

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)**

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК
КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ПУШКИ
С УПРАВЛЕНИЕМ КОНФИГУРАЦИЕЙ ПУЧКА**

Выпускная квалификационная работа

обучающегося по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика
очной формы обучения,
группы 07001305

Гончарова Дмитрия Викторовича

Научный руководитель
к.ф.-м.н.
Никуличева Т.Б.

БЕЛГОРОД 2017

Оглавление	
Введение.....	3
Глава 1. Теоретические основы предметной области	8
1.1 Основное назначение электронной пушки.....	8
1.2 Проектирование пушек, формирующих цилиндрические и плоские пучки.....	12
1.3 Процедура математической параметризации электронной пушки	12
Глава 2. Математические методы анализа электронных пушек	20
2.1 Расчеты электронных пушек методом синтеза.....	20
2.2 Расчеты электронных пушек методом анализа.	22
2.3 Способы расчета реальных магнитных полей в электронных пушках ..	26
2.4 Расчет электростатических электронных пушек	30
Глава 3. Проведение модельных экспериментов по исследованию параметров пушки.....	39
Основные результаты и выводы.	49
Заключение	50
Список использованных источников	51

Введение

Электронная пушка (ЭП) – это устройство, предназначенное для получения пучка электронов определенной конфигурации, обладающих определенным интервалом разброса значений кинетической энергии. ЭП служат для генерации и формирования электронного пучка, иногда называемого пучком. Чаще всего данное приспособление используется в кинескопах и других электронно-лучевых трубках, СВЧ-приборах (например, в лампах бегущей волны), а также в приборах, в основе которых лежит использование вместо светового потока пучка электронов, например, электронные микроскопы и ускорители заряженных частиц.

Типичными задачами моделирования ЭП являются задачи определения характера движения электронов в потоке, формируемом электродами заданной конфигурации, обычно без учета пространственного заряда. Путем последующего изменения формы и расположения электродов добиваются требуемых параметров электронного пучка. Часто желательно бывает определить геометрические формы, расположение электродов и потенциалы на них, считая известными физические параметры пучка.

Основными недостатками существующих устройств ЭП являются ограничение функциональных возможностей, надежности и ресурса работы, обусловленное наличием термоупругих напряжений в основных узлах, обеспечивающих рабочий режим электронно-лучевой пушки, что затрудняет их юстировку.

Актуальной задачей в настоящее время является создание компактных, технологичных и удобных в эксплуатации электронных пушек, формирующих протяженный электронный поток заданной ширины с равномерным распределением плотности тока по его сечению и обладающих высокой надежностью в течение длительного срока службы. Обеспечение этих параметров электронной пушки во многом зависит от конструкции ее катодного узла. Оптимальная геометрия катодного узла позволит повысить

равномерность распределения протяженного электронного потока по сечению и повысить надежность и долговечность катодного узла.

В том случае, если при конструировании электронной пушки используются массивные и громоздкие элементы устройства для крепления катодной нити, происходит рассеивание тепловых потоков, уменьшается температура на концах катодной нити, что приводит к уменьшению тока эмиссии и удельной мощности линейного электронного потока и создает неравномерное распределение плотности тока по длине катода. Кроме того, при высокой рабочей температуре снижается предел прочности материала катода, что ограничивает ресурс его работы. Также в случае деформации крепежных элементов в результате нагрева может происходить искажение геометрии ЭОС электронной пушки прибора и может нарушаться токопрохождение в ней. Все это приводит к снижению надежности и долговечности работы катода, катодного узла и электронной пушки в целом.

Катодный узел содержит ряд элементарных ленточных катодов, расположенных последовательно вдоль общей оси, параллельной продольной оси окна вывода электронов. Элементарные ленточные катоды закреплены с помощью держателей элементарных ленточных катодов на общем основании катодного узла, расположенном параллельно плоскости торцевого окна вывода электронов. Обращенные в сторону окна вывода электронов эмитирующие поверхности катодов могут иметь плоскую или цилиндрическую (выпуклую, вогнутую) форму. Элементарные ленточные катоды отделены друг от друга технологическими зазорами. При подаче тока накала на катоды вследствие их теплового расширения происходит увеличение линейных размеров катодов, в результате чего элементарные катоды могут сближаться друг с другом.

При выборе оптимальной величины зазоров между элементарными ленточными катодами можно получить при нагреве общую эмитирующую поверхность, близкую к непрерывной поверхности, и обеспечить

формирование протяженного электронного потока с более равномерным распределением плотности тока.

В реальных конструкциях катодных узлов длина общей эмитирующей поверхности может составить несколько сотен миллиметров. Поэтому при использовании в них проволочных держателей для крепления элементарных ленточных катодов возникают технологические проблемы, связанные с тепловыми деформациями элементов катодного узла. Под воздействием механических усилий и высокой температуры проволочные держатели деформируются и изгибаются во всевозможных направлениях, изменяя положение закрепленных на них элементарных ленточных катодов друг относительно друга, а также относительно других электродов электронной пушки. В результате происходит искажение формы элементарных ленточных катодов, катодного узла и геометрии ЭОС электронной пушки. При этом искажается форма отдельных электронных потоков, получаемых с элементарных ленточных катодов, и общего электронного потока электронной пушки, происходит неравномерное смещение электронных потоков относительно друг друга и электродов электронной пушки и оседание электронов на этих электродах. В результате ухудшаются равномерность распределения электронного потока по сечению и токопрохождение, увеличиваются потери мощности, снижается КПД и срок службы электронной пушки. Усилению этих недостатков способствуют также имеющие место технологические разбросы параметров и геометрии отдельных катодов и держателей.

Для практической реализации эффективных электронных пушек в качестве источника электронов исследователи рекомендуют использование полевого электронного катода (ПЭК), обладающего рядом неоспоримых преимуществ по сравнению с другими видами источников свободных электронов. К этим преимуществам можно отнести:

- отсутствие напряжения накала;
- отсутствие температурного градиента;

- устойчивость ключевых узлов к внешней радиации;
- безынерционность;
- крутизна (вольт-амперных характеристик) ВАХ по экспоненциальному закону.

Совокупность этих свойств обуславливает перспективность использования ПЭК в различных электронных приборах таких, как электронно-лучевые трубки, плоские дисплейные экраны и т.д. Однако, на настоящий момент перечисленные преимущества ПЭК и их использование в приборах вакуумной электроники сложны в практической реализации.

Экспериментальные методы исследования требуют определенных экономических и временных затрат, поэтому основными методами исследования являются методы математического моделирования и численного эксперимента с применением средств современной компьютерной техники.

Теоретическое исследование в области расчета характеристик электронных полевых пушек представлено в работах Добрецова Л.Н., Егорова Н.В., Шешина Е.П. Следует отметить, что в последние годы идет интенсивный процесс создания новых устройств на основе ЭП.

Поэтому, тема представленной ВКР «Математическое моделирование электронной пушки с управлением конфигурацией пучка», несомненно, является актуальной.

Целью ВКР является исследование электронно-лучевой пушки с изменяемой конфигурацией пучка заряда.

Исходя из поставленной цели, необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить библиографические источники по теме ВКР
2. Рассмотреть аналитическое представление задачи моделирования формы пучка электронов
3. Применить метод анализа для решения задачи
4. Применить метод синтеза для решения задачи
5. Построить модель электронно-лучевой пушки

6. Провести тестирование разработанной модели

Научная новизна работы

1. Математическое моделирование электрического поля в системе с катодным узлом произвольной конфигурации.
2. Алгоритм вычисления электрического поля по заданному распределению потенциала с автоматическим выбором шага.
3. Прогнозирование структуры и свойств электронного пучка на основе вычислительного эксперимента.

Практическая значимость работы

1. Разработан программный комплекс для моделирования электронной пушки.
2. Возможность использования результатов моделирования для практической реализации.

Структурно ВКР состоит из введения, трех глав, заключения, списка используемых библиографических источников и приложений.

Во введении рассмотрена актуальность выбранной темы, сформулирована цель, поставлены задачи, приведено содержание пояснительной записки ВКР.

В первой главе рассмотрена предметная область, приведены разновидности схем электронных пушек, проанализирована типичная процедура проектирования пушки, проведен обзор математических пакетов и программных средств для моделирования.

Во второй главе рассмотрены аналитический и синтетический методы решения поставленной задачи, выбраны исходные типы данных, построены зависимости.

В третьей главе приведена практическая реализация моделирования электронной пушки и тестирование построенной модели.

В заключении приведены основные результаты и выводы по работе.

1. Теоретические основы предметной области

1.1 Основное назначение электронной пушки

Современные электронно-лучевые и радиотехнические приборы высокой точности в основе своей работы используют различные по интенсивности и пространственной конфигурации электронные пучки (рис.1.1).

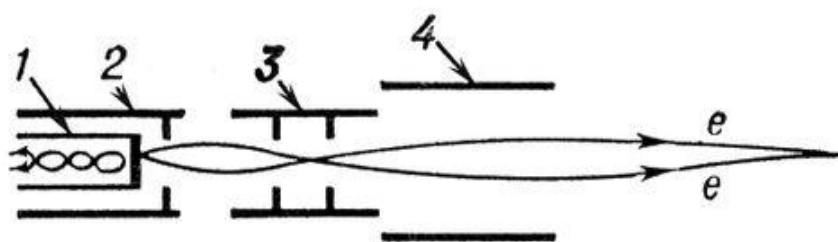


Рис. 1.1. Схема электронной пушки: 1 — катод; 2 — модулятор; 3 — первый анод; 4 — второй анод; e — траектории электронов.

Одной из наиболее важных и сложных в техническом исполнении задач, которые необходимо решить при изготовлении и практическом использовании ЭП – это формирование и фокусировка интенсивных электронных пучков. Основная задача электронной пушки заключается в формировании электронного пучка определенной интенсивности, заданной конфигурации, с управляемым лучом, что достигается заданием управляющего напряжения, как следствие, регулировкой скорости движения электронов (в идеальном случае – ламинарным) (рис.1.2).

Методы управления конфигурацией и фокусировкой электронных пучков, связаны с заданием определенных значений управляющих напряжений, силы тока, а также скорости электронов, имеющих, по возможности, движение. Техническая реализация таких приборов оказалась связанной с большим количеством проблем и вопросов, и изначально не дала положительных результатов. Поэтому разработка электронных пушек тесно связана с поисками новых формирующих и фокусирующих систем.

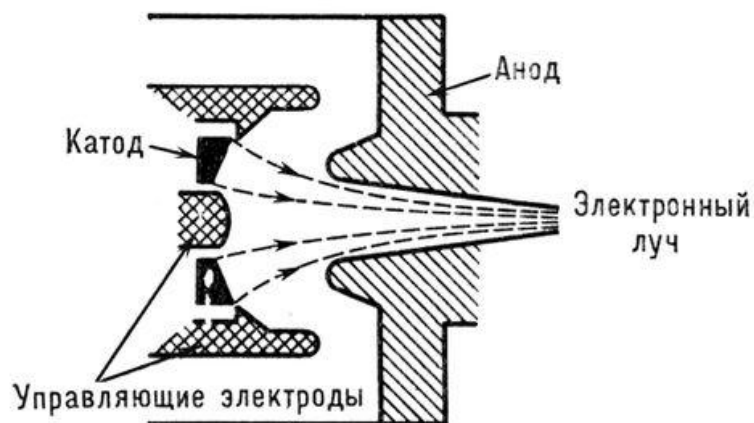


Рис. 1.2. Структурная схема осесимметричной электронной пушки, используемой в клистронах (показана в разрезе).

Существенный прорыв в области проектирования электронных пушек был сделан Дж. Р. Пирсом, который предложил совершенно новый метод формирования прямолинейных ламинарных электронных пучков простой конфигурации. Данный метод был положен в основу разработки электронных пушек, отличающихся высокой эффективностью, которые в настоящее время широко известны под названием пушек Пирса (рис. 1.3). Конструкция типичной пушки Пирса, аналог которой представлен на рис.1.3, состоит из вогнутого сферического эквипотенциального катода 2 с подогревателем 1, широко раскрытого прикатодного электрода 4 и анода 3 с центральным отверстием.

Для того чтобы получить узкий электронный пучок, падающий через отверстие анода определенного диаметра на регистрирующий экран, требуется создать в камере такую конфигурацию электрического поля, при которой электроны со всей поверхности катода равномерно сходятся в узкий электронный пучок. Для этого необходимо рассчитать параметры формы электродов. Наиболее эффективным, с точки зрения экономических и временных затрат, методом такого расчета является аналитический метод или метод математического моделирования.

Пушки Пирса, рассмотренной ниже конфигурации, позволяют получать узкие сходящиеся электронные пучки, обладающие малой интенсивностью.

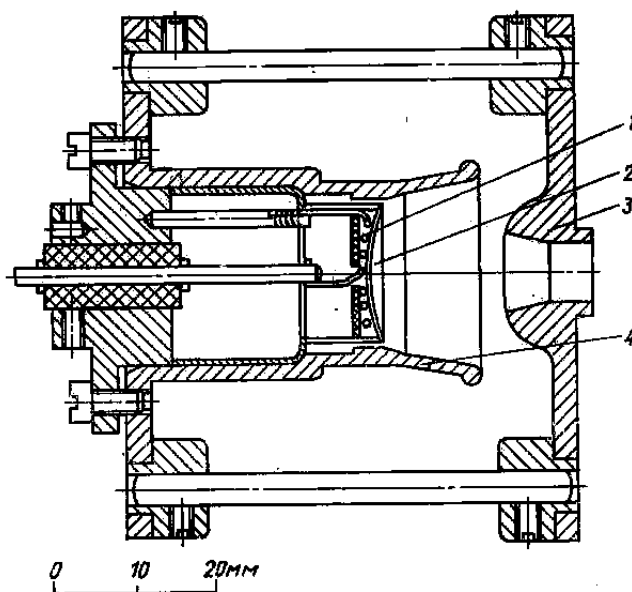


Рис. 1.3. Экспериментальная электронная пушка Пирса, $U_a=50$ кВ, $P=0.5$ мкА/В^{3/2}, $C_j=100$.

Чтобы получить сфокусированные электронные пучки, обладающие более высокой интенсивностью существует очень широкое многообразие модифицированных пушек Пирса (рис. 1.4). Их основными особенностями являются относительно небольшие расстояния между катодом и анодом, а также применение прикатодных электродов закрытой конструкции. Это позволяет получить в электронных пушках электрические поля, которые могут скомпенсировать поперечные расфокусирующие силы пространственного заряда более эффективно. Но такая конфигурация обладает рядом недостатков, например, при малых расстояниях катод-анод между катодом и фокусирующим электродом отсутствует необходимый тепловой зазор.

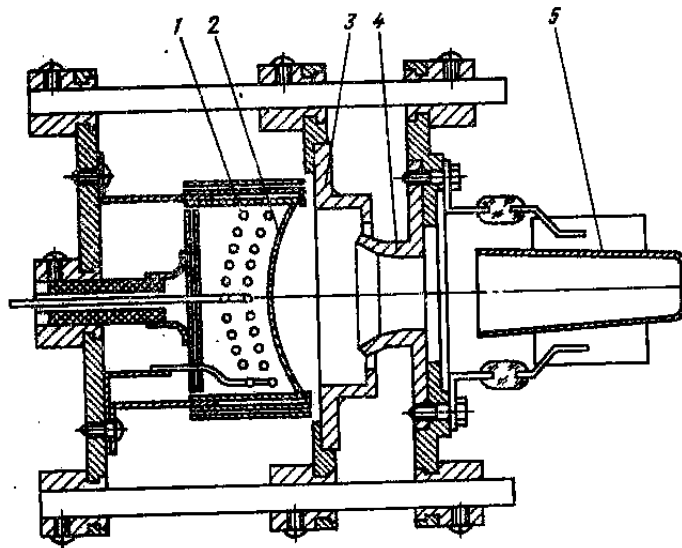


Рис. 1.4. Экспериментальная модифицированная пушка Пирса, $U_a=20\text{кВ}$, $P=3 \text{ мкА/В}^{3/2}$, $C_j=6$: 1—подогреватель; 2—катод; 3—прикатодный электрод; 4—анод; 5—коллектор.

Один из примеров математического расчета пучка с управляемой конфигурацией профиля, показан на рис. 1.5. Здесь: 1 – катод, 2 – экранирующий электрод, 3 – управляющий электрод, 4 – анод, 5 – выходной электрод (заземленный). Недостатком данной модели является сильная замагниченность пучка. Регулируемым параметром, позволяющим задавать необходимую конфигурацию профиля пучка в данной модели является управляющее напряжение на электроде 3, которое меняется от -2 кВ до $+2 \text{ кВ}$ в зависимости от напряжения на катоде.

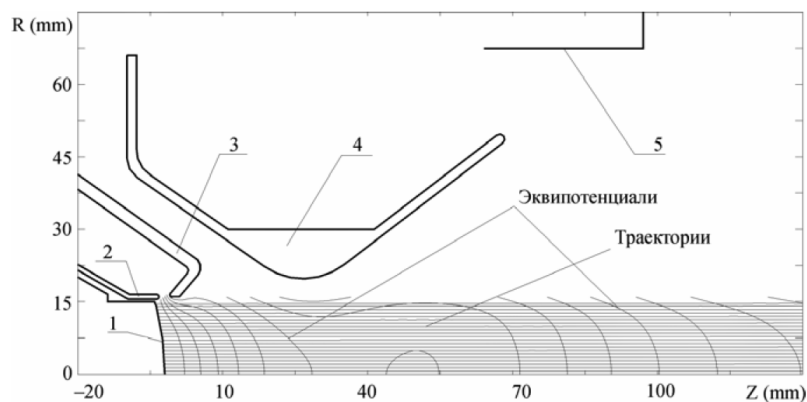


Рис. 1.5. Геометрия электронной пушки с управляемым профилем пучка.

1.2 Проектирование пушек, формирующих цилиндрические и плоские пучки.

Для математического анализа электронных пушек различной конфигурации, необходимо сначала изучить физические принципы, которые ложатся в основу разработки пушек Пирса. Например, очень важным является тот факт, что пушки Пирса позволяют формировать не только сплошные сходящиеся электронные пучки, называемые коническими, а также цилиндрические, плоские (ленточные и клиновидные) и трубчатые (полые) пучки. Установление формы конфигурации пучка является важной, т.к. от этого зависит выбор расчетной системы координат.

Поэтому при моделировании электронной пушки, которая формирует параллельный ленточный пучок, используется декартова система координат, а модель пучка задается как часть плоскопараллельного потока.

При моделировании электронной пушки, которая формирует клиновидный, т.е. сходящийся пучок, используется цилиндрическая система координат, а модель пучка задается как часть радиального цилиндрического потока.

Чтобы сформировать модель параллельного цилиндрического пучка можно поступить следующим образом: из бесконечного параллельного потока «вырезается» область в виде цилиндра.

1.3 Процедура математической параметризации электронной пушки

Разработка математического описания электронных пушек включает в себя два основных этапа. На первом этапе важной задачей является определение геометрии электронной пушки в первом приближении, что позволит определить основные параметры электронного луча, такие как мощность, компрессия, первеанс, интенсивность электронного пучка. Как

правило, на этом этапе используется, так называемый, метод синтеза, который заключается в упрощенной реализации математической модели.

Второй этап – метод анализа, на котором с помощью численного эксперимента проводится решение самосогласованных задач по расчету конфигурации электронного пучка и оптимизации геометрии электронной пушки.

Одним из основных методов синтеза электронной пушки является метод синтеза по Овчарову. Данный метод расчета заключается в получении специального решения внутренней задачи, которое удовлетворяет некоторой совокупности заранее требуемых характеристик формируемого пучка. Построение решения осуществляется в параксиальном приближении с помощью аналитической реализации параксиального уравнения, которое записывается в специальной криволинейной системе координат. В качестве координатной системы выбирается семейство линий, связанных между собой критерием подобия (семейство а) и семейство линий ортогональных к ним (семейство б). В системе координат q_1q_2 (рис. 1.6) линии, принадлежащие этим семействам, описываются уравнениями:

$$r \llcorner \rceil = q R \llcorner \rceil ; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = - \frac{R \llcorner \rceil}{r \frac{\partial R \llcorner \rceil}{\partial z}}$$

где $R \llcorner \rceil$ – одна произвольная линия из базового семейства; q – параметр подобия.

Такой выбор координатной системы позволяет численно реализовать аналитическую модель потока на траекториях по критерию подобия. Параметрическое моделирование ортогональной сетки выполняется по следующему алгоритму. Для задания линий семейства а используется параметр подобия $q_2 = q = r \llcorner \rceil / R \llcorner \rceil$, который определяет относительное расстояние данной линии семейства от оси симметрии. В качестве параметра подобия, который лежит в основе построения линий семейства б, принимается расстояние, на котором данная линия пересекает ось

симметрии, $q_1 = z$. Построенная на таких допущениях ортогональная сетка, лежащая в основе координатной системы, предполагает, что параметры q_1 и q_2 имеют значение криволинейных координат, причем, первая из них имеет размерность длины, а вторая является безразмерной.

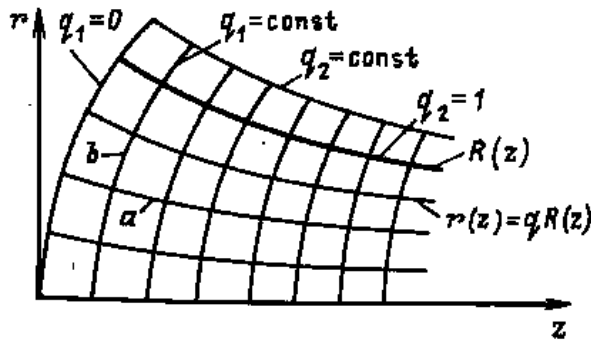


Рис. 1.6 Ортогональная координатная сетка, образованная семейством подобных линий (линии $q_2 = \text{const}$) и семейством линий, ортогональных к ним (линии $q_1 = \text{const}$)

В случае, если в качестве линии базового семейства $R(z)$ берется граница электронного пучка, то параксиальное волновое уравнение, является уравнением движения, и записывается как

$$R^2 \frac{d^2 U_0}{dq_1^2} + 2R \frac{dR}{dq_1} \frac{dU_0}{dq_1} + 4U_0 R \frac{d^2 R}{dq_1^2} = \frac{1}{\pi \varepsilon_0 \sqrt{2 \frac{e}{m} U_0}},$$

где U_0 – значение потенциала на оси электронного пучка; I – ток пучка.

Введем нормированные характеристики $\bar{R} = R/R_n$, $\bar{u} = U_0/U_n$ и $\bar{q}_1 = q_1/l_n$, получаем

$$\bar{R}^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{q}_1^2} + 2\bar{R} \frac{d\bar{R}}{d\bar{q}_1} \frac{d\bar{u}}{d\bar{q}_1} + 4\bar{u}\bar{R} \frac{d^2 \bar{R}}{d\bar{q}_1^2} = \frac{1}{\sqrt{\bar{u}}}, \quad (1.1)$$

где R_n, U_n и l_n – нормирующие множители, а

$$i = \left(\pi \varepsilon_0 \sqrt{2 \frac{e}{m} U_n^{3/2} \mu^2} \right)^{-1}; \quad \mu = \frac{R_n}{l_n}. \quad (1.2)$$

Аналитическая модель электронной пушки строится по следующему алгоритму. На первом этапе задается распределение потенциала на оси, удовлетворяющее условию (1.1), которое учитывает ограничение тока с катода пространственным зарядом, а также движение электронного пучка в канале равного потенциала на выходе из пушки.

Картина, соответствующая описанному выше распределению потенциала показана на рис. 1.7, б. В качестве начального приближения распределение потенциала может задать аналитическим выражением вида

$$u = k_1^{-4/3} f^2, \text{ где } f = 1 + \sum_{n=1}^5 a_n q_1^{-n}.$$

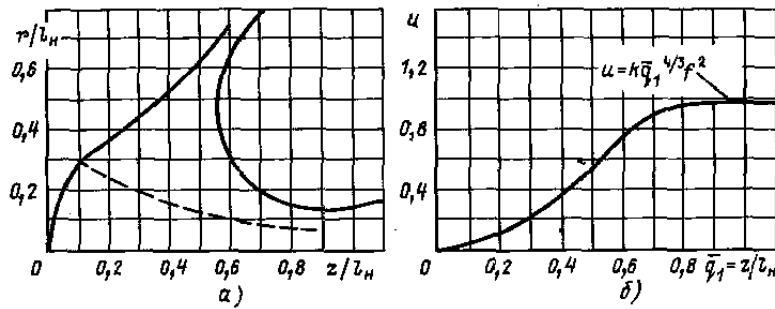


Рис. 1.7. Форма электродов (а) и осевое распределение потенциала (б) в пушке, рассчитанной по методу Овчарова.

На результирующее решение накладывается требование $\frac{d^2 \bar{R}}{d\bar{q}_1^2} = 0$, чтобы описать, что катод имеет сферическую форму. Это требование выполняется, если коэффициенты k, a_1 и a_2 задаются по следующему закону:

$$k = \left(\frac{9}{4} i\right)^{2/3}; \quad a_1 = -\frac{8}{15} \frac{dR}{d\bar{q}_1} \Big|_{\bar{q}_1=0}; \quad a_2 = \frac{361}{900} \left(\frac{d\bar{R}}{d\bar{q}_1}\right)^2 \Big|_{\bar{q}_1=0}. \quad (1.3)$$

Чтобы выполнить условия (1.3), необходимо наложить дополнительные связи на коэффициенты a_3, a_4 и a_5 :

$$a_3 = \frac{119}{9} \frac{1}{\sqrt{k}} - 10 - 6a_1 - 3a_2;$$

$$a_4 = -\frac{187}{9} \frac{1}{\sqrt{k}} + 15 + 8a_1 + 3a_2;$$

$$a_5 = \frac{77}{9} \frac{1}{\sqrt{k}} - 3a_1 - a_2 - 6.$$

На следующем этапе выполняется численное интегрирование уравнения (1.1), при заданном значении параметра i и начальных условиях

$$\bar{R}|_{\bar{q}_1=0} = 1 \text{ и } \left(\frac{d\bar{R}}{d\bar{q}_1} \right)_{\bar{q}_1=0} = \left(\frac{d\bar{R}}{d\bar{q}_1} \right)_0.$$

В результате вышеописанных манипуляций определяется конфигурация пучка электронов, которая соответствует заданному распределению потенциала.

В криволинейно системе координат с ортогональной сеткой проводится также и решение внешней математической задачи. Сначала требуется задать начальное распределение потенциала снаружи пучка, это можно сделать, например, по приближенной формуле:

$$\bar{U} = u + \mu^2 q_2 u \bar{R} \frac{d^2 \bar{R}}{d\bar{q}_1^2} + \frac{\mu^2 i}{4\sqrt{u}} \left(-q_2^2 + \ln q_2^2 \right),$$

где $\bar{U} = \frac{U}{U_n}$ – нормированное значение потенциала. Положив с

определенным шагом $\bar{U} = const$, можно рассчитать распределение эквипотенциальных линии в криволинейной системе координат \bar{q}_1, q_2 . Для расчета цилиндрического пучка необходимо перейти к цилиндрическим координатам с помощью следующей нормировки:

$$\frac{r}{l_n} \approx \mu q_2 \bar{R} \left[1 - \frac{1}{2} \mu^2 q_2^2 \left(\frac{d\bar{R}}{d\bar{q}_1} \right)^2 \right]; \quad \frac{z}{l_n} \approx \bar{q}_1 - \frac{1}{2} \mu^2 q_2^2 \frac{d\bar{R}}{d\bar{q}_1}.$$

Математическая параметризация и оптимизация электронной пушки заключается в последовательном изменении расчетной геометрии управляющей системы электродов катод-анод электронной пушки, а также

порождаемого магнитного поля до тех пор, пока конфигурация получаемого электронного пучка не будет близкой к предполагаемым на практике. Этот процесс включает состоит из следующих основных шагов:

- задание начальной геометрической формы пушки;
- начальное распределение потенциала и конфигурации магнитного поля;
- расчет траектории формируемого пушкой электронного пучка;
- внесение поправок в исходную геометрию и траектории электронов на новом шаге и т.д.

Построение математической модели электронной пушки заключается в решении самосогласованной задачи электронной оптики, описываемой системой уравнений:

$$- \text{уравнения потенциала } \Delta^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.4)$$

$$- \text{уравнение движения частиц } m \frac{d\vec{V}}{dt} = e \left[\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \right], \quad (1.5)$$

$$- \text{уравнение неразрывности потока } \operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (1.6)$$

Здесь U – величина потенциала, m , e – масса и заряд электрона соответственно, ρ – плотность заряда, \vec{E} – вектор напряженности электрического поля, \vec{B} – вектор индукции магнитного поля, \vec{V} – скорость электрона.

Совместное решение системы уравнений (1.4) – (1.6) выполняется методом простой итерации. На первой итерации рассчитывается поле потенциала электронной пушки, полагая величину пространственного заряда $\rho = 0$. На следующих итерациях внешнее электрическое поле и траектории движения электрона рассчитываются с учетом пространственного заряда. Увеличение количества итераций продолжается до того момента, пока значения, полученные на n -ой итерации не будут достаточно близки к значениям последующей $(n+1)$ -ой итерации. В качестве критерия сходимости

процесса рассматриваются относительные изменения координат r и скоростей V_r на выходе из анодного узла электронной пушки:

$$\left| \frac{r_n - r_{n-1}}{r_n} \right| \leq \varepsilon_{mp}, \quad \left| \frac{V_n - V_{n-1}}{V_n} \right| \leq \varepsilon_{mp}. \quad (1.7)$$

где ε_{mp} – заданная погрешность расчета траекторий.

Чтобы учесть распределение пространственного заряда в электронном пучке используется, так называемая, дискретная модель потока из деформируемых элементов. Для этого пучок электронов разбивается на слои в поперечном сечении. При формировании каждого деформируемого элемента учитывается условие равного тока на каждом слое, которое получается из условия одинакового заряда на каждом элементе. При этом с учетом неравномерного распределения плотности тока на катоде площади слоев будут различными.

Заряд каждого деформируемого элемента рассчитывается по формуле:

$$q = I_0 \Delta t / N_{cl},$$

где N_{cl} – число слоев; I_0 – ток луча; Δt – шаг интегрирования по времени.

Распределение по узлам сетки заряда на каждом деформируемом элементе выполняется при помощи алгоритма «частица в ячейке», который заключается в разбиении элемента на отдельные частицы.

Суммарный ток потока электронов складывается из общего вклада токов с элементарных участков катода:

$$I_0 = \sum_{m=1}^M I_m, \quad (1.8)$$

где M – число элементарных площадок на эмитирующей поверхности катода.

Из уравнения (1.3) по распределению потенциала вблизи поверхности катода вычисляются токи с элементарных участков с использованием закона степени трех вторых для плоского диода:

$$I_m = 2.33 \cdot 10^{-6} \frac{U_m^{3/2} S_m}{d^2}, \quad (1.9)$$

где U_m – потенциал точки, лежащей по нормали напротив центра элементарного участка на расстоянии d от катода, S_m – площадь элементарного участка катода.

Чтобы увеличить скорость сходимости для итеративного процесса, используется корректировка тока на катоде с использованием метода нижней релаксации:

$$I_n = I_{n-1} + \omega_i (I_n - I_{n-1}), \quad (1.10)$$

где I_n , I_{n-1} – величина тока на n -ой и $(n-1)$ -ой итерациях; $\omega_i < 1$ – весовой коэффициент, называемый параметром нижней релаксации.

Электрическое поле, задаваемое уравнением (1.4), рассчитывается методом конечных разностей с применением формулы верхней релаксации на каждом приближении. В граничных узлах сетки, находящихся на электродах пушки, задается условие Дирихле, а на открытых участках – условие Неймана.

Уравнение движения (1.5) для расчета траектории электронов решаются методом Рунге-Кутты 4-го порядка шаг интегрирования задается автоматически. Начальные условия – координаты электронов на катодном узле пушки и их начальные скорости (в первом приближении – тепловое распределение) задаются при разбиении на слои.

Учитываемые при решении уравнения (1.5) компоненты напряженности электрического поля находятся из уравнения Лапласа (или Пуассона) по значениям потенциала в ближайших узлах сетки методом конечно-разностного дифференцирования. Компоненты вектора индукции магнитного поля рассчитываются в параксиальном приближении по формулам:

$$B_z(r, z) = B(r, z) - (r/2) \frac{\partial B(r, z)}{\partial r}, \quad B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B(r, z)}{\partial r},$$

где $B(r, z)$ – распределение компоненты магнитной индукции в осевом направлении электронной пушки.

2. Математические методы анализа электронных пушек

2.1 Расчеты электронных пушек методом синтеза.

Методы решения задач фокусировки электронных пучков можно разделить на два класса:

1. В начальном приближении считаются известными геометрия и управляющее напряжение на электродах, а также магнитное поле (если требуется) системы формирования. Необходимо вычислить траектории движения электронов с учетом или без учета собственного пространственного заряда потока электронов.

2. В начальном приближении считаются известными требуемые траектории движения электронов. Необходимо вычислить геометрию и управляющее напряжение внешних электродов, а также конфигурацию магнитного поля (если требуется), обеспечивающие создание траекторий движения.

Первый класс методов называется методом анализа, второй – методом синтеза.

Одним из классических примеров использования метода синтеза считается метод расчета геометрии электродов пушек Пирса, с учетом того, что электроны движутся прямолинейно. Этот пример явно демонстрирует, что метод синтеза подразделяется на две задачи – *внешнюю* и *внутреннюю* задачи теории формирования. Это следует из того, что изначально задаются траектории движения электронов, затем находится распределение потенциала внутри потока электронов (по методу Пирса – внутри катодной системы), а затем рассчитывается (или последовательно подбирается) форма фокусирующего электрода и анода снаружи пучка электронов, которые обеспечивают требуемое распределение потенциала.

Недостатком решения задачи по методу Пирса является тот факт, что отсутствует отверстие в аноде. Это вносит существенные погрешности в

расчет: приближение, на котором в рассмотрение задачи вводится учет отверстия в аноде, картина резко меняется: вблизи анода существенно меняются траектории электронов (отклоняются от прямолинейного движения) и распределение потенциала. Возникает так называемая анодная линза, которая приводит к изменению распределения потенциала в поле электронной пушки.

Поэтому большой практический и теоретический интерес представляет задача разработки для систем формирования электронных пучков последовательных методов синтеза, которые могут позволить рассчитывать устройства, предсказывающие движение электронных пучков по заданным траекториям электронов.

Основоположником метода синтеза считается Г. А. Гринберг. Метод Гринберга состоит в следующем: уравнения движения заряженной частицы записываются, в так называемой, натуральной системе координат, т.е. в такой ортогональной системе, оси которой совпадают с направлениями касательной, главной нормали и бинормали к траектории в каждой ее точке. Такой метод задания координатной сетки позволяет решать и прямую и обратную задачи формирования электронных пучков, т.е. или найти траектории пучка по заданным электрическому и магнитному полям внешних фокусирующих электродов, или найти внешние фокусирующие поля по заданным траекториям.

Уравнения движения по методу Гринберга являются частным случаем уравнений параксиальной электронной оптики. Они дают возможность выполнить достаточно подробный теоретический анализ для систем фокусировки с криволинейной осью и используется в ряде расчета практических задач. По методу Гринберга в системе электронной пушки анализируются только прямолинейные пучки заряженных части без учета его собственного объемного заряда.

Крупный вклад в развитие метода синтеза сделал В.Т. Овчаров. Он предложил для решения внешней и внутренней задач системы формирования

электронных пучков использовать криволинейную ортогональную систему координат. Система выбирается таким образом, чтобы либо электронные траектории лежали на одной из координатных поверхностей, либо чтобы одна из ее координатных линий совпадала с заданными траекториями. Использование такой криволинейной системы координат позволяет преобразовать задачу о нахождении управляющих напряжений внутри электронного потока к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Такой подход позволяет рассматривать всю систему формирования в виде единого целого.

На теорию синтеза для систем формирования накладываются определенные ограничения, которые связаны с введением необходимых упрощающих предположений. Способы решения также связаны с трудностями, как при расчетах, так и при решении внешней задачи, то есть с геометрией электродов и конфигурацией магнитных полей.

Основным недостатком моделей электронных пушек, рассчитанных методом синтеза является сложная геометрия вычисляемых фокусирующих электродов, что в свою очередь связано с проблемами их технической реализации. Упростить сложную форму фокусирующих электродов позволяет расчет электронных пушек методом анализа, который представлен ниже.

2.2 Расчеты электронных пушек методом анализа.

При расчете электронных пушек методом анализа в первом приближении считаются известными форма электродов, образующих систему электродов катод-анод, распределение напряжения в них, а также величина плотности объемного заряда в пространстве, которое ограничено контурами электродов. Для решения задачи по распределению напряженности электрического поля в электронной пушке, используются

различные методы, самым распространенным из которых является метод конечных разностей.

Метод состоит в следующем: дифференциальное уравнение заменяется конечно-разностным аналогом, который получается если провести замену производных конечно-разностными приближенными выражениями. Предположим, что рассчитываемое поле потенциала удовлетворяет уравнению Пуассона в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.1)$$

Пусть требуется найти в некоторой точке O рассматриваемой области вторые производные потенциала. Из математического анализа известно, что можно записать через значения первых производных в соседних точке O точках a, b, c, d :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &\approx \frac{1}{h} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_a - \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_c, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_b - \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_d. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Первые производные в уравнении (2.2) можно выразить через конечные разности:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_a &\approx \frac{1}{h} \left(U_1 - U_0 \right)_{\rightarrow} & \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_c &\approx \frac{1}{h} \left(U_0 - U_3 \right)_{\leftarrow} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_b &\approx \frac{1}{h} \left(U_2 - U_0 \right)_{\rightarrow} & \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_d &\approx \frac{1}{h} \left(U_0 - U_4 \right)_{\leftarrow} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь U_1, U_2, U_3, U_4 – величина потенциала в соседних точках 1, 2, 3, 4, окружающих точку O .

Подставив (2.3) в (2.2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &\approx \frac{1}{h^2} \left(U_1 - U_0 \right)_{\rightarrow} - \left(U_0 - U_3 \right)_{\leftarrow} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h^2} \left(U_2 - U_0 \right)_{\rightarrow} - \left(U_0 - U_4 \right)_{\leftarrow} \end{aligned} \quad (2.4)$$

затем найдем сумму:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - 4U_0) \quad (2.5)$$

Таким образом, получим для уравнения Пуассона его конечно-разностный аналог:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - 4U_0 = -\frac{h^2 \rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.6)$$

Аналогично, можно получить конечно-разностный аналог для уравнения Лапласа в декартовой системе координат

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - 4U_0 = 0. \quad (2.7)$$

Соответственно для цилиндрической системы координат конечно-разностный аналог для уравнения Пуассона можно записать, как:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad (2.8)$$

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - 4U_0 + \frac{h}{2r_0} (U_2 - U_4) = -\frac{h^2 \rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.9)$$

где r_0 – расстояние от рассматриваемой точки до оси симметрии.

Если точка, лежит на оси симметрии, то вместо (2.9) для нее записывается уравнение:

$$U_1 + U_3 + 4U_2 - 6U_0 = -\frac{h^2 \rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.10)$$

Дискретный аналог связывает значения потенциала в каждой отдельной дискретной точке. Таким образом, чтобы вычислить поле в расчетной области, она разбивается на квадратную сетку с шагом h . Дискретный аналог записывается в каждом узле, который лежит внутри области рассмотрения. Конечно-разностное уравнение связывает потенциал в каждом узле с четырьмя прилежащими данному узлу соседними узлами сетки. Для узлов, лежащих на границе расчетной области, задаются начальные значения потенциала, например, по контуру электродов.

Конечно-разностные уравнения (2.6) – (2.10) записываются в узлах сетки, и образуют систему линейных алгебраических уравнений, число которых равно числу неизвестных. Т.е., в такой постановке можно свести, к решению системы алгебраических уравнений решение краевой задачи. Система дополняется граничными условиями, которые задают значения потенциала в опорных точках и граничных узлах.

Чтобы минимизировать погрешность, связанную с заменой конечно-разностным уравнением дифференциального, следует уменьшить шаг сетки, т.е., соответственно увеличить количество узлов и, как следствие, увеличить порядок системы уравнений. Количество узлов в расчетах иногда может превосходить десять тысяч, что приводит к невозможности непосредственного решения системы уравнений методом исключений. Поэтому для решения используется метод простых итераций, или иначе последовательных приближений. На данный момент этот метод, имеющий ряд разновидностей, получил широкое применение при расчетах полей на ЭВМ.

Для расчета траекторий движения электронов в электронных пушках, широко используется метод последовательных приближений, который заключается в следующем. В первом приближении используется конфигурация электрического поля без учета собственных полей пучка электронов. На втором приближении рассчитываются поля и траектории с приближенным учетом собственных полей потока электронов. Подбор пошагового процесса последовательных приближений применяется до того момента, пока значения функций текущего n -го приближения не будут достаточно близкими к значениям функции предыдущего $(n - 1)$ -го приближения. Чтобы оценить сходимость процесса используется критерий, на котором можно анализировать сходимость, например, координат и углов расходимости траекторий движения электронов в некоторой выбранной плоскости анализируемой системы. Если процесс сходится, то для получения

конечного результата с заданной точностью обычно необходимо 5 – 10 приближений.

Для решения самосогласованных систем методом последовательных приближений применяется дискретная модель пучка электронов в виде траекторий – токовых трубок. На входе в анализируемую систему пучка электронов разделяется в поперечном направлении на N элементарных слоев – токовых трубок. Тогда в каждой трубке ΔI_k парциальный ток рассчитывается по вычисленной площади поперечного сечения трубки и распределению плотности тока в поперечном сечении пучка (в предположении, что последнее считается известным). Этот ток объясняется одной «центральной» траекторией трубки, ход которой рассчитывается в будущем. В этом случае решение системы самосогласованных уравнений приводится к совместному решению уравнений движения, поля и непрерывности тока. Последний, примененный к данной модели пучка, имеет вид $\Delta I_k = \text{const}$. Известное распределение заряда вычисляет поле следующего приближения и т.д.

2.3 Способы расчета реальных магнитных полей в электронных пушках

Наиболее популярными в применении на данный момент являются, так называемые датчики э.д.с. Холла, т.е. полупроводниковые измерители магнитных полей. Датчики э.д.с. Холла позволяют измерять как переменные, так и переменные магнитные поля.

Если через боковые грани образца проходит постоянный ток, то в присутствии внешнего магнитного поля возникнет поперечная разность потенциалов, которая называется эффектом Холла. Если образец из полупроводникового материала сделан в форме параллелепипеда, то эта разность потенциалов задается формулой

$$U_y = R \frac{i_x H_z}{d} 10^{-8} \text{ в} \quad (2.11)$$

где H_z – напряженность магнитного поля, i_x – сила тока в образце, R – константа Холла, d – толщина образца.

Поэтому можно по формуле (2.11) оценить, что если пропускается постоянный ток через образец, то в образце будет возникать напряжение электрического поля, которое будет пропорциональным напряженности магнитного поля с точностью до десятых долей процентов.

В качестве примера рассмотрим задачу, которая позволяет рассчитать форму и геометрию электронного пучка от катода до анода, проанализировать возможность сходимости пучка, а затем на основе рассчитанных параметров, оптимизировать электронную пушку.

Исходные данные:

1. Напряжение на аноде – 52 кВ;
2. Число пучков электронов – 40;
3. Конфигурация пучков электронов:
 - а) 21 луч с диаметром 84 мкм,
 - б) 19 луч с диаметром 64 мкм;
4. Канал системы катод-анод 6,5 – 8 мм;
5. Суммарный первеанс $\approx 20 \times 10^{-6} \text{ А/В}^{3/2}$;
6. Диаметр катода – 8,6 мм.

Для расчета электронной пушки на основе метода синтеза будем использовать теорию Овчарова. Внутренние траектории рассчитываются из крайней по формуле

$$\frac{r}{\Phi_0} = q_2 \varphi \frac{Z}{l}, \quad (2.12)$$

где φ – функция, задающая крайнее значение траектории потока электронов в цилиндрической системе координат; Φ_0 – радиальные размеры пучка; l – единица измерения продольных размеров пучка; q_2 – криволинейная

ортогональная координата; Z – продольная координата цилиндрической системы координат; r – радиальная координата цилиндрической системы координаты.

В криволинейной системе координат крайняя траектория потока имеет $q_2 = 1$, осевая $q_2 = 0$, а остальные $0 < q_2 < 1$.

Чтобы получить рассчитанную конфигурацию симметричного аксиального электронного луча, необходимо решить следующее дифференциальное уравнение:

$$\varphi^2 u'' + 2\varphi\varphi' u' + 4u'' \varphi\varphi^2 + \frac{\varphi^4 h^2 - \varphi_k^4 h_k^2}{\varphi^2} = \frac{i}{\sqrt{u}}. \quad (2.13)$$

Здесь $\varphi(x)$ – функция, задающая крайнее значение траектории потока электронов и совпадающая с выражением (2.12); $u(x)$ – задает осевое распределение потенциала; $h(x)$ – задает осевое распределение магнитного поля; $h_k = h(0)$ – значение функции $h(x)$ на катоде; $\varphi_k = (\varphi 0)$ – значение функции (φx) на катоде.

Т.к. в осевом направлении пучка криволинейная система координат является цилиндрической, следовательно, функции $u(x)$ и $h(x)$ совпадают с функциями, которые описывают, соответственно, осевое распределение потенциала и магнитного поля в цилиндрической системе координат.

Дифференцирование в уравнении (2.13) проводится по продольной координате x . Постоянная в (2.13) задается выражением

$$i = 0,297 \frac{H_0 l}{\sqrt{V_0}}. \quad (2.14)$$

здесь H_0 – напряженность магнитного поля; l – продольные размеры пучка; V_0 – потенциал.

Постоянная i в (2.12) определяет ток потока электронов. Микропервеанс пучка определяется по i и по значению потенциала V_0 формулой:

$$i = \frac{0,0605 \cdot P_\mu}{\mu^2}, \quad (2.15)$$

где $\mu = (\Phi_0/l)$; P_μ – микропереванс пучка.

Параксиальная теория позволяет решать внешнюю задачу в криволинейной системе координат используя трансцендентное уравнение

$$V = u + \mu^2 q_2^2 \cdot (u \cdot \varphi'' \cdot \varphi + \frac{\varphi^2}{4} \times \frac{\varphi^4 h^2 - \varphi_k^4 h_k^2}{\varphi^2}) + \frac{\mu^2 i}{4\sqrt{u}} (-q_2^2 + \ln q_2^2), \quad (2.16)$$

где $V = U/U_0$ – потенциал по заданному значению эквипотенциальной линии.

Уравнение (2.16) разрешается относительно функции $q_2(x)$ для каждого значения x .

По результатам анализа находится значение функции $q_2^*(x)$, по которому определяется форма искомой эквипотенциальной линии в криволинейной ортогональной системе координат.

Затем требуется вернуться от криволинейной системы координат к цилиндрической с помощью параметризации

$$\frac{d\xi}{dq_2} = - \frac{\mu^2 \cdot \xi \cdot \varphi}{1 + \mu \sqrt{2 \xi \varphi^2}} q_2, \quad (2.17)$$

которая выполняется с начальными условиями:

$$q_2 = 0; \xi = x.$$

Интегрирование выполняется до $q_2 = q_2^*$, где q_2^* - решение уравнения (2.17) для текущего значения x .

Соответствующее q_2^* значение переменной ξ есть ξ^* , которая используется для вычисления цилиндрических координат r и z :

$$\begin{cases} \frac{r}{l} = \mu q_2^* \xi \\ \frac{z}{l} = \xi^* \end{cases} \quad (2.18)$$

На практике уравнения (2.17) и (2.18), описывающие внешнюю задачу, можно решить только численно при помощи электронных вычислительных машин.

Начальное приближение распределения функции потенциала внутри пучка в первом приближении параксиальной теории формирования в криволинейной системе координат задается формулой

$$V_1 = u + \mu^2 q_2^2 \cdot (u \cdot \varphi'' \cdot \varphi + \frac{\varphi^2}{4} \times \frac{\varphi^4 h^2 - \varphi_k^4 h_k^2}{\varphi^2}), \quad (2.19)$$

где V_1 – потенциал заданной эквипотенциальной линии. Функция распределения плотности тока внутри пучка электронов в криволинейной системе координат задается однородной.

2.4 Расчет электростатических электронных пушек

В качестве примера рассмотрим задачу, со следующими единицами измерения:

- Φ_0 – радиус в начале пучка, который определяет радиальные размеры системы,
- l – расстояние от катода до оси пучка, который определяет продольные размеры системы,
- U_0 – значение потенциала.

Для решения внутренней задачи по расчету электростатических электронных пушек используются два варианта: или известно задание траекторий электронного пучка, а по нему из уравнения (2.13) рассчитывается осевое распределение потенциала, или, известна конфигурация осевого распределения потенциала, а из уравнения (2.13) рассчитываются траектории движения электронов.

Для распределения потенциала, которое задается функцией $u(x)$, а также для траектории электронов, которая задается функцией $\varphi(x)$ в расчете

электронной пушки применяются определенные условия, называемые граничными условиями для функции $u(x)$:

$$x = 0, u \overset{\sim}{=} 0, u' \overset{\sim}{=} 0; \quad (2.20)$$

$$x \geq 1, u = 1, u' = u'' = 0. \quad (2.21)$$

Условия (2.20) определяют работу катода при наличии пространственного заряда, а условия (2.21) – определяют нулевой потенциал на оси электронной пушки.

Для функции $\varphi(x)$ при $x=0$ используется условие:

$$\varphi'' \overset{\sim}{=} 0. \quad (2.22)$$

Условие (2.22), определяет сферичность эмитирующей поверхности катода.

Будем рассчитывать электронную пушку задавая функцию $u(x)$, и вычисляя функцию $\varphi(x)$. Тогда функция $u(x)$ задается таким образом, чтобы выполнялись условия (2.20), (2.21), но также необходимо еще задавать функцию $u(x)$ в области малых значений x , при которой функция $\varphi(x)$, определяемая из выражения (2.12), соответствовала бы выполнению условия (2.22).

Если найден такой способ задания функции $u(x)$, то, после проведения расчета нескольких вариантов внутренней задачи, можно построить схему рекомендаций как проводить расчет электронных пушек, и формировать на выходе пучок электронов с определенными параметрами.

Чтобы решить уравнение (2.22) требуется задание начальных условий. Расчетная модель внутренней задачи электронной пушки выстраивается в направлении от катода, с заданием граничных условий $u(x)$ и $u'(x)$ при $x = 0$. Но в этом случае, когда на катоде $u(x) = 0$, то правая часть уравнения (2.22) стремится к бесконечности. Эту проблему можно разрешить следующим образом. Задается функция $u(x)$, затем находится приближенное аналитическое решение уравнения (2.12), которое справедливо в области малых x . Это решение принимается за начальное приближение, и уже с этого

аналитического решения выполняется первая итерация с катода в точку, где значение функции $u(x)$ уже не равно нулю. Далее проводится решение уравнения (2.12) методом простых итераций до достижения сходимости. Выберем в качестве начального аналитического решения вид функции $u(x)$ следующей формулой:

$$u = kx^{4/3} f^2, \quad (2.23)$$

где

$$f = 1 + \sum_{n=1}^5 a_n \cdot x^n, \quad (2.24)$$

k, a_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) – некоторые постоянные коэффициенты.

Немаловажен тот факт, что функция $u(x)$, которая задается выражением (2.23), остается всегда положительной (при положительных значениях x) и удовлетворяет граничному условию (2.20). А при малых значениях x функция $u(x)$ совпадает с функцией $kx^{4/3}$, описывающей осевое распределение потенциала.

Коэффициенты a_1, a_2 , многочлена (2.23) выбираются так, чтобы выполнялось условие (2.22), а коэффициенты a_3, a_4, a_5 должны удовлетворять условию (2.21).

Чтобы найти соответствующие коэффициенты a_1, a_2 , определим для функции $u(x)$, которая задается выражением (2.13), приближенное решение уравнения (2.12), являющееся справедливым при малых x .

В такой постановке задачи решение для функции $\varphi(x)$ ищется в виде полинома

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{n=1}^5 b_n \cdot x^n, \quad (2.25)$$

Из этого многочлена вытекает, что значение $\varphi''(x)$ при $x = 0$ будет определяться значением b_2 . Таким образом, чтобы выполнялось условие (2.22) нужно получить такие значения для коэффициентов a_n , при которых b_2 будет равно нулю. Для этого подставим формулы (2.23), (2.25) в уравнение (2.12) и, затем приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях

x , и выразим b_n через a_n . После полученных манипуляций получим, что коэффициенты a_1, a_2 , учитывая также, что должно выполняться условие $b_2 = 0$, должны соответствовать следующим выражениям:

$$a_1 = -\frac{8}{15}b_1; \quad (2.26)$$

$$a_2 = \frac{361}{900}b_1^2. \quad (2.27)$$

Из уравнения (2.25) следует, что коэффициент b_1 однозначно определяет значение первой производной от функции $\varphi(x)$ в точке $x = 0$, т.е. на катоде. Поэтому введем обозначение $b_1 = -\varphi'_k$, с учетом которого формулы (2.26) и (2.27) запишутся:

$$a_1 = -\frac{8}{15}\varphi'_k; \quad (2.28)$$

$$a_2 = \frac{361}{900}\varphi_k'^2. \quad (2.29)$$

Данный расчет позволяет также установить, что при малых x коэффициенты k, b_3, b_4 связаны с постоянными коэффициентами i, a_3, a_4 выражениями:

$$k = \left(\frac{9}{4}\right)i^{2/3}; \quad (2.30)$$

$$b_3 = -\frac{33}{37}\left(\frac{74377}{222750}\varphi_k'^3 + a_3\right); \quad (2.31)$$

$$b_4 = 0,228771 \cdot \varphi_k'^4 + 1,154518 \cdot \varphi_k' \cdot b_3 - 0,783582 \cdot a_4 \quad (2.32)$$

Эти соотношения позволяют приближенно вычислить решение уравнения (2.12), которое справедливо при малых x , если значения коэффициентов a_3, a_4 известны.

Имея начальное приближение, необходимо найти значения коэффициентов a_3, a_4, a_5 , которые удовлетворяют условиям (2.21). Вычислим первую и вторую производные от функции $u(x)$ и в точке $x = 1$ наложим

следующие условия: $u(\infty) = 1, u'(\infty) = 0, u''(\infty) = 0$. В результате будет получена система трех уравнений, решив которую относительно a_3, a_4, a_5 , получим:

$$a_3 = \frac{119}{9} \cdot \left(\frac{9}{4}i\right)^{-1/3} - 10 + \frac{48}{15} \cdot \varphi'_k - \frac{361}{300} \cdot \varphi'_k{}^2; \quad (2.33)$$

$$a_4 = -\frac{187}{9} \cdot \left(\frac{9}{4}i\right)^{-1/3} - 10 + \frac{64}{15} \cdot \varphi'_k + \frac{361}{900} \cdot \varphi'_k{}^2; \quad (2.34)$$

$$a_5 = -\frac{77}{9} \cdot \left(\frac{9}{4}i\right)^{-1/3} + \frac{24}{15} \cdot \varphi'_k - \frac{361}{900} \cdot \varphi'_k{}^2 - 6. \quad (2.35)$$

Уравнения (2.23), (2.28), (2.29), (2.33) – (2.35) лежат в основе определения способа задания функции $u(x)$, для которого выполняются как граничные условия (2.20), (2.21), накладываемое на функцию $u(x)$, так и граничное условие (2.22), накладываемое на функцию $\varphi(x)$.

Как только найдена функция $u(x)$, находится решение внутренней задачи для электростатической электронной пушки, т.е. решение уравнения (2.12).

Найдем решение уравнения (2.12) с помощью конечно-разностного аналога при следующих начальных условиях: $x = x_0, \varphi = \varphi_0, \varphi' = \varphi'_0$.

Величину параметра x_0 выбирается достаточно малым ($0,0001 + 0,01$), а значения φ_0 и φ'_0 для точки $x = x_0$ вычисляется в соответствии с (2.25) по следующим выражениям:

$$\varphi_0 = 1 + \varphi'_k \cdot x_0 + b_3 \cdot x_0^3 + b_4 \cdot x_0^4; \quad (2.36)$$

$$\varphi_0 = \varphi'_k \cdot x_0 + 3 \cdot b_3 \cdot x_0^2 + 4 \cdot b_4 \cdot x_0^3. \quad (2.37)$$

Значения коэффициентов b_3, b_4 при малых значениях x , вычисляются по выражениям (2.31), (2.32), а входящие в них значения a_3, a_4, a_5 , определяются формулами (2.32) – (2.35).

Решение уравнения (2.12) конечно-разностным методом будет проводиться до критической точки $x_{кр}$, в которой производная $\varphi'(x)$ равна нулю, т.е. до узловой точки пучка.

Для решения внутренней задачи моделирования электронной пушки требуется задать значения параметров i , φ'_k . Параметр i , как вытекает из уравнения (2.14), является характеристикой первеанса электронной пушки. Параметр φ'_k задает радиус кривизны катода пушки ($R_{кр}$), вычисляемый из выражения:

$$\frac{R_{кр}}{l} = -\frac{1}{\varphi'_k};$$

Можно конечно-разностным методом решить также внешнюю задачу. Для этого из уравнения (2.15) сначала находим решение внешней задачи в криволинейной системе координат, и используя его как начальное приближение, находим решение уравнения (2.16), осуществляя таким образом переход к цилиндрической системе координат. Решая внешнюю задачу требуется задание параметра $V = U/U_0$, где U – значение потенциала того электрода, геометрическую форму которого требуется вычислить. При анализе геометрической формы прикатодного фокусирующего электрода параметр V считается равным нулю, а если требуется вычислить форму анода пушки, то значение параметра V рассчитывается по формуле

$$V = 1 + \frac{\mu^2 i}{4} (1 - \ln b^2), \quad (2.38)$$

где $b = r_n/r_k$ – коэффициент заполнения канала пучком; r_n , r_k – соответственно радиусы пучка и пролетного канала.

Из уравнения (2.29) вытекает характеристика провисания потенциала по отношению к трубе дрейфа прибора, которая заполняется потоком электронов с микропервеансом P_μ и коэффициентом заполнения b . Это вытекает из уравнений (2.12), (2.15) при условии (2.21).

После того, как найдены решения для внутренней и внешней задач по описанному выше алгоритму, требуется при помощи (2.28) найти радиус кривизны катода $R_{кр}$. Этот параметр характеризует площадь эмитирующей поверхности и находится из точки пересечения дуги радиуса R_k с графиком функции $\varphi(x)$.

Обобщив полученные значения внутренней задачи для электронной пушки, можно составить методику расчета пушки с ожидаемыми характеристиками.

Выполнение граничного условия (2.12) сводит функцию $\varphi(x)$ для малых значений x к прямой линии, которая образует с осью x угол φ'_k . Это позволит вычислить радиус катода r_k по результатам решения задачи по пересечению данной прямой с дугой окружности, радиус которой вычисляется из выражения (2.28). Выполнив все расчеты, будем иметь:

$$\frac{r_k}{l} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_k'^2 + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2}}; \quad (2.39)$$

Пусть радиус кривизны пучка обозначается как $r_{кр}$. Тогда $r_{кр}$ – это значение функции $\varphi(x)$, получаемое из функции кривизны $\varphi_{кр}$, который вычисляется из формулы:

$$\frac{r_{кр}}{l} = \mu \cdot \varphi_{кр}, \quad (2.40)$$

Определим линейную сходимость потока электронов, как отношение радиуса катода r_k к радиусу кривизны пучка $r_{кр}$. Из выражений (2.31), (2.40) можно определить линейную сходимость электронного потока следующим выражением:

$$S = \frac{1}{\varphi_{кр} \sqrt{1 + \varphi_k' \mu^2}}; \quad (2.41)$$

Характеристика зависимости $\varphi_{кр}$ от φ'_k получается как результат реализации внутренней задачи в зависимости от набора значений параметра φ'_k , которые лежат в интервале $1,2 \leq \varphi'_k \leq 2,4$. В данном расчете величина значения параметра i остается постоянным и равно 0,4. Полученную зависимость аппроксимируем формулой

$$\varphi_{кр} = 1,05 + 0,709 \cdot \varphi'_k + 0,125 \cdot \varphi_k'^2. \quad (2.42)$$

Подставляя (2.42) в (2.41), получаем:

$$S = \frac{b}{\sqrt{0,05 + 0,709 \cdot \varphi'_k + 0,125 \cdot \varphi_k'^2} \times \sqrt{1 + \varphi_k' \mu^2}}; \quad (2.43)$$

Выражение (2.43) может использоваться для расчета интервала значений параметра φ'_k , который позволяет построить модель пушки со сфокусированным пучком при заданных значениях сходимости S .

При создании методики расчета электростатической электронной пушки полагаем, что заданы первичный пучок электронов P_μ , линейная сходимость электронного пучка S и коэффициент заполнения канала пучком b .

Чтобы решить внутреннюю задачу нужно задать начальное приближение параметров i , φ'_k , а чтобы решить внешнюю задачу – дополнительно указать значения коэффициента μ и потенциалов V_1 , V_2 . По значению потенциала V_1 определяется форма прикатодного фокусирующего электрода пушки, а значению потенциала V_2 форма анода пушки. Поэтому величина V_1 полагается равной нулю, а величина V_2 вычисляется по начальным значениям P_μ и b из выражения (2.31). Величина параметра i выбирается равной 0,4. Величина параметра φ'_k находится из начального приближения S и рассчитанному значению μ из выражения (2.34). Это уравнение трансцендентное и его можно решить только численно.

Когда результирующие величины параметров i , V_1 , φ'_k , μ численно рассчитаны, проводится окончательный расчет параметров пушки, результатом которого является сформированный поток электронов с определенными параметрами.

Описанный алгоритм расчета реализован в программе «Расчет параметров электронной пушки». Эта программа вычисляет геометрию электронной пушки, а затем конфигурацию пучка электронов. Для вычисления необходимо задать шесть параметров:

H – ширина области моделирования,

R – радиус управляющего электрода,

α – угол раствора управляющего электрода,

r – глубина погружения катода,

L – расстояние между катодом и анодом,

D – диаметр выходного отверстия анода.

В результате расчета определяется теоретическая и технологическая геометрия электронной пушки и по результатам рассчитывается коэффициент пропускания.

3. Проведение модельных экспериментов по исследованию параметров пушки

Для проведения модельных экспериментов был разработан и использован программный модуль «Расчет параметров электронной пушки». Исследования проводились для определения оптимальных параметров настройки пушки.

Анализ литературных источников показал, что при определении оптимальных параметров настройки пушки необходимо выбрать оптимальную величину зазоров между элементарными ленточными катодами. Если выбранная величина зазоров будет слишком велика, то при высоких температурах вследствие линейного теплового расширения кернов с размещенным на них эмиссионным слоем, образующим эмитирующую поверхность каждого катода, произойдет увеличение длины катодов на величину, меньшую, чем величина разделяющих их зазоров. При этом между элементарными ленточными катодами остаются не покрытые эмиссионным слоем промежутки, что препятствует получению общей эмитирующей поверхности, близкой к непрерывной поверхности, и снижает равномерность распределения электронного потока по сечению. Если выбранная величина зазоров будет слишком мала, то при высоких температурах элементарные ленточные катоды могут увеличить свою длину на величину, превышающую величину разделяющих их зазоров, вследствие чего в местах смыкания элементарных катодов могут возникнуть механические напряжения, приводящие к деформации и даже к разрушению катодов. При этом может произойти изменение положения эмитирующей поверхности элементарных катодов относительно других электродов электронной пушки, то есть искажение геометрии ЭОС пушки. Это также может привести к снижению равномерности распределения электронного потока по сечению, а также уменьшению надежности и долговечности катодного узла и электронной пушки.

Таким образом, для обеспечения надежной работы пушки и увеличения продолжительности ее работоспособности нужно:

1. Создать однородный тепловой режим катодного узла
2. Получить более однородную общую эмитирующую поверхность
3. Сохранить ее заданное геометрическое расположение в ЭОС электронной пушки

Анализ библиографических источников показал, что величина зазора между элементарными ленточными катодами зависит от коэффициента теплового расширения материала катодного цилиндра при максимальной температуре элементарного ленточного катода, длины катодного цилиндра при комнатной температуре и максимальной температуры элементарного ленточного катода

Минимальная величина зазора определяется величиной максимально возможного удлинения катодного цилиндра, выполненного из материала с заданным коэффициентом теплового расширения, при максимальной температуре, до которой катод может быть нагрет в процессе технологического цикла изготовления, испытания и работы электронной пушки. Если данное условие выполняется, то удастся при достижении катодом максимальной температуры избежать деформации элементарных ленточных катодов и выхода их из строя и сохранить геометрию ЭОС электронной пушки, что обеспечит равномерность распределения по сечению протяженного электронного потока и приведет к повышению надежности и долговечности катодного узла и электронной пушки.

Выбор максимально возможной величины зазоров между элементарными ленточными катодами определяется назначением электронной пушки, в которой будет использован данный катодный узел.

При работе электронной пушки в результате термического расширения происходит увеличение длины каждого катодного цилиндра элементарного

ленточного катода, в результате эти сближаются друг с другом, образуя общую эмитирующую поверхность, близкую к непрерывной поверхности.

Имеет место зависимость размеров эмитирующей поверхности катода от выходной мощности в импульсе, подаваемого на анод пушки ускоряющего напряжения и тока на выходе.

Так, например, в работе [] эксперименты на макетах электронных пушек показали, что на расстоянии 3-4 см от выходного окна электронной пушки, выходящий из нее протяженный электронный поток заданной мощности будет однородным по своей длине на уровне 90% при условии, что зазоры между элементарными ленточными катодами не превысят 2,3 мм.

Для формирования формы пучка на практике достаточно выдержать форму электродов вблизи границы пучка. Если заданы напряжение и ток пучка, а также его поперечный размер на выходе из пушки, то тогда расчет пушки сводится к определению расстояния анод - катод.

Площадь катода легко определить по заданным размерам пучка, что позволяет оценить плотность тока на катоде и найти расстояние анод - катод.

Наличие отверстия в аноде пушки приводит к образованию рассеивающей линзы-диафрагмы, фокусное расстояние которой находится как отношение потенциала анода с коэффициентом к разности напряженностей слева и справа от анода. И рассматриваемые пушки будут давать на выходе расходящиеся пучки, у которых углы расхождения пропорциональны отношению радиуса анода к расстоянию анод – катод. Из этого следует, что расфокусирующее действие анодного отверстия возрастает по мере увеличения отношения толщины потока к междуэлектродному расстоянию. При практическом моделировании пушки была использована упрощенная форма электродов, которая обеспечивает необходимое распределение потенциала лишь вблизи границы пучка.

На основании всего вышесказанного было решено исследовать зависимость пропускающей способности от: ширины области моделирования, радиуса управляющего электрода, угла раствора

управляющего электрода, глубины погружения катода, расстояния между катодом и анодом, диаметра выходного отверстия анода на предмет выявления тех значений указанных параметров, при которых пропускающая способность достигает максимального значения.

При последовательном подборе параметров исследуется влияние каждого отдельно взятого фактора на пропускающую способность при некоторых фиксированных значениях других факторов. По мере получения оптимальных значений ими заменяются соответствующие фиксированные.

Сначала был определен диапазон угла раствора управляющего электрода.

Первоначально угол был взят в диапазоне от 0 до 45 градусов. Проведенные эксперименты (рисунки) показали, что диапазон можно сузить, так как именно при углах от 21 до 24 градусов коэффициент пропускания принимает максимальные значения.

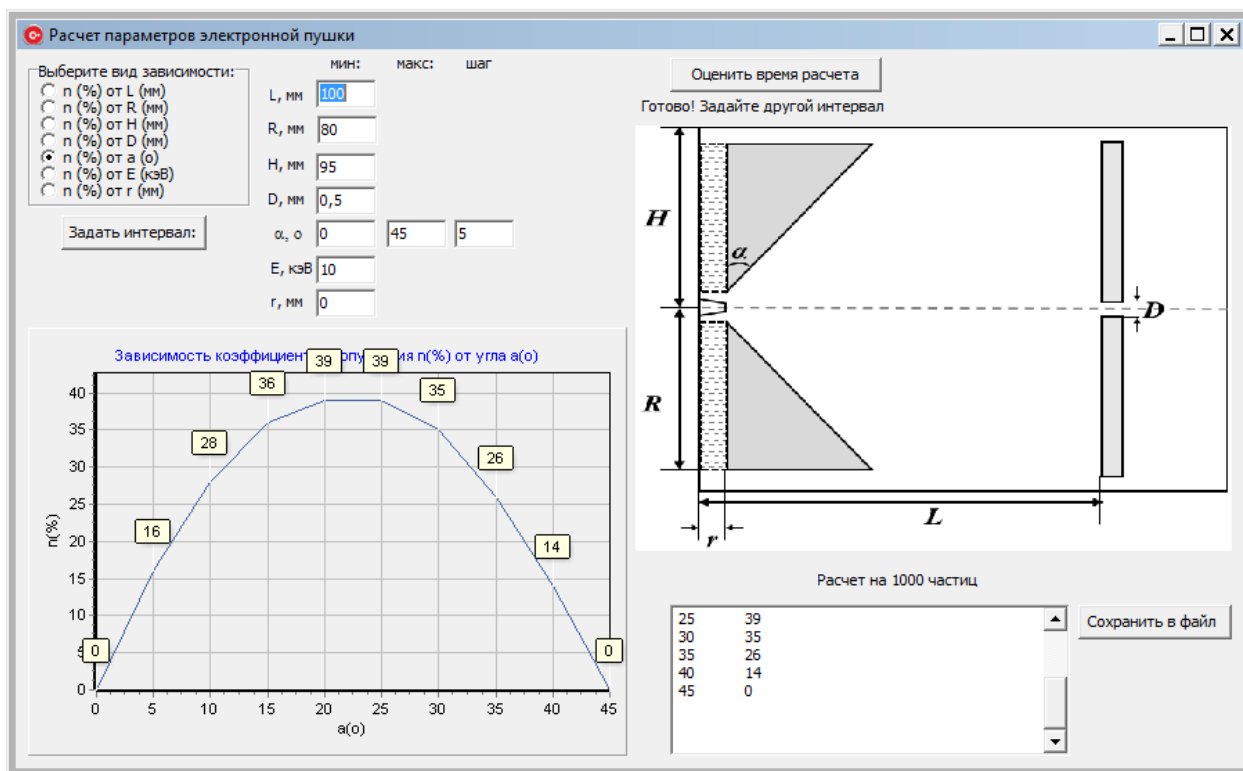


Рисунок 3.1. Первоначальный подбор угла раствора

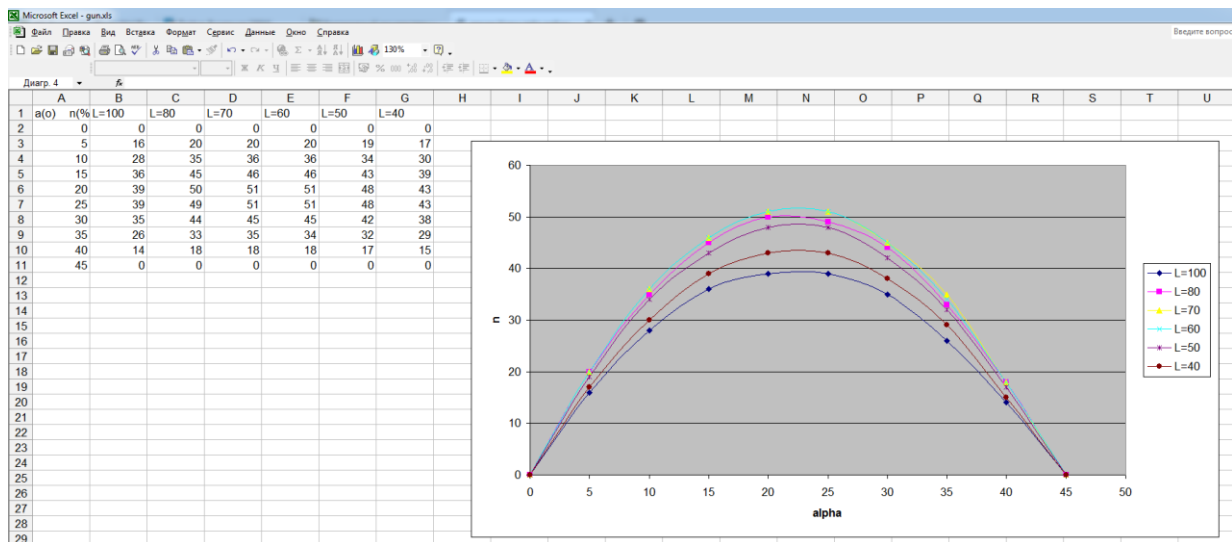


Рисунок 3.2. Изменение зависимости коэффициента пропускной способности от угла при изменении расстояния между катодом и анодом

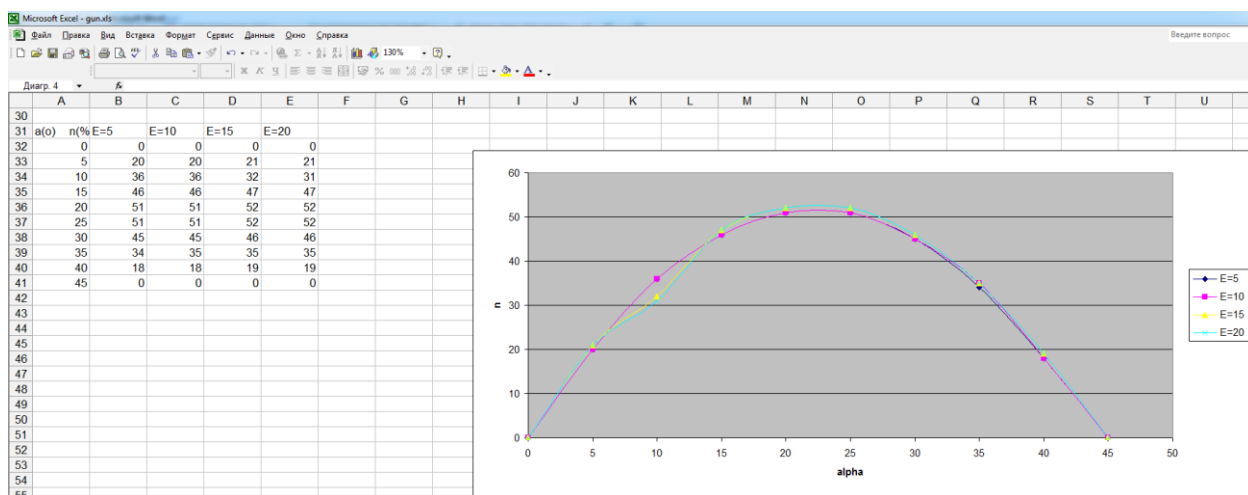


Рис. 3.3 Изменение зависимости коэффициента пропускной способности от угла при изменении напряженности

Из графиков зависимостей коэффициента пропускной способности от угла при изменении расстояния между катодом и анодом при различных значениях последнего (рис. 3.2) можно увидеть, что наилучшее расстояние должно находиться в пределах [60; 80].

Зафиксировав значение расстояния между катодом и анодом на уровне 70мм, исследовали влияние напряженности (рис. 3.3). В результате получили слабую степень влияния изменения коэффициента пропускной способности

от угла при значениях напряженности от 5 до 20кэВ. Наилучшим значением напряженности было выбрано равное 15кэВ.

Далее исследования проводились при уменьшении диапазона углов сначала от 18 до 27 градусов, а затем от 21 до 24 (рис. 3.4 – 3.6) для определения наилучшего значения диаметра выходного отверстия анода D .

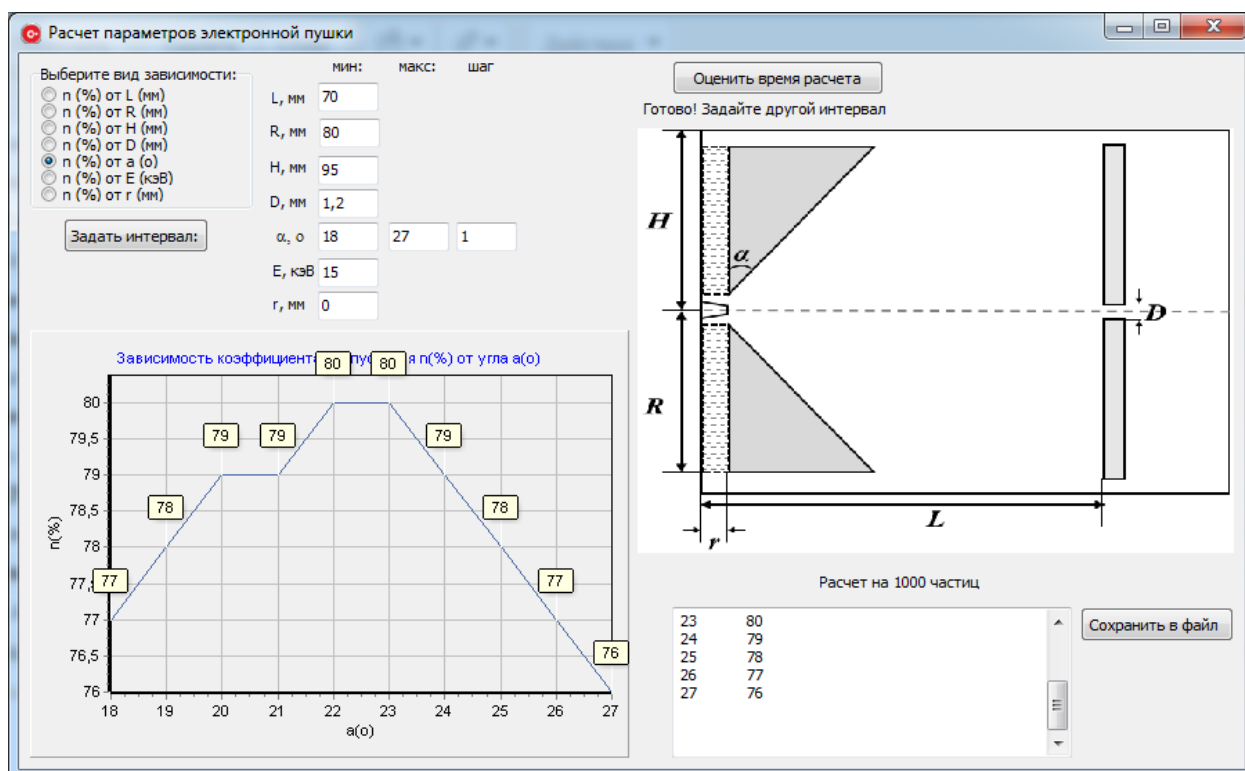


Рис. 3.4 Значения коэффициента пропускной способности от угла ($18 \leq \alpha \leq 27$) при изменении диаметра выходного отверстия анода D

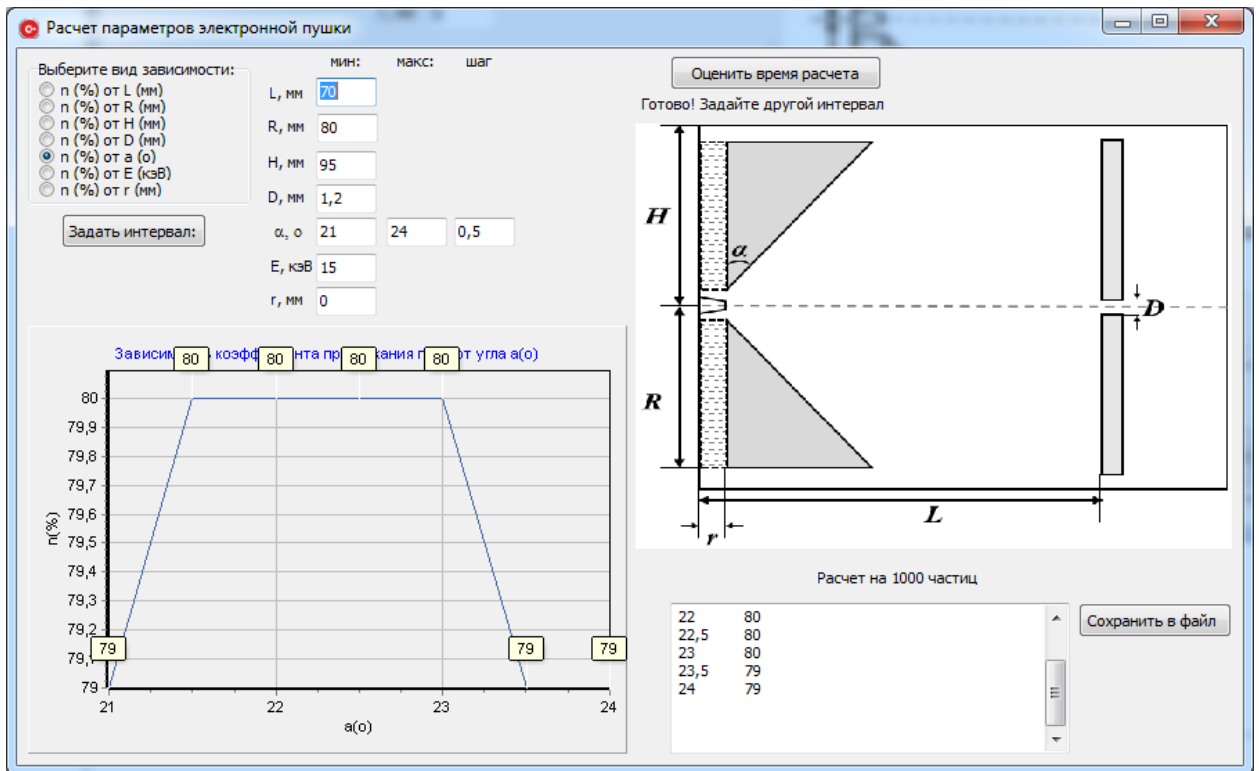


Рис. 3.5 Значения коэффициента пропускной способности от угла ($21 \leq \alpha \leq 24$) при изменении диаметра выходного отверстия анода D

α (°)	n(%) d=0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,2	1,3	1,5	2,1
10	0	21	32	46	52	55	55	55	52	24
15	2	26	47	59	67	71	71	71	67	31
20	4	34	52	65	74	78	79	78	74	34
25	5	34	52	65	73	78	78	78	73	34
30	5	30	46	58	65	69	70	69	65	30
35	4	23	35	44	50	53	53	53	50	23

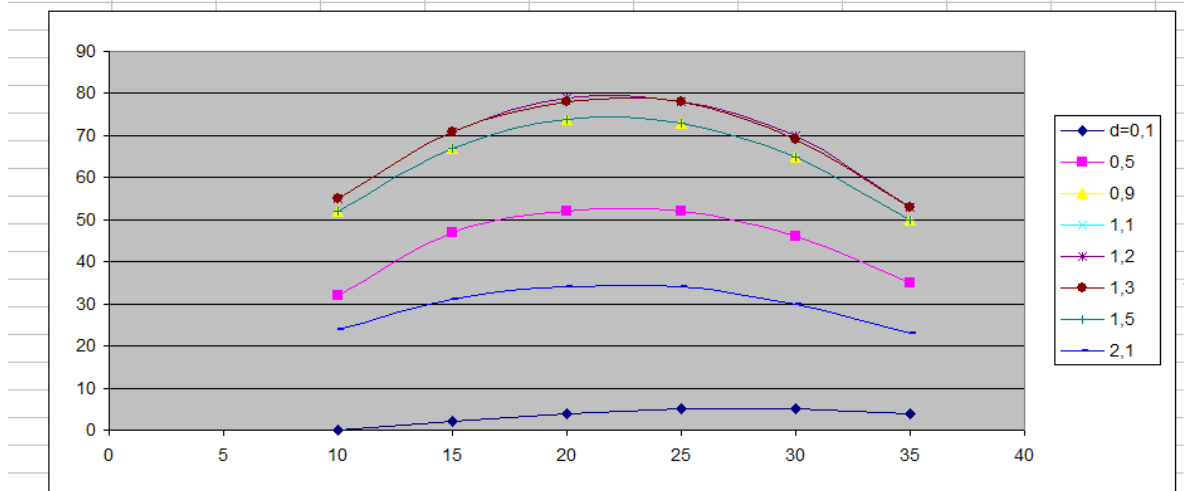


Рис. 3.6 Изменение зависимости коэффициента пропускной способности от угла при различных значениях диаметра выходного отверстия анода D

Следующим шагом явилось определение оптимального значения глубины погружения катода. Результаты проведенных экспериментов представлены на рисунке 3.7.

a(о)	n(% r=0	r=+-0,5	r=+-1
10	55	54	48
15	71	69	62
20	79	76	69
25	78	76	69
30	70	68	61
35	53	51	46

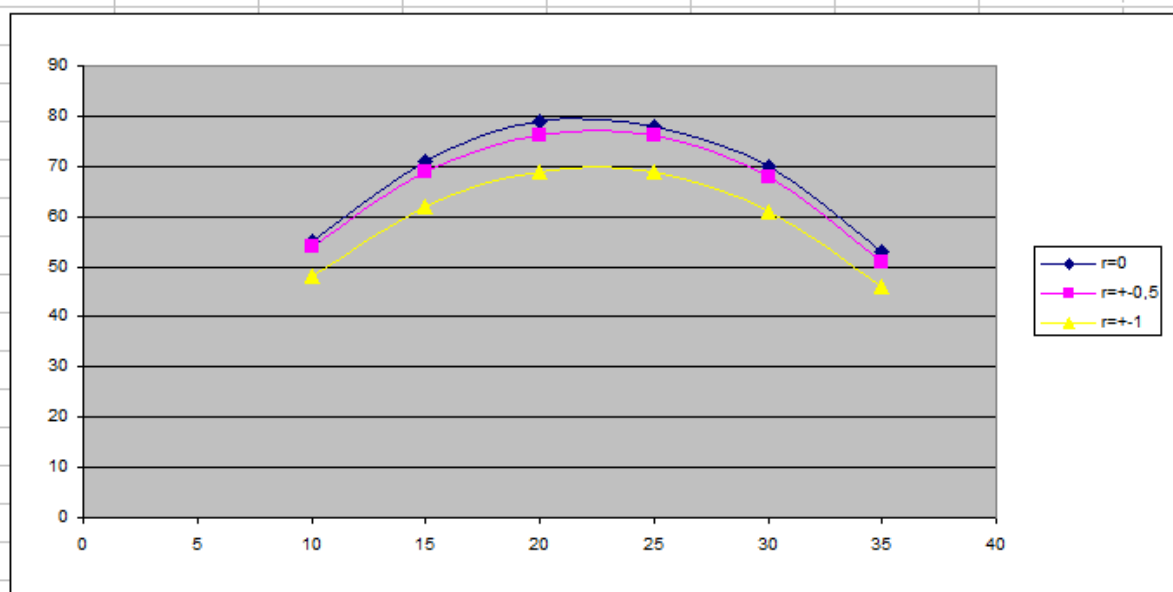


Рис. 3.7 Изменение зависимости коэффициента пропускной способности от угла при различных значениях глубины погружения катода

При изучении влияния радиуса управляющего электрода на изменение коэффициента пропускной способности было обнаружено, что наилучшим диапазоном значений данного показателя является [70;80] (рисунок 3.8).

a(o)	n(% R=80	R=90	R=70	R=60	R=50
19	78	73	80	78	73
20	79	74	81	79	73
21	79	74	81	79	74
22	80	74	81	80	74
23	80	74	81	80	74
24	79	74	81	79	74
25	78	73	80	78	73
26	77	72	79	77	72

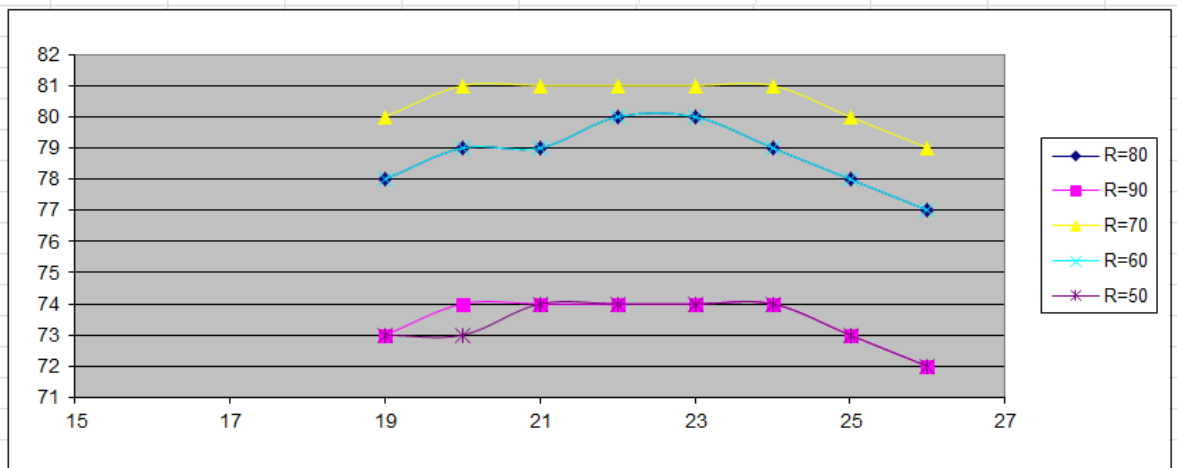


Рис. 3.8 Изменение зависимости коэффициента пропускной способности от угла при различных значениях радиуса управляющего электрода

Предварительное предположение о том, что при любых значениях ширины области моделирования, большей порогового значения, дальнейшее ее увеличение не оказывает влияния на результаты моделирования, экспериментально подтвердились (рис. 3.9).

a(o)	n(% H=95	H=85	H=70
19	80	80	80
20	81	81	81
21	81	81	81
22	81	81	81
23	81	81	81
24	81	81	81
25	80	80	80
26	79	79	79

Рис. 3.8 Изменение зависимости коэффициента пропускной способности от угла при различных значениях ширины области моделирования.

Вся проведенная работа позволила выявить наилучшие диапазоны изменения влияющих на конфигурацию пушки параметров.

Следующим этапом стал подбор конкретных точечных значений параметров из рассмотренных диапазонов их оптимальных значений.

В результате были получены следующие наилучшие значения влияющих параметров (рис.3.9):

- радиус управляющего электрода $R = 75$ мм,
- угол раствора управляющего электрода $\alpha = 22.5$ градуса,
- глубина погружения катода $r = -2$ мм,
- расстояние между катодом и анодом $L = 80$ мм,
- диаметр выходного отверстия анода $D = 1.5$ мм.

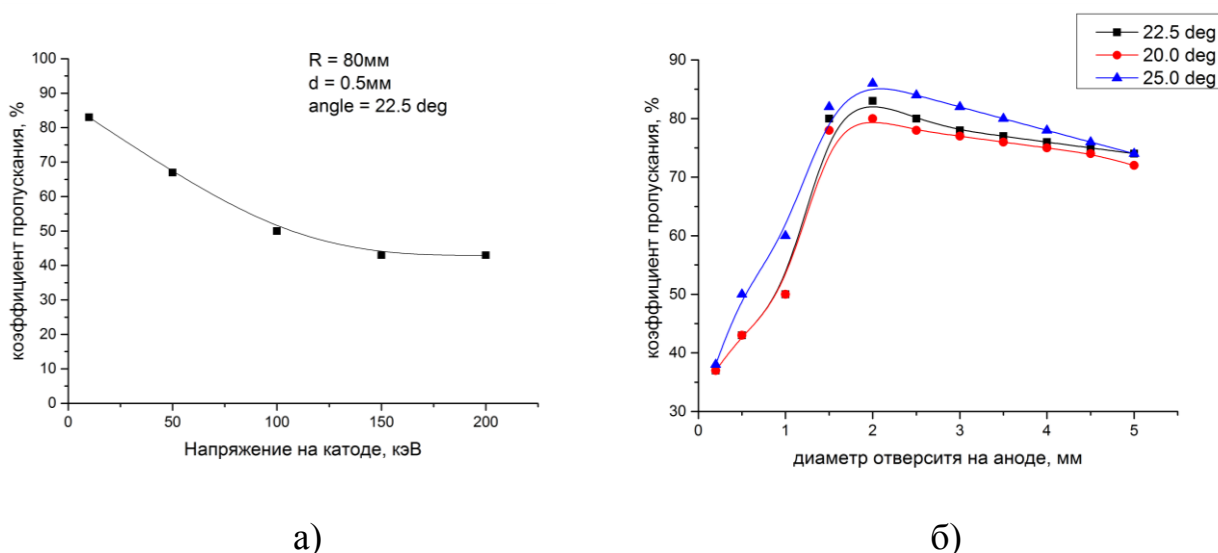


Рис. 3.9 Изменение зависимости коэффициента пропускной способности от:

- а) Напряжения на катоде при фиксированных значениях;
- б) диаметра отверстия на аноде при различных значениях угла

По результатам проведенного моделирования был создан практический образец. Экспериментальные результаты полностью соответствуют рассчитанным параметрам.

Основные результаты и выводы.

1. Проведено математическое моделирование методом последовательных приближений с нижней релаксацией;
2. Модель является устойчивой для большого количества управляющих внешних параметров и демонстрирует хорошую сходимость;
3. Разработан комплекс программ и проведен вычислительный эксперимент, который позволил установить оптимальные параметры электронной пушки;
4. По результатам проведенного моделирования был создан практический образец. Экспериментальные результаты полностью соответствуют рассчитанным параметрам.

Заключение

В работе было проведено математическое моделирование электронной пушки с управлением конфигурацией пучка. На основе изучения и анализа библиографических источников по теме ВКР было рассмотрено аналитическое представление задачи моделирования формы пучка электронов, определены недостатки существующих ЭП, рассмотрены вопросы применения методов анализа и синтеза для решения задачи. Были исследованы оптимальная геометрия катодного узла; влияние внешних параметров модели на конфигурацию электронного пучка; влияние на фокусировку пучка; движение и нагрев дисперсной частицы в потоке плазмы. На основе проведенных исследований было выявлено, что для определения конфигурации электронной пушки необходимо провести эксперименты по выявлению зависимостей пропускающей способности от:

- ширины области моделирования,
- радиуса управляющего электрода,
- угла раствора управляющего электрода,
- глубины погружения катода, расстояния между катодом и анодом,
- диаметра выходного отверстия анода

на предмет выявления тех значений указанных параметров, при которых пропускающая способность достигает максимального значения.

Была разработана компьютерная программа и проведены расчеты оптимальных параметров пушки. Была построена модель ЭПП и проведено тестирование разработанной пушки.

В дальнейшем планируется изучение траектории электронов в различных модификациях электронной пушки с учетом особенностей внешней среды.

Список использованных источников

- 1 “Математические модели и автоматизированное проектирование электронных приборов”. Методические указания к лабораторным работам. Под редакцией В.К. Федяева. №2143. Рязань 1993. 60 с.
- 2 С.И. Молоковский А.Д. Сушков. “Интенсивные электронные и ионные пучки”. М.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
- 3 А.А. Жигарев Г.Г. Шамаева. “Электронно-лучевые и фотоэлектронные приборы”. М.: Высшая школа, 1982. – 463с.
- 4 Климаков А.А., Моделирование электронной пушки с системой фокусирующих линз с учетом распределения пространственного заряда // Вестник СПбГУ. серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, Издательство: Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург), 2013, С. 225—229.
- 5 Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
- 6 К.Г. Симонов. Электронные отпаянные пушки. - М.: Радио и связь, 1985. - Гл.3.
- 7 А.Б. Киселев. Металлооксидные катоды электронных приборов. -М.: изд. МФТИ, Физматкнига. 2002. - Гл.2.
- 8 В. Эспе. Технология электровакуумных материалов. - Том I. - М.: Госэнергоиздат, 1962. - С.146 и 159.
- 9 Диденко А.Н., Лигачев А.Е., Куракин И.Б. Воздействие пучков заряженных частиц на поверхность материалов и сплавов. – М.: Атомиздат, 1987. – 187 с.
- 10 Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П. Мощные электронные пучки и их применение. – М.: Атомиздат, 1977. – 210 с.
- 11 Кулешов А.А., Земсков С В., Позняк Ю.В. Электронное учебное пособие по высшей математике на базе системы Mathematica
- 12 Шмидский Я.К. Mathematica 5. Самоучитель. – М.: Диалектика, 2004.
- 13 Матросов А.В. Maple 6. Решение задач математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001.

- 14 Рыжиков Ю.И. Решение научно-технических задач на персональном компьютере. – СПб.: Корона принт, 2000.
- 15 Эдвардс Ч.Г., Пенни Д.Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. – 3-е издание. – Киев: Диалектика-Вильямс, 2007.
- 16 Дьяконов В.П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004.
- 17 Макаров Е.Г. Самоучитель Mathcad 14, 2012. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://mirknig.com/2012/02/08/samouchitel-Mathcad-14.html>
- 18 Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия. СПб.: ВНУ, 2012 г. - 368 с.
- 19 Пискунов В. В Работа в Mathcad [Электронный ресурс] Режим доступа: elib.ispu.ru/library/lessons/pekunov/index.html
- 20 Яньков В. Ю., Якушина Н.А. Решение прикладных задач в пакете "Маткад". – М.: Спутник, 2011г. – 155с.