ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01
Педагогическое образование, профиль Математика
очной формы обучения, группы 02041302
Остапенко Алины Александровны

Научный руководитель
к. ф.- м.н., доцент
Сокольский А. Г.

БЕЛГОРОД 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В древности тригонометрия возникла в связи с потребностями астрономии, землемерия и строительного дела, то есть носила только геометрический характер и представляла главным образом «исчисление хорд». Со временем в нее начали вкрапляться некоторые аналитические моменты. В первой половине 18-го века произошел резкий перелом, после чего тригонометрия приняла новое направление и сместилась в сторону математического анализа.

Исторически сложилось, что тригонометрическим уравнениям и неравенствам уделялось особое место в школьном курсе. Еще греки считали, что тригонометрия является важнейшей из наук. Поэтому, и мы, не оспаривая древних греков, будем считать тригонометрию одним из важнейших разделов школьного курса, да и всей математической науки в целом.

Уже несколько десятилетий тригонометрия, как отдельная дисциплина школьного курса математики не существует, она плавно распространилась не только в геометрию и алгебру основной школы, но и в алгебру и начала математического анализа.

Тригонометрические уравнения одна из самых сложных тем в школьном курсе математики. Тригонометрические уравнения возникают при решении задач по планиметрии, стереометрии, астрономии, физики и в других областях. Тригонометрические уравнения и неравенства из года в год встречаются среди заданий централизованного тестирования.

Самое важное отличие тригонометрических уравнений от алгебраических состоит в том, что в алгебраических уравнениях конечное число корней, а в тригонометрических - бесконечное, что сильно усложняет отбор корней. Еще одной спецификой тригонометрических уравнений является неединственность формы записи ответа.

В школьном математическом образовании с изучением тригонометрических уравнений и неравенств связаны несколько направлений:

1. Решение уравнений и неравенств;
2. Решение систем уравнений и неравенств;
3. Доказательство неравенств.

Анализ учебной, научно-методической литературы показывает, что большое внимание уделяется первому и второму направлениям.

Актуальность исследования. Анализ материала посвященного решению тригонометрических уравнений и неравенств в учебных пособиях «Алгебра и начала математического анализа» для 10 – 11 классов, учет целей изучения тригонометрических уравнений и неравенств, а так же обязательных результатов обучения, связанных с рассматриваемой темой, свидетельствует о том, что перед учителем стоит задача – формировать у учащихся умения решать уравнения и неравенства каждого вида, развивая тем самым общие тригонометрические представления.

Цель исследования. На основе учебной, научной и методической литературы изучить основные теоретические сведения, связанные с тригонометрическими уравнениями и неравенствами; раскрыть общие методические положения, на которые нужно обратить внимание при изложении данных тем в школьном курсе математики.

Объект исследования. Процесс изучения тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

Предмет исследования. Методика изучения тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики.

Гипотеза исследования. Если выделить основные умения, необходимые при решении тригонометрических уравнений и неравенств и разработать методику их формирования, то это будет способствовать качественному научению решать тригонометрические уравнения и неравенства.

В процессе исследования и проверке достоверности гипотезы необходимо было решить следующие задачи:

1. Проанализировать школьные учебники и методическую литературу в соответствии с темой исследования.
2. Дать определения основным понятиям.
3. Выделить свойства и методы решения тригонометрических уравнений и неравенств.
4. Разработать методику формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения и неравенства.
5. Провести исследование разработанной методики.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования:

1. Анализ учебно-методических пособий, учебников, дидактических материалов.
2. Наблюдения, беседы с учителями.
3. Педагогический эксперимент.

Практической значимостью работы является то, что она может использоваться как методическое пособие для учителей школ при планировании и проведении уроков по тригонометрии, а также для учеников старших классов при подготовке к ЕГЭ.

Структура работы. Работа состоит из трех глав, введения и заключения. Во введении подчеркнута актуальность изучения проблемы. Первая глава посвящена рассмотрению основных понятий и свойств тригонометрических уравнений, методам и примерам их решения. Во второй главе описаны основные методы и примеры тригонометрических неравенств. Третья глава посвящена методике формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения и неравенства. Список литературы включает 20 источников.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОДЫ И ПРИМЕРЫ ИХ РЕШЕНИЯ.

1.1 Элементарные тригонометрические уравнения и их свойства

Тригонометрия традиционно является одной из важнейших составных частей школьного курса математики. И этот курс предполагает задачи, решить которые, как правило, можно, пройдя целенаправленную специальную подготовку [6].

Изучению темы «Решение тригонометрических уравнений» часто предшествует изучение таких тем как «Преобразование тригонометрических выражений» и «Основные свойства и графики тригонометрических функций». В разделе «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» мы знакомим учащихся с понятием элементарных тригонометрических уравнений [6].

Элементарные тригонометрические уравнения – это уравнения вида $f(kx+b)=a$, где $f(x)-$ одна из тригонометрических функций: $\sin x, \cos x\ , tg\ x, ctg\ x.$ Элементарные тригонометрические уравнения имеют бесконечно много корней.

Например, уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ удовлетворяют следующие значения: $x_1 = \frac{\pi}{6}\ , x_2 = \frac{5\pi}{6}\ , x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi\ , x_4 = \frac{\pi}{6} - 2\pi$ и т. д.

Общая формула по которой находятся все корни уравнения $\sin x = a$, где$|a| \leq 1$, такова:

$x(-1)^n \arcsin a + \pi n\ , n\epsilon Z$

Здесь n может принимать любые целые значения, каждому из них соответствует определенный корень уравнения в этой формуле (равно как и в других формулах, по которым решаются элементарные тригонометрические уравнения) n называют параметром. Записывают обычно $n\epsilon Z$, подчеркивая тем самым, что параметр n принимать любые целые значения [6].

Решения уравнения $\cos x = a$, где $|a| \leq 1$, находятся по формуле:

$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n\epsilon Z$.

Уравнение $tg\ x = a$ решается, применяя формулу:

$x = arctg\ a + \pi n, n\epsilon Z.$

Уравнение $ctg\ x = a$ решается по формуле:

$x = arcctg\ a + \pi n, n\epsilon Z.$

Особо необходимо отметить некоторые частные случаи элементарных тригонометрических уравнений, когда решение может быть записано без применения общих формул:

$\sin x = 0,\ x = \pi n, n\epsilon Z,$

$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z,$

$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z,$

$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z,$

$\cos x = 1,\ x = 2\pi n, n\epsilon Z,$

$\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n, n\epsilon Z,$

$tg\ x = 0,\ x = \pi n, n\epsilon Z,$

$tg\ x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z,$

$tg\ x = -1,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z,$

$ctg\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z,$

$ctg\ x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z,$

$ctg\ x = -1,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z.$

На эти уравнения следует обратить особое внимание, так как без умения их решать невозможно решить никакое другое тригонометрическое уравнение. Лучше всего, если учащиеся будут иметь схемы решения каждого из простейших уравнений.

Периодичность

При решении тригонометрических уравнений важную роль играет период тригонометрических функций. Поэтому ученики должны знать две полезные теоремы:

Теорема: Если $T-$ основной период функции $f(x)$, то число $\frac{T}{k}$ является основным периодом функции $f(kx+b)$.

Периоды функций T_1 и T_2 называются соизмеримыми, если существуют натуральные числа m и n, что $mT_1 = nT_2 = T$.

Теорема: Если периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеют соизмеримые T_1и T_2, то они имеют общий период $mT_1 = nT_2 = T$, который является периодом функций $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$.

В теореме говорится о том, что T является периодом функции $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$ и не обязательно является основным периодом. Например, основной период функций $\cos x$ и $\sin x - 2\pi$, а основной период их произведения $-\pi$ [1].

Область определения

Любому вещественному числу соответствует точка на единичной окружности. Координаты этой точки есть значение косинуса и синуса данного вещественного числа. Так как координаты любой точки единичной окружности всегда можно определить, то для любого вещественного x можно найти соответствующее значение $\sin x$ и $\cos x$, то есть функция $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определена при любом действительном значении x [2].

Устанавливая область определения функций $y = tg\, x$, следует показать, что если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, то нельзя найти точки пересечения вектора, являющегося конечной стороной этих углов, с осью тангенсов. Следовательно, при этих значениях аргумента нельзя указать соответствующего значения функции $y = tg\, x$. Также необходимо объяснить учащимся, что при всех других значениях аргумента вектор пересечёт ось тангенсов и, следовательно, функция $y = tg\, x$ будет определена [2].

Аналогично показываем, что функция $y = ctg\, x$ определена при всех значениях x, кроме $x = \pi k$.

Таким образом, область определения:

Функций $y = \sin x$ и $y = cos\, x -$ множество всех вещественных чисел;

Функций $y = \operatorname{tg} x\ -$ множество вещественных чисел, не равных $\frac{\pi}{2} + \pi n$;

Функций $y = ctg\, x -$ множество вещественных чисел, не равных πn [2].

Область изменения

Ранее было установлено, что $|\sin x| \le 1; |\cos x| \le 1$. Следовательно, область изменения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x -$ множество вещественных чисел, по абсолютной величине не больше 1.

Так как значениями функций $y = tg\, x$ и $y = ctg\, x$ могут быть любые вещественные числа, то область изменения этих функций - множество всех вещественных чисел [4].

Четность и нечетность тригонометрических функций

При изучении данного вопроса учитель должен сначала дать определения четной и нечетной функции.

Функция $f(x)$ называется четой, если при всех значениях x из области её определения $f(-x) = (x)$, и нечетной - если $f(-x) = -f(x)$.

Четность и нечетность функций указывает на расположение графиков. График функции $y = \cos x$ будет симметричен относительно оси OY, а функции $y = \sin x$, $y = tg\, x$ и $y = ctg\, x -$ относительно начала координат [4].

1. 2. Методы и примеры решения тригонометрических уравнений

Разложение на множители

Метод разложения на множетели заключается в следующем: если $f(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)$, то всякое решение уравнения $f(x) = 0$ является решение совокупности уравнений $f_1(x) = 0,\ \ f_2(x) = 0,\ \ \dots,\ \ f_n(x) = 0.$ (1)

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: не всякое решение совокупности является решением уравнения. Это объясняется тем, что решения отдельных уравнений (1) могут не входить в область определения функции $f(x)$.

При решении уравнений такого типа нужно пользоваться всеми известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Это вынесение за скобки общего множителя, группировка, применение формул сокращенного умножения и деления и искусственные приемы [9]

Пример 1. Решить уравнение $sin^2x - sinx = 0.$

Решение:

$sinx(sinx - 1) = 0,$

$sinx = 0$ или $sinx - 1 = 0$

$x_1 = \pi n, n\epsilon Z$ или $sinx = 1$

$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Ответ: $x_1 = \pi n, n\epsilon Z$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Пример 2. Решить уравнение $2ctgxcosx + 4cosx - ctgx - 2 = 0.$

Решение:

$(2ctgxcosx - ctgx) + (4cosx - 2) = 0,$

$ctgx(2cosx - 1) + 2(2cosx - 1) = 0,$

$(2cosx - 1)(ctgx + 2) = 0,$

$(2cosx - 1) = 0$ или $(ctgx + 2) = 0$

$2cosx = 1$ или $ctgx = -2$

$cosx = \frac{1}{2}$ или $x_2 = arcctg(-2) + \pi k, k\epsilon Z$

$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$.

Ответ: $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$; $x_2 = arcctg(-2) + \pi k, k\epsilon Z$.

Пример 3. 1Решить уравнение $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$.

Решение: Используя основное тригонометрическое тождество, уравнение представим в виде:

$(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = sin^2x$;

$1 - cos^2x(2sinx - \cos x)(1 + \cos x) = 0$;

$(1 - \cos x)(1 + \cos x)\,(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = 0$;

$(1 + \cos x)(2\sin x - 1) = 0$.

$1 + \cos x = 0$ или $2\sin x - 1 = 0$

$\cos x = -1$ $2\sin x = 1$

$x_1 = \pi + 2\pi n, n\epsilon Z$ $\sin x = \frac{1}{2}$

$x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi n, n\epsilon Z$; $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$.

Однородные уравнения

Предварительно необходимо вспомнить с учащимися, какие уравнения называются однородными.

Уравнение $asinx + bcosx = 0; asin^2x + asinxcosx + ccos^2x = 0; asin^3x + bsin^2xcosx + csinxcos^2x + dcos^3x = 0$ и т.д. называют однородными относительно $sinx$ и $cosx$. Сумма показателей степеней при $sinx$ и $cosx$ у всех членов такого уравнения одинаковы. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Рассмотренные уравненияимеют соответственно первую, вторую и третью степень. Делением на cos^kx, где k – степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно tgx [10].

Для закрепления необходимо прорешать следующие уравнения:

Пример 1. Решить уравнение $2sinx - 3cosx = 0, cosx \neq 0$.

Решение: Разделим обе части уравнения на $cosx$, получим

$2tgx - 3 = 0$,

$2tgx = 3$,

$tgx = \frac{3}{2}$,

$x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

Ответ: $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

Пример 2. Решить уравнение $sin2x + cos2x = 0, cos2x \neq 0$.

Решение: Разделим обе части уравнения не $cos2x$, получим

$tg2x + 1 = 1$,

$tg2x = -1$,

$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$,

$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k\epsilon Z$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k\epsilon Z$.

Пример 3. Решить уравнение $cos^2x + sinxcosx = 0$.

Решение: В условии не указано, что $cos2x \neq 0$, поэтому делить уравнение на cos^2x нельзя. Но можно утверждать, что $sinx \neq 0$, так как в противном случае $cosx = 0$, что невозможно одновременно. Разделим обе части уравнения а sin^2x, получим:

$ctg^2x + ctgx = 0$,

$ctgx(ctgx + 1) = 0$,

$ctgx = 0$ или $ctgx + 1 = 0$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$ или $ctgx = -1$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$; $x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

При решении ряда уравнений применяются формулы:

$\sin x + \sin y = 2sin\frac{x+y}{2} \cdot cos\frac{x-y}{2}$;

$\sin x - siny = 2\ sin\frac{x-y}{2} \cdot cos\frac{x+y}{2}$;

$cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2} \cdot cos\frac{x-y}{2}$;

$cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2} \cdot sin\frac{x-y}{2}$;

$tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{cosxcosy}$;

$tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{cosxcosy}$;

$ctgx + ctgy = \frac{\sin(x+y)}{sinxsiny}$;

$ctgx - ctgy = \frac{-\sin(x-y)}{sinxsiny}$.

Пример 1. 2Решить уравнение $sin3x + sinx = 0$.

Решение: Применим формулу суммы тригонометрических функций, получим:

$2sin\frac{3x+x}{2} \cdot cos\frac{3x-x}{2} = 0$

$sin2xcosx = 0$

$sin2x = 0$ или $cosx = 0$

$2x = \pi n, n\epsilon Z$ $\quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$

$x_1 = \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$.

Пример 2. 3Решить уравнение $sin2x - sin4x = 0$

Решение: Применим формулу разности тригонометрических функций, получим:

$2sin\frac{2x-4x}{2} \cdot cos\frac{2x+4x}{2} = 0$

$\sin(-x) = 0$ или $cos3x = 0$

$sinx = 0$ $\quad$ $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$

$x_1 = \pi n, n\epsilon Z$ $\quad$ $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k\epsilon Z$

Ответ: $x_1 = \pi n, n\epsilon Z$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k\epsilon Z.$

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

При решении ряда уравнений применяются следующие формулы:

$sinx \cdot cosy = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$; (1)

$cosx \cdot cosy = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$; (2)

$sinx \cdot siny = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$. (3)

Пример 1. 4Решить уравнение $2sin2xcosx = sin3x$

Решение: Применив формулу (1), получим уравнение:

$2\frac{sin(2x-x)+\sin(2x+x)}{2} = sin3x$

$sinx + sin3x - sin3x = 0$

$sinx = 0$

$x = \pi n, n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pi n, n\epsilon Z$.

Пример 2. 5Решить уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$

Решение: Применив формулу (1), получим:

$\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}-x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}+x-\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1}{2}$

$sin\frac{\pi}{6}sin2 = 1$

$sin2x = \frac{1}{2}$

$2x = (-1)^n arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n\epsilon Z$

$x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z$

Ответ: $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n\epsilon Z$.

Решение уравнений с применением формул понижения степени

При решении широкого круга тригонометрических уравнений ключевую роль играют формулы понижения степени:

$sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$; (1)

$cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$; (2)

$tg^2x = \frac{1-cos2x}{+cos2x}$. (3)

Для лучшего усвоения и закрепления данных формул необходимо решить с учащимися несколько уравнений.

Пример 1. 6Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$.

Решение: Применяя формулу(1), получим равносильное уравнение:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1-\cos 8x}{2} = 0 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (\cos 8x - \cos 2x) + (\cos 6x - \cos 4x) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow -2\sin 3x \sin 5x - 2\sin x \sin 5x = 0 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow -2\sin 5x(\sin 3x + \sin x) = 0 \Leftarrow -4\sin 5x \sin 2x \cos x = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{2} + \pi m$.

Пример 2. Решить уравнение $cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+cosx}{2}$

Решение: Применяя формулу (2) , получим:

$cos^2 3x = \frac{3}{4}$

$\frac{1+cos6x}{2} = \frac{3}{4}$

$cos6x = \frac{1}{2}$

$6x = \pm arcos\frac{1}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$

$6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$

$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n\epsilon Z$.

Решение уравнений с применением формул тройного аргумента

При решении ряда уравнений применяются формулы тройного аргумента:

$sin3x = 3sinx - 4sin^3x;$ (1)

$cos3x = 4cos^3x - 3cosx;$ (2)

$tg3x = \frac{3tgx - tg^3x}{1-3tg^2x};$ (3)

$ctg3x = \frac{ctg^3x - 3ctgx}{3ctg^2x - 1}$ (4)

Пример 1. 7Решить уравнение $\cos 3x - 2\cos x = 0$.

Решение: Применим формулу (2), получим уравнение:

$$\cos x(4\cos^2 x - 1) = 0 \Leftarrow \cos x\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi m$.

Пример 2. 8Решить уравнение $\cos 4x = \cos^2 3x$.

Решение: Применим формулы понижения степени получим: $2\cos^2 2x - 1 = \frac{1+\cos 6x}{2}$.

$$4\cos^2 2x - 2 = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 1 \Leftarrow 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - 3\cos 2x + 3 = 0 \Leftarrow (\cos 2x - 1)(2\cos 2x - \sqrt{3})(2\cos 2x + \sqrt{3}) = 0.$$

Ответ: $x_1 = \pi n$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.

Решение уравнений с применением формул приведения

При решении тригонометрических уравнений применяются формулы:

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$tg\beta$	$ctg\beta$
$\pi/2+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$3\pi/2+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi/2-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$3\pi/2-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Пример 1. Решить уравнение $2\cos(2\pi+t)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=3.$

Решение: Применяя формулы приведения получаем уравнение

$2\cos t+\cos t=3$

$3\cos t=3$

$\cos t=1$

$t=2\pi n, n\epsilon Z$

Ответ: $t=2\pi n, n\epsilon Z.$

Пример 2. Решить уравнение $5\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)-8\cos(2\pi-t)=1$

Решение: Применяя формулы приведения получаем уравнение

$5\cos t+\cos t-8\cos t=1$

$-2\cos t=1$

$\cos t=-\frac{1}{2}$

$t=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z$

Ответ: $t=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z.$

Пример 3. Решить уравнение $\sin(2\pi+t)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin(\pi-t)=1$

Решение: Применяя формулы приведения получаем уравнение

$\sin t-\sin t+\sin t=1$

$\sin t = 1$

$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z$

Ответ: $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z$.

Выделенные виды тригонометрических уравнений представлены в пособиях по математике для средней школы. Значит, перед учителем стоит задача – формировать у учащихся умения решать уравнения каждого вида.

ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ И ПРИМЕРЫ ИХ РЕШЕНИЯ

2.1. Определение тригонометрических неравенств

Большинство авторов современных учебников по математике предлагают начать рассмотрение данной темы с решения простейших тригонометрических неравенств.

Изначально необходимо дать учащимся определение понятия тригонометрические неравенства.

Два тригонометрических выражения, соединенных между собой знаками «>» или «<», называются тригонометрическими неравенствами. Тригонометрическое неравенство может быть тождественным (безусловным) и условным [4].

Так же нужно объяснить ученикам, чем отличаются тождественные неравенства от условных.

Тождественные неравенства доказываются, а условные – решаются. Тригонометрическое неравенство называется тождественным, или безусловным, если оно справедливо при всех допустимых значениях неизвестных, входящих в неравенство [4].

Принцип решения простейших тригонометрических неравенств основан на знаниях и умениях определять на тригонометрической окружности значения не только основных тригонометрических углов, но и других значений.

Например:

1) $tg^2x \geq 0$ при всех $x \epsilon R$, кроме $x = \frac{\pi}{2}(2n+1), n \epsilon Z$;

2) $|\sin x| \leq 1$ при всех $x \epsilon R$;

3) $\frac{\sin x + \cos x}{2} \geq \sqrt{\sin x \cos x}, x \epsilon \left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \epsilon Z$.

Тригонометрическое неравенство называется условным, если оно справедливо не при всех значениях неизвестных, входящих в неравенство.

Например:

1) $\sin x \geq \frac{1}{2}$, что выполняется только на отрезке $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + \right.$ *2πk, kϵZ;*

2) $\cos x \leq 0$, что выполняется только на отрезке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + \right.$ *2πn, nϵZ;*

3) $ctg\ x < -\sqrt{3}$, что выполняется в интервале $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \pi n\right), n\epsilon Z$.

Решить тригонометрическое неравенство – это значит найти множество значений неизвестных, входящих в неравенство, при которых неравенство выполняется. Мы знаем, что тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют наименьший положительный период 2π , а tgx и $ctg\ x$ имеют наименьший положительный период π . При решении неравенств с тригонометрическими функциями следует использовать периодичность этих функций, их монотонность на соответствующих промежутках [6].

Для того чтобы решить неравенство, содержащее только $\sin x$ или только $\cos x$, достаточно решить это неравенство на каком либо отрезке длины 2π . Множество всех решений получим, прибавив к каждому из найденных на этом отрезке решений числа вида $2\pi n$, где $n\epsilon Z$. Для неравенств, содержащих только $tg\ x$ и $ctg\ x$, решения находятся на промежутке длинной π, а множество всех решений получим, прибавив к каждому из найденных на этом отрезке решений числа вида πn, где $n\epsilon Z$. Тригонометрические неравенства можно решать, прибегая к графикам функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\ x$ и $y = ctg\ x$. Мы будем решать неравенства, пользуясь окружностью единичного радиуса. При решении тригонометрических неравенств мы в конечном итоге будем приходить к неравенствам $\sin x \gtrless a, \cos x \gtrless a, \sin x \gtreqqless a, \cos x \gtreqqless a, tgx \gtrless a, ctgx \gtrless a, tgx \gtreqqless a,$
$ctg\ x \gtreqqless a$ [11].

2. 2. Примеры решения тригонометрических неравенств

Для того, чтобы школьники усвоили теоретический материал, необходимо с ними прорешать ряд практических задач.

Пример 1. Решить неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$

Решение:

Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра, совпадающих с осями OX и OY , строим окружность R=1 с центром в точке пересечения диаметров (Рис. 1). Проводим прямую $y = \frac{1}{2}$. Все значения y на промежутке NM больше $\frac{1}{2}$. NM стягивает дугу AB с началом в точке $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ и с концом в точке $B\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Следовательно, решением неравенства будут все значения на $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ с прибавлением $2\pi n$, т.е. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z.$

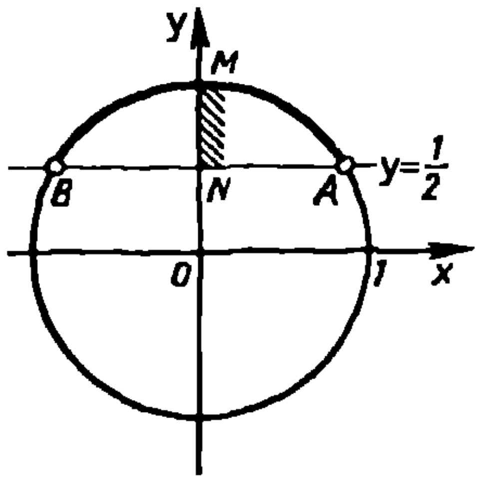

Рис. 1

Пример 2. Решить неравенство $sin2x \leq \frac{1}{3}$

Решение:

$A\left(arcsin\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), B\left(-\pi - arcsin\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ (Рис. 2)

$$-\pi - arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n \leq 2x \leq arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,$$

$$-arcsin\frac{1}{3} + (2\pi - 1)\pi \leq 2x \leq arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,$$

$-\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{3}+(2n-1)\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{3}+\pi n, n\epsilon Z.$

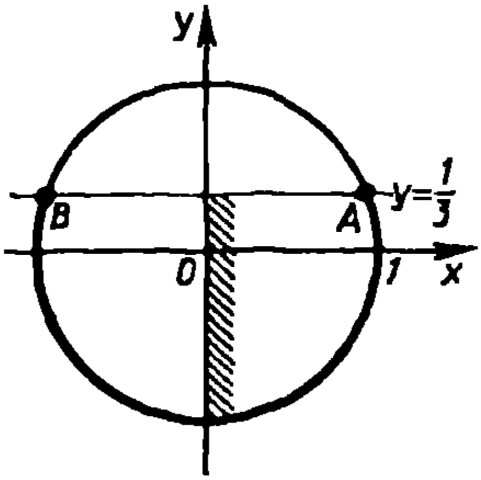

Рис. 2

Пример 3. Решить неравенство $sin\frac{2}{3}x\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение:

$A\left(-\frac{\pi}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(-\frac{3\pi}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (Рис. 3)

$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\leq\frac{2}{3}x\leq-\frac{\pi}{4}+2\pi n,$

$-\frac{9\pi}{8}+3\pi n\leq x\leq-\frac{3\pi}{8}+3\pi n,$

$(8n-3)\frac{3\pi}{8}\leq x\leq(8n-1)\frac{3\pi}{8}, n\epsilon Z.$

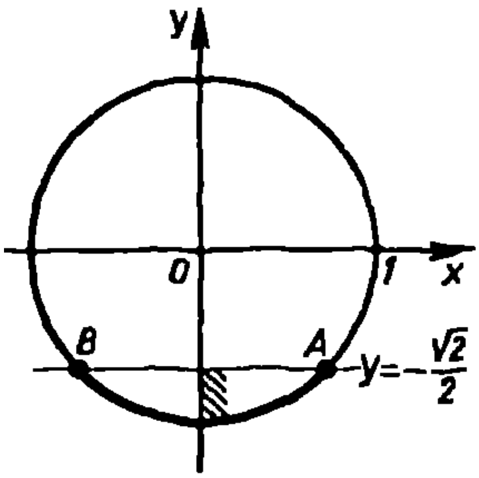

Рис. 3

Пример 4. Решить неравенство $|sn2x|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение:

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq sin2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Для более точного построения дуг можно предварительно найти дуги (углы), синусы которых равны $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Такими дугами будут $\pm\frac{\pi}{3}$, которые легко построить с помощью циркуля и линейки, отложив эти дуги от точки P_0 (Рис. 4). На дуге AB: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ (1), на дуге CD: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi, k\epsilon Z$ (2). Из неравенства (1) и (2) следует: $-\frac{\pi}{3} + \pi n \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + \pi n$ (3). $(3n-1)\frac{\pi}{3} \leq 2x \leq (3n+1)\frac{\pi}{3}, (3n-1)\frac{\pi}{6} \leq x \leq (3n+1)\frac{\pi}{6}, n\epsilon Z$.

Замечание. Если дуги симметричны относительно осей координат, то ответ можно писать на любой дуге, уменьшив период в два раза.

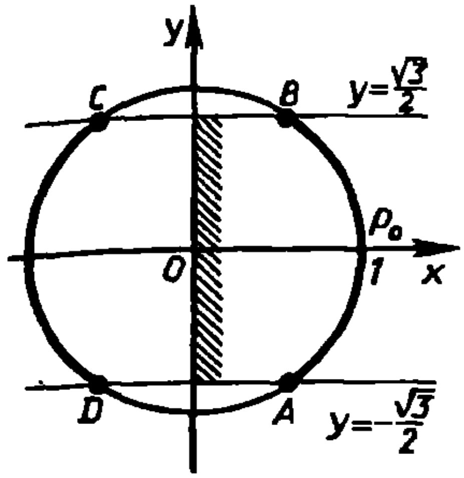

Рис. 4

Пример 5. Решить неравенство $|sinx| > \frac{1}{2}$.

Решение:

Из условия следует, что $sinx > \frac{1}{2}$ или $sinx < -\frac{1}{2}$. Это иногда пишут так: $\left\{\begin{array}{l} sinx > \frac{1}{2}, \\ sinx < -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$ Дуги симметричны относительно осей координат (Рис. 5), следовательно, достаточно написать ответ на одной из дуг, например на дуге

AB: $A\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{5\pi}{6};\ \frac{1}{2}\right).\ \frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$ или $(6n+1)\frac{\pi}{6}<x<(6n+5)\frac{\pi}{6}, n\epsilon Z$.

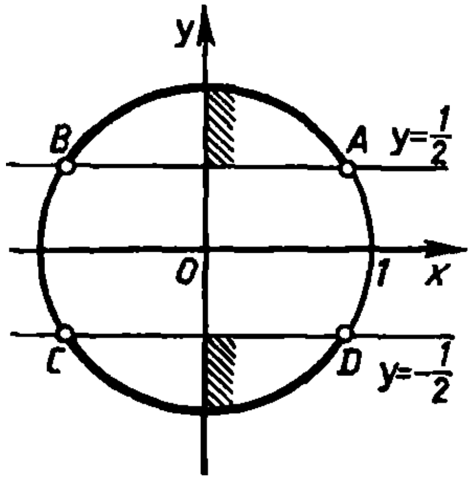

Рис. 5

Пример 6. Решить неравенство $cosx>\frac{1}{3}$.

Решение:

MP_0 стягивает дугу AB (Рис. 6), на которой выполняется неравенство $-arccos\frac{1}{3}+2\pi n<x<arccos\frac{1}{3}+2\pi n, n\epsilon Z$.

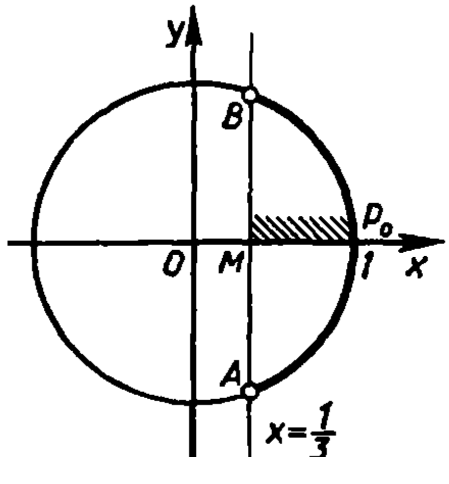

Рис. 6

Пример 7. Решить неравенство $cosx<\frac{1}{2}$.

Решение:

$A\left(\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{3}\right), B\left(\frac{1}{2};\ \frac{5\pi}{3}\right).$

MN стягивает дугу ANB (Рис. 7), на котором выполняется неравенство $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, (6n+1)\frac{\pi}{3} < x < (6n+5)\frac{\pi}{3}, n\epsilon Z.$

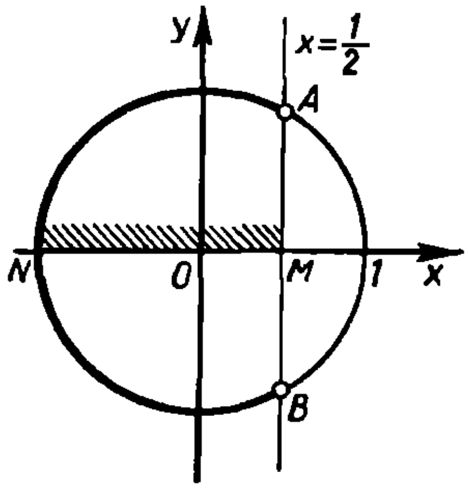

Рис. 7

Пример 8. Решить неравенство $|cosx| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Решение:

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq cosx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Дуги AB и CD симметричны относительно осей координат (Рис. 8), поэтому достаточно написать на одной из дуг, например на дуге AB. Но период необходимо уменьшить в два раза: $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.$ А именно: если дуги симметричны относительно осей координат, то ответ можно взять на дуге, более удобной, уменьшив при этом случае период в два раза. Действительно, при $n = 2k$ получим неравенство (1), а при $n = 2k - 1$ получим неравенство (2), т.е. остается в силе замечание, сделанное в примере 4.

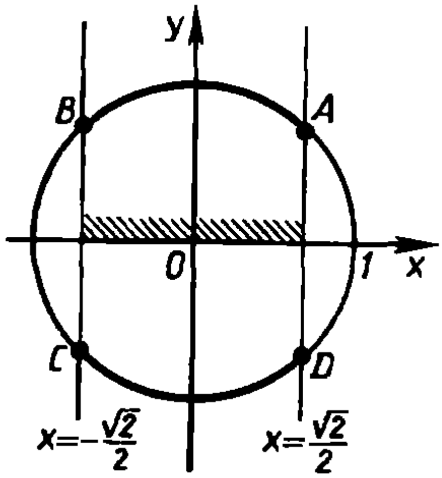

Рис. 8

Пример 9. Решить неравенство $|cosx| > \frac{1}{2}$.

Решение:

$\begin{cases} cosx > \frac{1}{2}, \\ cosx < -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Учитывая замечание, сделанное в примере 4, напишем

ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n\epsilon Z$ (Рис. 9).

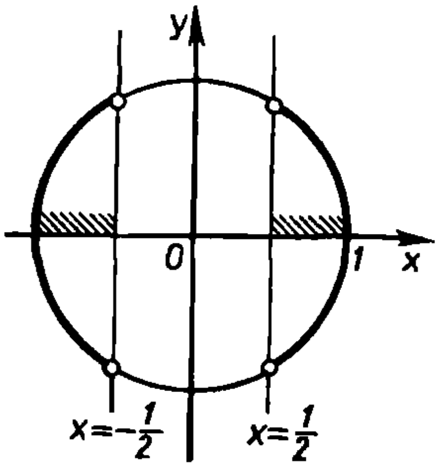

Рис. 9

Пример 10. Решить неравенство $tgx > 2$.

Решение:

Из рисунка 10 видно, что $arctg2 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n\epsilon Z$.

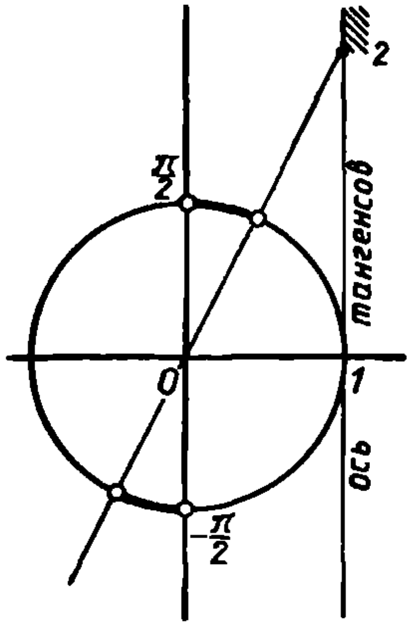

Рис. 10

Пример 11. Решить неравенство $tgx < 1$.

Решение:

Из рисунка 11 видно: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$.

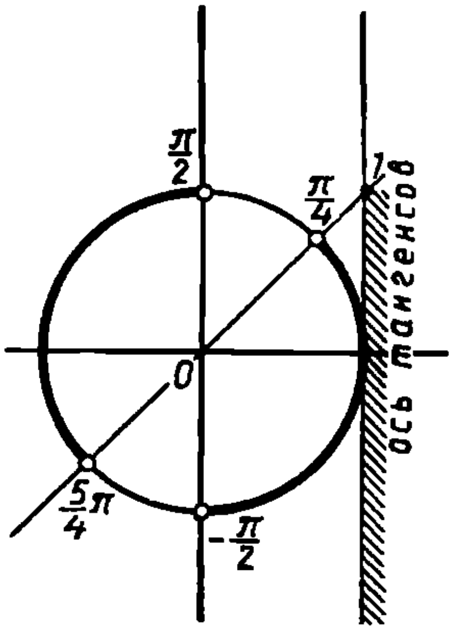

Рис. 11

Пример 12. Решить неравенство $|tgx| < \sqrt{3}$.

Решение:

Дугу (угол), тангенс которой (которого) равен $\sqrt{3}$, будет $\frac{\pi}{3}$ (Рис. 12). Так как тангенс имеет период, равный π, то решение неравенства будет: $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n\epsilon Z$.

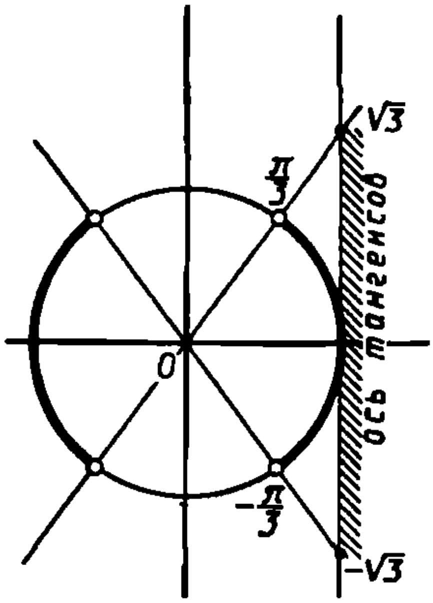

Рис. 12

Пример 13. Решить неравенство $|tgx| > 1$.

Решение:

Из условия следует $\begin{cases} tgx > 1, \\ tgx < -1 \end{cases}$ (Рис. 13). $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$.

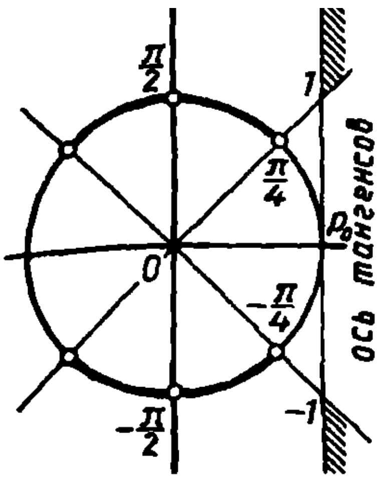

Рис. 13

Пример 14. Решить неравенство $ctgx < -\sqrt{3}$.

Решение:

Угол, котангенс которого равен $-\sqrt{3}$, будет $\frac{5\pi}{6}$ или $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (Рис. 14). Так как период котангенса равен π, то решение неравенства будет: $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi n, n \epsilon Z$.

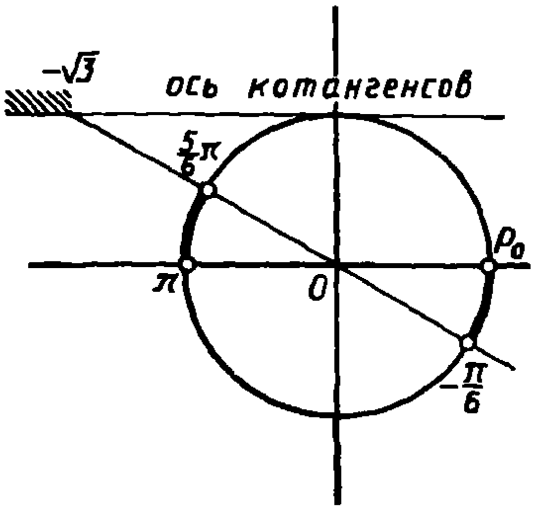

Рис. 14

Пример 15. Решить неравенство $|ctgx| < 1$.

Решение:

Из условия следует: $-1 < ctgx < 1$ (Рис. 15). Решением неравенства будет интервал: $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \epsilon Z$.

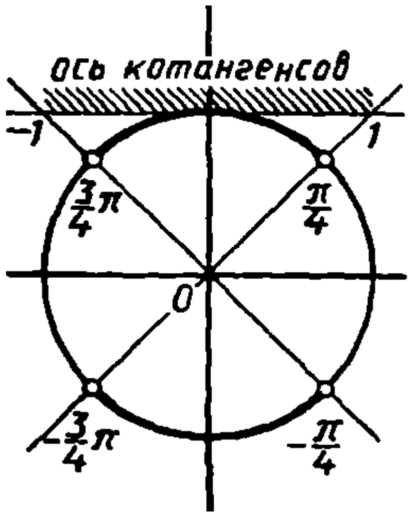

Рис. 15

Решение неравенств часто осуществляется с использованием основных свойств функций. При исследовании более сложных функций и построении их графиков возникает потребность в предварительном решении неравенств. Умение решать тригонометрические неравенства бывает необходимо при изучении пределов, в приближенных вычислениях, в линейном программировании и других вопросах. Заметим. Что неумение решать простейшие неравенства, рассмотренные в данных примерах, не позволяет правильно решать и другие более сложные неравенства. Рассмотрим решение таких неравенств [4].

Пример 1. Решить неравенство $sinx + cos2x > 1$.

Решение:

$sinx > 1 - cos2x,$

$sinx > 2sin^2x,$

$2sin^2x - sinx < 0,$

$sinx(2sinx - 1) < 0.$

Обозначим $sinx = y$, тогда $y(2y - 1) < 0.$

$y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{2}$ (Рис. 16).

Следовательно, $0 < y < \frac{1}{2}, 0 < sinx < \frac{1}{2}.$

Решением неравенства (Рис. 17) будут интервалы $2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, k, n\epsilon Z.$

Рис. 16

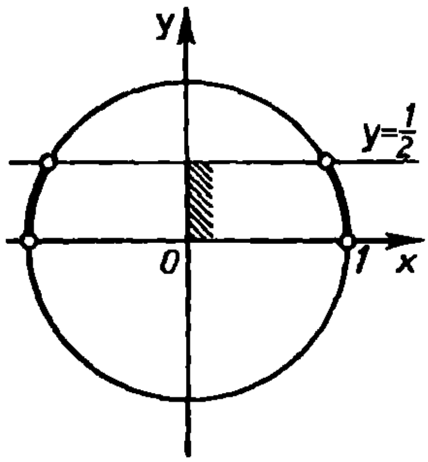

Рис. 17

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{sin^2x - sinx + \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{2}$.

Решение:

$$\sqrt{\left(sinx - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2},$$

$$\left|sinx - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} \leq sinx - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2},$$

$$0 \leq sinx \leq 1,$$

$$2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z.$$

Пример 3. Решить неравенство $3cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 > 0$.

Решение:

$$2cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + x\right) + 1 > 0,$$

$$2cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 > 0.$$

Обозначим $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 > 0$, $2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 1) > 0$ (Рис. 18). Следовательно, $y < \frac{1}{2}$ или $y > 1$.

Рис. 18

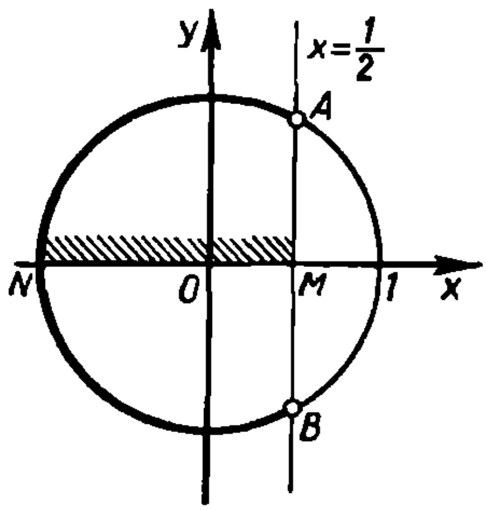

Рис. 19

а) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$,

$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < \frac{\pi}{6} + x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k,$

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ (Рис. 19).

Можно ответ записать в таком виде: $x \epsilon \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k\epsilon Z.$

б) Неравенство $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 1$ не имеет решения, так как значение косинуса не может быть больше единицы.

Пример 4. Решить неравенство $cos2x - cos8x + cos6x < 1.$

Решение:

$cos2x + cos6x < 1 + cos8x,$

$2cos4xcos2x < 2cos^2 4x,$

$cos4x(cos4x - cos2x) > 0,$

$(2cos^2 2x - 1)(2cos^2 2x - 1 - cos2x) > 0.$

Пусть $cos2x = y$, тогда неравенство будет:

$(2y^2 - 1)(2y^2 - y - 1) > 0,$

$\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)\left(y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) > 0,$

$\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right) > 0,$

$\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) > 0,$

$\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\left(y - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) > 0,$

$\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)(y - 1) > 0,$

$y < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $-\frac{1}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $y > 1.$

а) $cos2x < -\frac{\sqrt{2}}{2},$

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < 2x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,$

$\frac{3\pi}{8} + \pi k < x < \frac{5\pi}{8} + \pi k, k\epsilon Z.$

б) $-\frac{1}{2} < cos2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

$\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$ или $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < -\frac{\pi}{8} + \pi n, n\epsilon Z$.

в) $cos2x >, x = \emptyset$.

Пример 5. Найти область определения функции $y = \sqrt{4cos^2x - 3}$.

Решение:

$4cos^2x - 3 \geq 0$,

$2(1 + cos2x) - 3 \geq 0$,

$2cos2x \geq 1$,

$cos2x \geq \frac{1}{2}$,

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$,

$-\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \pi n, n\epsilon Z$.

ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ РЕШАТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

3.1. Методика формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения

В процессе формирования у школьников умений решать тригонометрические уравнения рекомендуется выделить три этапа:

1. подготовительный;
2. формирование умений решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства;
3. введение тригонометрических уравнений и неравенств других видов и установление приемов их решения.

Реализовать эти этапы рекомендуется в процессе систематизации знаний школьников о свойствах тригонометрических функций. Основным средством могут служить задания, предлагаемые учащимся и выполняемые либо под руководством учителя, либо самостоятельно.

В основе решения таких заданий, как правило, – применение определений синуса, косинуса числа (либо таких свойств тригонометрических функций, как наличие корней, наличие экстремумов у функций синус и косинус). Выполнение заданий может предполагать решение совокупностей тригонометрических уравнений. Следует специально обратить внимание учащихся на цель преобразований тригонометрических выражений при решении предложенных заданий.

Реализация обучения школьников решению тригонометрических уравнений, на котором происходит формирование умений решать простейшие уравнения, предполагает введение понятий «арксинус числа», «арккосинус числа» и т.д., получение общих формул решения простейших тригонометрических уравнений, формирование умений иллюстрировать решение простейших тригонометрических уравнений с помощью графика соответствующей функции или тригонометрического круга.

В настоящее время понятия арксинуса, арккосинуса числа и т.д. вводятся без обращения к функции, которая является обратной по отношению соответственно к функциям синус, косинус и т.д.

Учитель должен обратить внимание учащихся на способ выполнения каждого из заданий, дать соответствующий образец.

Последующее формирование у учащихся умений решать простейшие тригонометрические уравнения осуществляется в основном в процессе самостоятельного решения школьниками уравнений, среди которых – уравнения, приводящиеся к простейшим или их совокупностям после выполнения преобразований тригонометрических выражений.

3.2. Методика формирования умений и навыков решать тригонометрические неравенства

В процессе формирования у школьников умений решать тригонометрические неравенства, также можно выделить 3 этапа.

1. подготовительный;
2. формирование умений решать простейшие тригонометрические неравенства;
3. введение тригонометрических неравенств других видов.

Цель подготовительного этапа состоит в том, что необходимо сформировать у школьников умения использовать тригонометрический круг или график для решения неравенств.

Реализовать этот этап рекомендуется в процессе систематизации знаний школьников о свойствах тригонометрических функций. Основным средством могут служить задания, предлагаемые учащимся и выполняемые либо под руководством учителя, либо самостоятельно, а так же навыки наработанные при решении тригонометрических уравнений.

Учитель должен обратить внимание учащихся на различные способы выполнения задания, дать соответствующий образец решения неравенства и графическим способом и с помощью тригонометрического круга. Так же следует обратить внимание учащихся на то, что при решении неравенств для функции косинус, прямую проводим параллельно оси ординат, а для функции синус, прямую проводим параллельно оси абсцисс.

От учащихся необходимо требовать обязательной иллюстрации решения каждого простейшего тригонометрического неравенства с помощью графика или тригонометрического круга. Обязательно следует обратить внимание на ее целесообразность, в особенности на применение круга, так как при решении тригонометрических неравенств соответствующая иллюстрация служит очень удобным средством фиксации множества решений данного неравенства

Итак, в теме «Тригонометрические неравенства» мы предлагаем изучать только то, что даст возможность школьникам почувствовать именно специфику тригонометрических неравенств.

3.2. Педагогический эксперимент

В качестве испытуемых 16 учеников 10 «А» класса «Пролетарской средней общеобразовательной школы №1». Среди учеников были хорошо успевающие, немного отстающие и преимущественно отстающие ученики.

Целью исследования является выявление уровня сформированности основных умений решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Учащимся была предложена самостоятельная работа, состоящая из 5 заданий. Задания контрольной работы были выбраны в соответствии с умениями, необходимыми для решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Текст самостоятельной работы:

1. Решите уравнение:

а) $2sinx = 1$;

б) $cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $sinx = \frac{3}{5}$;

г) $\sqrt{3}tgx = 1$.

2. Решите уравнение:

а) $sin\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

3. Решите неравенство: $sinx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Решить неравенство: $cosx \leq \frac{1}{2}$.

5. Решите уравнение: $cosxsin2x + sinxcos2x = 1$.

Результаты самостоятельной работы:

С первым заданием справились 12 человек.

Ошибки: Неверное определение четверти. Неверное деление на доли тригонометрической окружности. Неумение определять положение отрицательного угла.

Со вторым заданием справились 10 человек.

Ошибки: Незнание свойств тригонометрических функций. Неверное деление на доли тригонометрической окружности.

С третьим заданием справились 11 человек.

Ошибки: Неверное деление на доли тригонометрической окружности. Неправильно проведена прямая к оси абсцисс.

С четвертым заданием справились так же 11 человек.

Ошибки: Неправильно проведена прямая к оси ординат. Неверное деление на доли тригонометрической окружности. Неправильно отобран промежуток.

С пятым заданием справились всего лишь 5 человек.

Ошибки: Незнание формул. Неумение выполнять простейшие тригонометрические преобразования.

В результате наблюдения работы учащихся у доски, а так же в ходе устной работы было замечено, что учащиеся более верно выполняют задания под руководством учителя.

Таким образом, анализ результатов самостоятельной работы и наблюдений показал что:

1. Учащиеся не уделяют должного внимания многим тригонометрическим формулам, правилам, свойствам тригонометрических функций;
2. Многие из учеников не правильно делят тригонометрическую окружность на доли.

Это говорит о том, что при обучении учащихся решать тригонометрические уравнения и неравенства необходимо акцентировать внимание учащихся на работу с тригонометрической окружностью, систематически проверять знания правил, свойств и формул тригонометрических уравнений.

Для повышения успеваемости 10 «А» класса были проведены дополнительные занятия по данным темам. Разобраны задания самостоятельной работы. Содержание этих занятий включало в себя теоретическую и практическую часть. После дополнительных занятий была проведена еще одна самостоятельная работа.

Текст самостоятельной работы:

1. Решите уравнение:

а) $2sinx = \sqrt{2}$;

б) $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $cosx = \frac{4}{5}$;

г) $ctgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Решите уравнение:

а) $cos\frac{x}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

3. Решите неравенство: $cosx \leq \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Решить неравенство: $sinx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Решите уравнение: $cos4xsin5x - cos5xsin4x = 1$.

Результаты повторной самостоятельной работы:

С первым заданием справились все учащиеся.

Со вторым заданием справились 14 человек.

С третьим и четвертым заданием справились 13 человек.

С пятым заданием справились 11 человек.

Ребята более внимательно работают с тригонометрической окружностью, более точно обозначают точки на окружности, определяют направление нужной дуги и приступают к решению неравенств после рассмотрения условий применимости свойств функции, необходимых для решения.

Работа с учащимися по формированию осознанного и качественного научения решать тригонометрические уравнения и неравенства прошла успешно. Об этом свидетельствуют: улучшения результатов самостоятельных работ, а также отношение самих ребят к проведённым занятиям. Школьники с интересом принимали участие в процессе обучения.

Таким образом, цель эксперимента достигнута. Его результаты удовлетворительны. Данная методика имеет возможность применения на занятиях по алгебре и началам математического анализа в общеобразовательной школе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проработав соответствующую методическую литературу по данному вопросу, очевидно, сделать вывод о том, что умение и навыки решать тригонометрических уравнения и неравенства в школьном курсе алгебры и начал математического анализа являются очень важными, развитие которых требует значительных усилий со стороны учителя математики.

Таким образом, учитель сам обязан в достаточной мере владеть методиками формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Бесспорно, достичь поставленной цели с помощью только средств и методов предложенными авторами современных учебников, практически невозможно. Это связано с индивидуальными особенностями учащихся. Ведь в зависимости от уровня их базовых знаний по тригонометрии выстраивается линия возможностей изучения различных видов уравнений и неравенств на разных уровнях.

Поэтому учитель сталкивается с довольно сложной проблемой выделения тех идей изучаемого материала, которые лежат в основе способов решения рассматриваемых задач, с целью их последующего обобщения и систематизации. Это важно и для осознанного усвоения учащимися теории, и для овладения некоторыми достаточно общими способами решения математических задач. Следует также заметить, что решение тригонометрических уравнений не только создает предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных с материалом тригонометрии, но и дает возможность установить действенные связи с изученным алгебраическим материалом. В этом состоит одна из особенностей материала, связанная с изучением тригонометрических уравнений.

Указанные особенности должны быть учтены учителем при разработке методики обучения школьников решению тригонометрических уравнений.

Тригонометрические уравнения и неравенства занимают достойное место в процессе обучения математики и развитии личности в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов А.Ш., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начало анализа: Учеб. Для 10-11 кл. сред. шк. -15 изд.- М.: «Просвещение», 2007. - 384 с.
2. Андронов И.К., Окунев А.К., Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач: Пособие для учителей. -2-е изд., доп. - М.: «Просвещение», 1967. - 648 с.
3. Антонов Н.П., Выгодский М.Я., Никитин В.В., Санкин А.И. Пособие для самообразования.- М.: «Физматгиз», 1960.- 532 с.
4. Башмаков М.И., Алгебра и начала анализа. 10-11.: Учебное пособие для 10 – 11 кл. средней школы. - М.: «Просвещение», 1998. - 351 с.
5. Бермант А.Ф., Люстерин Л.А. Тригонометрия.- 3-е изд.- М.: «Физматгиз», 1960.- 77 с.
6. Бородин П., Тригонометрия. Материалы вступительных экзаменов в МГУ [текст] / П. Бородин, В. Галкин, В. Панфёров, И. Сергеев, В. Тарасов // Математика №1, 2005. - 36- 48 с.
7. Бородуля И.Т., Тригонометрические уравнения и неравенства: Кн. Для учителя. - М.: «Просвещение», 1989.- 239 с.
8. Выгодский Я. Я., Справочник по элементарной математике. / Выгодский Я. Я. - М.: «Наука», 1970. - 872 с.
9. Гельфанд И.М., Львовский С.М., Тоом А.Л. Тригонометрия. 100 класс.- М.: МЦНМО АО Московские учебники, 2002.- 199 с.
10. Ершов Л.В., Райхмист Р. Б. построение графиков функций. Книга для учителя.- М.: «Просвещение», 1984.- 80 с
11. Зарецкий В.И., Изучение тригонометрических функций в средней школе/ Зарецкий В.И. - Мн.: «Народная асвета», 1970. - 158 с.
12. Звавич В.И., Пигарев Б.П. Тригонометрические уравнения //Математика в школе. 1995. №2. - 23-33 с.

13. Звавич В.И., Пигарев Б.П. Тригонометрические уравнения (решение уравнений + варианты самостоятельных работ) //Математика в школе. 1995. №3. – 1823 с.
14. Колмогоров А.Н. и др., Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 10 – 11 кл. средней школы. М. Просвещение, 1998.- 335 с.
15. Крамор В.С., Михайлов П.А., Тригонометрические функции: (Система упражнений для самостоят. изучения). Пособие для учащихся. – 2-е изд., доп. – М.: «Просвещение», 1983.- 159 с.
16. Литвиненко В.Н., Практикум по элементарной математике / Литвиненко В.Н. - М.: «Просвещение», 1991.- 352 с.
17. Мордкович А.Г., Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник для учащихся образовательных учреждений (базовый уровень) 10-е изд., стер.- М.: «Мнемозина», 2009.- 336 с.
18. Новосёлов С.И. Специальный курс тригонометрии.- 5-е изд. – М.: Высшая школа, 1967.- 536 с.
19. Сканави М.И., Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.; Под ред. М.И. Сканави – М: ОНИКС, Мир и Образование, 2006.- 608 с.
20. Смоляков А.Н., Севрюков П.Ф. Приемы решения тригонометрических уравнений //Математика в школе. 2004. № 1.- 24-26 с.