16	12	

Определите сколько лисиц и песцов необходимо вырастить, чтобы получить максимальную цену от продажи шкурок.

Решите данную задачу графическим и симплексным методами.

Задача 3. Приведите математическую модель задачи к каноническому виду записи: $F = 2x_1 + x_2 \to min$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ 3x_1 + 7x_2 \le 9 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2.5 Результаты апробации элективного курса

Экспериментальная проверка разработанного курса проводилась в Новоуколовской среднеобщеобразовательной школе села Новоуколово Красненского района на уроках математики в 10 классе.

Опытное преподавание проводилось с целью объективной и достоверной проверки гипотезы и предполагало использование ряда методов, таких как, наблюдение, диагностирующие самостоятельная и контрольная работы, беседа.

Основными задачами проведения опытного преподавания были следующие:

1) проверить правильность отбора содержания материала и системы упражнений;

2) выявить тот материал, который вызывал у обучающихся наибольшие затруднения;

3) определить эффективность усвоения материала посредством итоговой проверки;

4) выявить заинтересованность обучающихся в изучении данной темы.

Предэкспериментальная самостоятельная работа по теме «Линейная функция, её график» показала, что не у всех ребят в достаточной мере сформированы умения и навыки по решению линейных неравенств с двумя неизвестными графическим способом.

Ниже приведена диаграмма результатов обучающихся, по которой можно определить, что на «отлично» справились с двумя предложенными заданиями 71% обучающихся, у 29% ребят возникли трудности с решением линейного неравенства.

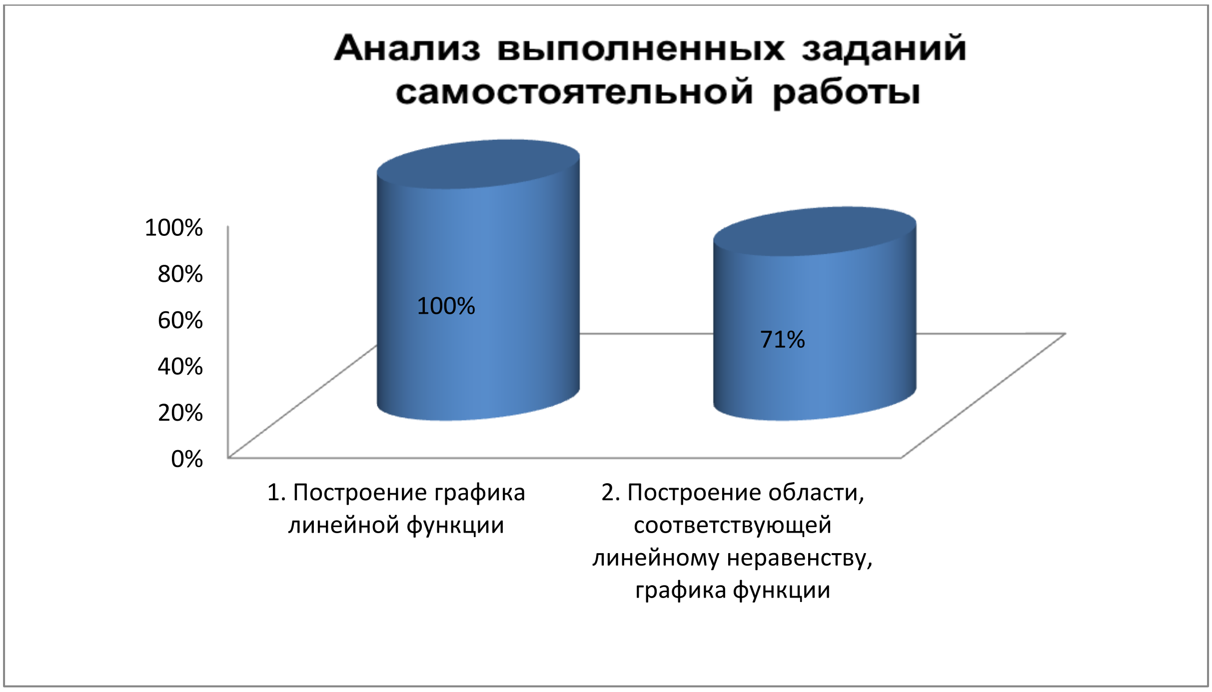


Диаграмма 1

В связи с этим, было бы эффективно провести дополнительные занятия, в форме факультативов или занятий элективного курса, направленных на отработку умений и навыков по теме: «Линейная функция», так как знание линейной функции является основным, базовым фундаментом, с помощью которого решается множество задач, происходящих как в жизни, так и в природе. Поэтому в процесс обучения был внедрен разработанный нами в рамках выпускной квалификационной работы элективный курс «Задачи линейного программирования», ориентированный на расширение и углубление знаний о линейной функции, так как основой линейного программирования служит решение системы линейных уравнений и неравенств.

После изучения соответствующей математической и методической литературы нами были разработаны 18 занятий в соответствии с темой элективного курса, а затем 8 из которых по темам: «Постановка общей задачи линейного программирования. Основные определения», «Построение математических моделей ЗЛП. Их приведение к каноническому виду», «Графический метод решения ЗЛП», «Решение ЗЛП симплекс-методом», «Двойственный метод решения ЗЛП», итоговое занятие «Основы линейного программирования» были проведены.

При проведении занятий элективного курса можно было заметить, как ребята были заинтересованы темой, сосредоточены, внимательны. Активно работали с предлагавшимися заданиями, проявляли самостоятельность мышления. В классном коллективе присутствовала взаимопомощь и объяснение непонятного одноклассникам. На протяжении выполнения практических заданий постоянно осуществлялся контроль учеников, как работающих у доски, так и работающих на местах.

Во время проведения занятий было выявлено, что ученики усвоили тему элективного курса и имеют представление о том, что такое задачи линейного программирования. Но при выполнении предложенных заданий у школьников возникали затруднения, так как задачи требовали исследовательских навыков, логического мышления, что, как оказалось, у них развито слабо. Это говорит о том, что школьный курс ограничен и не позволяет рассматривать задачи, требующие не только действий по алгоритму.

Самостоятельный поиск решения оказался для учеников сложным, но все же позволил школьникам проявить свои способности, заставил задуматься над задачами.

При анализе выполнения домашних работ, большинство ребят испытывали трудности по решению задач линейного программирования симплекс-методом, основная ошибка которых была в пересчёте элементов симплекс-таблицы. Особенно часто обучающиеся допускали ошибки при арифметическом счёте.

Результаты итоговой контрольной работы после проведения элективного курса показали положительную динамику формирования умений и навыков в решении задач линейного программирования.

Ниже приведена диаграмма результатов выполненных заданий контрольной работы, по которой можно определить, что материал занятий был усвоен ребятами, осмыслен и может активно использоваться в новых ситуациях.

Диаграмма 2

Если перед проведением элективного курса с решением линейного неравенства справился 71% обучающихся, то с выполнением первого задания итоговой работы, в котором необходимо было решить задачу линейного программирования графическим способом, основанном на построении линейных неравенств справились уже 100% обучающихся, 29% – отлично освоили симплекс-метод, ну и почти все ребята – 86% научились приводить математическую модель к канонической форме.

Таким образом, на основе полученных данных опытного эксперимента можно сделать следующие выводы:

1. Предлагаемый элективный курс был доступным для понимания обучающимися старшего звена школы.
2. Дифференцированный подход к обучающимся позволил добиться на различных этапах однородных результатов.
3. Результаты проведенного исследования указывают на эффективность элективного курса.
4. Предлагаемый элективный курс может быть использован в подготовке обучающихся к поступлению в высшие учебные заведения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного нами исследования было выявлено следующее.

В современных условиях развития общества особую актуальность приобрела проблема внедрения в школьное математическое образование в рамках профильного обучения элективных курсов.

Профильное обучение – это система специализированной подготовки старшеклассников, направленная на то, чтобы сделать процесс их обучения более индивидуализированным, отвечающим реальным запросам и ориентациям, важная роль, в которой принадлежит элективным курсам.

В результате проведенного анализа научно-методической и педагогической литературы по разработке элективных курсов, нами было выявлено, что они обязательны для посещения и являются неотъемлемой частью профильного обучения, основная задача которых учитывать интересы и склонности обучающихся, а также расширять и углублять знания по тому или иному предмету. Также мы определили их главные цели, функции. Выделили перечень базовых требований к содержанию, и правила оформления рабочих программ.

На основании изученной теории по созданию курсов по выбору, нами был разработан элективный курс «Задачи линейного программирования в школьном курсе математики» для обучающихся 10 класса, что и являлось основной целью нашей выпускной квалификационной работы.

В процессе разработки элективного курса были решены следующие задачи:

1. Изучены основные понятия теории линейного программирования;

2. Разработана и оформлена с учётом требований рабочая программа элективного курса: обоснована актуальность, определен учебно-тематический план, описано содержание занятий.

Данный курс был апробирован в школе, результаты которого были следующие:

1. Предлагаемый элективный курс был доступным для понимания обучающимися 10 класса: ребята научились анализировать текст задачи, интерпретировать её на математический язык, составлять целевую функцию, находить максимальное (минимальное) значение при условиях ограничений.

2. Результаты проведенных занятий указывают на эффективность элективного курса: обучающиеся показали неплохой уровень усвоения знаний, как при решении заданий на практических занятиях, так и при выполнении заданий итоговой контрольной работы.

Проведенное опытное преподавание подтвердило гипотезу, выдвинутую в начале работы, о том, что проведение элективного курса «Задачи линейного программирования в школьном курсе математики» обеспечит более высокий уровень знаний, умений и навыков обучающихся по данной теме, а также расширит объём знаний по математике. Из-за недостатка возможности и времени при проведении эксперимента нельзя сделать точные выводы о том, какова эффективность изучения темы в целом. Но, опираясь на полученные положительные результаты, можно сказать, что цель проведенного элективного курса была достигнута.

На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что введение элективных курсов позволит обучающимся определить свою программу обучения и получить образование с углублением в любую область знаний (выбранную самим учеником). Они представляют собой новейший механизм дифференциации и индивидуализации процесса обучения.

В заключении стоить отметить, что предложенный вариант изучения задач линейного программирования в рамках элективного курса может предполагать определенную доработку, которую учитель может совершить исходя из своих профессиональных возможностей, особенностей состава обучающихся и выбранного профиля обучения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учеб.пособие / И.Л. Акулич – СПб.: Лань, 2011. – 352 с.
2. Андрианов, А.Л. Зарождение и ранняя история линейного программирования: дис. канд. физ-мат. наук – Москва, 2012. – 209 с.
3. Анисимова, Н. П. Линейное программирование: учеб.пособие / Н. П. Анисимова, Е. А. Ванина – СПб.: НИУ ВШЭ, 2012. – 70 с.
4. Банди, Б. Основы линейного программирования: пер. с англ. / Б. Банди – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
5. Бозиев, О.Л. Линейное программирование: методические указания к решению задач по дисциплине «Методы оптимизации» / О.Л. Бозиев – Нальчик, 2003. – 39 с.
6. Булдаев, А.С. Прямые методы решения задачи линейного программирования / А.С. Булдаев – Иркутск, 2000. – 25 с.
7. Гасс, С. Путешествие в страну линейного программирования: пер. с англ. / С. Гасс – М.: Мир, 1973. – 176 с.
8. Гераськин, М.И. Линейное программирование: учеб.пособие / М.И. Гераськин, Л.С. Клентак – Самара: СГАУ, 2014. – 104 с.
9. Гладких, Б.А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики. Линейное программирование: учеб.пособие / Б.А. Гладких – Томск: НТЛ, 2009. – 200 с.
10. Грешилов, А.А. Прикладные задачи математического программирования: учеб.пособие/ А.А. Грешилов – М.: Логос, 2006. – 288 с.

11. Дудов, С.И. Линейное программирование. Теория, примеры, задачи: учеб.пособие для студентов экономико-математических специальностей / С.И.Дудов, А.П. Хромов – Саратов, 2010. – 48 с.

12. Егорова, А. М. Профильное обучение и элективные курсы в средней школе / А. М. Егорова // Теория и практика образования в современном мире: материалы международной научной конференции. – 2012. – С. 173–179.

13. Ермаков, Д.С., Петрова Г.Д. Создание элективных учебных курсов для профильного обучения / Д.С. Ермаков, Г.Д. Петрова // Школьные технологии. – 2003. – №6. – С.23–29.

14. Ермаков, Д.С. Профильное обучение: проблемы и перспективы / Д.С. Ермаков // Народное образование. – 2004. – №7. – С.101–107.

15. Ермаков, Д.С. Элективные курсы для профильного обучения / Д.С. Ермаков // Педагогика. – 2005. – №2. – С.36–41.

16. Ермаков, Д.С., Рыбкина Т.И. Элективные курсы: требования к разработке и оценка результатов обучения / Д.С. Ермаков, Т.И. Рыбкина // Профильная школа. – 2004. –№3. – С.6–11.

17. Ершов, Д.А. Элективные курсы профориентационной направленности для учащихся 10 – 11-х классов гуманитарного профиля обучения: учеб.пособие / Д.А. Ершов. – М.: Глобус,2007. – 153 с.

18. Задачи и структура элективных курсов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mylektsii.ru/2-70007.html

19. Карманов, В. Г. Математическое программирование: учеб.пособие / В.Г. Карманов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.

20. Каспржак, А.Г. Проблема выбора: элективные курсы в школе / А.Г. Каспржак – М.: Новая школа, 2004. – 160 с.

21. Каспржак, А.Г. Элективные курсы – ответ на запросы ученика и учителя, семьи и государства / А.Г. Каспржак // Директор школы. – 2006. – №1. – С. 3–9.

22. Крысин, Л.П. Толковый словарь иноязычных слов / Л.П. Крысин – М.: Эксмо, 2008. – 944 с.

23. Лунгу, К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач / К. Н.Лунгу – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 128 с.

24. Мамаева, З.М. Линейные экономико-математические модели: учеб.пособие/ З.М. Мамаева – Нижний Новгород: ННГУ, 2012. – 72 с.

25. Орлов, В.А. Типология элективных курсов и их роль в организации профильного обучения / В.А. Орлов // Журнал «Эйдос». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://eidos.ru/journal/2003/0416.htm

26. Палий, И.А. Введение в линейное программирование: учеб.пособие / И.А. Палий – Омск: СибАДИ, 2007. – 200 с.

27. Педагогика: учеб.пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / под ред. П.И. Пидкасистого. – М: Педагогическое общество России, 2006. – 640 с.

28. Профильное обучение: Нормативные правовые документы. – М.:ТЦ Сфера, 2006. – 96с.

29. Профильное обучение: элективные курсы для предпрофильной и профильной подготовки учеников общеобразовательной школы: учеб.пособие / Н.Б. Федорова, О.В. Кузнецова. – Рязань: РГУ им. С.А. Есенина, 2011. – 88 с.

30. Семенкин, Е.С.Методы оптимизации: учеб.пособие по циклу практических занятий / Е.С. Семенкин, О.Э. Семенкина, Т.Р. Ильина, В.А.Терсков – Красноярск, 2007. – 105 с.

31. Синько, Т.П. Элективные курсы в профильной школе / Т.П. Синько // Первое сентября. – 2005. – С. 34–39.

32. Таха, Х. А. Введение в исследование операций, 7-е издание: пер. с англ. / Х.А. Таха – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

33. Федяева, Л.В. Элективные курсы по математике в системе профильного обучения / Л.В.Федяева // Теория и методика обучения и воспитания. – 2007. – №5. – С. 12–16.

34. Филатова, Л. О. Профильное обучение в зарубежных странах / Л. О.Филатова // Народное образование. Педагогика. – 2005. – №1. – С. 144–158.

35. Шевченко, В.Н. Линейное и целочисленное линейное программирование / В.Н. Шевченко, Н.Ю. Золотых – Нижний Новгород, 2004. – 154 с.

36. Щербо, И. Реализация профильного обучения в школе / И.Щербо // Директор школы. – 2005. – №4. – С. 47–56.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Тест «Основы линейного программирования»

1. Линейное программирование – это:

a) пакет прикладных программ;

b) язык программирования;

c) математическая дисциплина, изучающая методы нахождения наибольшего (наименьшего) значения линейной функции;

d) математическая дисциплина, изучающая методы решения линейных уравнений.

2. Целевой называется функция

a) которую надо построить по заданным точкам;

b) которую надо минимизировать или максимизировать;

c) график которой надо построить;

d) график которой надо преобразовать.

3. Системы неравенств или уравнений, которым должны удовлетворять переменные целевой функции, будем называть:

a) системами разграничений;

b) системами допущений;

c) системами ограничений;

d) системами различий.

4. Любое решение системы ограничений называется ... решением задачи линейного программирования.

a) допустимым;

b) оптимальным;

c) наилучшим;

d) правильным.

5. Оптимальным решением задачи линейного программирования называется:

a) решение, в котором целевая функция принимает максимум (минимум);

b) решение, при котором целевая функция отрицательна;

c) решение, при котором целевая функция положительна;

d) допустимое решение, при котором целевая функция принимает минимум (максимум).

6. Так как система ограничений есть система линейных неравенств, то множество ее решений есть выпуклый многоугольник M, лежащий в большинстве случаев

a) в третьей координатной плоскости;

b) во второй и четвертой координатной плоскости;

c) в первой координатной плоскости.

7. Целевая функция принимает свое наименьшее значение в точке … области допустимых решений.

a) «выхода»;

b) «захода»;

c) «входа».

8. Целевая функция принимает свое наибольшее значение в точке … области допустимых решений.

a) « входа»;

b) «выхода»;

c) «ухода».

9. Решением системы неравенств с двумя неизвестными *x* и *y*называется....при подстановке которых во все неравенства получаются верные числовые неравенства.

a) переменные;

b) пара чисел *(x; y);*

c) значения переменной *x*.