ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ, ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН И МЕТОДИК ПРЕПОДАВАНИЯ

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.05
Педагогическое образование профиль
Физика и математика
очной формы обучения, группы 02041201
Гусевой Марины Игоревны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., ст.пр.
Гладких Ю.П.

БЕЛГОРОД 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. На сегодняшний день формирование и активизация обучения школьников является одной из наиболее актуальных проблем современной педагогической науки и практики, и требует новых подходов к дальнейшему совершенствованию содержания форм и методов.

Вследствие этого выделяют задачу, которая состоит в умственном формировании личности в процессе учебно-познавательной деятельности. Стоит отметить, что данную задачу может решить такой предмет как математика. Ведь возможность математики воспитать мыслящую личность не сравнится ни с одним школьным предметов [1].

Рассматривая разделы математики, необходимо обратить внимание на первообразную. Изучение раздела начинается на уроках математики в старших классах и рассматривается в такой дисциплине, как математика, ранее было другое название, алгебра и начала математического анализа.

Первообразная и интеграл являются ядром изучения функции в курсе математики старшей школы, как по содержанию учебного материала, так и по способам учебно-познавательной деятельности, которые должны быть сформулированы при их изучении и применены к решению огромного числа задач [2–4].

Формирование умения находить первообразную является важным аспектом при изучении алгебры и начал анализа. Ведь в настоящее время старшеклассники сдают Единый Государственный Экзамен, где умение находить первообразную, посредством решения интеграла может способствовать уменьшению трудностей в решении не только алгебраических заданий, но и геометрических. Поэтому для того, чтобы хорошо справится с данным заданием необходимо, чтобы обучающиеся с старшей школы знали азы как самой первообразной, так и всей алгебры в целом (функции и из графики, предел функции и непрерывность, обратные функции, производные, применение производных). В старшей школе при изучении различных свойств, теорем и формул они приобретут знания, умения и навыки решения интегральных функций. Также не малую роль в формировании умений в школьном процессе играет учитель. Пользуясь правильной методикой, он сможет грамотно выстроить школьный процесс, в результате чего обучающиеся смогут лучше воспринимать полученный материал [5–8].

Стоит отметить, что решать интегралы можно и на элективных курсах. Решение на них заданий повышенного уровня будет способствовать развитию логического мышления обучающихся. Также это дает возможность сформировать умения решать нестандартные и интересные задания с применением первообразной. Это в свою очередь повысит уровень знаний обучающихся в области данного раздела математики. Поэтому решение интегралов и нахождение первообразной на элективных курсах поможет обучающимся как при решении заданий ЕГЭ, так и при решении некоторых олимпиадных задач, которые предлагаются во многих вузах, что учитывается при поступлении в высшее учебное заведение [5,6].

Все выше сказанное способствует выбору темы исследования и определению проблемы, которая состоит в обосновании педагогических условий формирования умений находить первообразную у обучающихся на уроках математики.

Цель исследования: изучение первообразной в школьном курсе математики.

Объект исследования: процесс изучения первообразной в школьном курсе математики.

Предмет исследования: дидактические материалы для изучения первообразной в школьном курсе математики.

В соответствии с проблемой, объектом, предметом и целью исследования были выделены следующие *задачи*:

– изучить учебную литературу по теме исследования;

– разработать дидактические материалы для изучения первообразной в школьном курсе математики;

– применить дидактические материалы для изучения первообразной В МОУ «Пушкарская СОШ».

Организация, экспериментальная база и этапы исследования.

Исследование для определения и решения данной проблемы проводилось в 2016-2017 году на базе муниципальной общеобразовательной организации «Пушкарская средняя общеобразовательная школа Белгородского района Белгородской области». Оно заключалось в изучении нескольких этапов. На первом этапе изучалась и анализировалась психолого-педагогическая и научно-методическая литература с целью установления степени научной разработанности проблемы исследования. На данном этапе были сформированы цель и предмет исследования, разрабатывалась гипотеза. Для достижения цели выдвигались задачи исследования и основные направления эксперимента. На втором этапе проведено экспериментальное исследование эффективности разработанных педагогических условий формирования умений находить первообразную у обучающихся. На третьем этапе обобщались теоретические и экспериментальные выводы, систематизировались и описывались полученные результаты.

Структура работы. Выпускная квалификационная работа включает следующие разделы: введение, две главы, заключение, список использованных источников литературы и приложений.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования. Сформулированы цель, объект, предмет, гипотеза и задачи исследования.

Первая глава посвящена знакомству с первообразной и интегралом, а именно с ее историей. Также в главе рассмотрена значимость интегрального материала в школьном курсе математики: этапы обучения, виды интегралов, свойства, формулы и методы их решения.

Вторая глава содержит описания основных умений, которые необходимы для нахождении первообразной и решении интегралов, формирование умений решения интегралов, а также педагогический опыт, который был построен с учетом данных методик.

В заключении обоснованы результаты исследования, предложен основополагающий вывод, которые подтверждает гипотезу и положения, выносимые на защиту.

В работе проанализирован 41 источник.

В приложении А приведены первообразные функции, стандартные неопределенные интегралы. В приложении Б – интегралы решенные способом замены переменных и интегрирования по частям. В приложении В – применение интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции, применение в физике. Приложение Г, содержит дидактические карточки для применения в изучении первообразной в курсе математики (контрольные и самостоятельные работы). Приложение Д – карточка-памятка для обучающихся «Решение первообразных и интегралов методом интегрирования по частям»

1 Первообразная и интеграл в курсе математики

1.1 История развития первообразной

Первообразная – это раздел математики, который очень давно известен человечеству. Первые упоминания о первообразной и интеграле были еще в древнем Египте примерно с 1800 года до н.э., и о чем свидетельствует Московский математический папирус (или математический папирус Голенищева) [1,10,11].

Одним из первых наиболее известных методов для расчёта интегралов является метод для исследования площади или объёма криволинейных фигур – метод исчерпывания Евдокса (Евдокс Книдский (ок. 408 г. до н.э. – ок. 355 г. до н.э.) – древнегреческий математик, механик и астроном), который был предложен примерно в 370 до н. э. [12–16].

Суть этого метода заключается в следующем: фигура, площадь или объем которой пытались найти, принудительно разбивали на бесконечно большое множество частей, для которых площадь или объём уже известны. Этот метод получил свое дальнейшее развитие в работах древнегреческого математика, физика и инженера Архимеда (287 до н.э. – 212 до н.э.) для определения площади параболы и приближенно рассчитанной площади круга [12–16].

Аналогичные методы были разработаны в Китае в третьем веке нашей эры китайским математиком Лю Хуэйем (ок. 220 – ок. 280), который с их помощью находил площадь круга. Для нахождения объёма шара этот метод использовали китайский математик, астроном, механик, писатель Цзу Чунчжи (429 – 500) вместе со своим сыном, также математиком и астрономом, правителем области и государственным казначеем, Цзу Гэном.

Далее большой шаг вперед в развитии интегрального исчисления был предпринят в 11 веке в Ираке арабским ученым-универсалом, математиком, механиком, физиком и астрономом Абу Али аль-Хасан ибн аль-Хасан ибн аль-Хайсам аль-Басри (965-1039) (или Ибн ал-Хайсамом, в Европе известном как Alhazen), который в своей работе "Об измерении параболического тела" приводит формулы для суммы последовательных квадратов, кубов и четвёртых степеней, и ряд других формул для сумм рядов. С помощью этих формул он проводит вычисление, равносильное вычислению определённого интеграла: $\int_0^a \sqrt{x}dx$ [17–25].

Воспользовавшись методом математической индукции, были собраны и проанализированы результаты для интегралов от многочленов до четвёртой степени. В данном случае, были близки результаты поиска формулы для интегралов от полиномов не выше четвёртой степени [26–28].

Следующий значительный толчок в исчислении интегралов состоялся лишь в 16 веке в работах итальянского математика Бонавентура Франческо Кавальери (1598–1647), в которых описывался предложенный им метод неделимых, а также в работах французского математика Пьера де Ферма (1601–1665). Этими учеными были заложены основы современного интегрального исчисления [29–31].

Дальнейшее развитие связано с деятельностью английского математика, физика и богослова Исаака Барроу (1630–1677) и математика-физика представителя Италии, одного из учеников Галилея Эванджелиста Торричелли (1608–1647), которым были предоставлены одни из первых намеков на связи между интегрированием и дифференцированием.

В одном из своих сочинении «Квадратура параболы» Архимед использовал метод исчерпывания для исчисления площадей секторов парабол, этот же способ, а также его различные варианты были использованы для исчисления площадей и объемов других фигур. Он исчислял площади сегментов парабол, вписывая в неё различные подходящие многоугольники с неограниченным возрастанием числа их сторон. Вершины этих многоугольников он выбирал так, чтобы иметь возможность вычисления пределов [32–35].

Архимед не представлял, как применить понятие предела и интеграла, а также обобщенного алгоритма интегрального исчисления. Части его работы взаимосвязаны только с решением конкретных геометрических задач без акцентирования на то, что в основе их решения лежит общий приём арифметического суммирования сколь угодно малых частей фигур [37].

Символы $\int$, dx и название «интеграл» были введены Лейбницем. В то время знак суммирования $\sum$ писали обычно в виде S, и символ $\int$ был представлен в виде простой стилизации буквы S.

В XVII веке ученые уже представляли, каким образом исчислять площади разнообразных фигур не только с прямыми границами, но и краями, которые представляют кривые, а также и объемы многих тел. Они в свое время имели возможности уже находить мгновенную скорость, наклон касательной к кривой в разнообразных частных случаях. Данные работы представили фундамент для создания общего математического анализа, но первоначально они представляли собой разнообразные результаты, не объединенные одной общей теорией [38].

Общая теория была сформирована во второй половине XVII века в трудах английского математика Исаака Ньютона (1643–1727) и немецкого математика Готфрида Лейбница (1646–1716).

Ньютон и Лейбниц являются основателями дифференциального и интегрального исчисления.

Они открыли важную формулу Ньютона-Лейбница [1,39]:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

где $f(x)$ – функция, интегрируемая на отрезке $[a;b]$, $F(x)$ – одна из её первообразных (неопределенный интеграл).

Созданное Ньютоном и Лейбницем открытие органической связи между различными понятиями интеграла и производной, установило взаимосвязь между дифференциальными и интегральным исчислениями, способствовало небывалому развитию математической науки [40].

В XVIII веке одним из наиболее известных представителей математического анализа был Леонард Эйлер (1707–1783) – академик Российской академии наук.

В первой половине XIX века были сформулированы точные понятия предела последовательности чисел, предела функции, непрерывности функции, на которых создается современный классический математический анализ.

Наиболее часто отмечают заслуги французского математика Огюстена Коши (1789–1857), который первые и наиболее правильно сформулировал чёткие формулировки указанных понятий [1,2].

Также не стоит забывать, что помимо производной и интеграла (определенным и неопределенным) очень важными понятиями в математическом анализе являются формула и ряд Тейлора, которые названы в честь английского математика Брука Тейлора (1685–1731) [41].

1.2 Этапы изучения первообразной в школе

В школьном курсе математики знакомство с первообразной начинается в 11 классе. Рассмотрим несколько учебников по алгебре и началам математического анализа. Если взять учебник 11 алгебры и начала математического анализа 11 класса, автором которого является С.М. Никольский, то понятие первообразная и интеграл можно уже встретить в §5, при изучении темы « Применение производной», в учебнике описывается взаимосвязь производной и интеграла, назначение и применение функций.

Следующее упоминание о первообразной и интегралах можно встретить в § 6, автор уже детально повествует понятия, способы и методы решения, также рассмотрены более подробные варианты применения первообразной и интеграла. Изучая интегралы С.М.Никольский плавно подводит обучающихся к изучению дифференциальных уравнений, решение которых без знания об интегралах и первообразной невозможны [21].

В § 6 пункте 1 автор знакомит обучающихся с основными понятиями, определениями, общим видом первообразной. Также главной целью этого раздела учебника является предоставить старшеклассникам варианты решения простейших неопределенных интегралов, доказывать, что функции являются первообразными для других разнообразных функций, повествовать основы первообразной и интегрального исчисления, также методом определения первообразной для функции на отрезке прямой, также с таблицей первообразных интегралов [5]

Необходимо акцентировать внимание еще на том, что в данном пункте обучающиеся узнают следующие способы определения первообразной для функции $f(x)$ [8]:

$$F(a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{F(a)-F(b)}{h}, \tag{2}$$

$$F(b)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{F(b+h)-F(b)}{h} \qquad (3)$$

Данные функции поясняются учителем на уроке и проводится совместная работа с обучающимися для усвоения материала.

Также учащиеся с помощью учителя изучают способы решения интегральной функции, такие как замена переменной и интегрирование по частям, которые также изучаются в данном учебнике в пункте 2.

Не стоит забывать о том, что применение интеграла и первообразной ограничивается определением первообразной для функции, существует применение и в подсчете площади криволинейной трапеции, в соответствии с рисунком 1.

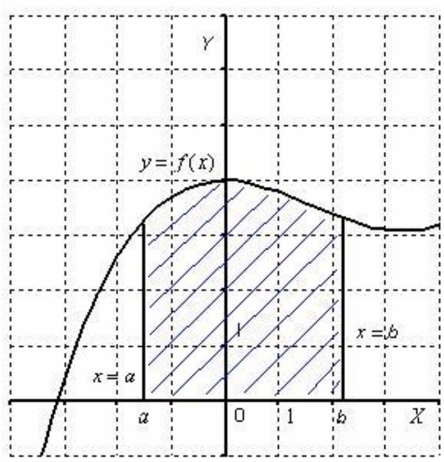


Рисунок 1 – определение площади криволинейной трапеции

Предварительно учитель повторяет совместно с обучающимися определенные интегралы и после переходит к изучению новой темы, таким образом, чтобы найти площадь криволинейной трапеции, необходимо применяли следующий интеграл:

$$S=\int_a^b f(x)dx\text{, где } f(x)\geq 0. \qquad (4)$$

Автором учебника предположено, что учитель более детально будет повествовать и объяснять материал, также выделен небольшой пункт 5, где на примерах показаны приближенные вычисления определенные интегралы с подробным примером решения.

Изучение раздела заканчивается пунктом, в котором рассматривают применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах.

Не только определение объемов и площадей, но и давление жидкости на стенку, работы, центра тяжести.

В конце данного параграфа также имеются задачи и вопросы, с помощью которых обучающиеся могут закрепить знания, полученные на уроке.

Рассмотрим учебник алгебры и начал математического анализа под редакцией А.Н. Колмогорова для 10-11 классов. Изучая планирования учителей по этому учебнику, видно, что изучение первообразной и интеграла запланировано на конец 11 класса, автор учебника не приводит никакой теоретической базы, которая могла бы помочь учащимся.

Теоретические данные, методы, способы решения, виды преподносит учитель из своего личного опыта, обучающийся в свою очередь не имеет примеров для решения, а только варианты для закрепления знаний.

Также стоит заметить, что это 5 из 6 параграфов, и изучение первообразной и интеграла производится в конце учебного года.

Рассмотрим учебник А.Г. Мордковича алгебры и начал анализа для 10-11 классов. Автор учебника в § 8 устанавливает взаимосвязь первообразной и интеграла с ранее изученным в учебнике разделом, который посвящен производной. Таким образом, руководствуясь различными формулами и правилами, обучающиеся заблаговременно знали способы нахождения производной, также её применение в нахождении скорости, углового коэффициента касательной к графику функции, способ исследования функции на монотонность и экстремуму и способностью решать задачи на оптимизацию [1].

Автор находит способ объяснения материала на уже известных заранее данных, таким образом рассматриваются способы определения скоростей по известным законам движения, таким образом предоставляется обратная задача, то есть задача о восстановлении закона движения по уже заранее известной скорости.

Рассмотрим данный вариант предоставления усвоения знаний.

Пример 1. Материальная точка осуществляет свое движение по прямой, таким скорость скорость её движения в момент времени t можно описать формулой для равномерного движения $v = gt$. Необходимо найти закон движения.

Решение. Допустим $s = s(t)$ – закон движения, который необходимо найти. Известно, что $s' = v(t)$. Значит, для решения задачи нужно подобрать функцию $s = s(t)$, производная которой будет равна gt. Не и спытывая трудностей можно прийти к выводу, что $s(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}\left(t^2\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t.$

Ответ: $s(t) = \frac{gt^2}{2}$

Обратим внимание на то что пример выполнен и решен без ошибок. Мы получили $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. На самом деле данная задача имеет огромное количество решений: любая функция вида $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ $+C$, где C – произвольная константа, может служить законом движения так как

$$\left(\frac{gt^2}{2} + C\right)' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' + C' = gt + 0 = gt\ .$$

Чтобы задача стала более определенной, необходимо зафиксировать исходную ситуацию, т.е. указать координаты движущейся точки в какой либо момент времени, например в начальный. Если, скажем в начальный момент времени $s(0) = s_0$.

Таким образом, закон движения определен однозначно: $s = \frac{gt^2}{2} + s_0$.

Автор учебника приводит различные обратные функции, такие как возведение в квадрат и извлечение корня, и переходит к обратным функциям интегрирования и дифференцирования, рассматривает различные обратные функции и примеры для лучшего усвоения [14].

Также акцентировано внимание на правила интегрирования, которые проиллюстрированы наглядными примерами. Рассмотрим правила, которые необходимы при выполнении интегрирования и нахождения первообразной:

Правило 1: Первообразная суммы равна сумме первообразных.

Правило 2: Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то она является и первообразной для функции $kf(x)$.

Мы видим, что в каждом учебнике изучение тригонометрии различно, и оно начинается в различный школьный период времени. Но в целом, видно, что каждое изучение данного раздела математики систематически верно. Оно начинается с самых низов, и идет от менее сложного материала к более сложному. Таким образом, этапы изучения тригонометрии в школе выстроены верно, поэтому обучающиеся, которые ответственно относятся к учебе, будут знать данный раздел математики хорошо.

Рассмотрим учебник Ш.А. Алимова алгебры и начала математического анализа для 10-11 классов. Мы видим, что для изучения данного раздела автор выделяет целый параграф.

В главе X Алимов Ш.А. не останавливается на рассмотрении основных интегралов и нескольких способов нахождения первообразной. Сначала они знакомятся с основными понятиями и рассматривают правила и замечания (§54), переходят к простейшему способу нахождения первообразной (§55), применяют полученные знания для практических навыком, то есть для нахождения площади криволинейной трапеции (§56).

После овладения основных навыков нахождения первообразной, обучающиеся решают интегралы с применением таблицы, которая предоставлена в учебнике (§57) [27].

Также представляется возможность применить полученные знания об интегралах (§58), и не теряется взаимосвязь интеграла и первообразной, а именно комплексное применение к практическим навыкам(§59).

В каждом параграфе присутствуют разобранные примеры для закрепления полученных знаний [25].

Мы видим, что в каждом учебнике изучение тригонометрии различно, и оно начинается в различный школьный период времени. Но в целом, видно, что каждое изучение данного раздела математики систематически верно. Оно начинается с самых низов, и идет от менее сложного материала к более сложному. Таким образом, этапы изучения тригонометрии в школе выстроены верно, поэтому обучающиеся, которые ответственно относятся к учебе, будут знать данный раздел математики хорошо [23].

1.3 Виды интегралов. Методы их решения

В настоящий в момент существует два вида интегралов: неопределенный и определенный интеграл. Различие данных видов состоит только в том, что определенный интеграл имеет какие-либо определенные границы. Рассмотрим неопределенный интеграл более подробно.

Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется неопределенным интегралом и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (5)$$

Более детально изучив данную формулу выясняется, что $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования, а C – некоторая постоянная.

Существует несколько основных свойств неопределенного интеграла:

1. Если рассматривать производную неопределенного интеграла, то будет выявлено, что она равна подынтегральной функции, а следовательно дифференциал неопределенного интеграла будет равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \text{ и } d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \tag{6}$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{7}$$

3. Константу a $(a \neq 0)$ возможно вынести за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \tag{8}$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx. \tag{9}$$

5. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C. \tag{10}$$

Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(u)du = F(u)+C\,. \tag{11}$$

Были рассмотрены и подобраны табличные неопределенные интегралы (Приложение А).

Также существует определенный интеграл, который несет некоторый геометрический смысл, рассмотрим его.

Определение. Если существует конечный передел интегральной суммы

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\ ,$$

при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения τ_n отрезка $[a;\, b]$ на частичные отрезки и выбора промежуточных точек ξ_k, то этот предел называют определенным интегралом (или интегралом Римана) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ и обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\ . \tag{12}$$

Действительно если данный указанный предел существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a;\, b]$ (или интегрируемой по Риману). При этом $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования, a и b – соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, только в случае, когда диаметр разбиения λ

стремится к нулю.

Геометрический смысл определенного интеграла. Допустим функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f(x) \geq 0$. Кривая, ограниченная графиком AB функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, называется криволинейной трапецией.

Интегральная сумма и ее составляющие имеют простой геометрический смысл: произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ равно площади прямоугольника с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(\xi_k)$, а сумма $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой площадь заштрихованной кривой изображенной на рисунке 2.

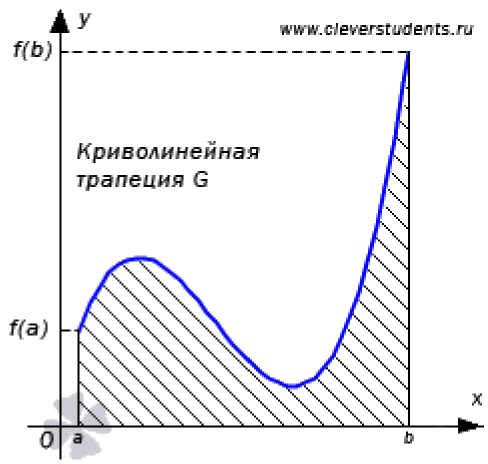


Рисунок 2 – Геометрический смысл определенного интеграла

Совершенно ясно, что эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка $[a;\ b]$ на бесконечно малые отрезки и выбора точек ξ_k.

Чем меньше Δx_k, $k = 1,\ n$, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь S криволинейной трапеции принимается предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx. \qquad (13)$$

Таким образом, с геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Рассмотрим свойства определенного интеграла.

1. Рассматривая верхний и нижний предел интегрирования, получили ($a = b$), то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (14)$$

Это свойство следует из определения интеграла.

2. Если $f(x) = 1$, то

$$\int_a^b dx = b - a. \qquad (15)$$

3. Используя способ перестановки в пределах интегрирования, известно, что определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (16)$$

4. Константу возножно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c \in \mathrm{R}. \qquad (17)$$

5. Алгебраическая сумма конечного числа определенных интегралов, интегрируемых на $[a;\ b]$ функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ приравнивается к алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx. \qquad (18)$$

6. Имеются интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то есть интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и для любых чисел a, b, c;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (19)$$

7. Если $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0, \ a < b$.

8. В случае если интегрируемые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству, то:

$$f(x) \geq \varphi(x) \ \forall x \in [a;b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx, \ a > b. \qquad (20)$$

8. В случае если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \qquad (21)$$

где a < b.

9. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то есть такая точка $\xi \in [a; b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, т. е. определенный интеграл от переменной функции равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке ξ отрезка интегрирования $[a; b]$ и длины $b–a$ этого отрезка[32].

Замена переменной. Интегрирование по частям.

Допустим необходимо вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не принадлежит к уже известным табличным интегралам. Суть метода подстановки состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x = \varphi(t)$, откуда $dx = \varphi'(t)dt$.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt. \tag{22}$$

Данная формула необходима для замены переменных и без которой весь метод неэффективен.

Метод интегрирования по частям следует из формулы дифференциала произведения двух функций. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции переменной x. Тогда $d(uv) = udv+vdu$.

Интегрируя обе части равенства, мы получим следующее:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.,$$

но так как $\int d(uv) = uv + C$, то:

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{23}$$

Данная формула называется формулой интегрирования по частям. Метод привлекателен тем, что школьникам не только надо знать новую тему и уметь интегрировать, но и актуализировать знания по производной и применять их на деле. Необходимо применение формулы интегрирования по частям тогда, когда в правой части интеграла стоит более простой интеграл, чем был исходный.

Стоит обратить внимание, что в правой части нет произвольной постоянной *C*, потому что там уже стоит неопределенный интеграл, в ходе решения которого будет выявлена постоянная.

Интегральные выражения $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x) arctgxdx$, $\int P_n(x) arcctgxdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно *x*, решаются по частям, принимая за u функцию, которая является множителем при $P_n(x)$.

Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$ (*a*, *b* – числа). Вычисление данных интегралов выполняется также по частям, но с применением данного метода 2 раза, т.к. знаем, что производная экспоненты равна самой экспоненте.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$.

Решение.

Воспользуемся известным нам способом замены переменных, для этого представим, что $x-1 = t \Rightarrow x = t+1$, отсюда следует $dx = dt$. Применяя формулу для нахождения интеграла методом замены переменных получаем следующее выражение:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C,$$

не стоит забывать, что это не окончательный результат и прежде, чем записать ответ необходимо возвратиться к первоначальной замене и переменной, тогда получается следующий результат:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{x-1} + C\,.$$

Ответ: $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{x-1} + C\,.$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям следующего вида: $\int \ln x dx$, без труда можно найти уже готовый ответ в таблице интегралов, но необходимо знать и ход решения.

Решение.

Допустим, $\int \ln x dx = (*)$, для нахождения данного интеграла необходимо воспользоваться формулой $\int u dv = uv - \int v du$.

Воспользуемся нашей формулой слева направо. Обратим внимание на левую часть: $\int u dv$, мы видим две неизвестные переменные, для их нахождения вводим замены: $u = \ln x,\ dv = dx$, находим дифференциал du

$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)\ dx = \frac{dx}{x}$, $dv = dx$.

Для дальнейшего нахождения интеграла методом разделения по частям, необходимо v, проинтегрируем правую часть нашего равенства. $u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$, $dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$. На данном этапе рассматриваем наше решение и подставляем в наше выражение:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C,$$

где C = const.

Проверка. Для выполнения хода проверочной работы необходимо взять производную от ответа:

$$\left(x\ln x-x+C\right)'=\left(x\ln x\right)'-(x)'+(C)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1+0=\ln x.$$

Ответ: $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$, где C = const.

Приложение Б, содержит подробное решение интегралов, решение которых осуществляется только по методу замены переменной и интегрирования по частям.

Также была составлена методическая карточка, способствующая лучшему усвоению и повышению качества знаний в решении интегралов по частям (Приложение Д).

<u>Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.</u>

Рациональной дробью $R(x)$ называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены, всякая дробь вида:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}. \qquad (24)$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$), то дробь называется неправильной. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n \leq m$), то дробь называется правильной.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби (это представление достигается путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочленов):

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $R(x)$ – многочлен-частное (целая часть) дроби $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$; $P_n(x)$ – остаток (многочлен степени $n < m$).

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x^2-x-12)}$

Решение. $\int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x^2-x-12)} = \int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)} = (*)$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+3} = \frac{43x-67}{(x-1)(x+3)(x-4)},$$

$A(x–4)(x+3)+B(x–1)(x+3)+C(x–1)(x–4) = 43x–67,$

$A+B+C = 0,$

$–A+2B–5C = 43,$

$–12A–3B+4C = –67.$

Выразим переменные и получим ответы:

C=–A–B,

4A+7B=43,

–16A–7B=–67, отсюда следует,

–12A=–24$\Rightarrow$A=2.

Подставляя A в выражения находим остальные переменные, $B = 5$, $C = –7$.

Стоит обратить внимание на то, что в правой части нашего интеграла нет слагаемого x^2, поэтому первое уравнение в правой части принимает нулевое значение.

$$\int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x-4} - \frac{7}{x+3} \right) dx = ,$$
$$= 2\ln|x-1| + 5\ln|x-4| - 7\ln|x+3| + C$$

где C = const.

Ответ: $\int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x+3)(x-4)} = 2\ln|x-1| + 5\ln|x-4| - 7\ln|x+3| + C$.

<u>Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных дробей.</u>

Интегрирование простейших дробей. Простейшей дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{(x-a)^n}$ (n $\geq$ 2);

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ (n $\geq$ 2).

Здесь *A*, *a*, *p*, *q*, *M*, *N* – действительные числа, а трехчлен не имеет действительных корней, т. е. $p^2/4 - q < 0$.

Простейшие дроби первого и второго типов интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления:

$$\int \frac{Adx}{(x-a)} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Интеграл от простейшей дроби третьего типа приводится к табличным интегралам путем выделения в числителе дифференциала знаменателя и приведения знаменателя к сумме квадратов:

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{array}{l} d(x^2+px+q) = (2x+p)dx, \\ Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (N - \frac{Mp}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + (N - \frac{Mp}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + (N - \frac{Mp}{2})\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\, arctg\, \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей первого – четвертого типов.

Для разложения $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на простейшие дроби необходимо разложить знаменатель $Q_m(x)$ на линейные и квадратные множители, для чего надо решить уравнение: $Q_m(x) = 0 \Leftrightarrow b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m = 0.$).

Теорема. Правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l (x^2+px+q)^s$, можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{B_1}{(x-\beta)}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}. \qquad (25)$$

(A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_l, M_1, N_1, M_2, M_2, …, M_s, N_s – некоторые действительные числа).

Метод неопределенных коэффициентов. Суть метода неопределенных коэффициентов состоит в следующем. Пусть дано разложение правильной рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ по формуле, которая представлена выше на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами.

Приведем простейшие дроби к общему знаменателю $Q_m(x)$ и приравняем многочлен, получившийся в числителе, многочлену $P_n(x)$.

Метод частных значений. При нахождении неопределенных коэффициентов вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x, можно дать переменной x несколько частных значений (по числу неопределенных коэффициентов) и получить таким образом систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Особенно выгодно применять этот метод в случае, корни знаменателя рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ просты и действительны. Тогда оказывается удобным последовательно полагать равным каждому из корней знаменателя.

Правило интегрирования рациональных дробей. Для того чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить следующие действия:

1. Если рассматриваемая рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – неправильная ($k \geq m$), представить ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $n < m$; $R(x)$ – многочлен.

2. Если рассматриваемая рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная ($n < m$), представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей по формуле.

3. Интеграл от рациональной дроби представить в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

Пример 1. Вычислить интеграл $L = \int \frac{x^4 dx}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.

Решение. Рассматривая данную функцию мы видим, что она рациональная, так как подынтегральное выражение является дробью из многочленов. Степень числителя больше, чем степень знаменателя, выделим целую часть дроби.

1. Выделим целую часть дроби, для этого разделим числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & \underline{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \\
\underline{x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x} \qquad & x + 6 \\
-\,6x^3 - 11x^2 + 6x \qquad & \\
\underline{6x^3 - 36x^2 + 66x - 36} & \\
25x^2 - 60x + 36 &
\end{array}$$

Из данного деления мы видим, что дробь имеет целую часть равную x+6. Отсюда получается следующее выражение:

$$\int \frac{x^4}{x^3-6x^2+11x-6} = x+6+\frac{25x^2-60x+36}{x^3-6x^2+11x-6}.$$

2. Разложим знаменатель нашей дроби на множители. Для этого необходимо решить кубическое уравнение, которое в знаменателе: $x^3-6x^2-11x-6=0$. Допустим, уравнение имеет целый корень и он является делителем числа 6, таким образом, целый корень может быть одним из чисел: 1,2,3,6,-1,-2,-3,-6.

Подставим $x=1$, $1^3-6\ \ +11-6=0$, следовательно, существует один корень $x = 1$, делим знаменатель на выражение x–1.

При делении мы получаем: $x^3-6x^2-11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$.

3. Разложим дробь на простейшие следующим образом:

4.

$$\frac{25x^2-60x+36}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{25\cdot 1^2-60\cdot 1+36}{(x-1)(1-2)(1-3)} + \frac{25\cdot 2^2-60\cdot 2+36}{(2-1)(x-2)(2-3)} +$$
$$+\frac{25\cdot 3^2-60\cdot 3+36}{(3-1)(3-2)(x-3)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{16}{x-2} + \frac{81}{2(x-3)}.$$

Таким образом, получилось:

$$\int \frac{x^4}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \int xdx + \int 6dx + \int \frac{1}{2(x-1)}dx - \int \frac{16}{x-2}dx + \frac{81}{2(x-3)}dx$$

L=$\frac{x^2}{2}+6x+\frac{1}{2}\ln\left|x-1\right|-16\ln\left|x-2\right|+\frac{81}{2}\ln\left|x-3\right|+C$, где C = const.

Ответ: L=$\frac{x^2}{2}+6x+\frac{1}{2}\ln\left|x-1\right|-16\ln\left|x-2\right|+\frac{81}{2}\ln\left|x-3\right|+C$, где C = const.

<u>Интегрирование выражений, содержащие тригонометрические функции</u>

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Универсальная подстановка. Будем рассматривать интегралы вида: $\int R(\sin x, \cos x)dx$, при условии, что они не являются табличными. Вычислить их можно различными методами, изложенными ранее. Иногда бывает достаточно преобразовать подынтегральное выражение, использовав тригонометрические формулы, применить методы «подведения» множителя под знак дифференциала, замены переменной или интегрирования по частям.

Для вычисления интеграла вида (7) существует общая универсальная схема вычисления, основанная на универсальной тригонометрической подстановке $t = tg\dfrac{x}{2}$.

Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m xdx$ ($m, n \in Z$, $m \geq 0, n \geq 0$). Если хотя бы одно из чисел m и n – нечетное, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $sin^2x+cos^2x = 1$ оставшуюся четную степень через конфункцию, приходим к табличному интегралу.

Интегралы вида $\int tg^n xdx$, $\int ctg^n xdx$, ($n \in N$, $n > 1$). Эти интегралы вычисляются подстановками $tgx = t$ и $ctgx = t$ соответсвенно.

Если $t = tgx$, то $x = arctgt$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Тогда: $\int tg^n xdx = \int \dfrac{t^n}{1+t^2}dt$.

Последний интеграл при $n \geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, которая вычисляется по правилу интегрирования рациональных дробей.

Аналогично если $t = ctgx$, то $x = arcctgt$, $dx = -\dfrac{dx}{1+t^2}$, откуда: $\int ctg^n xdx = -\int \dfrac{t^n}{1+t^2}dt$.

Интегралы вида $\int \sin mx \cos nxdx$, $\int \cos mx \cos nxdx$, $\int \sin mx \sin nxdx$ ($m, n \in R$). Они вычисляются путем разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}(\sin(m+n)x+\sin(m-x)x),$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-x)x),$$

$$\sin ms\sin nx=\frac{1}{2}(-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x).$$

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 x-3\cos^2 x}$.

Решение. Для решения данного интеграла необходимо воспользоваться заменами:

$$tgx=t;\ x=arctgt;\ dx=\frac{dt}{1+t^2};\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2};\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}.$$

Подставим заметы в интеграл:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x-3\cos^2 x}=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{3}{1+t^2}\right)}=$$

$$\int\frac{dt}{t^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx+\sqrt{3}}\right|+C.$$

Ответ: $\int\frac{dx}{\sin^2 x-3\cos^2 x}\Bigg|=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx+\sqrt{3}}\right|$.

<u>Интегрирование иррациональных выражений</u>

Интегралы вида $\int R(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},\ldots)dx$ (m_1, n_1, m_2, n_2, … – целые числа). В этих интегралах подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования и радикалов от *x*. Они вычисляются подстановкой $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$,

При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1} = r_1$, $\frac{m_2}{n_2} = r_2$, являются целыми числами, т. е. интеграл приводится к рациональной функции от переменной t:

$$\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots)dx = \int R(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, \ldots)st^{s-1}dt. \tag{26}$$

Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$ (m_1, n_1, m_2, n_2, … – целые числа). Эти интегралы подстановкой: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …, сводятся к рациональной функции от переменной t.

Интегралы вида $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Для вычисления интеграла I_1 выделяется полный квадрат под знаком радикала:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)$$

и применяется подстановка: $x + \frac{b}{2a} = u$, $dx = du$.

В результате этот интеграл сводится к табличному: $I_1 = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}}$.

В числителе интеграла I_2 выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала, и этот интеграл представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1 =$$
$$= \frac{A}{2a}\int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}d(ax^2+bx+c) + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1 =$$
$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

где I_1 - вычисленный выше интеграл.

Вычисление интеграла I_3 сводится к вычислению интеграла I_1 подстановкой: $x=\frac{1}{u},\ dx=-\frac{1}{u^2}du.$

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной может быть представлен в виде $u^2 \pm k^2$. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением трех видов интегралов:

$$I_1 = \int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du,\ I_2 = \int R(u,\sqrt{k^2+u^2})du,\ I_3 = \int R(u,\sqrt{u^2-k^2})du.$$

Интеграл $I_1 = \int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du,$ подстановкой $u = k\sin t$ (или $u = k\cos t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost.

Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ (m, n, p ϵ Q, a, b ϵ R). Рассматриваемые интегралы, называемые интегралами от дифференциального бинома $x^m(a+bx^n)^p dx$, выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) если $p \in Z$, то применяется подстановка:

$x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\frac{\text{ь}+1}{m} \in Z$, то используется подстановка:

$a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби $p=\frac{k}{s}$;

3) если $\frac{m+1}{n}+p \in Z$, то применяется подстановка:

$ax^{-n}+b=t^s$, где s – знаменатель дроби $p=\frac{k}{s}$;

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Подынтегральная функция аргумента в нашем случае записана, как функция от радикалов степени 2 и 3. Находим наименьшее общее кратное, в данном случае это 6, таким образом, данный интеграл является интегралом типа $\int R(x, \sqrt[6]{x}dx$ и может без проблем быть решен методом замены переменных:

$$\sqrt[6]{x}=t,\ x=t^6,\ \sqrt[3]{x}=t^2.$$

Следовательно, первоначальный интеграл принимает вид:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int \frac{t^3}{t+1}dt.$$

Допустим, возьмем $t+1=z, dt=dz, z=t+1=\sqrt[6]{x}+1$.

Тогда решение интеграла примет следующий вид и способ решения:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int \frac{(z-1)^3}{z}dz=6\int z^2dz-18\int zdz+18\int dz-6\int \frac{dz}{z}=$$

$$=2z^3-9z^2+18z-6\ln|z| \ =2\left(\sqrt[z]{x}+1\right)^3-9\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2+18\left(\sqrt[6]{x}+1\right)-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 2\left(\sqrt[z]{x}+1\right)^3 - 9\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2 + 18\left(\sqrt[6]{x}+1\right) - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$.

Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.

Рассмотрение неопределенного и определенного интеграла с постоянными пределами, не являются окончанием изучения материала.

Если оставить постоянным нижний предел интегрирования а, а верхний х изменять так, чтобы $x \in [a;\ b]$, то величина интеграла будет изменяться. Интеграл вида: $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$, $x \in [a;\ b]$, называется определенным интегралом с переменным верхним пределом и является функцией верхнего предела x. Здесь для удобства переменная интегрирования обозначена буквой t, а верхний предел интегрирования – буквой x.

Теорема. Производная определенного интеграла от непрерывной функции f(x) по его переменному верхнему пределу существует и равна подынтегральной функции, в которой вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'x = f(x). \quad (27)$$

Формула Ньютона-Лейбница. Формула Ньютона-Лейбница дает правило вычисления определенного интеграла: значение определенного интеграла на отрезке [a; b] от непрерывной функции f(x) равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при $x = b$ и $x = a$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (28)$$

Замена переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.

Замена переменной в определенном интеграле. Этот метод, как и в случае неопределенного интеграла, позволяет упростить вычисления, т. е. привести подынтегральное выражение к соответствующей табличной форме. Применение замены переменной в определенном интеграле базируется на следующей теореме.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1; t_2]$, причем $\varphi([t_1; t_2]) = [a; b]$ и $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (29)$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на отрезке $[a; b]$ функции переменной x. Тогда $d(uv)=udv+vdu$. Проинтегрируем обе части последнего равенства на отрезке $[a; b]$:

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu.$$

С другой стороны, по формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b.$, следовательно, формула принимает вид:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (30)$$

Формула называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

1.4 Применение первообразных и интегралов

Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $[f(x) \geq 0]$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезками $[a;\ b]$ оси Ox, вычисляется по формуле: $S = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)[f_1(x) \leq f_2(x)]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, находится по формуле: $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, выражается формулой: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$,где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ $[y(t) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2]$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\theta)$ и двумя полярными радиусами $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ $(\alpha < \beta)$, выражается интегралом:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2 d\theta. \qquad (31)$$

Определение и вычисление длины кривой, дифференциал кривой.

Если кривая $y=f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ - гладкая (т. е. производная $y'=f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (32)$$

При параметрическом задании кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ [$x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции] длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле:

$$L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^2+y^2}\,dt. \qquad (33)$$

Если гладкая кривая задана в полярных системах координатах уравнением $\rho=\rho(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$, то длина дуги равна: $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta.$

Дифференциал длины дуги. Длина дуги кривой определяется формулой:

$$L(x)=\int_a^x \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx., \qquad (34)$$

<u>Определение объема тела вращения.</u>

Пусть задан график непрерывной положительной функции $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ в прямоугольной системе координат xOy. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного поверхностью вращения кривой B вокруг оси x и плоскостями, проходящими через точку $x=a$, $x=b$ перпендикулярно оси x (в соответствии с рисунком 3).

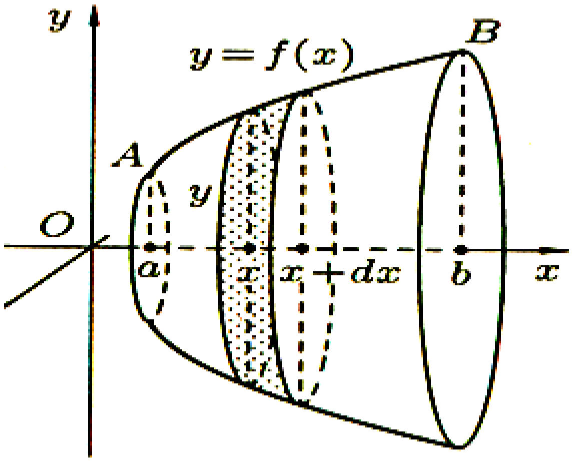


Рисунок 3 – Определение объема тела вращения

Для решения данной задачи необходимо произвести разбиение отрезком и будем считать, что элемент объема ΔV тела вращения, ограниченный плоскостями, проходящими через точки x_k и x_{k+1} перпендикулярно оси x, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса основания $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \approx \pi y^2 \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k .$$

Но тогда объем может быть записан при помощи приближенного равенства $V \approx \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$, и в результате получается формула для объема тела вращения.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx, \tag{35}$$

Пример 1. Докажите, что объем шара радиуса R равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Решение. Как уже ранее известно, окружность радиуса R в плоскости xOy имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Тогда функция примет следующий вид

$y=\sqrt{R^2-x^2}$, где $(-R\le x\le R)$ имеет графиком верхнюю полуокружность B.

Если вращать полуокружность вокруг оси Ox, то в результате получается поверхность шара. Но учитывая формулу, для нахождения объема тела вращения, получим:

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-x^2})dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi R^3 .$$

Ответ: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

Определение работы с помощью определенного интеграла.

Рассмотрим случай, когда к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F=f(x)$, где $f(x)$ существует непрерывная функция от x – координаты движущейся точки. Работа сила F при передвижении точки от a до b равна:

$$W=\lim_{\max\Delta x_j\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\Delta x_j=\int_a^b f(x)dx, \qquad (36)$$

где $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b,\ \Delta x_j=x_{j+1}-x_j$.

При этом, в силу непрерывности функции $f(x)$ произведение $f(x_j)\Delta x_j$ близко к истинной работе на отрезке $\lfloor x_j;x_{j+1}\rfloor$, а сумма таких произведений близка к истинной работе на отрезке и притом тем ближе, чем меньше набольший из всех Δx_j.

Масса стержня переменной плотности

Рассмотрим вариант, что отрезок $[a;b]$ оси Ox имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x)\ge 0$, где $\rho(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция. Общая масса этого отрезка тогда вычисляется следующим образом:

$$M = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(x_j)\Delta x_j = \int_a^b \rho(x)dx, \tag{37}$$

где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b, \Delta x_j = x_{j+1} - x_j$

<u>Координаты центра тяжести.</u>

Центром тяжести совокупности материальных точек называется центр параллельных сил тяжести, приложенных в этих точках.

Для материальной дуги *AB* плоской кривой $y = f(x)$ прямоугольные координаты центра тяжести *C* определяются формулами $a \le x \le b$:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y'(x))^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2 dx}}, \tag{38}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2 dx}}. \tag{39}$$

Для материальной однородной криволинейной трапеции, прилежащей к оси *Ox* и имеющей верхнюю границу *y*=*y*(*x*), центр тяжести имеет координаты:

$$x_c = \frac{\int_a^b xy(x)dx}{S}, \; y_c = \frac{\int_a^b y^2(x)dx}{2S},$$

где *S* – площадь криволинейной трапеции.

Центр тяжести произвольной плоской, ограниченной графиком функции $y_1 = f_1(x)$ сверху и $y_2 = f_2(x)$ снизу, определяется формулами:

$$x_c = \frac{\int_a^b x(y_1(x) - y_2(x))dx}{S}, \tag{40}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b (y_1{}^2(x) - y_2{}^2(x))dx}{2S}, \tag{41}$$

Также были рассмотрены различные варианты применения первообразной и интегралов в математике и физике (Приложение В).

Пример 1. Найти координаты центра тяжести однородного полукруга $x^2 + y^2 \geq r^2$, расположенного над осью *Ox*.

Решение. Применим формулы

$$x_c = \frac{\int_a^b xy(x)dx}{S},$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y^2(x)dx}{2S}.$$

Так как полукруг расположен над осью *Ox*, то верхняя граница задаётся уравнением $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

В силу симметрии фигуры относительно оси ординат, абсцисса x_c центра тяжести равна нулю. Найдём ординату:

$$yc = \frac{\int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)dx}{2S} = \left[S_{полукр} = \frac{1}{2}\pi r^2 \right] = \frac{\left(r^2 x - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r}}{\pi r^2} = \frac{r^3 - \dfrac{r^3}{3} + r^3 - \dfrac{r^3}{3}}{\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

Таким образом, координаты центра тяжести следующие: $\left(0; \dfrac{4r}{3\pi}\right)$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{4r}{3\pi}\right)$.

2 Применение дидактических материалов для изучения первообразной в школьном курсе математики

2.1 Основы формирования умений, необходимых при решении интегралов

К понятию «умение» в методической литературе можно встретить различные виды трактовок. Приведем несколько из них.

Понятие «умение» понимают как совокупность навыков и знаний, благодаря которым деятельность человека успешно выполняется [11].

Знаменитый ученый Петровский А.В. под термином «умение» понимает способность пользоваться приобретенными понятиями и знаниями для распознания различных решений тех или иных практических и теоретических задач [26].

Запорожец Н.И. дает свое определение термину «умение». Он считает, что умение является процессом подготовленности к сознательным и точным действиям, которое характеризуется способностью сознательно достигать поставленной цели в изменяющейся обстановке [15].

Коджаспирова Г. М. и Коджаспиров А. Ю. в своем словаре дают следующее определение: «умение» является способом реализации определенных действий, которые обеспечивается объединением полученных навыков и знаний [17].

По мнению Джумаева Н.Э. и Сохибова А.Р., «умение» - это подготовленность к практическим и теоретическим действиям, которые выполняются быстро, точно, сознательно, в результате усвоенных знаний и жизненного опыта [14].

Мы видим, что умение тесно связано с такими понятиями как знание и навыки. Навыки представляют собой автоматизируемые действия, то есть такие действия, которые образовались в результате большого повторения раз.

А знание характеризуется сознательным воспроизведением определенных терминов и законов, вследствие сохранения их в памяти [17].

Убеждаемся, что в развитии общества и каждого человека огромную роль играют умения. Именно благодаря им каждый из нас становится самостоятельным, уверенным и целеустремленным. Если обучающийся не будет обладать определенными знаниями, умениями и навыками, то он будет не успевать по учебе. А мы знаем, что если есть хотя бы малейшие провалы в понимании какой-либо темы, то эти провалы будут увеличиваться и, следовательно, он не сможет хорошо учиться. Приходим к выводу, что одной из основных задач учителя является формирования у обучающегося умения. Для решения этой задачи учитель должен целенаправленно воздействовать на каждого обучающегося, учитывая их психологические и возрастные способности [10].

Рассмотрим понятие «формирование умения». Формирование умения является объединением полученных в процессе обучения навыков и знаний и освоение ряда операций, благодаря которым происходит успешное освоение различной информации [11].

Для успешного усвоения предметов обучающийся должен обладать огромным кругом умений. С помощью их он сможет решать новые и более сложные задания на уроке и дома. В процессе учебной деятельности обучающийся приобретает различные умения. На уроке математики это специфические умения. К таким умениям относится внимательное чтение условия задачи, ее анализ, безошибочная запись условия в тетрадь, правильный чертеж по случаю необходимости. Также к ним относится рассмотрение всех способов решения задач, умение давать правильные ответы на вопросы задачи и т.д.. Обучающиеся приобретают еще и обобщенные умения. К ним относится правильное планирование своей работы, как на уроке, так и вне его, использование при необходимости нескольких точек зрения, конспектирование полученного материала на уроке, умение правильно выделить главную мысль. Также обобщенное умение включает в себя наблюдение и контроль своей деятельности. Для формирования таких родов умений учитель должен научить обучающихся таким приемам, как анализировать, синтезировать, сравнивать, систематизировать и умозаключать [11].

На начальном этапе формирования умений строится с учетом обоснования своих действий и понимании изученных приемов и операций в процессе развернутого рассуждения. На данном этапе учитель формирует у обучающихся умение к полному ответу, который сопровождается развернутыми рассуждениями и многочисленными операциями. Постепенно они будут совершенствовать ранее полученные умения. Поэтому со временем обучающиеся будут кратко излагать свои действия при решении определенной задачи, пропуская некоторые звенья в своем рассуждении. Но причиной краткого изложения решения может быть еще и незнание теоретического материала. Поэтому на уроке учитель должен видеть понимает ли обучающийся, что делает и говорит или нет. Если же учитель видит, что обучающийся осознано рассказывает сжатое решение задачи, то можно утверждать, что он обладает высоким уровнем развития умения. Следовательно, можно выделить показатель сформированного умения, которым является его сознательный и целенаправленный перенос на решение новых задач [11].

Рассмотрим формирование умения на уроках математики при решении интегралов и нахождения первообразной. Данные умения представляют собой сочетание следующих умений:

1. Умение осмысление основных интегралов, способы их получения;
2. Умение находить нетрадиционные способы решения;
3. Умение пользоваться тригонометрической окружностью, для нахождение первообразной, содержащей тригонометрические функции;
4. Умение изображения графиков функций;
5. Умение решать простейшие табличные интегралы;

6. Умение правильно различать по виду способы решения интегралов;

7. Умение правильно применять полученные знания на практике;

8. Умение анализировать при решении интегральных функций;

9. Умение преобразовывать полученные интегралы, с помощью ранее изученных формул, выражений, тождеств;

10. Умение применять первообразные и интегралы в других сферах деятельности;

Для успешного решения интегралов и нахождения первообразных обучающийся должен обладать выше изложенными умениями, которые приобретаются не сразу, а с течением некоторого периода времени. Для этого школьник должен хотеть учиться и получать новые знания. Конечно, не малую роль в учебном процессе, как уже говорилось, играет и учитель. Учитель должен в любой ситуации поддерживать своего ученика, грамотно строить ход урока, при необходимости уделять ученикам время вне урока, давать дополнительные задания для устранения пробелов знаний. Следовательно, обучающийся и учитель должны совместно приложить все усилия для приобретения новых умений, знаний и навыков.

Когда я пришла на педагогическую практику обучающиеся уже заканчивали изучения раздела «Применение производной», а через несколько занятий мы перешли к изучению « Первообразная и интеграл». На первых своих уроках я разбирала с старшеклассниками задания, в которых они должны были показать не только знания теоретического материала предыдущих тем, а умели применять их в конкретных ситуациях. Знания основных табличных интегралов я проверяла каждый урок, проводя диктанты и короткие самостоятельные работы. Во время диктанта класс был разделен на варианты, каждому из которых я задавала написать разные интегралы, теоремы, свойства. Приведем пример одного из вариантов:

Вариант 1.

1. Напишите основное свойство неопределенного интеграла?

2. Чему равен интеграл суммы?

3. Как интегрировать постоянную интеграла?

4. Как выглядит формула Ньютона- Лейбница?

5. Чему равен следующий табличный интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6. Где применяю первообразную и интеграл?

Ответы:

1. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - непрерывные на интервале (a;b) функции A_1 и A_2 постоянные, то имеет место равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла: $\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x))dx = A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx + C$, где C – некоторая константа.

2. Интеграл суммы равен сумме интегралов.

3. Постоянную интеграла выносят за знак интеграла.

4. Формул Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

6. В физике, в математике, в геометрии.

В среднем старшеклассники справляются в этим заданием на 80-90%. Есть обучающиеся, которые выполняют поставленные перед ними вопросы без единых ошибок, а именно на 100%.

Первая самостоятельная работа состояла из трех заданий, где обучающиеся должны были найти не только табличные интегралы, но и закрепить полученные знания о нахождении первообразной для функций, предполагалось разбиение на варианты. Предполагаемое время выполнения 6 минут.

Вариант 1.

1. Найти первообразную для функции f(x), если f(x)=3^{2x+7};

2. Найти неопределенный интеграл $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$;

3. Вычислить значение интеграла $\int (x + \sin x)dx$, при x=3.

Решение данного варианта:

1. $f(x) = 3^{2x+7}$,

$$F(x) = \frac{1}{2\ln 3}3^{2x+7} + C; F'(x) = \frac{1}{2\ln 3}3^{2x+7} \bullet \ln 3(2x+7)' = \frac{1}{2} \bullet 3^{2x+7} \bullet 2 = 3^{2x+7}$$

2. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int \sqrt{x}dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + tgx + C$

3. $\int (x + \sin x)dx = \int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$

С данным заданием справлялись большая часть обучающихся. 45% обучающихся получали «5», 37% - «4» и 18%- «3».

После написания самостоятельной работы мы приступали к решению различного рода заданий и применения интегралов для нахождения различных параметров. Для этого необходимо актуализировать знания обучающихся по данной теме, предоставить доступный теоретический материал, связанный с данной темой. Обучающиеся выходили к доске и решали упражнения из школьного учебника, задания из сборника задач по алгебре, авторами которого являются М.Л.Галицкий, А.М.Гольдман и Л.И.Звавич, а также из других сборников. Также мы решали на уроках задания ЕГЭ. Я следила за ходом решения и, если возникали сложности, помогала и разъясняла данную проблему. Рассмотрим фрагмент урока, когда обучающиеся решают задания у доски.

Фрагмент плана-конспекта урока:

Учитель: ребята, теперь открываем свои учебники на странице 175, упражнение 6.19. Выходим к доске по цепочке.

Упражнение 6.19. Найдите неопределенный интеграл, используя замену переменной:

А) $\int e^{3x} dx$

Решение:

$$\int e^{3x}dx = \left| \begin{matrix} y = 3x \\ dy = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dy \end{matrix} \right| = \int e^y \bullet \frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}e^y + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Ответ: $\frac{1}{3}e^{3x} + C$

Б) $\int \sin 7xdx = \left| \begin{matrix} 7x = a \\ da = 7dx \\ dx = \frac{1}{7}da \end{matrix} \right| = \frac{1}{7}\int \sin ada = -\frac{1}{7}\cos a + C = -\frac{1}{7}\cos 7x + C$

Ответ: $-\frac{1}{7}\cos 7x + C$

В) $\int 9^{2x}dx = \left| \begin{matrix} b = 2x \\ db = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}db \end{matrix} \right| = \int 9^b \bullet \frac{1}{2}db = \frac{9^b}{2\ln 9} + C = \frac{9^{2x}}{2\ln 9} + C$

Ответ: $\frac{9^{2x}}{2\ln 9} + C$

Учитель: а теперь давайте отдохнем! Проведем физкультминутку.

Ребята, сложите руки в замок, обхватите ими затылок, направьте их локти вперед. Далее подтяните голову к локтю, не сопротивляясь, растягивайте шейный отдел позвоночника. Тянуть стоит 10-15 секунд.

А теперь проведем разминку для глаз, где нам поможет рисунок, который расположен над доской, проведите взглядом линии, которые по очереди указаны на рисунке. Молодцы! Теперь с новыми силами продолжим наш урок.

Продолжаем цепочку.

Упражнение 6.14.

Найдите неопределенный интеграл:

А) $\int \left(3\sin x + 4\cos x - 5\sqrt{x}\right)dx$

Решение:

$$\int \left(3\sin x + 4\cos x - 5\sqrt{x}\right)dx = \int 3\sin xdx + \int 4\cos xdx - \int 5\sqrt{x}dx =$$

$$= -3\cos x + 4\sin x - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C$$

Ответ: $-3\cos x + 4\sin x - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C$

Б) $\left(\int \frac{1}{\sqrt{x}} - 5e^{x-1} + 3 \bullet 2^x\right)dx$

Решение:

$$\left(\int \frac{1}{\sqrt{x}} - 5e^{x-1} + 3 \bullet 2^x\right)dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx - \int 5e^{x-1}dx + \int 3 \bullet 2^x = 2\sqrt{x} - 5e^x + 3\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Ответ: $2\sqrt{x} - 5e^x + 3\frac{2^x}{\ln 2} + C$

Учитель: ребята, хочу обратить ваше внимание, что для нахождения интегралов необходимы не только примитивные знания арифметики, но и теоретический материал, который был усвоен вами до изучения данной темы. Так для решения многих интегралов вам необходимо вспомнить основные теоретические тождества и применить их в нахождении. Для закрепления полученных знаний выполним следующее упражнение, при этом также решаем по цепочке.

Упражнение 6.16.

$$\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$$

Решение:

$$\int \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}tgx + C$$

Ответ: $\frac{1}{2}tgx + C$

Далее время шло к концу урока, я задавала на дом задания подобные тем, что мы решали на уроке, для того чтобы они смогли дома самостоятельно закрепить учебный материал (задание 6.13, 6.17 стр. 172, учебник С.М. Никольский), повторить основные тригонометрические формулы и табличные интегралы.

Следующий урок у нас начинался с проверки домашнего задания. Мы разбирали вопросы, которые возникли у старшеклассников в ходе решения домашней работы. Потом мы писали диктант, небольшую проверочную работу и решали задания у доски.

С каждым уроком было видно, что обучающиеся усовершенствовали свои умения при нахождении интегралов (доказательство тождеств, вывод табличных интегралов, нахождение первообразной и т.д.), а это не могло не радовать меня. Мне было приятно, что те силы, который я вкладывала при подготовке к каждому уроку и в каждого ученика, прошли не бесследно. Обучающиеся вступали в диалог на уроке, предлагали сами способы решения.

Я видела, что обучающиеся приобрели достаточные умения, знания и навыки при решении интегралов: они знали наизусть табличные интегралы, правильно использовали их при решении определенного рода задания.

Контрольную работу по данной теме старшеклассники написали следующим образом: 55% получили «5», 37% - «4» и 8% - «3». В контрольную работу входили подобные задания, которые мы разбирали с ними на уроке, и одно задание было повышенной сложности. Было приятно, что старшеклассники сделали его. На следующем уроке мы провели анализ контрольной работы и сделали работу над ошибками.

Далее мы начали подробно изучать первообразные и интеграл. Сначала повторили свойства интегралов, а на следующем уроке – перешли к изучению методов и способов нахождения интегралов. Для того, чтобы у обучающихся сформировались умения по данным темам, я придерживалась методики преподавания, которую описывала ранее. Представлю несколько планов конспектов данных уроков.

План-конспект урока математики в 11 классе.

Тема: «Площадь криволинейной трапеции».

1. Тип урока: комбинированный

2. Цель урока: формирование понятия и применение интегрального исчисления для нахождения площади криволинейной трапеции

3. Задачи урока:

- обучающие: ознакомить обучающихся с применением интегралов для нахождения криволинейной трапеции

- развивающие: развивать математическую речь и логическое мышление;

- воспитательные: воспитывать стремление к расширению знаний.

4. Оборудование: доска, мел, учебник.

5. Список литературы:

- для учителя:

- для учителя:

1) Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.

- для ученика:

1) Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.

6. Ход урока:

   1) Организационный момент – 1 мин.
   2) Проверка домашнего задания – 7 мин.
   3) Постановка темы и цели урока – 2 мин.
   4) Изучение нового материала - 10 мин.
   5) Закрепление– 20 мин.
   6) Домашнее задание – 2мин.
   7) Подведение итогов урока, рефлексия – 3 мин.

Организационный момент

Здравствуйте, ребята! Присаживайтесь, пожалуйста. Прошу вас убрать все лишнее со стола. Давайте проверим присутствующих. Итак, начнем урок.

Проверка домашнего задания

Прежде чем приступить к изучению нового материала давайте проверим ваше домашнее задания. Вам было задано решить задания на карточках, и №6.23 . У вас все получилось? Есть вопросы? Если нет вопросов, то в конце урока сдадите мне все тетради, я посмотрю на решение упражнений.

Постановка темы и цели урока

Ребята, сегодня мы будем разбирать тему: «Площадь криволинейной трапеции». А теперь откройте ваши рабочие тетради, запишите число, классная работа и тему нашего урока.

Изучение нового материала

Какая фигура называется криволинейной трапецией? По какой Формуле вычисляется площадь криволинейной трапеции?

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком заданной на сегменте $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной фукнции $f(x)$, ординатами, проведенными в точках a и b, и отрезком оси Ox между точками a и b.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Какие из фигур на доске являются криволинейными трапециями?

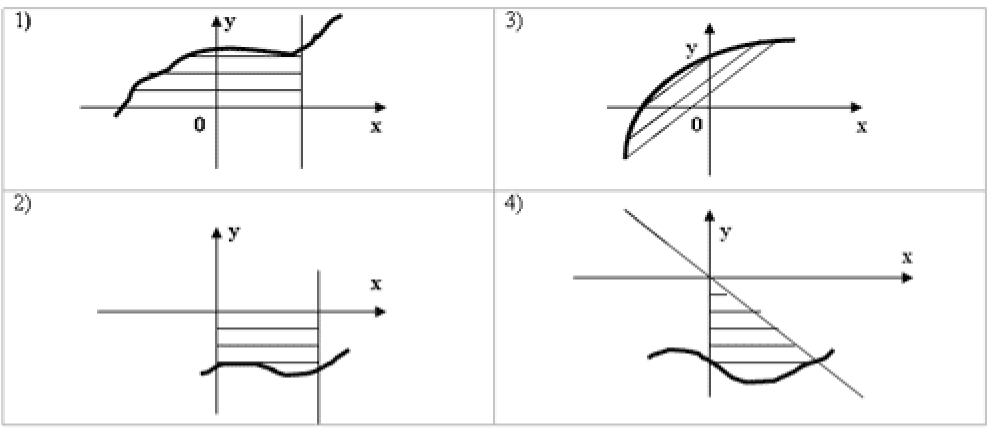
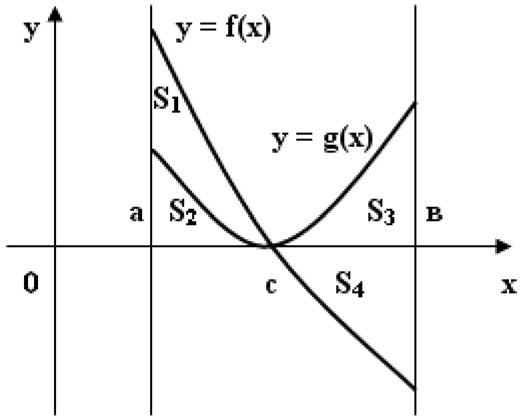


Рисунок 4 – дидактические материалы, для изучения первообразной

Назовите формулу для вычисления площади изображенных фигур:



$$S_1 = \int_a^c f(x)dx - \int_a^c g(x)dx$$

$$S_2 = \int_a^c g(x)dx$$

$$S_3 = \int_c^b g(x)dx$$

$$S_4 = -\int_c^b f(x)dx$$

Рисунок 5 – криволинейная трапеция

<u>*Закрепление*</u>

1.Найдите площадь заштрихованной фигуры (работа в рабочих тетрадях):

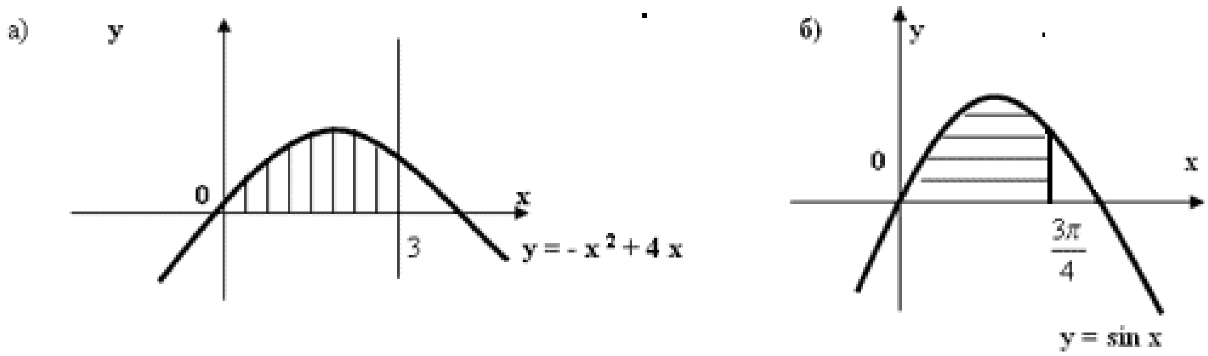
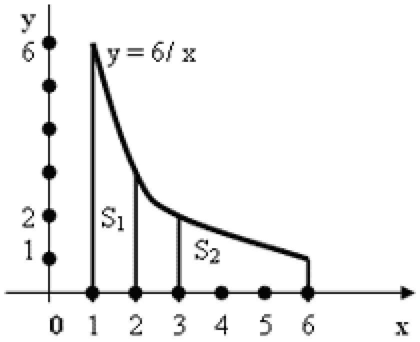


Рисунок 6 – площади криволинейной трапеции

$$a)\int_0^3 (-x^2+4x)dx = F(3) - F(0) = (\frac{(-3)^3}{3} + 2\cdot 3^2) - 0 = (-9+18) = 9$$ (кв.ед.)

б) $$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin x dx = -\cos(\frac{3\pi}{4}) + \cos 0 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$ (кв.ед.)

2.Докажите, что площади криволинейных трапеций, заштрихованных на рисунке равны.



$$S_1 = \int_1^2 (6/x)dx = 6\ln 2 - 6\ln 1 = 6\ln 2 \text{ (кв.ед)}$$

$$F(x) = 6\ln x$$

$$S_2 = \int_3^6 (6/x)dx = 6\ln 6 - 6\ln 3 = 6\ln 2 \text{ (кв.ед)}$$

Рисунок 7 – криволинейная трапеция, разбитая на множество бесконечно малых частей

<u>Домашнее задание</u>

Откройте дневники, записываем домашнее задание, пункт 6.3., номер 6.28.

<u>Подведение итогов урока, рефлексия</u>

Итак, ребята, мы с вами сегодня отлично поработали. Надеюсь, дальнейшие уроки пройдут так же замечательно. Ребята, которые были у доски подойдите на перемене с дневниками.

Рефлексия:

Ребята, по цепочке ответьте мне на следующие вопросы:

1. Я узнал(а) … .

2. Больше всего мне понравилось … .

3. Менее всего мне понравилось … [2,18].

План-конспект урока математики в 11 классе.

Тема: «Определенный интеграл».

1. Тип урока: изучение нового материала

2. Цель урока: формирование умений применять правила вычисления определенного интеграла

3.Задачи урока:

- обучающие: научиться вычислять определенный интеграл

- развивающие: развивать математическую логику, внимание.

- воспитательные: воспитывать у обучающихся навыки само и взаимоконтроля;

4. Оборудование: доска, мел, учебник.

5. Список литературы:

- для учителя:

1) Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с

- для ученика:

1) Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с

6. Ход урока:

1) Организационный момент – 2 мин.
2) Актуализация знаний – 5 мин.
3) Изучение нового материала - 15 мин.
5) Закрепление– 20 мин.
6) Домашнее задание – 2мин.
7) Подведение итогов урока, рефлексия – 1 мин.

Организационный момент

Здравствуйте ребята, сегодня мы с вами не останавливаемся на изученном, а продолжаем познавать раздел «Первообразная и интеграл». Для этого нам с вами необходимо изучить новые понятия, свойства и определения. Дежурные подайте список отсутствующих, и записываем новую тему « Определенный интеграл»

Актуализация знаний

Перед тем как нам изучить новую тему, необходимо вспомнить, что мы изучали с вами ранее. Для этого проведем мини опросник. Я буду задавать вам вопросы, а вы собственно должны будете на них ответить.

1. Назовите определение первообразной функции?

Ответ: Функцию y=F(x) называют первообразной для функции y=f(x) на промежутке X, если для x из X выполняется равенство F'(x)=f(x).

2. Если функция задается в виде многочлена третьей степени, то какую степень имеет производная этой функции? А первообразная?

Ответ: Производная функции F(x) равна f(x).Производная имеет 3 степень; Первообразная - 4.

3. Какие правила нахождения первообразных вы знаете?

Ответ:

1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.

2. Если F(x) – первообразная для f(x), то kF(x) – первообразная для kf(x).

3. Если y=F(x) – первообразная для y=f(x), то первообразной для y=f(kx+m) служит функция y=1/k*F(kx+m).

Молодцы, вы успешно справились с усвоением прошедшего нами материала.

Изучение нового материала

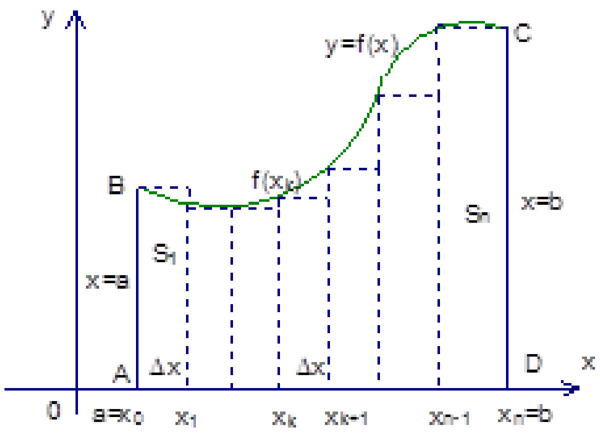
Приступим к изучению нового материала. Для этого на сегодняшнем уроке мы рассмотрим задачу, которая поможет нам прийти к понятию определенного интеграла. Записываем в своих тетрадях «Задача о площади криволинейной трапеции», условия задачи переписываем.

Задача:

Найти площадь фигуры, ограниченную линиями: y=f(x)на отрезке [a,b], x=a, x=b, y=0. Найти $S=S_{ABCD}$.

Какую особенность мы знаем? На сегодняшний день нам известно, что в криволинейной трапеции верхняя линия задается некоторой функцией.

Существует несколько вариантов решения, один из них разбиение отрезка [a,b] на бесконечно маленькие отрезки и посчитать площади каждого прямоугольника



.

Рисунок 8 – интерпретация площади криволинейной трапеции

Производим разбиение на n одинаковых частей $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Величина $\Delta x = x_{k+1} - x_k$. Проведем через эти точки прямые, параллельные оси y. В результате, криволинейная трапеция будет представлена собой суммой n узеньких столбцов и площадь всей трапеции будет рана сумме площадей этих столбиков.

Площадь j-го столбика будет равна произведению $f(x_j)$ на Δx. Причем, чем больше будет разбиение, т.е. n, тем наиболее точной будет площадь трапеции. Сумму площадей прямоугольников принято искать в виде предела последовательности (S_n): $S = \lim S_n$.

В данный момент, мы с вами совершили два действия: разбили отрезок $[a,b]$ на n равных частей и составили сумму S_n прямоугольников. В дальнейшем мы можем его численно вычислить. В курсе математики доказано, что в случае непрерывности предел существует. Его называют определенным интегралом от функции $y=f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначают так $\int_a^b f(x)dx$. Числа a и b называют *пределами интегрирования*.

Тогда, определение площади из задачи теперь можно записать следующим образом: $S = \int_a^b f(x)dx$. S – площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке.

В рассмотренной задаче и заключается смысл геометрической интерпретации определенного интеграла.

На данный момент у вас может возникнуть вопрос: какая взаимосвязь данной темы с темой первообразной?

Для этого рассмотрим следующую теорему: Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где F(x) – первообразная для f(x). Приведенную формулу называют формулой Ньютона-Лейбница в честь английского физика Исаака Ньютона и немецкого философа Готфрида Лейбница, получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно. Обычно, вместо разности первообразных записывают так $F(x)\Big|_a^b$.

И тогда формула Ньютона-Лейбница будет принимать вид. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Закрепление

Для закрепление изученного нами материала, решим несколько номеров, которые помогут нам понять наглядно и применить наши знания на практике. Открываем страницу 181 учебника и по очереди решаем номера, начинаем с номера 6.32. Прошу первого человека к доске. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, изобразите график и вычислите значения:

а) $\int_0^2 xdx$

Решение:

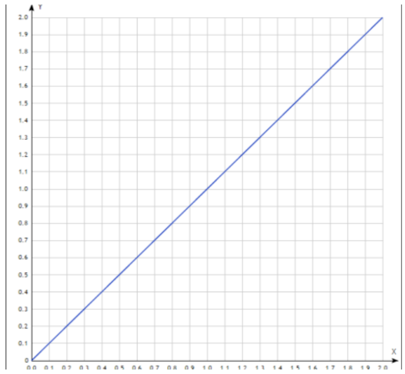


Рисунок 9 – график функции

Рассмотрим функцию y=x на отрезке [0;2]. $\int_0^2 xdx$ равен площади треугольника S=$\frac{1}{2}\bullet 2\bullet 2$=2

Либо решаем определенный интеграл известных нам ранее способом, а именно применяя табличный интеграл:

$$\int_0^2 xdx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{2^2}{2} - 0 = 2$$

Ответ: 2

б) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

Решение:

Находя данный интеграл, нам прежде всего необходимо представить наглядный рисунок .

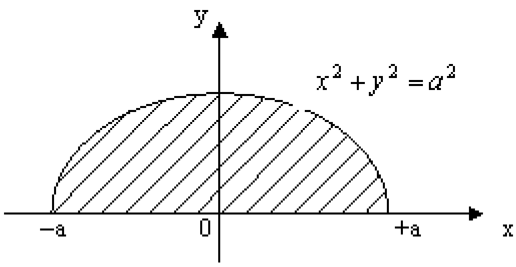


Рисунок 10 – половина окружности

Мы видим, что площадь нашей половины окружности расположена в 1 и 4 четвертях. Обозначим подынтегральную функцию y, тогда мы имеем: $y=\sqrt{a^2-x^2}$ либо можно представить функцию в другом виде: $y^2=a^2+x^2$.

Известно, что это окружность радиуса ас центром в начале координат. Известно, что площадь круга равна πa^2, но также после графического изображения видно, что нас интересует только верхняя половина окружности, поэтому:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^2}{2}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{2}$

в) $\int_{0}^{2\pi}\sin xdx$

Решение:

Перед тем, как рассмотреть на первый взгляд элементарный интеграл, изобразим график функции на координатной оси

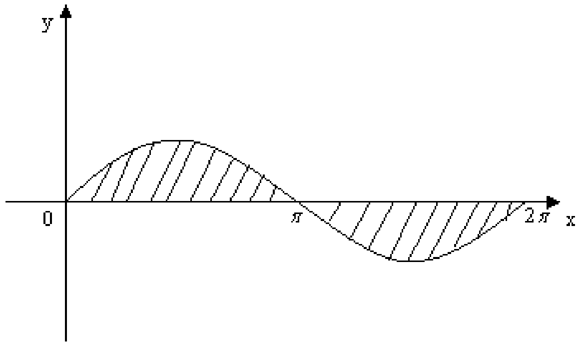


Рисунок 11 – графическая интерпретация синусоиды

Глядя на рисунок можно точно утверждать, что данную синусоиду можно разбить на несколько участков, а именно [0;π],[π;2π].

Рассмотрим первый участок, кривая расположена над осью OX, аналогично рассмотрим второй учасок, мы видим, что кривая y=sinx расположена под осью OX. Обозначим площади образованные под данной кривой S_1 и S_2.Численно данные площади равна по модулю, что значит они противоположны по знакам, отсюда следует: $\int_0^{2\pi} \sin x dx$ =S_1+(-S_2)=0

Либо $\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = (-1) + 1 = 0$

Ответ: 0

По формуле Ньютона-Лейбница , вычислите определенный интеграл №6.46:

а) $\int_{-1}^{2} x \bullet e^{x^2+1} dx$

Подынтегральная функция непрерывна на отрезке [-1;2], следовательна интегрируема на нем.

Вычислим определенный интеграл, используя метод подведения под знак дифференциала :

$$\int x \bullet e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2+1} d(x^2+1) = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$$

В данной ситуации мы видим множество первообразных функций для действительных чисел x, что значит и для [-1;2]. Для нахождения конечного ответа возбмем первообразную при С=о и применим формалу Ньютона-Лейбница.

$$\int x \bullet e^{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2+1} d(x^2+1) = (\frac{1}{2}e^{x^2+1})\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}e^2(e^3-1)$$

Ответ: $\frac{1}{2}e^2(e^3-1)$

Домашнее задание

Открываем дневники, записываем домашнее задание, номер 6.47, 6.42,6.36.

Подведение итогов урока, рефлексия

Сегодня у нас был активный урок, вы все молодцы, показали хороший уровень усвоения знаний, у вас есть какие то вопросы?

Что вам понравилось на нашем уроке?

Как бы вы хотели провести следующий урок?

План-конспект урока математики в 11 классе.

Тема: «Применение определенных интегралов в геометрических и физических задачах».

1. Тип урока: Урок применение знаний, умений и навыков.

2. Цель урока: систематизировать полученные знания, найти способы применения в алгебре, геометрии и физике

3. Задачи урока:

- обучающие: систематизировать полученные знания, применить их дл решения геометрических и физических задач;

- развивающие: развивать общения и культуру математической речи;

- воспитательные: воспитывать трудолюбие и интерес к предмету;

4. Оборудование: доска, мел, учебник.

5. Список литературы:

- для учителя:

- для учителя:

1) Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.

- для ученика:

1) Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.

6. Ход урока:

1) Организационный момент – 1 мин.

2) Актуализация знаний – 3 мин.

3) Изучение нового материала – 15 мин.

4) Закрепление– 23 мин.

5) Домашнее задание – 1мин.

6) Подведение итогов урока, рефлексия – 2 мин.

Организационный момент

Здравствуйте ребята, дежурные подайте списки отсутствующих. Тема сегодняшнего урока « Применение определенных интегралов и геометрических и физических задач»

Актуализация знаний

Мы с вами завершаем изучение раздела, а следовательно мы богаты огромным багажом знаний, приобретенных ранее. Тогда ответьте мне на 3 несложных вопроса:

1. Кто первым ввел символ интеграла? (Г. Лейбниц 1675)
2. Кто установил связь между операциями дифференцирования и интегрирования? (Ньютон и Лейбниц)
3. Назовите формулу Ньютона-Лейбница? ($\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$)

Изучение нового материала

Молодцы, а сейчас перейдем к рассмотрению примеров, которые не оставят равнодурными никого из класса. Каждый мальчик держал в руках и линейку и считает, что длину можно померить только ей, объем найти только по формуле и фигуре, к которой можно применить формулу, но существует второй способ нахождения всего этого и это применение определенного интеграла.

Объем тела вращения.

Перед нами рисунок, на котором изображено тело, которое вращается вдоль какой либо оси, в данном случае, вдоль оси OX.

Пусть Г график непрерывной положительной функции $y = f(x)$, где

($a \le x \prec b$) в прямоугольной декартовой системе координат xOy. Нам необходимо вычислить объем тела вращения, которое ограничено поверхностью вращения кривой Г вокруг оси x и плоскостями, которые проходят через точки $x=a$, $x=b$ перпендикулярно оси x.

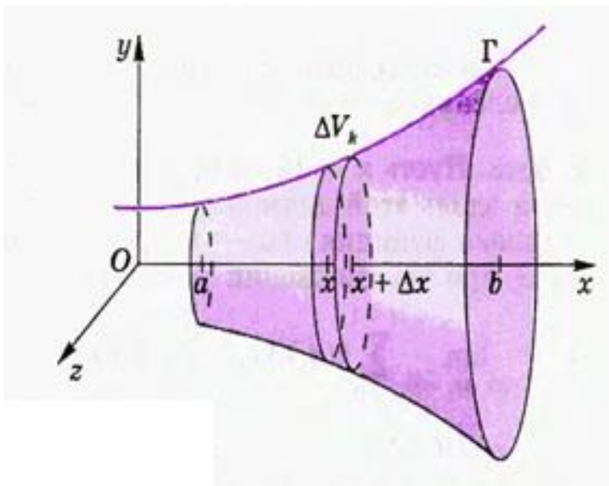


Рисунок 12 – тело вращения

Нам необходимо произвести разбиение, как мы делали это раньше, для этого разобьем отрезок [a;b] на множество частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, таким образом сделаем предположение, что элемент объема ΔV_k равен приближенному значению объема цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиусом основания $y_k=f(x_k)$:

$\Delta V_k \approx \pi y^2 \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k$, но тогда возможна другая запись объема, а именно при помощи приближенного равенства $V = \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k$. Таким образом при взятии предела мы получаем формулу для объема тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx .$$

Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила F=f(x), где f(x) непрерывная функция от x. Тогад работа сила при передвижении точки на отрезке [a;b] равна:

$$W = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\Delta x_j = \int_a^b f(x)dx.$$

Мы выяснили, что нахождение любых физических и геометрических величин можно свести к методу с использованием определенных интегралов. Для закрепления решим несколько задач.

Закрепление

Для того, чтобы нам закрепить наши знания и усвоить до конца материал необходимо решить много качественных задач.

Пример 1.

Пусть точка движется со скоростью v(t). Нужно найти путь S, пройденный точкой от момента t=a до момента t=b. Обозначим s(t) путь, пройденный точкой за время t от момента a. Тогда S'(t)=v(t), т.е. s(t) – первообразная для функции v(t). Поэтому по формуле Ньютона - Лейбница найдём: *s=v(t)dt.*

Например, если точка движется со скоростью v(t)=2t+1(м/с), то путь, пройденный точкой за первые 10 с, по формуле:

$$S = \int_0^{10} (2t+1)dt = (t^2+t)\Big|_0^{10} = 110\,(\text{м}).$$

Ответ: 110 (м).

Домашнее задание

Стр.201 номер 6.75, 6.77,6.78

Подведение итогов урока, рефлексия

Молодцы, наш сегодняшний урок прошел очень продуктивно, вы показали свои знания не только в математике, но и в физике. Спасибо за урок.

Что вы сегодня изучили интересного для вас?

Как применить это в жизни?

В рабочих тетрадях, рядом с «Классная работа» нарисуйте смайлик, характеризующий ваше настроение на уроке. Сдаем тетради на проверку. До свидания.

Далее обучающиеся решали несколько уроков подобное тому, что мы решали на уроке.

В завершении изученного курса была проведена контрольная работа, которая учитывала не только требуемый программой материал, но и качество усвоения данных тем. С контрольной работой старшеклассники справились следующем образом: 29% обучающихся получили «5», 48% - «4» и 23% - «3». На следующем уроке был проведен анализ контрольной работы и работа над ошибками.

Из полученных результатов видно, что старшеклассники успешно сформировали у себя умения находить первообразные и применять их в других науках.

2.2 Сравнительная характеристика усвоение первообразной в школьном курсе

Исследование проводилось во время прохождения педагогической практики в 11 классе в МОУ «Пушкарская средняя общеобразовательная школа Белгородского района Белгородской области», расположенной по адресу Белгородская область, Белгородский район, с. Пушкарное, ул. Центральная, 13. В классе обучаются 12 человек, из них 6 девочек и 6 мальчиков. Успеваемость в данном классе высокая. 42% обучающихся 2015-2016 год закончили на «отлично».

В данной школе обучающиеся выпускных классов работают по учебнику 10-11 класса алгебры и начала математического анализа под редакцией С.М. Никольского, применялись дидактические карточки разработанные в течение практики (Приложение Г).

В ходе сравнительного анализа, использовались статистические данные об успеваемости учащихся по математике за I полугодие, а именно период, когда изучался раздел «Первообразная и интеграл» 2015 и 2016 годах. Таким образом, мы получили следующую таблицу 1:

Таблица 1 – Статистические данные

№ п/п	Показатели/года	2015	2016
1	На 5 «Отличники»	2	3
2	На 5 и 4 « Хорошисты»	7	8
3	Из них с одной 4	1	1
4	На 3 «Троечники»	7	1
5	Из них с одной 3	3	0
6	Качество знаний, %	56,25	71,67
7	Средний балл	3,69	4,17

Данная таблица наглядно демонстрирует прирост качества знаний школьников, которые в своей работе использовали дидактические материалы разработанные для изучения «Первообразной».

Рассмотрим график:

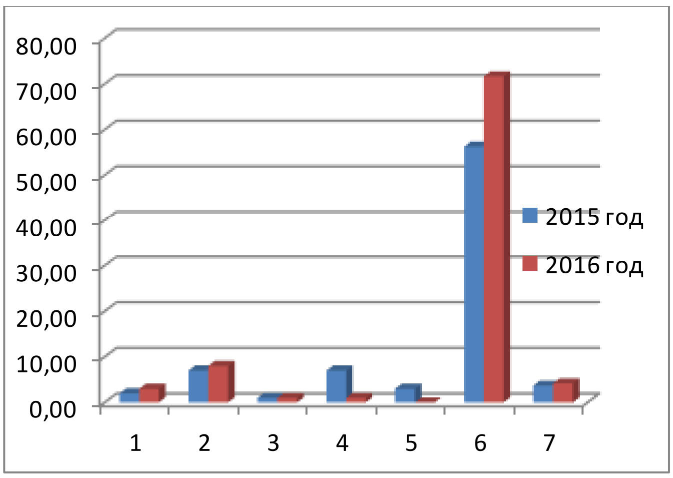


Рисунок 13– диаграмма успеваемости школьников по математике за I полугодие 2015, 2016 годов

Рассмотрим каждый элемент столбчатой диаграммы:

1. Учащиеся обучающиеся на «5» (отличники). Мы видим, что в 2016 году в I полугодии успеваемость по математике увеличилась, а именно добавился один ученик, отлично усвоевший материал за текущую четверть;

2. Учащиеся обучающиеся на «5» и «4». Рассматривая данные статистические данные и в данной категории после усвоения материала с помощью дидактических материалов, также увеличилось количество людей с высоким уровнем знаний;

3. Из них с одной «4». Количество учащихс осталось неизменно, но при этом не обратилась динамика в худшую сторону;

4. Учащиеся обуюющиеся на «3». Динамика увеличения знаний прослеживается в данном элементе диаграммы, более высокие показатели по стравнению с предыдущим годом;

5. Из них с одной «3». На данной диаграмме видно уменьшение, а именно сведение к 0, количество учащихся имеющих «3».

6. Качество знаний. Рассмотрим процентрое соотношение качества знаний учащихся обучающихся по одной образовательной программе, предыдущие года учились у одного учителя, но ученикам 2016 года предлагался комплекс дидактических материалов, вспомагательных таблиц, презентаций, таким образом мы видим прирост качества знаний, а именно 15,42%. Данный проент является достаточно большим, что доказывает эффективность данных материалов.

7. Средний балл. Средний балл по математике за I полугодие учеников 2015,2016 годов обучения различается, увеличившись на 0,48 у учеников использовавших дидактические материалы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была проработана учебная литература по теме исследования. Были рассмотрены определения и свойства неопределенных интегралов; определенных интегралов; формула Ньютона-Лейбница; виды и методы решения интегралов, а также дидактические материалы для использования в преподавании в курсе математики. Также были рассмотрены решения первообразных и интегралов различных видов разными способами. Приведены и разобраны задания ЕГЭ, олимпиадного уровня и задания, которые можно разбирать на элективных курсах.

Мы убедились, что формирование умений решать первообразные и у обучающихся является очень важным и трудным процессом в школьном курсе, так как требует совместных усилий учителя и школьников.

Учитель должен обладать высокими знаниями как в методики преподавания первообразной и интеграла, так и в методах решения, но и иметь большое количество дидактических материалов. При подготовке к уроку учитель должен тщательнее проработать и подобрать материал, разработать вспомогательные карточки. Также он должен учитывать индивидуальные особенности обучающихся.

Что касается старшеклассников, то они должны знать материал математики за весь период обучения основной школы и материал, который дается в старшей школе не только по математике, но и физике.

При решении интегралов любой сложности у старшеклассников расширяется математический кругозор. Они тренируют свой интеллект, при этом происходит развитие математического и логического мышления. Обучающиеся приобретают умения анализировать, сравнивать и обобщать. Также стоит отметить, что решение интегралов является очень сложным и трудоемким занятием. Поэтому у старшеклассников формируются такие качества, как трудолюбие, целеустремленность, усидчивость, сила воли и точность.

Таким образом, первообразная играют огромную роль в школьном курсе математики.

Были разработаны дидактические материалы для работы старшеклассников на уроке математики применены на уроках в 2016 году. Данный способ усвоения знаний, благоприятно повлиял на процесс обученности. Таким образом, проведя статистический анализ успеваемости по математике за I полугодие 2015 и 2016 учебных годов уровне среднего общего образования МОУ «Пушкарская СОШ», мы выявили благоприятный прирост процента качества знаний. Следовательно, данные пособия благоприятно сказываются в школьном курсе.

Разработанный комплекс дидактических материалов по формированию умений у обучающихся решать интегралы на уроках математики, может быть использован учителями и студентами-практикантами общеобразовательных учреждений при составлении элективных курсов, при подготовке к участию в олимпиадах, при подготовке обучающихся к вступительным экзаменам в вузы и, конечно, при подготовке решения задания ЕГЭ.

Также рассмотренные дидактические материалы, предложенные в данной выпускной квалификационной работе, могут быть использованы при подготовке курсовых и выпускных квалификационных работ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1978. – 423 с.

2. Алгебра и начала анализа, 10 класс, Поурочные планы по учебнику Колмогорова А.Н., 2011.

3. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник, изд. 3-е. – СПб.: ЛКИ, 2008. – 248 с.

4. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / перевод с немецкого под редакцией А.П.Юшкевича. – М.: Наука, 1966. – 508 с.

5. Выгодский Я.Я. Справочник по элементарной математике / Я.Я. Выгодский – М.: Наука, 1970.

6. Гамезо М. В. Словарь-справочник по возрастной и педагогической психологии / Под ред. М. В. Гамезо. – М., 2001.

7. Гамезо М.В., Петрова Е.А., Орлова Л.М. Возрастная и педагогическая психология. – М.: Педагогическое общество России, 2009.

8. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX-X классы. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983. – 352 с.

9. Джумаева Н.Э., Сохибова А.Р. Педагогические термины и понятия.- Карши, 2014.

10. Запорожец Н.И. Развитие умений учащихся // ПИШ, 1981г., № 4, – 28 с.

11. Ительсон Л.Б. Лекции по современным проблемам психологии обучения. – Владимир, 1972 – 264 с.

12. Коджаспирова Г. М., Коджаспиров А.Ю. Словарь по педагогике. – Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. – 448 с.

13. Колмогоров А.Н Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобазоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П.

Дудницын и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. – 9-е изд. – М.: Просвещение, 2000. – 365 с.

14. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец.пед.ин-тов.-2-е изд., перераб.и доп. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.

15. Марасанов А.Н. О методологическом подходе в обучении тригонометрии/ Н.И. Попов, А.Н. Марасанов // Знание и понимание. Умение. – 2008. – №4. – С. 139–141.

16. Математика в таблицах и схемах. Для школьников и абитуриентов. Изд. 2-е, испр. и доп. СПб, «Виктория плюс», – 2013. – 224 с.

17. Мордкович А.Г., Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – 14-е изд., стер. –.М.: Мнемозина, 2013. – 400 с.

18. Немов Р.С. Психология: Учеб.для студ.высш.пед.учеб.заведений: В 3 кн. – 4е изд. М.:Гумакнит.изд.центр ВЛАДОС, – 2003. – Кн.2: Общие основы психологии. – 608 с.

19. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.

20. Осипов В.Ф. Конкурсные задачи по математике. Алгебра и тригонометрия. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета. 1996.– 48 с.

21. Погорелов А.В. Геометрия: учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 1996. – 383 с.

22. Решу ЕГЭ – образовательный портал [Электронный ресурс], – Режим доступа: https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=167.

23. Аверьянов Д.И., Алтынов П.И. Математика. Большой справочник

для школьников и поступающих в ВУЗы. – М.: Дрофа, 2002.

24. Баврин И.И. Курс высшей математики: Учебник. – М.: Просвещение, 1992. – 372 с.

25. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Т3. – М.: Дрофа, 2003.

26. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., Мордкович А.Г. Математика: лекции, задачи, решения. – М.: Альфа, 1995. – 367 с.

27. Виноградова А.И. Сборник задач по математическому анализу. – Т2. – М.: Просвещение, 2000.

28. Азаров А.И., Функциональный и графический методы решения экзаменационных задач / Азаров А.И., Барвенов С.А., – Мн.: Аверсэв, 2004.

29. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: Справ. Материалы. – М.: Просвещение, 1990. – 415 с.

30. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Ч1. – М.: 1999.

31. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1990.

32. Дорофеева А.В. Учебник по высшей математике. - М.: Изд-во МГУ, 1971.- 422 с.

33. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов / Под ред. Демидовича Б.П., – М., 2002.

34. Дорофеева А.В. Учебник по высшей математике. □ М.: Изд-во МГУ, 1971. □ 422 с.

35. Евстафьева В.Ю. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. – М.: Дрофа, 2000. – 414 с.

36. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа. – М., Просвещение, 1995. – 427 с.

37. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М., 2001.

38. Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям. – М., Высшая школа, 2001.

39. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – Т1. – СПб.: Лань,1999.

40. Энциклопедический словарь юного математика. Сост. А.П.Савин. – М.: Педагогика, 1985. – 549с.

41. Эрдниев П.М. Преподавание математики в школе. – М.: Просвещение, 1978. – 362 с.

42. Якушева Г.М. Справочник школьника. – М.: Просвещение, 1996. – 576 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Решение табличных неопределенных интегралов

Пример 1. Найти первообразную для функции f(x), если $f(x)=\frac{x^{-3}\sqrt{x}}{x^2}$.

Решение. Прежде чем находить первообразную для функции преобразуем наше выражение:

$$f(x)=\frac{x^{-3}\sqrt{x}}{x^2}=\frac{x^{-3}x^{\frac{1}{2}}}{x^2}=x^{-3+\frac{1}{2}-2}=x^{-4,5}$$

После преобразования функции приступим к нахождению первообразной:

$F(x)=\frac{x^{-3,5}}{-3,5}+C$, выполняя элементарные преобразования, получим ответ:

$$F(x)=-\frac{2}{7x^3\sqrt{x}}+C$$

Ответ: $F(x)=-\frac{2}{7x^3\sqrt{x}}+C$

Пример 2. Найти первообразную для функции f(x), если $f(x)=\frac{x^3\sqrt{x^{-5}}}{x^{-2}}$

Решение: $f(x)=\frac{x^3\sqrt{x^{-5}}}{x^{-2}}=x^{\frac{5}{2}}$

Находим первообразную используя определение первообразной, получаем:

$F(x)=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$. Выполняем преобразования степеней:

$$F(x)=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

Ответ: $F(x)=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

Пример 3. Найти первообразную для функции f(x), если $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение: $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=x^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{6}}$

$F(x)=\dfrac{6x^{\frac{13}{6}}}{13}+C$, преобразуем выражение:

$F(x)=\dfrac{6x^{\frac{13}{6}}}{13}+C=\dfrac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$

Ответ: $F(x)=\dfrac{6}{13}x^2\cdot\sqrt[6]{x}+C$

Пример 4. Найдите неопределенный интеграл $\int\sqrt{x}dx$

Решение: $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

Ответ: $\int\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

Пример 5. Найдите неопределенный интеграл $\int x^{\frac{2}{3}}dx$

Решение: $\int x^{\frac{2}{3}}dx=\dfrac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}+C$

Ответ: $\int x^{\frac{2}{3}}dx=\dfrac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}+C$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Интегралы, решенные способом замены переменных и интегрирования по частям, методом неопределенных коэффициентов

Пример 1. Найти интеграл $\int x(x^2+1)^{500}dx$.

Решение: Делаем замену $u = x^2 + 1$. Тогда $du = 2xdx \to xdx = \frac{du}{2}$, воспользовавшись формулой для решения интегралов методом замены переменных, получаем

$$\int x(x^2+1)^{500}dx = \frac{1}{2}\int u^{500}du = \left.\frac{u^{501}}{1002}\right|_{u=x^2+1} = \frac{\left(x^2+1\right)^{501}}{1002} + C.$$

Ответ: $\frac{\left(x^2+1\right)^{501}}{1002} + C$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int x\cos xdx$.

Решение:

$$\int x\cos xdx = \left| \begin{array}{l} u = \cos xdx; du = \sin x \\ v = x; dv = \frac{x^2}{2}dx \end{array} \right| \int xd\sin x = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

Ответ: *xsinx+cosc+C*

Пример 3. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$.

Решение.

Воспользуемся известным нам способом замены переменных, для этого представим, что $x–1 = t \Rightarrow x = t+1$, отсюда следует $dx = dt$. Применяя формулу для нахождения интеграла методом замены переменных получаем следующее выражение:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C,$$

не стоит забывать, что это не окончательный результат и прежде, чем записать ответ необходимо возвратиться к первоначальной замене и переменной, тогда получается следующий результат:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Ответ: $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{x-1} + C$.

Пример 4. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям следующего вида: $\int \ln x dx$.

Решение.

Допустим, $\int \ln x dx = (*)$, для нахождения данного интеграла необходимо воспользоваться формулой $\int udv = uv - \int vdu$.

Воспользуемся нашей формулой слева направо. Обратим внимание на левую часть: $\int udv$, мы видим две неизвестные переменные, для их нахождения вводим замены: $u = \ln x$, $dv = dx$, находим дифференциал du $u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)\ dx = \frac{dx}{x}$, $dv = dx$.

Для дальнейшего нахождения интеграла методом разделения по частям, необходимо v, проинтегрируем правую часть нашего равенства. $u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$, $dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$. На данном этапе рассматриваем наше решение и подставляем вместо (*) в наше выражение:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C,$$

где C = const.

Проверка. Для выполнения хода проверочной работы необходимо взять производную от ответа:

$$(x\ln x - x + C)' = (x\ln x)' - (x)' + (C)' = 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln x.$$

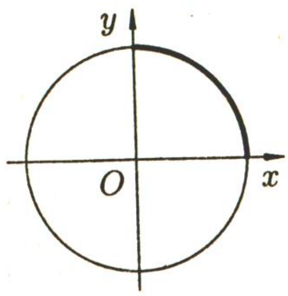
Ответ: $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$, где C = const.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Применение интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции, применение в физике

Пример 1: Найти длину окружности радиуса R.

Решение:



Найдем ¼ часть ее длины от точки (0;R) до точки (R;0). Так как $y = \sqrt{R^2 - X^2}$, $\frac{1}{4}L = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{X^2}{R^2 - X^2}}\,dx = R \arcsin \frac{X}{R}\Big|_0^R = R\frac{\pi}{2}$.

Значит $L = 2\pi R$.

Ответ: $L = 2\pi R$.

Пример 2: Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, x = 0, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси *Oy*.

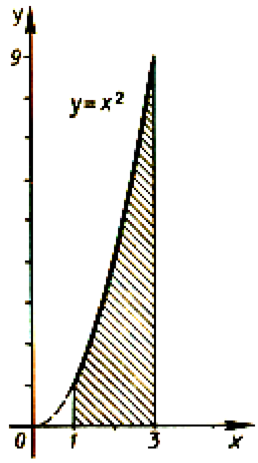
Решение: По формуле $V = \pi \int_a^b x^2\,dy$.

Находим:

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y\,dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$

Ответ: 8π.

Пример 3. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x=1$, $x = 3$ и осью Ox.



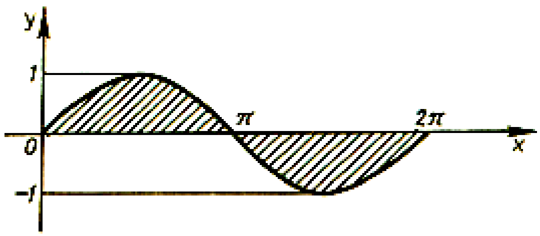
Решение.

Пользуясь формулой $S = \int\limits_a^b f(x)dx.$, находим искомую площадь

$$S = \int\limits_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

Ответ: $8\frac{2}{3}$.

Пример 4. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = sinx$ и осью абсцисс при условии $0 \le x \le 2\pi$ (рис 10). [1]



Решение. Разбиваем сегмент [0; 2π] на два сегмента [0; π] и [π; 2π]. На первом из них $\sin x \ge 0$, на втором — $\sin x \le 0$. Следовательно, используя формулы:

$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$ и $S = -\int\limits_a^b f(x)dx$, имеем, что искомая площадь

$$S = \int\limits_0^\pi \sin x dx + \left|\int\limits_\pi^{2\pi} \sin x dx\right| = -\cos x\Big|_0^\pi + \left|-\cos x\Big|_\pi^{2\pi}\right| = 4.$$

Ответ: 4

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Дидактические карточки для применения в изучении первообразной в курсе математики

1. Устный опросник:

Что называется криволинейной трапецией?

В чем заключается признак постоянства функции?

Что называется первообразной F(x) для функции f(x) на I?

Верно ли высказывание: «Первообразная суммы функций равна сумме их первообразных»?

В чем заключается основное свойство первообразной?

Верно ли высказывание: «Первообразная произведения функций равна произведению их первообразных»?

Что называется неопределенным интегралом?

Что называется определенным интегралом?

2. Карточки № 1. Первообразная. Неопределенный интеграл

Вариант 1

1	Докажите, что функция F(x) есть первообразная для функции f(x), если: $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+2x-13$ и $f(x)=x^2-5x+2$
2	Найдите первообразную для функции f(x) $f(x)=\sin x+\cos 3x-2^x$
3	Найдите ту первообразную для функции f(x), график которой проходит через точку A, если: $f(x)=5x$, A(4;12)
4	Найдите: $\int\sqrt{2x-3}dx$

3. Карточки №2: Нахождение неопределенных интегралов с помощью подстановки

1 Вариант	2 вариант
$\int \frac{3x}{x^2+4}dx$	$\int \frac{2x}{x^2+5}dx$
$\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+2dx}}$	$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+1dx}}$
$\int \sin^5 x \cos x dx$	$\int \sin x \cos^4 x dx$
$\int \sqrt{9-x^2}dx$	$\int \sqrt{16-x^2}dx$
$\int \sqrt{1-16x^2}dx$	$\int \sqrt{1-9x^2}dx$

4. Карточки № 3: Геометрический смысл определенного интеграла

1 Вариант	2 вариант
Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла вычислите:	
а) $\int_1^4 5dx$ б) $\int_{-8}^0 \frac{x}{2}dx$	а) $\int_1^5 4dx$ б) $\int_{-8}^0 \frac{x}{4}dx$
Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, приближенно вычислите:	
$\int_1^7 (-x^2+8x-7)dx$	$\int_{-1}^5 (-x^2+4x+5)dx$

5. Карточки№4 : Формула Ньютона- Лейбница

1 Вариант	2 вариант
Вычислите с помощью Ньютона-Лейбница определенный интеграл:	

а) $\int_{2}^{5}(x^2+x+1)dx$ б) $\int_{0}^{\pi}\sin xdx$	а) $\int_{2}^{4}(x^2-x+1)dx$ б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:	
$y=4+x^2$, $y=2-x$, $x=-1; x=1$	$y=4-x^2$, $y=5+x$, $x=-1; x=1$

6. Карточки №5: Интегральный диктант

1 ряд	2 ряд	3 ряд
1. $\int xdx$	1. $\int\frac{1}{7}dx$	1. $\int(-6)dx$
2. $\int\frac{x}{5}dx$	2. $\int\frac{xdx}{2}$	2. $\int\frac{1}{3}xdx$
3. $\int x^5dx$	3. $\int x^7dx$	3. $\int x^{10}dx$
4. $\int 7x^6dx$	4. $\int\frac{x^5dx}{5}dx$	4. $\int 11x^{10}dx$
5. $\int(7x+1)^3dx$	5. $\int(2x-1)^2dx$	5. $\int(3-2x)^4dx$

7. Карточки №6 :Решение задач

Вариант 1	Вариант 2
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями y= 4 -x^2, y=0.	Тело движется с ускорением a(t)= 4sin t(м/с²). Определите как изменится скорость за время от 0 до п/3сек.
Определить массу стержня длины L=10 м, если линейная плотность стержня меняется по закону p(x) =6+0,3x кг/м, где x — расстояние от одного из концов стержня.	Сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси OX и проходящей через точку с абсциссой X, является квадратом, сторона которого равна дроби 1/X . Найдите объём этого тела.

Найти уравнение кривой, проходящей через точку А(0;1), у которой касательная имеет угловой коэффициент, равный ординате точки касания.	По цепи идет переменный ток $I = 6t - t^2$(A) . Найдите величину заряда прошедшего по цепи за первые 6 сек.

8. Карточки№7: Итоговая контрольная работа

Вариант 1	Вариант 2
Докажите, что функция F(x) является первообразной для функции f(x), если:	
$F(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ и $f(x) = 3x^2 + 8x - 5$	$F(x) = 2x^3 - 6x^2 - ctgx + 7$ и $f(x) = 6x^2 - 12x + \frac{1}{\sin^2 x}$
Найдите первообразную для функции:	
а) $f(x) = \frac{2}{x^3} + \cos x, x \neq 0$ б) $f(x) = 3e^x$	а) $f(x) = \frac{4}{x^5} - 3\cos x, x \neq 0$ б) $f(x) = \frac{5}{x}$
Найдите ту первообразную F(x) для функции f(x), график функции которой проходит через точку А:	
$f(x) = 3x^2 + 4x$ А(1;5)	$f(x) = -3x^2 + \frac{1}{x^2}$ А(1;5)
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:	
$y = x^2$ y=9	y=cosx y=0,5 x=- $\frac{\pi}{3}$
Вычислите интеграл:	
$\int \sqrt{4x+5}dx$	$\int \sqrt{6-5x}dx$

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:	
$y = x^2 - 4x + 2$ $y = -x^2 + 6x - 6$	$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 5\frac{1}{2}$ $y = x^2 - 2x + 1$
Вычислите определенный интеграл:	
$\int_0^3 \lvert x-1\rvert dx$	$\int_0^3 \lvert x-2\rvert dx$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Карточка-памятка для обучающихся «решение первообразных и интегралов методом интегрирования по частям»

u	***dv***
ln(x)	sin(x)
arctg(x)	cos(x)
arcctg(x)	tg(x)
arcos(x)	ctg(x)
arcsin(x)	e^x