ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

Краевые задачи для псевдо-дифференциальных уравнений

Магистерская диссертация

обучающегося по направлению подготовки (01.04.01) математика

очной формы обучения
группы00701535
Кутаиба Шабан

Научный руководитель

Доктор физико-математических наук

Профессор А.В.Глушак

Рецензент

Зам. директора ИНСТИТУТА

по общим вопросом

К.Т.Н.ДОЦ: Маматов Е.М.

БЕЛГОРОД 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Псевдо дифференциальные операторы (ПДО) и интегральные операторы Фурье (ИОФ) являются обобщением дифференциальных операторов в частных производных. Теория таких операторов активно развивается с 60-х годов прошлого века. Целый ряд результатов современной теории дифференциальных уравнений может быть получена только в рамках теории ПДО и ИОФ. В некоторых случаях применение теории ПДО и ИОФ дает более простые доказательства по сравнению с классическими методами. Ознакомление с теорией ПДО и ИОФ может быть полезно в виду того, что оно дает общий, целостный подход ко многим вопросам анализа. Теория ПДО и ИФО широко представлена в монографической литературе (см. список в конце). По большей части указанные книги дают фундаментальное изложение предмета и рассчитаны на подготовленного читателя.

Цель данного пособия выделить из большого количества материала самое необходимое и ознакомить читателя/слушателя с основами теории на языке и в объеме доступном студентам 4–6 курсов.

При написании пособия автор попытался сохранить неформальную специфику устной речи. Текст условно делится на формальную и неформальную части; последняя набрана наклонным шрифтом и с дополнительным отступом слева. К формальной части относятся определения, формулировки, доказательства и прочие строгие рассуждения, т. е. то, что при чтении лекций подробно записывается на доске. К неформальной части относится все остальное: замечания, пояснения, комментарии, напоминания, мотивировки тех или иных результатов, т. е. все то, что с одной стороны носит необязательный и одноразовый характер, а с другой делает изложение более живым и доступным.

Как это обычно бывает, разные авторы используют разные обозначения. Мы будем придерживаться обозначений, которые согласуются с [X, X1, X3, GS], иногда позволяя себе по ходу изложения не объяснять некоторые общепринятые обозначения, смысл которых понятен из контекста. На всякий случай, в конце приведен достаточно полный список используемых обозначений.

Глава первая. Обобщённые функции и преобразование Фурье

§1. Обобщенные функции

1. Пространство S. Пространство S=S(R^n) определяется как совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций $\phi(x)$ в n-мерном пространстве R^n, убывающих при |x|= $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ → ∞ быстрее любой отрицательной степени |x| вместе со всеми своими производными. Для произвольной функции $\phi(x)$€ S обозначим

$$|[\phi]|_m = \max_x (1+|x|)^m \sum_{|p|\le m} \left|\frac{\partial P\varphi(x)}{\partial xP}\right|, \quad 0 \le m < \infty, \qquad (1.1)$$

где p=($p_{1,\dots,}p_n$) – целочисленный мультииндекс, |p|=p_1+… + p_n,

$\frac{\partial P\varphi(x)}{\partial xP} = \frac{\partial^{p1+\cdots+pn}\varphi(x)}{\partial x_1^{p1}\dots\partial x_n^{Pn}}$.

Топология в S задается нормами(1.1),в частности, последовательность $\varphi_n(x) \epsilon S$ сходится к $\varphi(x) \epsilon S$, если $[\varphi - \varphi_n]_m$ при всех m=0, 1,... Пусть $C_0^\infty(R^n)$ – совокупность всех финитных бесконечно дифференцируемых функций в R^n. Очевидно $C_0^\infty(R^n) \subset S$.

Лемма 1.1. Пространство C_0^∞плотно в S в топологии S.

Доказательство. Пусть $\chi(x) \in C_0^\infty$ и $\chi(x) \subseteq 1$ при $|x| \le 1$. Для произвольной $\varphi(x) \epsilon S$ положим $-\varphi(x) = \chi(\varepsilon x)\varphi(x)$. Тогда $\varphi_n(x)\epsilon C_0^\infty$ и, как нетрудно проверить, $|[\varphi - \varphi_n]|_m \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и любых m. Лемма 1.1 доказана.

Если $\varphi(x) \epsilon S$ и $\phi(x) \epsilon S$, то сверткой $\phi * \varphi$ функций $\phi(x)$ и $\varphi(x)$ называется функция

$$\varphi * \phi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y)\,\phi(y)\,dy. \qquad (1.2)$$

Делая замену переменных x-y=z, получим

$$\varphi * \phi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\, \phi(x-z)\, dz = \varphi * \phi. \qquad (1.3)$$

Очевидно,

$$\frac{\partial P}{\partial x P}(\varphi * \phi) = \frac{\partial P \varphi}{\partial x P} * \phi = \varphi * \frac{\partial P \phi}{\partial x P}. \qquad (1.4)$$

Свертка $\varphi * \phi$ определена не только для функций на S, а в значительно более широком классе функций.

Лемма 1.2. Пусть $|f(x)| \le C(1+|x|)^t$, $\varphi(x) \in S$. Тогда свертка $f * \varphi \in C^\infty$ и допускает оценку

$$\left|\frac{\partial P}{\partial x P}(f * \varphi)\right| \le C \|\varphi\|_m (1+|x|)^t, \quad 0 \le |p| < \infty, \qquad (1.5)$$

где C не зависит от φ, m=max(|p|,|t|+n+1).

Доказательство. Очевидно, свойства (1.3) и (1.4) остаются в силе и для $f * \varphi$, так что

$$\frac{\partial P}{\partial x P}(f * \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial P \varphi(x-y)}{\partial x P} f(y)\, dy. \qquad (1.6)$$

Так как $\varphi(x) \epsilon S$, то $\left|\frac{\partial P \varphi(x)}{\partial x P}\right| \le \|\varphi\|_m (1+|x|)^{-|t|-n-1}$, где $m = \max(|p|, |t| + n + 1)$.

При любых действительных t имеет место следующее неравенство:

$$(1+|x-y|)^{-|t|} \le (1+|x|)^t/(1+|y|)^t. \qquad (1.7)$$

Действительно, пусть для определенности t>0. Тогда

$$1+|y| \le 1+|y-z|+|x| \le (1+|x-y|)(1+|x|). \qquad (1.8)$$

Возводя (1.8) в степень t , получим (1.7). В случае t<0 нужно, чтобы получить (1.7), возвести в степень |t| неравенство 1+|x|<(1+|x-y|)*(1+|y|). В силу (1.6),(1.7) получим

$$\frac{\partial P}{\partial x P}(f*\varphi) \le C \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+|y|)^{t}\|\varphi\|_{m}dy}{(1+|x-y|)^{t+n+1}} \le C\|\varphi\|_{m}(1+|x|)^{t}, \quad 0\le |p| \le \infty.$$
(1.9)

Следствие 1.1. Если $\varphi \in S$ и $\phi \in S$, то $\varphi * \phi \in S$. Действительно, в этом случае можно в (1.5) взять t=-1,-2,… Следовательно, $\varphi * \phi \in S$, причем

$$\|\varphi * \phi\|_{m} \le C_m \|\varphi\|_{m+n+1}, \quad m = 0,1,\ldots$$

2. Обобщенные функции. Функционал f называется линейным непрерывным функционалом над S, если

1) $(f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1(f,\varphi_1) + a_2(f,\varphi_2)$ (1.10)

Для любых $\varphi 1, \varphi 2 \in S$ и любых комплексных чисел a1 и a2. Через (f,φ) обозначено значение функционала f на функции $\varphi \epsilon S$;

2) для любой сходящейся в S последовательности $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$

$(f,\varphi_n) \to (f,\varphi)$. (1.11)

Линейный непрерывный функционал над S будем называть обобщенной функцией. Функции из S будем часто называть основными функциями.

Пример 1.1. Пусть f(x) – локально интегрируемая в смысле Лебега функция, причем для некоторого N>0

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|(1+|x|)^{-N}dx < \infty.$ (1.12)

Тогда функции f(x) можно сопоставить линейный функционал над S по формуле

$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)dx.$ (1.13)

Очевидно, $|(f,\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$, так что (1.13) – непрерывный функционал над S.

Функционал вида (1.13) будем называть регулярным функционалом. Известно (см. [43]), что если $f_1(x) \neq f_2(x)$ почти всюду, то найдется $\varphi_0 \epsilon S$ такая, что $(f_1,\varphi_0) \neq (f_2,\varphi_0)$, т.е. функционалы, отвечающие $f_1(x)$ и $f_2(x)$, не совпадают. Мы часто не будем делать различия между регулярным функционалом f и отвечающей ему функцией f(x) и будем обозначать регулярный функционал через f(x).

Пример 1.2. Дельта функцией называется обобщенная функция, определяемая по формуле $(\delta,\varphi) = \varphi(0)$, $\forall\varphi \in S$, где $\forall\varphi \in S$ означает «любая функция из S».

Линейная комбинация $a_1 f_1 + a_2 f_2$ обобщённых функций определяется как линейная комбинация функционалов

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2, \varphi) = a_1(f_1,\varphi) + a_2(f_2,\varphi), \qquad \forall\varphi\epsilon S. \qquad (1.14)$$

Пространство обобщенных функций будем обозначать через S` = S`(R^n).

Замечание 1.1. Выше был определен класс так называемых медленно растущих обобщенных функций. Более широкий класс обобщенных функций (D` или K`) получается, если в качестве пространства основных функций вместо S взять $C_0^\infty(R^n)$ с соответствующей топологией (см. [21]). Однако для дальнейшего достаточно будет функционалов над S.

Лемма 1.3.Пусть $f \in S$`. Тогда существует m$\geq$ 0, m=m(f) такое, что

$$|(f,\varphi)| \leq C_m\|\varphi\|_m \qquad (1.15)$$

для любой $\varphi\epsilon S$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует последовательность функций $\varphi_m \in S$ такая, что $\; f, \varphi_m \; \geq m \; \varphi_m \; _m$. Обозначим $\phi_m = \varphi_m / m \; \varphi_m \;$. Тогда при любом i$\leq m$ получим $\; \phi_m \; _i = \; \varphi_m \; _i / m \; \varphi_m \; _m \leq \frac{1}{m}$. Следовательно, $\; \phi_m \; _i \to 0$ при $m \to \infty, i = 0, 1, \ldots$ Таким образом, $\phi_m \to 0$ в S. С другой стороны, $\; f, \phi_m \; \geq 1$, что противоречит (1.11). Лемма 1.3 доказана.

Очевидно, справедливо и обратное: если линейный функционал удовлетворяет оценке (1.15), то он непрерывен.

3.Действия над обобщенными функциями. А) Производной $\partial^k f / \partial x^k$ обобщенной функции $f \in S`$ является, по определению, обобщенная функция, удовлетворяющая соотношению

$$\partial^k f / \partial x^k, \varphi \; = \; -1 \; ^k (f, \partial^k \varphi / \partial x^k), \forall \varphi \in S. \qquad (1.16)$$

Очевидно, $\partial^k f / \partial x^k$ – линейный функционал, для которого выполнена оценка вида (1.15) с заменой m на m+|k|. Пусть $D^k = D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n}$, где $D_r^{k_r} = i^{k_r} \partial^{k_r} / \partial x_r^{k_r}, 1 \leq r \leq n.$ Тогда в силу (1.10) и (1.16)

$$D^k f, \varphi \; = \; f, D^k \varphi \;, \quad \forall \varphi \in S, \; \forall k = \; k_1, \ldots, k_n \; . \qquad (1.16`)$$

Отметим, что обобщенные функции имеют производные всех порядков.

Пример 1.3.Пусть $\theta \; t \; = 1$ при $t > 0$, $\theta \; t \; = 0$ при $t < 0$. Тогда $\theta \; t$ определяет регулярный функционал над S(R^1). Найдем функционал $d\theta / dt$. Имеем согласно (1.16)

$(d\theta/dt,\varphi)$=$-\left(\theta,\frac{d_\varphi}{dt}\right)=-\int_0^\infty \frac{d_\varphi\left(t\right)}{dt}dt=\varphi\left(0\right)$, т.е. $d\theta/dt=\delta$.

Пример 1.4. Производная k-го порядка -функции определяется согласно (1.16`) по формуле $(D^k\delta,\varphi)=D^k\varphi(0)$. Действительно, $(D^{k\delta},\varphi)=\left(\delta,D^k\varphi\right)=D^k\,\varphi(0)$.

Определение производной от обобщенной функции является естественным, так как в случае, когда f-регулярный функционал, отвечающий |k| раз непрерывно дифференцируемой функции степенного роста D^kf так же есть регулярный функционал, отвечающий функции $D^kf(x)$. В аналогичном смысле естественным являются и приводимые ниже определения.

Б) Пусть $f\epsilon S`$, $a\left(x\right)\in C^\infty$,

$$\left|D^pa(x)\right|\leq C_p\left(1+\left|x\right|\right)^{tp},\quad 0\leq\left|p\right|\leq\infty. \qquad (1.17)$$

Производная a(x)f называется обобщенная функция, удовлетворяющая соотношению

$$\left(af,\varphi\right)=\left(f,a\varphi\right),\quad \forall\varphi\epsilon S, \qquad (1.18)$$

где $\overline{ax}$ – комплексно сопряженная к a(x) функция. Если $\varphi\epsilon S$ и a(x) удовлетворяет оценкам (1.17), то $a\varphi\epsilon S$, причем $\left\|a\varphi\right\|_m\leq C_m\left\|\varphi\right\|_{N_m}$, где $N_m\leq\max_{0\leq\left|p\right|\leq m}\left(m+\left[t_p\right]\right)$. Следовательно формула (1.18) действительно определяет линейный непрерывный функционал над S.

В) Пусть $a\in R^n$ – произвольный вектор. Сдвигом обобщенной функции f назовем функцию f^aопределяемую по формуле

$$\left(f^a,\varphi\right)=\left(f,\varphi\left(x+a\right)\right). \qquad (1.19)$$

В случае, когда f регулярный функционал, f^a так же регулярный функционал, отвечающий функции f(x-a).

Г) Будем говорить, что последовательность $f_n \in S`$ сходится к $f\epsilon S`$, если

$$f_n, \varphi \ \rightarrow \ f, \varphi \ , \qquad \forall\varphi \in S. \qquad (1.20)$$

Отметим что из (1.20) и (1.16`) вытекает, что при любом k

$$D^k f_n, \varphi \ \rightarrow \ D^k f, \varphi \ , \qquad \forall\varphi \in S. \qquad (1.21)$$

Пример 1.5. Пусть при всех n=1,2,… $f_n(x) \ \leq f_0 \ x$, где $f_0 \ x$ удовлетворяет оценке (1.12). Пусть $f_n \ x \ \rightarrow f(x)$ почти всюду. Тогда

$$f_n, \varphi \ = \ {}_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx \rightarrow \ {}_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = (f, \varphi) \qquad (1.22)$$

в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Обобщенные функции в области, носитель обобщенной функции

Носителем непрерывной функции $\varphi(x)$ называется замыкание множества точек, где $\varphi(x) \ \neq 0$ Пусть U- открытая область в R^n, вообще говоря неограниченная, C_0^∞ (U) совокупность. финитных бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых содержится в U через S(U) обозначим замыкание C_0^∞ (U) в топологии пространства $S(R^n)$, так что S (U) Будем говорить, что f-обобщенная функция в области U,если f-линейный и непрерывный функционал над S(U)). Пространство обобщенных функций будем обозначать через S' (U). Пусть F из S' (R^n). Функционал над f из S' (U) называется сужением F на область U- если (F, φ)= (f, φ) для любых φ из S(U). Оператор сужения будет обозначаться через p: pF=f. Так как о Замкнутое подпространство в S (R^n) то по теореме Хана-Банаха любой непрерывный f над S(U) может быт продолжен до некоторого непрерывного функционала F над $S(R^n$ Будем обозначать продолжение f через lf:F=lf Замечание 1.2. возможность продолжения любой обобщённой функции в на все пространство R" связно с выбором s (U) в качестве пространства основных функций . для пространств D' (U) или к' (U) это продолжение не всегда возможно.

Преобразование Фурье

1. Преобразование Фурье основных функций. Пусть $\varphi(x)\epsilon S(R^n)$ Преобразование Фурье определяется по формуле

$\varphi(\xi)= {}_{-\infty}^{\infty}\varphi\ x\ \ e^{i(x,\xi)}$ (x,ξ)=$x_1\xi_1$+…..+$x_n\xi_n$ (2.1)

Формула обращения преобразования Фурье имеет следующий вид:

$\varphi\ x\ =\frac{1}{(2\pi)^n}\ {}_{-\infty}^{\infty}\ e^{i(x,\xi)}\ \varphi(\xi)\ e^{-i(x,\xi)}$ (2.2)

Оператор преобразования Фурье будем иногда обозначать через F, оператор обратного преобразования Фурье через F^{-1}. Отметим следующие свойства преобразования Фурье функций из S:

1) F($D^k\varphi(x)) = \xi^k\varphi(\xi)$

2) F($\phi * \psi) = \varphi\ \xi\ * \psi(\xi)$

3) равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\ x\ \psi(x)\ dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\psi(x)\ d\xi$$

в частности

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\ x\ ^2\ dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\ ^2\ d\xi$$

4) F(($\varphi\ x-a\ = e^{i(a,\xi)}\varphi\ \xi$ a=$(a_1,,,a_n)$

Преобразование Фурье обобщенных функций . Пусть f$\in S^{»}$ R^n произвольная обобщенная функция. Преобразованием Фурье функционала f называется такая обобщенная функция

$f \in S^{»}$ R^n , что $(f, \varphi) = (2\pi)^n$ f, φ $\forall \varphi \in S$ R^n

Преобразование Фурье обобщенных функций имеет свойства.

F$(D^k f) = \xi^k f,$

F$(f^a) = e^{i \ a,\xi}$ $f.$

Пример 2.2. F$(D^k\delta)$= ξ^k . Действительно,

F$(D^k\delta, \varphi)$= $(2\pi)^n$ $D^k\delta, \varphi$ $= (2\pi)^n\varphi^k(0)$= $_{-\infty}^{\infty}\xi^k\varphi^k(\xi)$=$(\xi^k, \varphi(\xi))$ (2.33)

Преобразование Фурье финитного функционала.

Функционал f из $S^{"}$(Rn) называется финитным если его носитель содержится в некотором шаре x $< R$.

Лемма . Любой финитный функционал $g \in S^{"}$(Rn) можно представит в виде:

g= $_{k=0}^{n} D^k g_k$, где g_k регулярные функционалы, определяемые финитными непрерывными функциями $g_k(x)$.

Свертка обобщенной и основной функций.

Пусть f из $S^{"}, \varphi \in S$ сверткой обобщенной функции f$\in S^{"}$и основной функции $\varphi \in S$ будем называть функцию

f * φ=(f(y), $\varphi(x-y)$).

Пример 2.8. Пусть A_0 ξ $\in O_\alpha^\infty$, где $\alpha \leq -n -$ целое. Определим функционал $\mathcal{A}_0$ по формуле:

$$\left(\mathcal{A}_0,\varphi\right) = -\int_0^{\infty}\frac{\ln r}{(-\alpha-n)!}\frac{d^{(\alpha)-n+1}}{dr^{(\alpha)-n+1}}\left(\int_{S^{n-1}} A_0(\eta)\,\varphi(r\eta)\,ds_\eta\right)dr,\ \ \forall\varphi\in S\left(\boldsymbol{R}^n\right).$$

(2.84)

Так же, как в примере 2.7, показывается, что $\mathcal{A}_0$ − непрерывный функционал над $S\left(\boldsymbol{R}^n\right)$. Пусть $a_0 = F^{-1}\mathcal{A}_0$. Аналогично (2.80) получим

$$\left(a_0,\varphi\right) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\mathcal{A}_0,\varphi\right) =$$

$$= \frac{-(-i)^{(\alpha)-n+1}}{(2\pi)^n(-\alpha-n)!}\int_0^{\infty} lnr\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int (x,\eta)^{(\alpha)-n+1}A_0(\eta)\,e^{-i(x,\eta)r}ds_\eta\right)\varphi(x)\,dx\right)dr. \quad (2.85)$$

В силу (2.41)

$$\int_0^{\infty} lnre^{-r(\varepsilon+i(x,\eta))}dr = -\frac{i\ln\left(-(x,\eta)+i\varepsilon\right)}{-(x,\eta)+i\varepsilon} - \frac{\frac{\pi}{2} - i\Gamma'(1)}{-(x,\eta)+i\varepsilon}. \quad (2.86)$$

Вычисляя интеграл по r по формуле (2.86), получим аналогично (2.81)

$$\left(a_0,\varphi\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-(-i)^{(\alpha)-n+1}}{(2\pi)^n(-\alpha-n)!}\int_0^{\infty} lnr\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{S^{n-1}}(x,\eta)^{(\alpha)-n+1}A_0(\eta)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times e^{-r(\varepsilon+i(x,\eta))}ds_\eta\right)\varphi(x)\,dx\right)dr = \int_{-\infty}^{\infty} a_0(x)\varphi(x)dx, \quad (2.87)$$

где

$$a_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-(-i)^{(\alpha)-n+1}}{(2\pi)^n(-\alpha-n)!}\int_{S^{n-1}}(x,\eta)^{(\alpha)-n+1}A_0(\eta)\times$$

$$\times\left(\frac{i\ln\left(-(x,\eta)+i\varepsilon\right)}{(x,\eta)-i\varepsilon} + \frac{\frac{\pi}{2} - i\Gamma'(1)}{(x,\eta)-i\varepsilon}\right)ds_\eta = \frac{(-1)^{(\alpha)-n}i^{(\alpha)-n+1}}{(2\pi)^n((\alpha)-n)!}\times$$

$$\times\int_{S^{n-1}} A_0(\eta)(x,\eta)^{(\alpha)-n}\left(i\ln\left(-(x,\eta)+i0\right)+\frac{\pi}{2} - i\Gamma'(1)\right)ds_\eta. \quad (2.88)$$

Предел при $\varepsilon \to 0$ существует, так как $\alpha \ \geq n$. Как и при $-n < \alpha < 0$, доказывается, что $a_0(x) \in C^\infty$ при $x \neq 0$.

Замечание 2.1. Пусть в (2.77) и (2.84) $\varphi\ \ \xi\ \ = 0$ при $\ \xi\ \ < \varepsilon$. Тогда $\psi(r) = 0$ при $r < \varepsilon$. Следовательно, интегрируя в (2.77) и (2,84) по частям, получим

$$\mathcal{A}_0, \varphi \ = \ \mathop{\quad}_{-\infty}^{\infty} A_0\ \ \xi\ \ \varphi\ \ \xi\ \ d\xi. \tag{2.89}$$

Функционалы (2.77) и (2.84) не являются единственными функционалами, удовлетворяющими соотношению (2.89) на функциях $\varphi\ \ \xi\ \ \in S(\boldsymbol{R}^n)$, равных нулю при $\ \xi\ \ < \varepsilon$. Очевидно, функционалы

$$\mathcal{A}_0' = \mathcal{A}_0 + \mathop{\quad}_{k\ \leq N} c_k D^{k\delta}\ \ \xi$$

также обладают этим свойством при любых c_k. Среди всех таких функционалов функционал (2.77) характеризуется тем, что $a_0\ \ x\ \ = F^{-1}\mathcal{A}_0$ – однородная функция класса $O^{\infty}_{-\alpha-i\beta-n}$. Отметим, что $a_0'\ \ x\ \ = F^{-1}\mathcal{A}_0'$ отличается от $a_0\ \ x\ \ = F^{-1}\mathcal{A}_0$ на многочлен

$$\mathop{\quad}_{k\ \leq N} c_k^{\ 1}\ x^k.$$

Замечание 2.2. Выясним, когда функция $a_0\ \ x\ $, определяемая формулой (2.88), является однородной. Так как

$$ln\ -\ x, \eta\ \ + i0\ \ = ln\ x\ \ + ln\ \ -\ \frac{x}{x}, \eta\ \ + i0\ \ ,$$

то

$$a_0\ \ x\ \ = a_0^{(1)}\ \ x\ \ ln\ x\ \ + a_0^{\ 2}\ \ \ x\ \ , \tag{2.90}$$

где

$$a_0^{(1)}\ \ x\ \ = -\frac{-i\ \ ^{\alpha\ -n}}{2\pi\ \ ^n\ \ -\ \alpha\ \ -n\ \ !} \mathop{\quad}_{S^{n-1}} A_0\ \ \eta\ \ \ x, \eta\ \ ^{\alpha\ -n} ds_\eta, \tag{2.91}$$

$$a_0^{\ 2}\ \ \ x\ \ = -\frac{-i\ \ ^{\alpha\ -n+1}}{2\pi\ \ ^n\ \ \ \alpha\ \ -n\ \ !} \mathop{\quad}_{S^{n-1}} A_0\ \ \eta\ \ \ x, \eta\ \ ^{\alpha\ -n} \times$$

$$\times \ i\ln \ - \ \frac{x}{x}, \eta \ \ + i0 \ \ + \frac{\pi}{2} - i\Gamma' \ 1 \quad ds_{\eta}. \qquad (2.92)$$

Очевидно, $a_0^{(1)} \ x \ \in O^{\infty}_{\alpha - n}, a_0^{(2)} \ x \ \in O^{\infty}_{\alpha - n}$, причем $a_0^{(1)} \ x$ – однородный многочлен по x. Функция $a_0 \ x$ будет однородной тогда и только тогда, когда $a_0^{(1)} \ x \ \equiv 0$, что эквивалентно выполнению условий

$$\underset{S^{n-1}}{} \eta^k A_0 \ \eta \ ds_{\eta} = 0, \ \ \forall \ k \ = \ \alpha \ - n, \qquad (2.93)$$

где $k = \ k_1, \dots, k_n$, $k \ = k_1 + \ldots + k_n$. При выполнении условий (2.93) $a_0 \ x \ = a_0^{(2)} \ x \ \in O^{\infty}_{\alpha - n}$.

§3. Псевдодифференциальные операторы

1. Класс S^0_{α}. Пусть $A \ \xi$ − локально суммируемая функция, удовлетворяющая оценке

$$A \ \xi \ \ \le C \ 1 + \ \xi \ \ ^{\alpha}. \qquad (3.1)$$

Класс таких функций будем обозначать через S^0_{α}. Псевдодифференциальным оператором (п. д. о.) называется оператор, определенный на функциях из $S(R^n)$ по формуле:

$$Au = \frac{1}{2\pi \ ^n} \ \ \underset{-\infty}{\overset{\infty}{}} \ A \ \xi \ u \ \xi \ e^{-i(x,\xi)} d\xi, \qquad (3.2)$$

где $u \ \xi$ – преобразование Фурье $u(x) \in S(R^n)$. Функция $A \ \xi$ называется символом оператора A. Если $A \ \xi$ – многочлен по ξ, т.е.

$$A \ \xi \ = \underset{k \ \le m}{} \ a_k \xi^k,$$

то в силу (3.2)

$$Au = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{|k|\le m} a_k\xi^k u(\xi)\, e^{-i(x,\xi)}d\xi = \sum_{|k|\le m} a_k D^k u(x), \qquad (3.3)$$

т.е. A – дифференциальный оператор. Таким образом, класс псевдодифференциальных операторов содержит класс дифференциальных операторов. Будем иногда псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$ обозначать через $A(D)$ по аналогии с дифференциальными операторами.

Пусть в (3.1) $\alpha < -n$. Тогда $A(\xi)$ – абсолютно интегрируемая функция и, следовательно, $a(x) = F^{-1}A(\xi)$ – непрерывная ограниченная функция. В силу свойства преобразования Фурье свертки

$$Au = F^{-1}\left(A(\xi)u(\xi)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x-y)u(y)\,dy, \qquad (3.4)$$

т.е. при $A(\xi) \in S_\alpha^0$ и $\alpha < -n$ псеводдифференциальный оператор (п. д. о.) A является интегральным оператором типа свертки. При $\alpha \ge -n$ найдется целое $m > 0$ такое, что $\alpha - 2m < -n$. Пусть $A_1(\xi) = \frac{A(\xi)}{(1+|\xi|^2)^m}$. Тогда $|A_1(\xi)| < C(1+|\xi|)^{\alpha-2m}$ и, следовательно, $A_1(\xi)$ абсолютно интегрируема. Обозначим $a_1(x) = F^{-1}A_1(\xi)$. Тогда

$$Au = (-\Delta+1)^m \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x-y)u(y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x-y)(-\Delta+1)^m u(y)\,dy, \qquad (3.5)$$

где

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} -$$

оператор Лапласа. Таким образом, п.д.о. A можно представить в виде интегродифференциального оператора.

Отметим, что $A(\xi)u(\xi)$ при любом N удовлетворяет оценке

$$|A(\xi)u(\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N}, \qquad (3.6)$$

так как $u(\xi) \in S(R^n)$. Следовательно, $Au = F^{-1}A(\xi)u(\xi)$ является ограниченной бесконечно дифференцируемой функцией.

2. П.д.о. с однородными символами. Можно определить псевдодифференциальные операторы и для более широкого класса символов, чем S_α^0.

Пусть $\mathcal{A} \in S'(R^n)$ – произвольная обобщенная функция. Тогда в силу (1.18) определено произведение $\mathcal{A}u(\xi) \in S'(R^n)$ для любой $u(\xi) \in S(R^n)$. Определим теперь псевдодифференциальный оператор A, действующий из $S(R^n)$ в $S'(R^n)$ по формуле

$$Au = F^{-1}(\mathcal{A}u), u = Fu, u \in S(R^n), \qquad (3.7)$$

где оператор F^{-1} определяется согласно (2.28).

Если $u_n(x) \to u(x)$ в $S(R^n)$, то $u_n(\xi) \to u(\xi)$ в $S(R^n)$ в силу леммы 2.1, $\mathcal{A}u_n \to \mathcal{A}u$ в $S'(R^n)$ в силу (1.18) и $F^{-1}\mathcal{A}u_n \to F^{-1}\mathcal{A}u$ в силу (2.31). Таким образом, п. д. о. A непрерывно отображает $S(R^n)$ в $S'(R^n)$. Пусть $a = F^{-1}A \in S(R^n)$. В силу теоремы 2.2

$$Au = a * u, \qquad \forall u \in S(R^n), \qquad (3.8)$$

причем из леммы 2.5 следует, что Au бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая оценкам вида (2.46).

В приложениях часто встречаются псевдодифференциальные операторы с символами $\mathcal{A}_0 \in S'(R^n)$, порождаемыми однородными функциями $A_0(\xi)$.

Пусть $A_0(\xi) \in O_{\alpha+i\beta}^\infty$, т.е. $A_0(\xi)$ – однородная функция порядка $\alpha + i\beta$, бесконечно дифференцируемая при $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \ne 0, n \ge 2$.

Пусть $\alpha > -n$. Тогда функции $A_0(\xi) \in O_{\alpha+i\beta}^\infty$ отвечает регулярный функционал, который мы также обозначим через $A_0(\xi)$ и п. д. о. с символом $A_0(\xi)$ имеет вид, аналогичный (3.2)

$$A_0u = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\xi)u(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi, \quad \forall u \in S(R^n), \qquad u = Fu. \qquad (3.9)$$

Если $-n < \alpha < 0$, то в силу примера 2.6 $a_0(x) = F^{-1}A_0(\xi) \in O^{\infty}_{-\alpha-i\beta-n}$ является регулярным функционалом. Согласно (3.8)

$$A_0(u) = \int_{-\infty}^{\infty} a_0(x-y)u(y)\,dy, \qquad (3.10)$$

т.е. при $A_0(\xi) \in O^{\infty}_{\alpha+i\beta}$ и $-n < \alpha < 0$ п. д. о. A_0 является интегральным оператором со слабой особенностью.

Пусть $\alpha \geq 0$. Тогда найдется целое $m > 0$ такое, что $-1 \leq \gamma = \alpha - m < 0$. Следовательно, $A_0(\xi) = |\xi|^m B_0(\xi)$, где $B_0(\xi) \in O^{\infty}_{\gamma+i\beta}$. Если m – четное, $m = 2m_1$, то

$$A_0(\xi) = |\xi|^{2m_1} B_0(\xi) = \left(\sum_{k=1}^{m} \xi_k^2\right)^{m_1} B_0(\xi).$$

Если m – нечетное, $m = 2m_1 + 1$, то

$$A_0(\xi) = |\xi|^{2m_1}|\xi| B_0(\xi) = |\xi|^{2m_1}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\xi_k}{|\xi|}\right)^{m_1} B_0(\xi) \sum_{k=1}^{n} |\xi|^{2m_1} \times \xi_k B_k(\xi),$$

где $B_k(\xi) \in O^{\infty}_{\gamma+i\beta}$.

Таким образом, при любом $\alpha \geq 0$ функцию $A_0(\xi)$ можно представить в виде

$$A_0(\xi) = \sum_{k=1}^{n} P_k(\xi) B_k(\xi), \qquad (3.11)$$

где $B_k(\xi) \in O^{\infty}_{\gamma+i\beta}$, $-1 \leq \gamma < 0$, $P_k(\xi)$ – однородные многочлены по ξ степени $m, \alpha = m + \gamma$. Следовательно, п. д. о. A с символом $A_0(\xi)$ можно представить в виде интегродифференциального оператора

$$A_0 u = \sum_{k=1}^{n} P_k(D_x) \int_{-\infty}^{\infty} b_k(x-y)u(y)\,dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} b_k(x-y) P_k(D_y)u(y)\,dy, \qquad \forall u \in S(R^n), \qquad (3.12)$$

где $b_k(x) = F^{-1}B_k(\xi) \in O^{\infty}_{-\gamma-i\beta-n}$, $1 \leq k \leq n$.

Очевидно, п. д. о. A_0 можно многими способами представить в виде интегродифференциального оператора.

Пример 3.2. Обозначим через $\Lambda^{\alpha+i\beta}$ п. д. о. с символом $\xi^{\alpha+i\beta}$, $-n < \alpha < 0$. В силу примера 2.6 $\lambda_{\alpha+i\beta} \ x \ = F^{-1} \ \xi^{\ \alpha+i\beta} \in O^{\infty}_{-\alpha-i\beta-n}$. Покажем, что $\lambda_{\alpha+i\beta} \ x$ не зависит от $y = x/|x|$. В силу (2.70)

$$\lambda_{\alpha+i\beta} \ x,\varepsilon \ = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2} \ \alpha+i\beta+n} \ \Gamma \ \alpha+i\beta+n}{2\pi^{\ n} \ x^{\ \alpha+i\beta+n}} \ {}_{S^{n-1}} \ \frac{ds_\eta}{y,\eta \ - i\varepsilon_1^{\ \ \alpha+i\beta+n}}, \quad (3.13)$$

где $y = \frac{x}{x}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon/ \ x$. Сделаем в (3.13) ортогональное преобразование, направив ось η_1 вдоль вектора y. Получим

$$\lambda_{\alpha+i\beta} \ x,\varepsilon \ = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2} \ \alpha+i\beta+n} \ \Gamma \ \alpha+i\beta+n}{2\pi^{\ n} \ x^{\ \alpha+i\beta+n}} \ {}_{S^{n-1}} \ \frac{ds_\eta}{\eta_1 - i\varepsilon_1^{\ \ \alpha+i\beta+n}} = \frac{C^{\ 1}_{\alpha+i\beta}(\varepsilon_1)}{x^{\ \alpha+i\beta+n}}.$$

Как и в (2.73), доказывается, что существует $\lim_{\varepsilon_1 \to 0} C^{\ 1}_{\alpha+i\beta}(\varepsilon_1) = C^{\ 1}_{\alpha+i\beta}$ и, следовательно, $\lambda_{\alpha+i\beta} \ x \ = C^{\ 1}_{\alpha+i\beta} \ x^{\ -\alpha-i\beta-n}$. Для определения константы $C^{\ 1}_{\alpha+i\beta}$ подставим в (2.74) $a_0 \ y \ = C^{\ 1}_{\alpha+i\beta}, A_0 \ \eta \ = 1$. Получим

$$C^{\ 1}_{\alpha+i\beta} = \frac{2^{\alpha+i\beta}\Gamma \ \frac{\alpha+i\beta+n}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma \ -\frac{\alpha+i\beta}{2}}.$$

Таким образом,

$$\lambda_{\alpha+i\beta} \ x \ = \frac{2^{\alpha+i\beta}\Gamma \ \frac{\alpha+i\beta+n}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma \ -\frac{\alpha+i\beta}{2}} \ x^{\ -\alpha-i\beta-n}, -n < \alpha < 0. \qquad (3.14)$$

В силу (3.14) и (3.10) п. д. о. $\Delta^{\alpha+i\beta}$ имеет вид

$$\Lambda^{\alpha+i\beta}u = \frac{2^{\alpha+i\beta}\Gamma \ \frac{\alpha+i\beta+n}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma \ -\frac{\alpha+i\beta}{2}} \ {}_{-\infty}^{\infty} \ \frac{u \ y \ dy}{x-y^{\ \alpha+i\beta+n}}, -n < \alpha < 0. \qquad (3.15)$$

В частности, при $\alpha = -1, \beta = 0$ получим

$$\Lambda^{-1}u=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}},n\ \geq 2. \qquad (3.15')$$

В $(3.15')$ было использовано, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Если $\alpha=-2,\beta=0,n\ \geq 3$, то

$$\Lambda^{-2}u=\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y)\,dy}{|x-y|^{n-2}},n\ \geq 3. \qquad (3.15'')$$

Оператор $(3.15'')$ называется ньютоновским потенциалом.

Пример 3.2. Пользуясь $(3.15'')$ найдем представление вида (3.10) для п. д. о. P_n с символом $\xi_n/|\xi|^2$ при $n\ \geq 3$. Так как

$$F^{-1}\frac{\xi_n}{|\xi|^2}=i\frac{\partial}{\partial x_n}F^{-1}\frac{1}{|\xi|^2},$$

то

$$P_n(u)=-\frac{i(n-2)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x_n-y_n)u(y)\,dy}{|x-y|^{n}}=$$

$$=\frac{-i\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x_n-y_n)u(y)\,dy}{|x-y|^{n}},\qquad n\geq 3, \qquad (3.16)$$

так как $\frac{n-2}{2}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

Пример 3.3. Пусть $k>0-$ целое. Тогда $\Lambda^{2k}(\xi)=|\xi|^{2k}$ и, следовательно, $\Lambda^{2k}u=(-\Delta)^{k}u$, где Δ - оператор Лапласа. Если $\alpha>0$ не является четным, то найдется четное число $2m>0$ такое, что $\alpha=2m+\gamma$, где $-2<\gamma<0$. Следовательно,

$$\Lambda^{\alpha}u=\Lambda^{2m+\gamma}u=(-\Delta)^{m}\frac{2^{\gamma}\Gamma\left(\frac{n+\gamma}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(-\frac{\gamma}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y)\,dy}{|x-y|^{n+\gamma}},$$

$\alpha=2m+\gamma,-2<\gamma<0.$ (3.17)

В частности,

$$\Lambda u=-\Delta\Lambda^{-1}u=-\Delta\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y)\,dy}{|x-y|^{n-1}}=$$

$$= -\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_y u(y)}{|x-y|^{n-1}} dy. \qquad (3.17')$$

Вернемся к рассмотрению п. д. о. (3.12), предполагая, что $-1 < \gamma < 0$. Обозначим

$$a_0 = \sum_{k=1}^{n} P_k(D) b_k = F^{-1} A_0(\xi).$$

Функционал a_0 не является регулярным при $\alpha \geq 0$. Так как $b_k(x) \in O^{\infty}_{-\gamma-i\beta-n}$ и $P_k(D) b_k(x) \in O^{\infty}_{-m-\gamma-i\beta-n}$, то сужение обобщенной функции a_0 на открытую область $R^n \backslash \{0\}$ является регулярным функционалом, отвечающим бесконечно дифференцируемой функции

$$a_0(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(D) b_k b_k(x) \in O^{\infty}_{-\alpha-i\beta-n}.$$

Имеем

$$A_0 u = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{1}{\alpha} > |x-y| > \varepsilon} b_k(x-y) P_k(D_y) u(y) dy. \qquad (3.18)$$

Так как $P_k(D_y)$ – однородный многочлен по D_y порядка m, то

$$P_k(D_y) u(y) = P_k(D_y)\left[u(y) - \sum_{|p|=0}^{m-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial P_u(x)}{\partial x^P} (y-x)^p\right], \qquad (3.19)$$

где $p! = p_1! p_2! \dots p_n!$. Подставляя (3.19) в (3.18), интегрируя m раз по частям, а затем перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$A_0 u = \int_{-\infty}^{\infty} a_0(x-y)\left[u(y) - \sum_{|p|=0}^{m-1} \frac{1}{p!} \frac{\partial P_u(x)}{\partial x^P} (y-x)^p\right] dy. \qquad (3.20)$$

Интеграл (3.20) сходится, так как $|a_0(x-y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{m+n+\gamma}}$,

$$-1<\gamma<0,\ u(y)-\sum_{p=0}^{m-1}\frac{1}{p!}\frac{\partial P_u(x)}{\partial x^P}(y-x)^p\leq\begin{cases}C|x-y|^m \text{ при } |x-y|\leq 1,\\ C|x-y|^{m-1} \text{ при } |x-y|\geq 1.\end{cases}$$

Отметим, что в дальнейшем основную роль при изучении псевдодифференциальных операторов будет играть представление (3.9), а не представленья (3.10), (3.12) или (3.20).

3. Сингулярный интегральный оператор. Пусть $A_0(\xi)\in O_0^\infty$, т.е. имеет нулевой порядок однородности. Обозначим $A_k(\xi)=\frac{\xi_k A_0(\xi)}{|\xi|^2}$. Тогда $A_k(\xi)\in O_{-1}^\infty, A_0(\xi)=\sum_{k=1}^n \xi_k A_k(\xi)$ и, следовательно, аналогично (3.12) п. д. о. A_0 с символом $A_0(\xi)$ можно представить в виде

$$A_0u=\sum_{k=1}^n\int_{-\infty}^{\infty}a_k(x-y)\,i\frac{\partial u(y)}{\partial y_k}dy, \qquad (3.20')$$

где $a_k(x)=F^{-1}A_k\in O_{-n+1}^\infty$. Покажем, что п. д. о. A_0 можно также представить в виде сингулярного интегрального оператора. Пусть $b(x)\in O_{-n}^\infty, u(x)\in S(R^n)$. Если существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} b(x-y)u(y)\,dy, \qquad (3.21)$$

то будем говорить, что сингулярный интеграл (3.21) сходится в смысле главного значения (в смысле Коши), и обозначим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} b(x-y)u(y)\,dy=v.p.\int_{-\infty}^{\infty} b(x-y)u(y)\,dy.$$

Лемма 3.1. Пусть $b(x)\in O_{-n}^\infty$. *Для того, чтобы при любой* $u(x)\in S(R^n)$ *существовал сингулярный интеграл*

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} b(x-y)u(y)\,dy$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{S^{n-1}} b(\omega)\,ds_\omega=0. \qquad (3.22)$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} b(x-y)\,u(y)\,dy =$$

$$= \int_{\varepsilon<|x-y|<1} b(x-y)\,\big(u(y)-u(x)\big)\,dy + \int_{\varepsilon<|x-y|<1} b(x-y)\,u(x)\,dy +$$

$$+ \int_{|x-y|>1} b(x-y)\,u(y)\,dy. \qquad (3.23)$$

Последний интеграл в (3.23), очевидно, сходится, так как $u(y) \in S(R^n)$. Далее,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|x-y|<1} b(x-y)\,\big(u(y)-u(x)\big)\,dy$$

существует, так как $|u(y)-u(x)| \leq c|x-y|$. Для вычисления второго интеграла в (3.23) перейдем к сферическим координатам $|x-y|=r$, $\frac{y-x}{|y-x|}=\omega$. Получим

$$\int_{\varepsilon<|x-y|<1} b(x-y)\,u(x)\,dy = u(x)\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{r}\int_{S^{n-1}} b(\omega)\,ds_\omega =$$

$$= u(x)\,ln\frac{1}{\varepsilon}\int_{S^{n-1}} b(\omega)\,ds_\omega. \qquad (3.24)$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} b(x-y)\,u(y)\,dy$$

существует при любых $u(x) \in S(R^n)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.22). Отметим, что в силу (3.23) и (3.22)

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} b(x-y)\,u(y)\,dy = \int_{|x-y|<1} b(x-y)\,\big(u(y)-u(x)\big)\,dy +$$

$$+ \int_{|x-y|>1} b(x-y)\,u(x)\,dy. \qquad (3.25)$$

Теорема 3.1. Псевдодифференциальный оператор A_0 с символом $A_0(\xi) \in O_0^\infty$ можно представить в виде сингулярного интегрального оператора

$$A_0 u = c_0 u \; x \; + v.p. \int_{-\infty}^{\infty} a_0 \; x - y \; u \; y \; dy, \qquad 3.26$$

где

$$c_0 = \frac{\Gamma \; \frac{n}{2}}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} A_0 \; \eta \; ds_\eta, \qquad (3.27)$$

$$a_0 \; \xi \; \in O_0^\infty \text{и} \int_{S^{n-1}} a_0 \; \omega \; ds_\omega = 0. \qquad (3.28)$$

Доказательство. Так как интегралы (3.20′) сходятся, то

$$A_0 u = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^{n} i \int_{x-y > \varepsilon} a_k \; x - y \; \frac{\partial u \; y}{\partial y_k} dy \; . \qquad (3.29)$$

Проинтегрируем в (3.29) по частям. Получим

$$A_0 u = \lim_{\varepsilon \to 0} (\int_{x-y > \varepsilon} \sum_{k=1}^{n} i \frac{\partial a_k \; x - y}{\partial x_k} u \; y \; dy \; +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} i \int_{x-y = \varepsilon} a_k \; x - y \; \frac{x_k - y_k}{x - y} u \; y \; ds^* \;), \qquad (3.30)$$

где ds^* - элемент площади сферы $x - y \; = \varepsilon$. Введя сферические координаты $x - y \; = r, \frac{y-x}{|y-x|} = \omega$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} i \int_{x-y = \varepsilon} a_k \; x - y \; \frac{x_k - y_k}{x - y} u \; y \; ds^* \; =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} i \int_{S^{n-1}} \frac{a_k \; \omega}{\varepsilon^{n-1}} \omega_k u \; x + \varepsilon\omega \; \varepsilon^{n-1} ds_\omega \; \to$$

$$\to \sum_{k=1}^{n} i\,u(x) \int_{S^{n-1}} a_k(\omega)\,\omega_k ds_\omega \ \text{при} \varepsilon \to 0. \qquad (3.31)$$

Обозначим

$$a_0(x) = \sum_{k=1}^{n} i \frac{\partial a_k(x)}{\partial x_k}.$$

Так как $a_k(x) \in O^{\infty}_{-n+1}$, то $a_0(x) \in O^{\infty}_{-n}$. Отметим, что функционал

$$a_0 = F^{-1}A_0(\xi) = \sum_{k=1}^{n} i \frac{\partial}{\partial x_k} F^{-1}A_k(\xi)$$

не является регулярным. Однако его сужение на $R^n\backslash\{0\}$ является регулярным функционалом, отвечающим функции $a_0(x)$.

В силу (3.29) предел суммы интегралов (3.30) существует, так как второй интеграл в (3.30) имеет предел при $\varepsilon \to 0$, то существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} a_0(x-y)\,u(y)\,dy = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} a_0(x-y)\,u(y)\,dy.$$

Тогда из леммы 3.1 следует, что

$$\int_{S^{n-1}} a_0(\omega)\,ds_\omega = 0.$$

Таким образом,

$$A_0 u = c_0 u(x) + v.p. \int_{-\infty}^{\infty} a_0(x-y)\,u(y)\,dy,$$

где

$$c_0 = \sum_{k=1}^{n} i \int_{S^{n-1}} a_k(\omega)\,\omega_k ds_\omega .$$

Осталось показать, что

$$\sum_{k=1}^{n} i \int_{S^{n-1}} a_k(\omega)\,\omega_k ds_\omega = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} A_0(\eta)\,ds_\eta .$$

Так как $a_k = F^{-1}A_k$, то

$$i\sum_{k=1}^{n} x_k a_k = \sum_{k=1}^{n} F^{-1}\frac{\partial A_k}{\partial \xi_k}.$$

Следовательно, в силу (2.28) и (1.16)

$$\left(i\sum_{k=1}^{n} x_k a_k(x), \varphi(x)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\frac{\partial A_k}{\partial \xi_k}, \varphi(\xi)\right) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(A_k(\xi), \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}\right). \qquad (3.32)$$

Аналогично (2.75) положим в (3.32) $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Переходя к сферическим координатам, получим

$$i\int_{S^{n-1}}\sum_{k=1}^{n} y_k a_k(y)\,ds_y \int_0^\infty \frac{1}{r^{n-2}} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{n-1}dr =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\sum_{k=1}^{n}\int_{S^{n-1}} A_k(\eta)\,\eta_k ds_\eta \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{n-1}d\rho. \qquad (3.33)$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(\eta)\,\eta_k = A_0(\eta),$$

то

$$i\int_{S^{n-1}}\sum_{k=1}^{n} y_k a_k(y)\,ds_y = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{S^{n-1}} A_0(\eta)\,ds_\eta = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{S^{n-1}} A_0(\eta)\,ds_\eta.$$

Теорема 3.1. доказана. Отметим, что $\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ равно площади S^{n-1} (см. [21]), так что c_0 представляет собой среднее значение $A_0(\eta)$ на сфере S^{n-1}.

Пример 3.4. Обозначим через $Y_k, 1 \le k \le n$, п. д. о. с символом $\eta_k = \frac{\xi_k}{|\xi|}$. Отметим, что

$$\int_{S^{n-1}} \eta_k ds_\eta = 0$$

в силу нечетности η_k. Так как $F^{-1}\frac{\xi_k}{|\xi|} = i\frac{\partial}{\partial x_k}F^{-1}\frac{1}{|\xi|}$, то в силу (3.14) и теоремы 3.1

$$Y_k u = v.p. \frac{-i\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot(n-1)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_k - y_k}{|x-y|^{n+1}}u(y)\,dy =$$

$$= -i\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_k - y_k}{|x-y|^{n+1}}u(y)\,dy. \qquad (3.34)$$

В (3.34) было использовано, что $\frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

Сингулярные интегральные операторы Y_k называются операторами Рисса.

Пример 3.5. Пусть Λ – п. д. о. с символом $|\xi|$. Так как

$$|\xi| = \sum_{k=1}^{n}\xi_k\frac{\xi_k}{|\xi|},$$

то п. д. о. Λ можно представить в виде:

$$\Lambda u = \sum_{k=1}^{n} Y_k D_k u = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_k - y_k}{|x-y|^{n+1}}\frac{\partial u(y)}{\partial y_k}dy. \qquad (3.35)$$

Оператор Λ называется интегродифференциальным оператором Зигмунда-Кальдерона. Формула (3.17′) дает другое представление для Λ.

Отметим, что любой п. д. о. с символом $A_0(\xi) \in O_m^\infty$, где $m > 0$ – целое, можно представить в виде

$$A_0 u = \sum_{k=1}^{n} Q_k(D) B_k u, \qquad (3.36)$$

где $Q_k(D)$ – однородные дифференциальные операторы порядка m, B_k – сингулярные операторы. Действительно, символ $A_0(\xi)$ можно представить в виде

$$A_0(\xi) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(\xi) B_k(\xi),$$

где $B_k(\xi) \in O_0^\infty$, откуда следует представление (3.36).

4. П. д. о. с однородными символами (продолжение). Пусть $A_0(\xi) \in O_{\alpha+i\beta}^\infty$ и $\alpha \le -n$. Тогда функции $A_0(\xi)$ можно сопоставить функционал $\mathcal{A}_0 \in S'$ по формуле (2.77) при $\alpha + i\beta \ne -n, -n-1, \dots$ или по формуле (2.84) при $\beta = 0, \alpha = -n, -n-1, \dots$ П. д. о. $u = F^{-1}\mathcal{A}_0 u$ имеет вид

$$A_0 u = \int_{-\infty}^{\infty} a_0(x-y) u(y)\, dy, \forall u \in S(R^n), \quad (3.37)$$

где $a_0(x) = F^{-1}\mathcal{A}_0$ определяется по формуле (2.82) при $\alpha + i\beta \ne -n, -n-1$ или по формуле (2.88) при $\alpha + i\beta = -n, -n-1, \dots$.

Пример 3.6. Обозначим через Λ^{-n} функционал, определяемый по формуле (2.84) при $A_0(\xi) = \frac{1}{|\xi|^n}$. Пусть $\lambda_{-n}(x) = F^{-1}\Lambda^{-n}$. Тогда формула (2. 90) принимает вид

$$\lambda_{-n}(x) = -\frac{\Omega_n \ln|x|}{(2\pi)^n} - c_n, \quad (3.38)$$

где $\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ – площадь сферы S^{n-1},

$$c_n = \frac{i}{(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} \left[i ln\left(-\left(\frac{x}{|x|}, \eta\right) + i0\right) + \frac{\pi}{2} - i\Gamma'(1) \right] ds_\eta. \quad (3.39)$$

Если аналогично (3.13) сделать ортогональное преобразование, направив ось η_1 вдоль вектора $\frac{x}{|x|}$, то получим, что c_n не зависит от $\frac{x}{|x|}$,

$$c_n = \frac{i}{(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} \left[i ln(-\eta_1 + i0) + \frac{\pi}{2} - i\Gamma'(1) \right] ds_\eta. \quad (3.40)$$

П. д. о. $\Lambda^{-n}(D)$ с символом Λ^{-n} имеет вид

$$\Lambda^{-n}(D)u = -\frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\ln|x-y|\,u(y)\,dy - c_n\int_{-\infty}^{\infty}u(y)\,dy. \qquad (3.41)$$

Пример 3.7. С помощью (3.38) найдем п. д. о. P_2 с символом $\frac{\xi_n}{|\xi|^2}$ при $n = 2$. Так как $F^{-1}\frac{\xi_n}{|\xi|^2} = i\frac{\partial}{\partial x^2}F^{-1}\Lambda^{-2} = i\frac{\partial}{\partial x^2}\lambda_{-2}(x)$, то

$$P_2u = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_2-y_2}{|x-y|^2}u(y)\,dy, \qquad n = 2. \qquad (3.42)$$

Отметим, что формула (3.42) может быть формально получена из (3.16) при $n = 2$. Отметим также при $n = 2$ следующие формулы, легко вытекающие из (3.42), (3.15′).

$$F^{-1}\left(\frac{1}{\xi_1+i\xi_2}\right) = F^{-1}\left(\frac{\xi_1-i\xi_2}{|\xi|^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{-ix_1-x_2}{|x|^2} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x_1+ix_2}, \qquad (3.43)$$

$$F^{-1}\left(\frac{\xi_1-i\xi_2}{\xi_1+i\xi_2}\right) = \left(i\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x_1+ix_2} = -\frac{1}{\pi(x_1+ix_2)^2}, \quad x \neq 0, \quad (3.44)$$

$$F^{-1}\left(\frac{\xi_1-i\xi_2}{|\xi|}\right) = \left(i\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{1}{2\pi|x|} = \frac{1}{2\pi i(x_1+ix_2)|x|}, \quad x \neq 0. \quad (3.45)$$

5. Пусть $A_0(\xi) \in O^{\infty}_{\alpha+i\beta}$ и $\alpha < 0$, т. е. п. д. о. A_0 с символом $\mathcal{A}_0$ $(\mathcal{A}_0 = A_0(\xi)$ при $-n < \alpha < 0)$ является интегральным оператором. Обозначим через $\chi(\xi)$ функцию класса $C_0^{\infty}(R^n)$, равную 1 при $|\xi| \leq 1$. Тогда функция $A_1(\xi) = (1-\chi(\xi))A_0(\xi) \in S^0_{\alpha}$ и бесконечно дифференцируема, причем

$$|D^k_{\xi}A_1(\xi)| \leq C_k(1+|\xi|)^{\alpha-k}, \quad 0 \leq |k| < \infty. \qquad (3.46)$$

Обозначим через A_1 п. д. о. с символом $A_1(\xi)$ и сравним его с п. д. о. A_0. Пусть $a_1 = F^{-1}A_1(\xi), a_0 = F^{-1}\mathcal{A}_0$. Тогда $a_0 - a_1 = F^{-1}\chi\mathcal{A}_0$. Так как $\chi(\xi) \in C_0^{\infty}(R^n)$, то $\chi\mathcal{A}_0$ является финитным функционалом и, следовательно, в силу теоремы 2.1 $a_2(x) = F^{-1}\chi\mathcal{A}_0$ – целая аналитическая функция. Следовательно, при $\alpha < 0$ $a_1(x) = a_0(x) - a_2(x) \in C^{\infty}$ при $x \neq 0$ и A_1 – интегральный оператор с ядром $a_1(x-y)$. Обозначим $B_N(\xi) = \Delta^N_{\xi}A_1(\xi)$. В силу (3.46) $|B_N(\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{\alpha-2N}$. При $N > n/2$ $b_N(x) = F^{-1}B_N(\xi)$ – ограниченная функция. Так как $b_N(x) = F^{-1}\Delta_\xi^N A_1(\xi) = (-1)^N |x|^{2N} a_1(x)$, то $|a_1(x)| \le \frac{C_{N1}}{|x|^{2N}}, \forall N$. Интегральные операторы A_1 и A_0 отличаются на интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром $a_2(x-y)$. Умножение символа $A_0(\xi)$ на $(1-\chi(\xi))$ приводит к тому, что ядро $a_1(x-y)$ п. д. о. A_1 убывает быстрее любой степени при $|x-y| \to \infty$, в то время как $a_0(x-y) = O(|x-y|^{\alpha-n})$ при $\alpha + i\beta \ne -n, -n-1, \ldots$ и $a_0(x-y) = O(|x-y|^{\alpha-n}\ln|x-y|)$ при $\alpha + i\beta = -n, -n-1, \ldots$

§4. Пространства Соболева – Слободецкого

1. Пространство $H_s(R^n)$. Пусть s – произвольное действительное число. Пространство Соболева – Слободецкого $H_s(R^n)$ состоит, по определению, из обобщенных функций , преобразование Фурье которых является локально интегрируемой в смысле Лебега функцией $u(\xi)$ такой, что

$$\|u\|_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s} d\xi < \infty. \qquad (4.1)$$

Фурье-образ пространства $H_s = H_s(R^n)$ будем обозначать через $H_s = H_s(R^n)$. Формула (4.1) определяет норму в пространствах H_s и H_s. Отметим, что H_s, а следовательно и H_s, $-$ гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(u, v)_s = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\overline{v(\xi)}(1+|\xi|)^{2s} d\xi. \qquad (4.2)$$

Отсюда, в частности, следует что H_s и H_s полны. Для $u \in H_s$ и $\varphi \in S$ формула (2.28) приобретает вид

$$(u, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\overline{\varphi(\xi)}\, d\xi. \qquad (4.3)$$

Применяя к (4.3) неравенство Коши – Буняковского, получим

$$|(u,\varphi)| \le \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi)||\varphi(\xi)| \frac{(1+|\xi|)^s}{(1+|\xi|)^s} d\xi \le \frac{1}{(2\pi)^n}\|u\|_s\|\varphi\|_{-s}. \quad (4.4)$$

Очевидно, топология в S сильнее сходимости по норме H_s, т. е. если $\varphi_n \to \varphi$ в S, то подавно $\|\varphi_n - \varphi\|_s \to 0$. С другой стороны, в силу (4.4), если $\|u_n - u\|_s \to 0$, то $(u_n, \varphi) \to (u, \varphi)$ для любой $\varphi \in S$, т. е. $u_n \to u$ в S'.

Пусть $s = 0$. Тогда H_0 превращается в $L_2(R^n)$ – пространство квадратично-интегрируемых в смысле Лебега функций. В силу теоремы Планшереля $H_0 = F^{-1}H_0 = L_2(R^n)$.

Пусть $s = m > 0$ – целое. Тогда $\xi^k u(\xi) \in L-2\,(R^n)$ при $|k| \le m$ и, следовательно, в силу (2.29) и теоремы Планшереля $D^k u = F^{-1}[\xi^k u(\xi)] \in L_2(R^n)$. Таким образом, $H_m(R^n)$ состоит из интегрируемых с квадратом функций $u(x)$, обобщенные производные $D^k u(x)$ которых при $1 \le |k| \le m$ также являются интегрируемыми с квадратом функциями. Норма (4.1) при $s = m$ эквивалентна следующей норме:

$$\|u\|_m'^2 = \sum_{|k| \le m} \int_{-\infty}^{\infty} |D^k u(x)|^2 dx = \sum_{|k| \le m} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi^k u(\xi)|^2 d\xi. \quad (4.5)$$

Пусть теперь $s = -m, m > 0$ – целое. Обозначим $v(\xi) = (1+|\xi|)^{-m} u(\xi)$, где $u(\xi) \in H_{-m}$. Тогда $v(\xi) \in H_0 = L_2(R^n)$. Пользуясь разложением

$$|\xi| = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\xi_k}{|\xi|},$$

можно аналогично (3.11) представить $u(\xi)$ в виде

$$u(\xi) = (1+|\xi|)^m v(\xi) = \sum_{|k| \le m} \xi^k v_k(\xi), \quad (4.6)$$

где $v_k(\xi) \in L_2(R^n)$. Взяв обратное преобразование Фурье от обеих частей равенства (4.6), получим

$$u = \sum_{|k| \le m} D^k v_k, \quad (4.6)$$

где $v_k(x) \in L_2(R^n)$.

Таким образом, обобщенные функции из H_{-m} представляют собой производные функции из $L_2(R^n)$ порядка не выше m.

Пример 4.1. Функция $1+\ \sigma\ ^{r}$ принадлежит, очевидно, $H_{-r-\frac{1}{2}-\varepsilon}(R^1)$ при любом $\varepsilon > 0$ и не принадлежат $H_{-r-\frac{1}{2}}\ R^1$; $\delta^r\ t\ =\ i\frac{\partial}{\partial t}\ ^{r}\ \delta(t) \in H_s(R^1)$ при $s < -r-1/2$ и не принадлежат $H_{-r-\frac{1}{2}}\ R^1$, так как в силу примера 2.2 $F\ \delta\ ^{r}\ \ =\sigma^r$.

Теорема 4.1. Функции класса $C_0^\infty(R^n)$ плотны в $H_s(R^n)$ в норме (4.1).

Доказательство. Пусть $\alpha\ x\ \in C_0^\infty\ R^n\ ,\alpha\ x\ \geq 0, \alpha\ x\ = 0$ при $x\ \geq 1,\ {}_{-\infty}^{\infty}\alpha\ x\ dx = 1$ Обозначим $\alpha_s\ x\ = \alpha\ \frac{x}{\varepsilon}\ \frac{1}{\varepsilon^n}$. Функция $\alpha_s\ x$ называется обычно ядром осреднения.

Пусть u – произвольная функция из $H_s, u_s = u * \alpha_s,$. В силу леммы 2.5 и теоремы 2.2 $u_s(x) \in C^\infty$ и $u_s = \alpha_s u.$ Делая замену переменных $x = \varepsilon y$ получим

$$\alpha_s\ \xi\ = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\ \frac{x}{\varepsilon}\ e^{i(x,\varepsilon)}\frac{dx}{s^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\ y\ e^{i(y,s\varepsilon)}dy = \alpha\ \varepsilon\xi\ , \qquad (4.8)$$

причем

$$\alpha_s\ \xi\ \ \leq \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\ y\ dy = \alpha\ 0\ \ = 1. \qquad (4.9)$$

Следовательно, $u_s \in H_s$ и при $\varepsilon \to 0$

$$u - u_\varepsilon\ {}_s^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} u\ \xi\ \ ^2\ 1-\alpha\ \varepsilon\xi\ \ ^2\ 1+\ \xi\ \ ^{2s} d\xi\ \to 0. \qquad (4.10)$$

Действительно, $1-\alpha\ \varepsilon\xi\ \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и любом фиксированном ξ и $1-\alpha\ \varepsilon\xi\ \leq 2$. Так что (4.10) следует, например, из теоремы Лебега (см. пример 1.5). Таким образом, для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$\|u - u_{\varepsilon_1}\| < \frac{\delta}{2}. \qquad (4.11)$$

Так как $\alpha(\varepsilon_1\xi) \in S(R^n)$ и, следовательно, убывает при $|\xi| \to \infty$,быстрее любой отрицательной степени $|\xi|$, то $u_{\varepsilon_1} = \alpha(\varepsilon_1\xi)u(\xi) \in H_N$ при любом N. Пусть $\chi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\chi(x) = 1$ при $|x| \le 1$ Обозначим $v_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon x)u_{\varepsilon_1}(x)$. Тогда $v_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(R^n)$, так как $u_{\varepsilon_1}(x) \in C^\infty(R^n)$. Покажем, что при любом N и $\varepsilon \to 0$ $\|u_{\varepsilon_1} - v_\varepsilon\|_N \to 0$. Действительно, воспользовавшись нормой (4.5), эквивалентной (4.1), получим, что при $\varepsilon \to 0$

$$\|u_{\varepsilon_1}(x) - v_\varepsilon(x)\|_N'^2 = \sum_{|k| \le N} \int_{|x| \ge \frac{1}{\varepsilon}} |D^k((1-\chi(\varepsilon x))u_{\varepsilon_1}(x))|^2 dx \to 0$$

Следовательно, если $N \ge s$, то найдется ε_2 такое, что

$$\|v_{\varepsilon_2}(x) - u_{\varepsilon_1}(x)\|_s \le \|v_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1}\|_N < \frac{\delta}{2}. \qquad (4.12)$$

Из (4.11) и (4.12) следует, что существует функция $v_{\varepsilon_2} \in C_0^\infty(R^n)$ такая, что $\|u - v_{\varepsilon_1}\| < \delta$. Теорема 4.1 доказана.

В силу теоремы 4.1 пространство H_s можно было бы определить как пополнение $C_0^\infty(R^n)$ по норме 4.1. Для нормы (4.1) при $s > 0$ – нецелом также можно дать выражение в x – пространстве.

Лемма 4.1. Пусть $0 < \lambda < 1$. *Норма (4.1) эквивалентна норме*

$$\|u\|_\lambda'^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(x+y) - u(x)|^2}{|y|^{n+2\lambda}} dxdy + \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx. \qquad (4.13)$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in C_0^\infty(R^n)$. Имеем

$$u(x+y) - u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\left(e^{-i(y,\xi)} - 1\right) e^{-i(x,\xi)} d\xi. \qquad (4.14)$$

Применяя к (4.14) равенство Парсеваля при фиксированном y, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x+y) - u(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi)|^2 \left|e^{-i(y,\xi)} - 1\right|^2 d\xi$$

Следовательно,

$$u_{\lambda}^{\prime 2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^{n}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u\ \xi^{\ 2} \frac{e^{-i\ y,\xi} - 1^{\ 2}}{y^{\ n+2\lambda}} dy d\xi + \frac{1}{2\pi^{\ n}} \int_{-\infty}^{\infty} u\ \xi^{\ 2} dy d\xi. \quad (4.15)$$

Покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\ y,\xi} - 1^{\ 2}}{y^{\ n+2\lambda}} dy = C_{\lambda}\ \xi^{\ 2\lambda}. \qquad (4.16)$$

Сделаем в (4.16) ортогональное преобразование координат $y = Az$ такое, чтобы ось z_1 была направлена вдоль вектора ξ. Тогда $y,\xi = z_1\ \xi$, $y = |z|$, и после замены z на $z/\ \xi$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\ y,\xi} - 1^{\ 2}}{y^{\ n+2\lambda}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz_1\ \xi} - 1^{\ 2}}{z^{\ n+2\lambda}} dz =$$

$$= \xi^{\ 2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz_1} - 1^{\ 2}}{z^{\ n+2\lambda}} dz = C_{\lambda}\ \xi^{\ 2\lambda}. \qquad (4.17)$$

Отметим, что интеграл (4.17) сходится, так как в окрестностях нуля $e^{-iz_1} - 1^{\ 2} \le z_1$|^2 и $0 < \lambda < 1$.

Подставив (4.16) в (4.15), получим, что $C^1\ u_{\ \lambda} \le\ u_{\ \lambda}' \le C^2\ u_{\ \lambda}, \forall u \in C_0^{\infty}(R^n)$. В силу теоремы 4.1 норма (4.13) остается конечной для любых $u \in H_{\lambda}$ и $u_{\ \lambda}' \approx\ u_{\ \lambda}$. Лемма 4.1 доказана.

Если $s = m + \lambda,\ m \ge 0$ – целое, $0 < \lambda < 1$, то норма $u_{\ m+\lambda}$ в силу (4.5) и леммы 4.1 эквивалентна следующей норме:

$$u_{\lambda}^{\prime\, 2} = \sum_{k=m} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_x^k u\ x+y\ - D_x^k u\ x^{\ \ 2}}{y^{\ n+2\lambda}} dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} u\ x^{\ 2} dx. \quad (4.18)$$

Таким образом, пространство $H_{m+\lambda}(R^n)$ можно было бы определить как пополнение $C_0^{\infty}(R^n)$ по норме (4.18)

2. Сужение на гиперплоскость. Пусть $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^{n-1}$. Обозначим через $\|v\|_s$ норму в пространстве $H'_s = H_s(R^{n-1})$

$$\|v\|_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi'|)^{2s} |v(\xi')|^2 d\xi'. \qquad (4.19)$$

Теорема 4.2. Пусть $s > 1/2$ *Тогда любая функция* $u(x', x_n) \in H_s(R^n)$ *является непрерывной функцией* $x_n \in R^1$ *со значениями в* $H'_{s-\frac{1}{2}} = H_{s-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$.

Имеет место оценка

$$\max_{x_n \in R^1} \|u(x', x_n)\|_{s-\frac{1}{2}} \leq C\|u\|_s, \qquad \forall u \in H_s(R^n), \qquad (4.20)$$

так что оператор сужения на гиперплоскость $x_n = const$ *является ограниченным из* $H_s(R^n)$ *в* $H_{s-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$.

Доказательство. Пусть сначала $u(x', x_n) \in C_0^\infty(R^n)$. Обозначим через $w(\xi', x_n)$ преобразование Фурье $u(x', x_n)$ по x' : $w(\xi', x_n) = F_{x'}u(x', x_n)$ В силу (2.2)

$$w(\xi', x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi', \xi_n) e^{-ix_n\xi_n} d\xi_n. \qquad (4.21)$$

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получим

$$|w(\xi', x_n)|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi', \xi_n)|^2 (1 + |\xi'| + |\xi_n|)^{2s} d\xi_n \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi'| + |\xi_n|)^{-2s} d\xi_n. \qquad (4.22)$$

Сделаем замену переменной $\xi_n = (1 + |\xi'|)\eta_n$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi'| + |\xi_n|)^{-2s} d\xi_n = (1 + |\xi'|)^{-2s+1} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\eta_n|)^{-2s} d\eta_n = C_1(1 + |\xi'|)^{-2s+1}. \qquad (4.23)$$

Умножив (4.22) на $(1 + |\xi'|)^{-2s+1}$ и проинтегрировав по ξ', получим

$$\|u(x',x_n)\|^2_{s-\frac{1}{2}} \le C-0\ \|u\|^2_s, \qquad \forall u \in C_0^\infty(R^n), \qquad (4.24)$$

где C_0 не зависит от x_n и $u(x',x_n)$.

Покажем теперь, что функции класса $C_0^\infty(R^n)$ непрерывны по x_n со значениями в $H_{s-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$. В силу (2.2)

$$w(\xi',x_n+y_n) - w(\xi',x_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi',\xi_n)\left(e^{-iy_n\xi_n}-1\right)e^{-ix_n\xi_n}d\xi_n. \quad (4.25)$$

Оценивая (4.25) аналогично (4.22), получим

$$|w(\xi',x_n+y_n) - w(\xi',x_n)|^2 \le a(\xi',y_n)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}|u(\xi',\xi_n)|^2(1+|\xi'|+|\xi_n|)^{2s}d\xi_n, \qquad (4.26)$$

где

$$a(\xi',y_n) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-iy_n\xi_n}-1\right|^2(1+|\xi'|+|\xi_n|)^{2s}d\xi_n. \qquad (4.27)$$

Отметим, что

$$a(\xi',y_n) \le \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi'|+|\xi_n|)^{-2s}d\xi_n = c(1+|\xi'|)^{-2s+1},$$

причем при фиксированном ξ' $a(\xi',y_n)\to 0$ при $y_n\to 0$ (ср. (4.10)). Умножив (4.26) на $(1+|\xi'|)^{2s-1}$ и проинтегрировав по ξ', получим

$$\|u(x',x_n+y_n) - u(x',x_n)\|^2_{s-\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(\xi',\xi_n)|^2(1+|\xi'|+|\xi_n|)^{2s}a(\xi',y_n)(1+|\xi'|)^{2s-1}d\xi' d\xi_n. \quad (4.28)$$

Так как $a(\xi',y_n)\to 0$ при $y_n\to 0, \forall\xi'$ и $a(\xi',y_n)\le c(1+|\xi'|)^{-2s+1}$, то аналогично (4.10) из (4.28) следует

$$\|u(x',x_n+y_n) - u(x',x_n)\|^2_{s-\frac{1}{2}} \to 0 \qquad (4.29)$$

при $y_n\to 0$ и фиксированной функции $u(x',x_n)\in C_0^\infty(R^n)$..

Пусть $u(x',x_n)$ – произвольная функция из$H_s(R^n)$. В силу теоремы 4.1

существует последовательность $u_m\ x',x_n\ \in C_0^\infty\ R^n$ такая, что $u_0 - u_m\ {}_s \to 0$.. В силу (4.29) функции $u_m\ x',x_n$ непрерывны по x_n со значениями в $H_{s-\frac{1}{2}}\ R^{n-1}$. Из (4.24) следует, что последовательность $u_m\ x',x_n$ фундаментальна по норме $\max_{x_n\in R^1} u\ x',x_n\ {}_{s-\frac{1}{2}}$. Так как пространство $H_{s-\frac{1}{2}}\ R^{n-1}$ полно, то при каждом фиксированном $x_n \in R^1$ существует

$$\lim_{m\to\infty} u_m\ x',x_n\ = v\ x',x_n\ \in H_{s-\frac{1}{2}}\ R^{n-1}$$

Функция $v\ x',x_n$ непрерывна по x_n со значениями в $H_{s-\frac{1}{2}}\ R^{n-1}$ как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций

$$\max_{x_n\in R^1} v\ x',x_n\ - u_m\ x',x_n\ {}_{s-\frac{1}{2}} \to 0. \qquad (4.30)$$

Очевидно, из (4.30) следует, что $u_m, \varphi\ x',x_n\ \to v, \varphi\ x',x_n$ для любой $\varphi \in S\ R^n$, т. е. $u_m \to v$ в S'. Кроме того, $u_m \to u_0$ в S'. Следовательно,$u_0 = v$. Таким образом, функция $u_0\ x',x_n$ непрерывна по x_n со значениями в $H_{s-\frac{1}{2}}\ R^{n-1}$, причем из (4.24) вытекает, что оценка (4.20) имеет место для любых $u_0 \in H_s(R^n)$. Теорема 4.2 доказана.

Будем обозначать оператор сужения на гиперплоскость $X_n = 0$ через p'

$$p'u\ x',x_n\ = u\ x',0\ . \qquad (4.31)$$

Обозначим также через Π' следующий оператор:

$$\Pi' u\ \xi',\xi_n\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u\ \xi',\xi_n\ d\xi_n. \qquad 4.32$$

В силу (4.22)

$$p'w\ \xi',x_n\ = \Pi' u\ \xi',\xi_n\ , \qquad 4.32'$$

где $w\ \xi',x_n\ = F_{x'} u\ x',x_n\ , u = F_x u(x)$.

Пример 4.2. Пусть $w\ \xi',x_n\ = v\ \xi'\ e^{-\ x_n\ \ \xi'\ +1}$. Покажем, что $u\ {}_1^2 = c\ v\ {}_{\frac{1}{2}}^2$так что оценка (4.20) не может быть улучшена. Норма $u\ {}_1^2$ эквивалентна, очевидно, следующей норме:

$$\|u\|_1^2 \approx \sum_{|k|\le 1} \int |D_u^k(x)|^2 dx \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial w(\xi', x_n)}{\partial x_n} \right|^2 + (1+|\xi'|^2)|w(\xi', x_n)|^2 \right) d\xi' dx_n. \quad (4.33)$$

Подставляя $w(\xi', x_n) = v(\xi')e^{-|x_n|(|\xi'|+1)}$ в (4.33), получим

$$\|u\|_1^2 \approx 2\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi'|)^2 e^{-2|x_n|(|\xi'|+1)} |v(\xi_1)|^2 d\xi' dx_n.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x_n|(|\xi'|+1)} dx_n = 2\int_0^{\infty} e^{-x_n(|\xi'|+1)} dx_n = \frac{2}{|\xi'|+1},$$

то

$$\|u\|_1^2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi'|)|v(\xi_1)|^2 d\xi' = \|v\|_{\frac{1}{2}}^2.$$

Нетрудно также построить примеры, показывающие точность оценки (4.20) при любом $s > 1/2$ (см., например, [18]).

Пусть $r \ge 0$ – целое. Обозначим через $C_0^r(R^n)$ пространство функций, непрерывных вместе со своими производными до порядка r включительно и таких, что

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \lim_{|x|\to\infty} D^p u(x) = 0$$

при $|p| \le r$.Норма в $C_0^r(R^n)$ определяется формулой

$$\sum_{|p|=0}^{r} \max_{x\in R^n} |D^p u(x)|$$

Теорема 4.3 (теорема вложения С.Л. Соболева). Пусть $s > \frac{n}{2}, 0 \le r < s - \frac{n}{2}$. *Тогда*

$$\sum_{|p|=0}^{r} \max_{x\in R^n} |D^p u(x)| \le C\|u\|_s, \ \forall u(x) \in C_0^\infty(R^n) \qquad (4.34),$$

и, следовательно, $H_s(R^n) \subset C_0^r(R^n)$. -

Доказательство. Пусть $u(x) \in C_0^\infty, u(\xi)$, – преобразование Фурье $u(x)$. В силу (2.2.)

$$D^p u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^p \tilde{u}(\xi) e^{-i(x,\xi)}\, d\xi.$$

Пользуясь неравенством Коши – Буняковского, получим

$$|D^p u(x)|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi^p| \, |\tilde{u}(\xi)| \, d\xi. \right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|^{2|p|}}{(1+|\xi|)^{2s}} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi .$$

Пусть $|p| \leq r, s - r > \frac{n}{2}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|^{2|p|}}{(1+|\xi|)^{2s}} d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{2(s-r)}} < \infty.$$

Следовательно,

$$\max_{x \in R^n} |D^p u(x)| \leq C \|u\|_s,$$

откуда вытекает оценка (4.34). В силу теоремы 4.1 произвольная функция $u(x) \in H_s(R^n)$является пределом по норме $H_s(R^n)$ последовательности $u_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$. Тогда из (4.34) следует, что последовательность $u_m(x)$ фундаментальна в $C_0^r(R^n)$. Так как $C_0^r(R^n)$, очевидно, полно, то существует $v(x', x_n) \in C_0^r(R^n)$. такая, что

$$\sum_{|p|=0}^{r} \max_{x \in R^n} |D^p v(x) - D^p u_m(x)| \to 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $u_m \to v$ в S' (см. пример 1.5). С другой стороны, из $\|u_m - u\|_s \to 0$ следует, что $u_m \to u$ в S'. следовательно, $u = v$ и, таким образом, $H_s(R^n) \subset C_0^r(R^n)$. Неравенство (4.34) после предельного перехода при $m \to \infty$ остается в силе для любых $u \in H_s(R^n)$. Теорема 4.3. доказана.

Из теоремы 4.3. следуем, что если s достаточно велико, то функции из $H_s(R^n)$. достаточно гладки. В частности, если $u(x) \in H_s(R^n)$. при всех s, то $u(x) \in C^\infty(R^n)$.

3. Пространства $\boldsymbol{H_s^+}$ и $\boldsymbol{H_s^-}$. Пространство H_s^+ определяется как подпространство в H_s, состоящее из функций $u(x)$ с носителем в замкнутом полупространстве R_+^n. Аналогично H_s^- - подпространство в $H_s(R^n)$, состоящее из функций с носителем R_-^n . Норма в $H_s^\pm$ также задается формулой (4.1). При $s \geq 0$ принадлежность $u(x)$ к H_s^+ означает, что $u\ \ x\ \ = 0$ почти всюду при $x_n < 0$. При произвольном, в частности отрицательном s, $u \in H_s^+$ означает, что $u \in H_s$ и в силу определения носителя обобщенной функции $\ u, \varphi\ \ = 0$ для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(R_-^n)$.

Лемма 4.2. Подпространство H_s^+ замкнуто в H_s.

Доказательство. Пусть $\ u_n\ \in H_s^+,\ \ u - u_n\ \ _s = 0$. Покажем, что $u \in H_s^+$. Имеем $\ u_n, \varphi\ \ = 0$ для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(R_-^n)$. В силу неравенства (4.4) $\ u_n, \varphi\ \ \to\ \ u, \varphi\ $. Следовательно, $\ u, \varphi\ \ = 0$ для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(R_-^n)$., т. е. $u \in H_s^+$. Лемма 4.2. доказана. В силу леммы 4.2 пространство H_s^+ полно.

Лемма 4.3. Функции класса $C_0^\infty(R_+^n)$ плотны в H_s^+ в норме (4.1).

Доказательство. Пусть $u \in H_s^+, \varepsilon =\ \ 0, \dots, 0, \varepsilon\ \ \in R^n, \varepsilon > 0$. Обозначим через u^ε сдвиг обобщенной функции u на вектор ε (см. (1.19)). В силу (2.30) $u^\varepsilon = e^{i\varepsilon\xi_n} u(\xi', \xi_n)$, следовательно, $u^\varepsilon \in H_s$ и

$$\ u^\varepsilon - u\ \ _s^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\ u\ \ \xi\ \ ^2\ \ e^{i\varepsilon\xi_n} - 1\ ^2\ \ 1 +\ \ \xi\ \ ^{2s} d\xi \to 0$$

при $\xi \to 0$ (ср. (4.10)). Так как $supp u \subset R_+^n$, то согласно (1.19)

$$\ u^\varepsilon, \varphi\ \ =\ \ u, \varphi\ \ x', x_n + \varepsilon\ \ \ = 0, \qquad (4.35)$$

если $\varphi\ \ x', x_n\ \ = 0$ при $x_n > \varepsilon/2$, так как в этом случае $\varphi\ \ x', x_n + \varepsilon\ \ \in C_0^\infty(R_+^n)$. Таким образом, u^ε подавно принадлежит H_s^+. Для произвольного $\delta > 0$ найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$\ u - u^{\varepsilon_1}\ \ _s < \frac{\delta}{2}. \qquad (4.36)$$

Будем аппроксимировать u^{ε_1} функциями класса $C_0^{\infty}(R^n)$, так, как это делалось при доказательстве теоремы 4.1. Пусть $\alpha_{\varepsilon_2}(x)$ и $\chi(\varepsilon_3 x)$ такие же, как в теореме 4.1. Функция $v\ \ x\ \ = (u^{\varepsilon_1} * \alpha_{\varepsilon_2})\chi(\varepsilon_3 x) \in C_0^{\infty}(R^n)$, и, как показано при доказательстве теоремы 4.1,

$$u^{\varepsilon_1} - v\ \ _s < \frac{\delta}{2}, \qquad (4.37)$$

если ε_2 и ε_3 достаточно малы. Покажем, что при $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{4}$ $v(x) \in C_0^{\infty}(R_+^n)$, . Достаточно проверить, что $supp\ u^{\varepsilon_1} * \alpha_{\varepsilon_2}\ \ \subset R_+^n$, так как умножение на $\chi(\varepsilon_3 x)$ не изменяет этого обстоятельства. Имеем в силу (2.45)

$$u^{\varepsilon_1} * \alpha_{\varepsilon_2} = \ \ u^{\varepsilon_1}\ \ y\ \ , \frac{1}{\varepsilon_2^n}\alpha\ \ \frac{x' - y'}{\varepsilon_2}, \frac{x_n - y_n}{\varepsilon_2}\ \ .$$

Так как $supp\ \alpha\ \ \frac{x'-y'}{\varepsilon_2}, \frac{x_n-y_n}{\varepsilon_2}$ содержится в полупространстве $y_n - x_n < \varepsilon_2$, то при $y_n > \frac{\varepsilon_1}{2}, x_n < \frac{\varepsilon_1}{4}$ имеем $\alpha\ \ \frac{x'-y'}{\varepsilon_2}, \frac{x_n-y_n}{\varepsilon_2}\ \ = 0$ Следовательно, в силу (4.35) $u^{\varepsilon_1} * \alpha_{\varepsilon_2}$ при $x_n < \frac{\varepsilon_1}{4}, \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{4}$, т.е $u^{\varepsilon_1} * \alpha_{\varepsilon_2} \epsilon C_0^{\infty}(R_+^n)$. Из (4.36) и (4.37) следует, что $u - v\ \ _s < \delta$.

Лемма 4.3 доказана.

Аналогично доказывается, что H_-^s – замкнутое подпространство H_s и что функции из $C_0^{\infty}\ \ R_-^n$ плотны в H_-^s .

*Замечание 4.1.*Пусть $s = 0$. Тогда H_0^+ представляет собой пространство функций из $L_2\ \ R_+^n$, продолженных нулем при $x_n < 0$. Пусть теперь $s = m + \delta$ – целое, $\delta\ < \frac{1}{2}$. Если $u\ \ x', x_n\ \ \in H_s^+$, то в силу теоремы 4.2 существуют сужения $D_{x_n}^{k_n} u(x', x_n)$ на гиперплоскость $x_n = 0$ при $0 \leq k_n \leq m - 1$, где $D_{x_n}^{k_n} = i^{k_n} \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}}$. Покажем, что $D_{x_n}^{k_n} u\ \ x', 0\ \ = 0$ при $0 \leq k_n \leq m - 1$ Действительно, в силу теоремы 4.2 $D_{x_n}^{k_n} u(x', x_n)$ – непрерывные функции x_n

со значениями в $H_{s-k_n-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$Так как x_n при $x_n<0$ в силу определения H_s^+ то по непрерывности $D_{x_n}^{k_n}u\ x',0\ =0$ при $0\le k_n\le m-1$.

Пример 4.3. Обобщенная функция $\delta^k\ x_n\ =i^k\frac{\partial^k\delta}{\partial x_n^k}$ принадлежит как $H^+_{-k-\frac{1}{2}-\varepsilon}(R^1)$, так и $H^-_{-k-\frac{1}{2}-\varepsilon}\ R^1\ ,\varepsilon>0$ – любое.

Пусть $f_k\in H_{-s}(R^{n-1})$ Тогда прямое произведение $f_k\times\delta^k(x_n)$ принадлежит $H^+_{-k-\frac{1}{2}-\varepsilon}(R^n)\cap H^-_{-k-\frac{1}{2}-\varepsilon}(R^n)$. Действительно, $F(f_k\times\delta^k(x_n))=f_k\ \xi'\ \xi_n^k$ и аналогично (4.24)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k\ \xi'\ ^2\xi_n^{2k}\ 1+\ \xi'\ +\ \xi_n\ ^{-2k-1-2s}d\xi' d\xi_n=$$

$$=c\int_{-\infty}^{\infty} f_k\ \xi'\ ^2\ 1+\ \xi'\ ^{-2s}d\xi'<\infty.$$

Таким образом, $f_k\times\delta^k(x_n)\in H_{-k-\frac{1}{2}-\varepsilon}(R^n)$. Кроме того, $supp\, f_k\times\delta^k(x_n)\subset R^{n-1}$следовательно, $f_k\times\delta^k\ x_n\ \in H^+_{-k-\frac{1}{2}-\varepsilon}\cap H^-_{-k-\frac{1}{2}-\varepsilon}$..

Пусть $A(\xi)\in S_\alpha^0$, т. е. $A(\xi)$ – локально суммируемая функция, удовлетворяющая оценке

$$A(\xi)\ \le C\ 1+\ \xi\ ^{\alpha}.$$

Псевдо дифференциальный оператор (п. д. о.) с символом $A(\xi)$ определяется на функциях из $S(R^n)$ по формуле (см. (3.2))

$$Au=\frac{1}{2\pi\ ^n}\int_{-\infty}^{\infty} A\ \xi\ u\ \xi\ e^{-i(x,\xi)}d\xi\equiv F^{-1}A\ \xi\ Fu,\ \ \forall u\in S\ R^n\ ,$$

где $u=Fu$ – преобразование Фурье $u(x)$. Таким образом, оператор A является Фурье-образом оператора умножения на $A(\xi)$. Имеет место следующая простая лемма.

Лемма 4.4. Пусть $A(\xi)\in S_\alpha^0$. Тогда п. д. о. A с символом $A(\xi)$ удовлетворяет при любом s оценке

$$\|Au\|_{s-\alpha} \le C_s \|u\|_s, \qquad \forall u \in S(R^n) \tag{4.38}$$

и, следовательно, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора из $H_s(R^n)$ в $H_{s-\alpha}(R^n)$.

Действительно,

$$\|Au\|^2_{s-\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{2(s-\alpha)} |A(\xi)\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \le c \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{2s} \times |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= c\|u\|^2_s,$$

что и доказывает лемму 4.4.

Отметим, что если $A(\xi)$ – неограниченная функция в окрестности какой-либо точки, например в окрестности $\xi = 0$, то оценка (4.38) не имеет места и, следовательно, A – неограниченный оператор из $H_s(R^n)$ в $H_{s-\alpha}(R^n)$.

Обозначим через $\tilde{H}_s^{\pm}$ Фурье-образ пространств $H_s^{\pm}$.

Теорема 4.4. Пусть функция $A_+(\xi', \xi_n + i\tau)$ $(A_-(\xi', \xi_n + i\tau))$ непрерывна по совокупности переменных при $\xi' \ne 0, \tau \ge 0$ $(\tau \le 0)$ аналитична по $\zeta_n = \xi_n + i\tau$ при $\tau > 0$ $(\tau < 0)$ и допускает оценку

$$|A_{\pm}(\xi', \xi_n + i\tau)| \le C(1 + |\xi'| + |\xi_n| + |\tau|)^{\alpha}. \tag{4.39}$$

Тогда оператор умножение на $A_{\pm}(\xi', \xi_n)$ ограничен из $\tilde{H}_s^{\pm}$ в $\tilde{H}_{s-\alpha}^{\pm}$.

Доказательство. Оператор умножения на $A_+(\xi', \xi_n)$ в силу (4.39) ограничен из $\tilde{H}_s^{+}$ *в* $\tilde{H}_{s-\alpha}^{+}$ (см. лемму 4.4).

Осталось показать, что $A_+ u_+ \in \tilde{H}_s^{+}$ для любой $u_+ \in \tilde{H}_s^{+}$. Пусть сначала $u_+(x) \in C_0^{\infty}(R_+^n)$. Тогда в силу леммы 2.2 $\tilde{u}_+(\xi', \xi_n + i\tau)$ аналитична по $\zeta_n = \xi_n + i\tau$ при $\tau > 0$ и

допускает оценку

$$(1 + |\xi'| + |\xi_n| + \tau)^N |\tilde{u}_+(\xi', \xi_n + i\tau)| \le C_N, \forall N. \tag{4.40}$$

Обозначим $\tilde{v}(\xi', \xi_n) = A_+(\xi', \xi_n)\tilde{u}_+(\xi', \xi_n)$. Имеем

$$v(x', x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} A_+(\xi', \xi_n)\tilde{u}_+(\xi', \xi_n) e^{-(x', \xi') - ix_n\xi_n} d\xi' d\xi_n, \tag{4.41}$$

где $v(x',x_n) \in C^\infty(R^n)$ в силу (4.39) и (4.40). Пользуясь аналитичностью $A_+(\xi',\xi_n+i\tau)u_+(\xi',\xi_n+i\tau)$ по $\xi_n+i\tau$ в полуплоскости $\tau>0$ и непрерывностью в замкнутой полуплоскости $\tau\geq 0$ при $\xi'\neq 0$ получим, применяя теорему Коши,

$$v(x',x_n) =$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} A_+(\xi',\xi_n+i\tau)u_+(\xi',\xi_n+i\tau)e^{-(x',\xi')-ix_n(\xi_n+i\tau)}d\xi' d\xi_n, \qquad (4.42)$$

где τ – произвольно. Отсюда в силу (4.39) и (4.40), $|v(x',x_n)| \leq Ce^{x_n\tau}, C$ не зависит от τ. При $x_n<0$ устремляя τ к бесконечности, получим $(x',x_n)=0$, т.е. $supp\, v \subset \overline{R^n_+}$. Следовательно, $v\in H^+_{s-\alpha}, v(\xi)\in H^+_{s-\alpha}$. Если u_+ - произвольная функция из H^+_s, то в силу леммы 4.3 существует последовательность $\varphi_n\in C_0^\infty(R^n_+)$ такая, что $\|u_+-\varphi_n\|_s\to 0$. Как доказано выше, $A_+(\xi)\varphi_n(\xi)\in H^+_{s-\alpha}$. Так как $A_+(\xi)\varphi_n(\xi)\to A_+(\xi)u_+(\xi)$ в $H_{s-\alpha}$, то в силу леммы 4.2, $A_+(\xi)u_+(\xi)\in H^+_{s-\alpha}$. Теорема 4.4 для$A_+(\xi',\xi_n)$ доказана.

Ограниченность из H^-_s в $H^-_{s-\alpha}$ оператора умножения на $A_-(\xi)$ доказывается аналогично.

Отметим, что утверждение теоремы 4.4 равносильно тому, что псевдодифференциальные операторы с символами $A_\pm(\xi)$, удовлетворяющими условию теоремы 4.4, ограничены из $H^\pm_s$ в $H^\pm_{s-\alpha}$.

Пример 4.4. Пусть t – произвольное действительное число. Обозначим $\Lambda^t_+(\xi',\xi_n+i\tau) = (\xi_n+i\tau+i|\xi'|)^t = e^{t\ln(\xi_n+i\tau+|\xi'|)}$, где $\tau\geq 0$ и, как в примере 1.7, ветвь логарифма выбрана такой, чтобы $Im\ln(\xi_n+i\tau+i|\xi'|) = arg(\xi_n+i\tau+i|\xi'|)\to 0$ при $\xi_n\to+\infty$. Очевидно, $\Lambda^t_+(\xi',\xi_n+i\tau)$ - аналитическая по $\zeta_n=\xi_n+i\tau$ функция при $\tau>0$ и любом t. Аналогично через $\Lambda^t_-(\xi',\xi_n+i\tau)$, $\tau\leq 0$, обозначим функцию

$(\xi_n+i\tau-i|\xi'|)^t = e^{t\left(\ln|\xi_n+i\tau-i|\xi'||+iarg(\xi_n+i\tau-i|\xi'|)\right)}$, где $arg(\xi_n+i\tau-i|\xi'|)\to 0$ при $\xi_n\to+\infty$. Функция $\Lambda^t_-(\xi',\xi_n+i\tau)$ при любом t аналитична по

$\zeta_n = \xi_n + i\tau$ в полуплоскости $\tau < 0$.

Обозначим также $\Lambda_+^t \ \xi \ = \Lambda_+^t \ \xi', \xi_n + i \ , \Lambda_-^t \ \xi \ = \Lambda_-^t \ \xi', \xi_n - i$. В силу теоремы 4.4 оператор умножения на $\Lambda_\pm^t \ \xi$ непрерывен из $H_s^\pm$ в $H_{s-t}^\pm$. Так как операторы умножения на $\Lambda_\pm^t \ \xi$ и $\Lambda_\pm^{-t} \ \xi$ взаимно обратны, то оператор умножения на $\Lambda_\pm^t \ \xi$ осуществляет изоморфизм между $H_s^\pm$ и $H_{s-t}^\pm$: $\Lambda_\pm^t \ \xi \ H_s^\pm = H_{s-t}^\pm$. Следовательно, п. д. о. $\Lambda_\pm^t$ с символом $\Lambda_\pm^t \ \xi$ осуществляет изоморфизм между $H_s^\pm$ и $H_{s-t}^\pm$.

Пусть $e \ x_n\tau \ \in C^\infty \ R^1$, $e \ x_n\tau \ = e^{-x_n\tau}$ при $x_n\tau > 0$ и $e \ x_n\tau \ = 0$ при $x_n\tau \leq -1$

Если $f \in S'(R^n)$ и $supp\, f \subset R_+^n$, то произведение $e \ x_n\tau \ f$ не зависит от значений $e \ x_n\tau$ при $x_n\tau < 0$. В частности, если f – регулярный функционал, отвечающий локально суммируемой функции $f(x', x_n)$, то $e \ x_n\tau \ f = e^{-x_n\tau} f(x', x_n)/$. Будем в дальнейшем всегда произведение $e \ x_n\tau \ f$ обозначать через $e^{-x_n\tau} f$. Пусть $f \in H_s^+$. Тогда в силу примера 4.4 $g = \Lambda_+^s f \in H_0^+$, где Λ_+^s – п. д. о. с символом $\Lambda_+^s \ \xi', \xi_n \ = \ \xi_n + i \ \xi' \ + i \ ^s$. Имеет место следующая формула:

$$F \ g e^{-x_n\tau} \ = \Lambda_+^s \ \xi', \xi_n + i\tau \ F \ f e^{-x_n\tau} \ , \ \tau \geq 0, \qquad (4.43)$$

где F – оператор преобразования Фурье по (x', x_n). Действительно, пусть сначала $f \in C_0^\infty(R_+^n)$. Тогда при $\tau > 0$ $f \ \xi', \xi_n + i\tau \ = F \ f e^{-x_n\tau}$ – аналитическая по $\xi_n + i\tau$ функция, удовлетворяющая оценкам (2.10). в силу теоремы Коши $F^{-1}(\Lambda_+^s \ \xi', \xi_n + i\tau \ f \ \xi', \xi_n + i\tau \ ) = e^{-x_n\tau} g$, что равносильно (4.43). Если f – произвольная функция из H_s^+, то существует последовательность $f_m \in C_0^\infty(R_+^n)$ такая, что $f - f_m \ _s \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда $g_m = \Lambda_+^s f_m \to g$ в $H_0^+, g_m e^{-x_n\tau} \to g e^{-x_n\tau}$ в H_0^+ и, следовательно, $\Lambda_+^{-s} \ \xi', \xi_n + i\tau \ F(g_m e^{-x_n\tau}) \to \Lambda_+^{-s} \ \xi', \xi_n + i\tau \ F(g e^{-x_n\tau})$ в $H_s^+(R^n)$ при любом τ. С другой стороны, так как $f_m \to f$ в H_s^+, то заведомо $f_m e^{-x_n\tau} \to f e^{-x_n\tau}$ в $S'(R^n)$ и, следовательно, $F(f_m e^{-x_n\tau}) \to F(f e^{-x_n\tau})$ в $S'(R^n)$.

Таким образом, переходя в равенстве $\Lambda_+^{-s} \ \xi', \xi_n + i\tau \ F \ g_m e^{-x_n\tau} \ =$

$F(f_m e^{-x_n\tau})$ к пределу в S' при $m \to \infty$, получим (4.43).

Теорема 4.5 (теорема Палея-Винера). Пусть $f \in H_s^+$. *Тогда* $f(\xi', \xi_n + i\tau) = F(f e^{-x_n\tau})$ *– непрерывная функция* τ *при* $\tau \geq 0$ *со значениями в* $H_s(R^n)$. *При почти всех* $\xi' \in R^{n-1} f(\xi', \xi_n + i\tau)$ *–аналитическая по* $\xi_n + i\tau$ *функция в полуплоскости* $\tau > 0$. *Имеет место оценка*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi', \xi_n + i\tau)|^2 (1 + |\xi'| + |\xi_n + \tau|)^{2s} d\xi' d\xi_n \leq C, \quad \tau \geq 0, \qquad (4.44)$$

где C не зависит от τ.

Обратно, пусть при $\tau > 0$ *задана локально интегрируемая в* $R^n \times (0, +\infty)$ *функция* $f(\xi', \xi_n + i\tau)$, *удовлетворяющая оценке (4.44) и аналитическая по* $\xi_n + i\tau$ *при почти всех*$\xi' \in R^{n-1}$. *Тогда существуем функция* $f \in H_s^+$ *такая, что*$f(\xi', \xi_n + i\tau) = F(f e^{-x_n\tau})$.

Доказательство. Пусть $f \in H_s^+$, $g = \Lambda_+^s f \in H_0^+$. Обозначим $g(\xi', \xi_n + i\tau) = F(g e^{-x_n\tau})$ . . Так как

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x', x_n) e^{-x_n\tau'} - g(x', x_n) e^{-x_n\tau''}|^2 dx' dx_n \to 0$$

при $\tau' - \tau'' \to 0, \tau' \geq 0, \ \tau'' \geq 0$ (ср. (4.10)), то $g(x', x_n) e^{-x_n\tau}$ – непрерывная функция $\tau \in [0, +\infty)$ со значениями в $H_0^+(R^n)$. Следовательно, в силу равенства Парсеваля $g(\xi', \xi_n + i\tau)$ – непрерывная функция $\tau \in [0, +\infty)$ со значениями.$H_0(R^n)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi', \xi_n + i\tau)|^2 d\xi' d\xi_n ==$$

$$(2\pi)^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |g(x', x_n) e^{-x_n\tau}|^2 dx' dx_n \leq (2\pi)^n \|g\|_0^2. \qquad (4.45)$$

Обозначим $h(\xi', x_n) = F_{x'} g(x', x_n)$. В силу теоремы Планшереля $h(\xi', x_n) \in H_0^+(R^n)$. При почти всех $\xi' \in R^{n-1}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\xi', x_n)|^2 dx_n < \infty.$$

При любом таком

$$\xi' g(\xi', \xi_n + i\tau) = F_{x_n}\left(h(\xi', x_n) e^{-x_n\tau}\right) = \int_0^{\infty} h(\xi', x_n) e^{-x_n(\xi_n+i\tau)} dx_n$$

аналитическая функция $\xi_n + i\tau$ при $\tau > 0$. В силу (4.43) $f(\xi', \xi_n + i\tau) = (\xi_n + i|\xi'| + \tau + 1)^{-s} g(\xi', \xi_n + i\tau)$.. Следовательно, $f(\xi', \xi_n + i\tau)$ удовлетворяет все

указанным в теореме 4.5 свойствам.

Пусть теперь при $\tau > 0$ задана функция $f(\xi', \xi_n + i\tau)$ – аналитическая по $\xi_n + i\tau$ в полуплоскости $\tau > 0$ при почти всех $\xi' \in R^{n-1}$. Пусть, кроме того, выполнена оценка (4.44) при $\tau > 0$. Обозначим $g(\xi', \xi_n + i\tau) = \Lambda_+^s(\xi', \xi_n + i\tau) f(\xi', \xi_n + i\tau)$. Вследствие аналитичности $g(\xi', \xi_n + i\tau)$ при почти всех $\xi' \in R^{n-1}$ имеем

$$\frac{\partial g(\xi', \xi_n + i\tau)}{\partial\tau} = i\frac{\partial g(\xi', \xi_n + i\tau)}{\partial\xi_n}. \qquad (4.46)$$

Рассмотрим $g(\xi', \xi_n + i\tau)$ как регулярный функционал над $S(R^n \times (0, +\infty))$. Равенство (4.46) можно рассматривать как равенство производных функционала $g(\xi', \xi_n + i\tau)$. Обозначим через $g(x', x_n, \tau)$ обратное преобразование Фурье $g(\xi', \xi_n + i\tau)$ по ξ', ξ_n

$$(g, \varphi(x', x_n, \tau)) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(g(\xi', \xi_n + i\tau), F_x\varphi(x, \tau)\right),$$

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(R^n \times (0, +\infty)). \qquad (4.46')$$

Из (4.44), (4.46′) и равенства Парсеваля следует оценка

$$|(g, \varphi(x, \tau))| \le C\int_0^{\infty} \|g\|_0 \|\varphi\|_0 d\tau \le C_1 \int_0^{\infty} \|g\|_0 \|\varphi\|_0 d\tau, \qquad (4.47)$$

где $\|\varphi\|_0$ – норма в $H_0(R^n) = L_2(R^n)$. Обозначим через $L_1(H_0)$ банахово пространство локально интегрируемых в $R^n \times (0,+\infty)$ функций $f(x,\tau)$ с нормой

$$\int_0^\infty \|f\|_0 d\tau.$$

В силу (4.47) и плотности $C_0^\infty(R^n \times (0,+\infty))$ в $L_1(H_0)$ (ср. с теоремой 4.1) g является линейным непрерывным функционалом над $L_1(H_0)$. Следовательно, из теоремы об общем виде функционала над $L_1(H_0)$ (см. [31]) вытекает, что $(g(x',x_n,\tau)$ – локально интегрируемая функция в $R^n \times (0,+\infty)$, удовлетворяющая оценке

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x',x_n,\tau)|^2 dx' dx_n \leq C, C \text{ не зависит от } \tau. \qquad (4.47')$$

Из (2.29) и (4.46) следует

$$\frac{\partial g(x',x_n,\tau)}{\partial \tau} = -x_n g(x',x_n,\tau)$$

что согласно (1.16) означает

$$\left(g(x',x_n,\tau), \frac{\partial \varphi(x',x_n,\tau)}{\partial \tau} - x_n \varphi(x',x_n,\tau)\right) = 0,$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(R^n(0,+\infty))$. (4.48)

Подставим в (4.48) $\varphi = e^{x_n \tau}\psi(x',x_n,\tau)$, где $\psi \in C_0^\infty(R^n \times (0,+\infty))$. Получим

$$\left(e^{x_n \tau} g(x',x_n,\tau), \frac{\partial \varphi(x',x_n,\tau)}{\partial \tau}\right) = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(R^n(0,+\infty)). \quad (4.49)$$

Из (4.49) в силу примера 1.11 вытекает, что $g(x',x_n,\tau) = e^{-x_n \tau} g(x',x_n)$, где $g(x',x_n)$ – локально интегрируемая функция В силу (4.47′)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x',x_n)|^2 e^{-2x_n \tau} dx' dx_n \leq C, \qquad (4.50)$$

где $\tau > 0$ и C не зависит от τ. Следовательно, устремив τ к $+\infty$, получим

$g(x',x_n)$ при $x_n < 0$. Если теперь устремить τ к нулю, то получим $g(x',x_n) \in H_0^+(R^n)$. Таким образом, $g(\xi',\xi_n + i\tau) = F(ge^{-x_n\tau})$. Положим $f = \Lambda_+^{-s}g$. Тогда в силу примера 4.4 $f \in H_s^+$ и в силу (4.43) $f(\xi',\xi_n + i\tau) = F(fe^{-x_n\tau})$.. Теорема 4.5 полностью доказана.

4. Пространство $\boldsymbol{H_s(R_+^n)}$. Через $H_s(R_+^n)$ обозначим пространство обобщенных функций $f \in S'(R_+^n)$ (см. § 1, п. 5), допускающих продолжение lf на R^n принадлежащее $H_s(R^n)$. Норма в $H_s(R_+^n)$ определяется формулой

$$\|f\|_s^+ = \inf_l \|lf\|_s, \qquad (4.51)$$

где нижняя грань берется по всем продолжениям f, принадлежащим $H_s(R^n)$. Отметим, что если $l_0 f$ – какое-нибудь продолжение f, то $l_0 f + f_-$, где $f_- \in H_s^-$, также является продолжением f, так как $pf_- = 0$ где $p -$ оператор сужения на R_+^n. Следовательно, пространство $H_s(R_+^n)$. изоморфно фактор-пространству $H_s(R^n)/H_s^-$.

Рассмотрим случай $s = 0$. Тогда $H_0(R_+^n) = L_2(R_+^n)$, и нижняя грань норм продолжений $f \in H_0(R_+^n)$ достигается на функции f_+ равной f при $x_n > 0$ и равной 0 при $x_n < 0$. Таким образом,

$$\left(\|f\|_0^+\right)^2 = \int_{R_+^n} |f(x)|^2 dx. \qquad (4.52)$$

Пусть $s = m > 0$ – целое. Введем следующую норму:

$$\left(\|f\|_m'^+\right)^2 = \sum_{|k| \le m} \int_{R_+^n} |D^k f(x)|^2 dx. \qquad (4.53)$$

Лемма 4.5. Нормы (4.51) и (4.53) эквивалентны в $H_m(R_+^n)$.

Доказательство. Так как $\|lf\|_m$ эквивалентна норме $\|lf\|_m'$, определяемой по формуле (4.5), и $\|lf\|_m' \ge \|f\|_m'^+$ для любого продолжения lf, то

$$\|f\|_m'^+ \le C\|f\|_m^+. \qquad (4.54)$$

Докажем теперь противоположное неравенство. Построим некоторый специальный оператор продолжения функций с R^n_+ на R^n.

Пусть $f\ x',x_n\ \in C^{\infty}\ R^n_+\ ,\ f\ x',x_n\ = 0$ при достаточно больших $|x|$. Обозначим через L_N следующий оператор:

$$L_n f = \begin{cases} f\ x',x_n & \text{при } x_n > 0, \\ \sum_{p=1}^{N} \lambda_p f(x',-px_n) & \text{при } x_n < 0. \end{cases} \qquad (4.55)$$

Числа λ_p подберем так, чтобы $L_n f \in C^{N-1}(R^n)$, т. е. чтобы функция $L_n f$ была непрерывной вместе со своими производными до порядка $N-1$ при $x_n = 0$. Для этого необходимо, чтобы числа λ_p удовлетворяли следующей системе:

$$\sum_{p=1}^{N} -p\ ^k \lambda_p = 1, \quad 0 \le k \le N-1. \qquad (4.56)$$

Так как определитель системы отличен от нуля (определитель Вандермонда), то отсюда однозначно определяются $\lambda_p, p = 1, \dots, N$..

Далее, при $m \le N$

$$L_N f\ {}'_m \le C\ f\ {}'^{+}_m, \qquad (4.57)$$

причем константа C не зависит от f. Так как функции класса $C_0^{\infty}(R^n)$ плотны в $H_s(R^n)$, то их сужения на R^n_+ плотны в $H_s(R^n_+)$. Следовательно, производя замыкание,

получим, что оценка (4.57) справедлива для всех $f \in H_m(R^n_+)$.

Таким образом, $f\ {}^{+}_m \le\ L_N f\ {}' \le C\ f\ {}'^{+}_m$, что и требовалось доказать. В силу леммы 4.5 $H_m(R^n_+)$ можно было также определить как пространство всех функций в R^n_+ с конечной нормой (4.53).

Замечание 4.2. Пусть $s = m + \lambda,\ m$ – целое, $0 < \lambda < 1$. Пользуясь оператором продолжения L_N с $N \ge m+1$, можно аналогично доказательству леммы 4.5. показать (см. [36]), что норма $\|f\|_{m+\lambda}^{+}$ эквивалентна следующей норме:

$$\sum_{|k|=m}\int_{R_+^n}\int_{R_+^n}\frac{|D^k f(x)-D^k f(y)|^2}{|x-y|^{N+2\lambda}}dxdy+\int_{R_+^n}|f(x)|^2dx. \qquad (4.58)$$

В дальнейшем, для того чтобы иметь возможность применять преобразование Фурье, нам будет удобно пользоваться определением (4.51) нормы в $H_s(R_+^n)$. Определения (4.53) и (4.58) не будут использованы.

Так как псевдодифференциальные операторы применяются к функциям, определенным во всем пространстве R^n, то применять их к функциям f из $H_s(R_+^n)$ можно лишь после продолжения f на R^n. Отметим следующую лемму.

Лемма 4.6. Пусть $A_-(\xi',\xi_n+i\tau)$, $\tau\le 0$, удовлетворяет условиям теоремы 4.4, A_- - п. д. о. с символом $A_-(\xi',\xi_n)$, p – оператор сужения функции на R^n. Тогда оператор $pA_- lf$, где $f\in H_s(R_+^n)$, $lf\in H_s$ – произвольное продолжение f с R_+^n на R^n, не зависит от выбора продолжения lf и ограничен из $H_s(R_+^n)$ в $H_{s-\alpha}(R_+^n)$.

Доказательство. Пусть $l_1 f\in H_s$– другое продолжение f. Тогда $f_-=lf-l_1 f\in H_s^-$. В силу теоремы 4.4 $A_- f_-\in H_{s-\alpha}^-$, так что $pA_- f_-=0$. Следовательно, $pA_- l_1 f$. Оценим $\|pA_- lf\|_{s-\alpha}^{+}$. Пусть lf такое продолжение f, что

$$\|lf\|_s\le 2\|f\|_s^{+}. \qquad (4.59)$$

Тогда в силу леммы 4.4

$$\|pA_- lf\|_{s-\alpha}^{+}\le\|A_- lf\|_{s-\alpha}\le C\|lf\|_s\le 2C\|f\|_s^{+}. \qquad (4.60)$$

Лемма 4.6 доказана.

5. Сопряженные пространства. Пусть H_s^*- пространство, сопряженное к H_s, т. е. пространство линейных непрерывных функционалов над $H_s(R^n)$, s – произвольное число. Как и в случае произвольного банахового пространства, пространство H_s^* определяется с точностью до изоморфизма. В частности, так как $H_s(R^n)$ изоморфно гильбертову пространству со скалярным произведением (4.2), то H_s^* изоморфно самому пространству H_s. В силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве любой такой функционал $\Phi(u), u \in H_s$ задается элементом $v \in H_s$ и его норма $\|\Phi\| = \sup_{\|u\|_s=1} |\Phi(u)|$ равна $\sqrt{(v, v)_s} = \|v\|_s$.

Обозначим

$$\tilde{w}(\xi) = (1 + |\xi|)^{2s}\tilde{v}(\xi), \quad w = F^{-1}\tilde{w}. \tag{4.61}$$

Тогда $w + H_{-s}$, $\|w\|_{-s} = \sqrt{(v, v)_s}$ и $(u, v)_s = (u, w)_0$, где

$$(u, w)_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) w(\xi)\, d\xi, \quad u \in H_s, \; w \in H_{-s}. \tag{4.62}$$

Таким образом, (4.61) устанавливает изоморфизм между H_s^* и H_{-s}, причем значение функционала $w \in H_{-s}$ на элементе $u \in H_s$ задается формулой (4.62). Для дальнейшего удобнее пользоваться реализацией H_s^* через H_{-s}, а не рассматривать H_s как гильбертово пространство. Форму (4.62) можно рассматривать после умножения на $1/(2\pi)^n$ как расширение по непрерывности формы (4.3), определенной для $u \in H_s$ и $\varphi \in S$.

Лемма 4.7. Пусть $u_+ \in H_s^+$, $v_- \in H_s^-$. *Тогда* $(u_+, v_-) = \frac{1}{(2\pi)^n}(u_+, v_-)_0 = 0$

Обратно, если $v_- \in H_s$ *и* $(u_+, v_-) = 0$ *для любых* $u_+ \in H_s^+$, *то* $v_- \in H_s^-$.

Доказательство. По определению носителя обобщенной функции $(u_+, \varphi) = 0$ для $\forall \varphi \in C_0^\infty(R_-^n)$. В силу леммы 4.3 функции класса $C_0^\infty(R_-^n)$ плотны в H_s^-. Отсюда и из неравенства (4.4) следует $(u_+, v_-) = 0$ для любых $u_+ \in H_s^+, v_- \in H_s^-$. Пусть теперь $v_- \in H_s(R^n)$ и $(u_+, v_-) = 0$ для любых $u_+ \in H_s^+$. Тогда, в частности, $(v_-, \varphi) = (\varphi, v_-) = 0$ для $\forall \varphi \in C_0^\infty(R_+^n)$. По определению $supp\, v_-$ это означает, что $supp\, v_- \subset R_-^n$, т.е. $v_- \in H_s^-$.

Лемма 4.7 доказана.

Пусть $-f \in H_{-s}(R_+^n)$, $u_+ \in H_s^+$, $lf \in H_{-s}(R^n)$ произвольное продолжение f.

Тогда форма

$$(u_+, lf)_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u_+(\xi)\, \overline{lf(\xi)}\, d\xi \qquad (4.63)$$

не зависит от выбора продолжения lf. Действительно, если $l_1 f \in H_{-s}(R^n)$ – другое продолжение f, то $lf - l_1 f \in H_{-s}^{-}(R^n)$. Следовательно, $(u_+, lf) = (u_+, l_1 f)$, так как $(u_+, lf - l_1 f) = 0$ в силу леммы 4.7.

Из (4.63) аналогично (4.40) следует оценка $|(u_+, lf)_0| \leq \|u_+\|_s \|lf\|_{-s}$, и так как $(u_+, lf)_0$ не зависит от выбора продолжения lf, то

$$|(u_+, lf)_0| \leq \|u_+\|_s \inf_l \|lf\|_{-s} = \|u_+\|_s \|f\|_{-s}^{+}. \qquad (4.64)$$

Следовательно, любой элемент $f \in H_{-s}(R_+^n)$ задает непрерывный функционал над H_s^+ по формуле (4.63), причем в силу леммы 4.7 разным элементам из $H_{-s}(R_+^n)$ отвечают разные функционалы. Пусть теперь $\Phi(u_+)$ произвольный непрерывный функционал над H_s^+. Пространство $H_s^+ \subset H_s$ – гильбертово со скалярным произведением (4.2). Следовательно, по теореме Рисса существует элемент $\varphi_+ \in H_s^+$ такой, что $\Phi(u_+) = (u_+, \varphi_+)_s$. Положим $f_0(\xi) = (1 + |\xi|)^{2s} \varphi_+(\xi)$, $f_0 = F^{-1} f_0(\xi)$. Тогда $f_0 \in H_{-s}(R^n)$, $pf_0 = f \in H_{-s}(R_+^n)$ $\Phi(u_+) = (u_+, \varphi_+)_s = (u_+, f_0)_0$ и $\|\Phi\| = \|\varphi_+\|_s = \|f_0\|_{-s} \geq \|f\|_{-s}^{+}$. Следовательно, произвольный линейный непрерывный функционал над H_s^+ может быть реализован по формуле (4.63), причем $\|\Phi\| \geq \|f\|_{-s}^{+}$. С другой стороны, в силу (4.64) $\|\Phi\| = \sup_{\|u_+\|_s = 1} |\Phi(u_+)| \leq \|f\|_{-s}^{+}$. Таким образом, $\|\Phi\| = \|f\|_{-s}^{+}$ и доказана следующая лемма.

Лемма 4.8. Пусть $(H_s^+)^*$ *- сопряженное к* H_s^+ *пространство,* s *– произвольное число. Тогда* $(H_s^+)^*$ *изоморфно* $H_{-s}(R_+^n)$ *, причем значение функционала* $f \in H_{-s}(R_+^n)$ *на элементе* $u_+ \in H_s^+$ *задается формулой (4.63).*

Аналогично доказывается, что $(H_{-s}(R_+^n))^*$ изоморфно H_s^+ при любом s, причем значение функционала $u_+ \in H_s^+$ на элементе $f \in H_{-s}(R_+^n)$ задается формулой

$$
lf,u_+ \ {}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} lf\ \ \xi\ \ u_+\ \ \xi\ \ d\xi = \ u_+,lf\ \ {}_0.
$$

6. Пример 4.5. Пусть $\Lambda_+^s\ \ \xi',\xi_n + i\tau\ \ = \ \ \xi_n + i\ \ \xi'\ \ + i\tau\ \ {}^s,\ \ \tau \geq 0.$ Обозначим при $\tau > 0$ через $\Lambda_+^s\ \ \xi',\xi_n + i\tau$ регулярный функционал, отвечающей функции $\Lambda_+^s\ \ \xi',\xi_n + i\tau$, а через $\Lambda_+^s\ \ \xi',\xi_n + i0\ \ \in S'$ обозначим предел в $S'(R^n)$ регулярных функционалов $\Lambda_+^s\ \ \xi',\xi_n + i\tau$ при $\tau \to +0$. Существование предела в $S'(R^n)$ доказывается также, как в примере 1.7. Пусть $\Lambda_+^s\ \ D,D_n + i\tau\ \ u = F^{-1}\Lambda_+^s\ \ \xi',\xi_n + i\tau\ \ u$ – п. д. о. с символом $\Lambda_+^s\ \ \xi',\xi_n + i\tau\ ,\tau \geq 0.$ Аналогично пусть $\Lambda_-^s\ \ D,D_n - i\tau\ \ u = F^{-1}\Lambda_-^s\ \ \xi',\xi_n - i\tau\ \ u$ – п. д. о. с символом $\Lambda_-^s\ \ \xi',\xi_n - i\tau\ \ = \ \ \xi_n - i\ \ \xi'\ \ - i\tau\ \ {}^s,\tau \geq 0,$ где $\Lambda_-^s\ \ \xi',\xi_n - i0$ – предел в $S'\ \ R^n$ регулярных функционалов $\Lambda_-^s\ \ \xi',\xi_n - i\tau$ при $\tau \to +0.$ Найдем представление для $\Lambda_\pm^s\ \ D,D_n \pm i\tau$ в виде интегродифференциальных операторов (см. § 3). Пусть сначала $s < 0$. Тогда в силу (2.35)

$$
F_\xi^- \Lambda_+^s\ \ \xi',\xi_n + i\tau\ \ = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}s}}{\Gamma\ \ -s}\theta\ \ x_n\ \ x_n^{-s-1}F_\xi^{-1}e^{-x_n(\ \xi'\ +\tau)}. \qquad (4.64')
$$

Докажем, что имеет место следующая формула:

$$
F_\xi^{-1}e^{-x_n\ \xi'}\ \ = \frac{\Gamma\ \ \dfrac{n}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\ \frac{x_n}{x_n^2 + \ \ x'\ \ {}^2\ \ {}^{\frac{n}{2}}}, \qquad x_n > 0. \qquad (4.65)
$$

Действительно, согласно

$$
F_\varepsilon^{-1}\frac{1}{\xi_n + i\ \ \xi'} - F_\varepsilon^{-1}\frac{1}{\xi_n - i\ \ \xi'} = F_\varepsilon^{-1}\frac{2\xi_n}{\xi_n^2 + \ \ \xi'\ \ {}^2}\ . \qquad (4.66)
$$

Так как $supp\, F_\xi^{-1}\frac{1}{\xi_n \pm i\ \xi'} \subset R_\pm^n,$ то $pF_\xi^{-1}\frac{1}{\xi_n + i\ \xi'} = pF_\xi^{-1}\frac{2\xi_n}{\xi_n^2 + \ \xi'\ {}^2},$ где p – оператор сужения на R_+^n. Отсюда в силу (3.26) и (3.42) получим при $x_n > 0$

$$
F_\xi^{-1}e^{-x_n\ \xi'}\ \ = ip\ F_\varepsilon^{-1}\frac{1}{\xi_n + i\ \xi'} = \frac{\Gamma\ \frac{n}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{x_n}{x_n^2 + \ x'\ {}^2\ \ {}^{n/2}}.
$$

Таким образом,

$$
F_\xi^{-1}\Lambda_+^s\ \ \xi',\xi_n + i\tau\ \ = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}s}\,\Gamma\ \ \dfrac{n}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(-s)}\ \frac{\theta\ \ x_n\ \ x_n^{-s}e^{-x_n\tau}}{x_n^2 + \ \ x'\ \ {}^2\ \ {}^{n/2}}. \qquad s < 0. \qquad (4.67)
$$

Следовательно, п. д. о. $\Lambda_+^s(D',D_n+i\tau)$, $\tau\geq 0$, при $s<0$ имеет вид

$$\Lambda_+^s(D',D_n+i\tau)u=$$

$$=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}s}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(-s)}\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x_n-y_n)^{-s}e^{-(x_n-y_n)\tau}}{\left((x_n-y_n)^2+|x'-y'|^2\right)^{\frac{n}{2}}}u(y',y_n)\,dy'dy_n,\forall u\in S. \quad (4.68)$$

Аналогично при $s<0$ п. д. о. $\Lambda_-^s(D',D_n-i\tau)$, $\tau\geq 0$, имеет вид

$$\Lambda_-^s(D',D_n-i\tau)u=$$

$$=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}s}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(-s)}\int_{x_n}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y_n-x_n)^{-s}e^{(x_n-y_n)\tau}}{\left((x_n-y_n)^2+|x'-y'|^2\right)^{\frac{n}{2}}}u(y',y_n)\,dy'dy_n,\forall u\in S. \quad (4.69)$$

Пусть теперь $s>0$. Если $s=m>0$ – целое, то $\Lambda_\pm^m(\xi',\xi_n\pm i\tau)$ можно представить в виде

$$\Lambda_\pm^m(\xi',\xi_n\pm i\tau)=\Lambda_{m1}(|\xi'|^2,\xi_n\pm i\tau)+\Lambda_{m2}(|\xi'|^2,\xi_n\pm i\tau)|\xi'|, \quad (4.70)$$

где $\Lambda_{m1}(|\xi'|^2,\xi_n+i\tau)$, $\Lambda_{m2}(|\xi'|^2,\xi_n+i\tau)$ – многочлены от $|\xi'|^2$ и $\xi_n\pm i\tau$. Пусть Λ' - п. д. о. в R^{n-1} с символом $|\xi'|$. При $n>2$ п. д. о. Λ' можно представить в виде (см. $(3.17')$)

$$\Lambda' u=-2\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\Delta'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y',x_n)\,dy'}{|x'-y'|^{n-2}}, \qquad n>2, \quad (4.71)$$

где

$$\Delta'=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Если $n=2$, то $|\xi'|=\xi_1 sgn\xi_1=\xi_1(\theta(\xi_1)-\theta(-\xi_1))$ и, следовательно,

$$\Lambda' u=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y_1,x_2)}{x_1-y_1}dy_1. \quad (4.71')$$

Таким образом,

$$\Lambda_\pm^m(D',D_n\pm i\tau)u=\Lambda_{m1}(-\Delta_1,D_n\pm i\tau)u+\Lambda_{m2}(-\Delta_2,D_n\pm i\tau)\Lambda' u, \quad (4.72)$$

где $\Lambda' u$ имеет вид (4.71) при $n>2$ и $(4.71')$ при $n=2$.

Пусть теперь $s>0$ – нецелое. Тогда найдется целое $m>0$ такое, что $s=m+\gamma,-1<\gamma<0$. Следовательно,

$$\Lambda_+^s\ \xi',\xi_n+i\tau\ =$$

$$=\Lambda_{m1}\ \ \xi'\ ^2,\xi_n\pm i\tau\ \Lambda_+^\gamma\ \xi',\xi_n+i\tau\ +$$

$$+\Lambda_{m2}\ \ \xi'\ ^2,\xi_n\pm i\tau\ \ \xi'\ \Lambda_+^\gamma\ \xi',\xi_n+i\tau\ . \qquad (4.73)$$

Аналогично (4.64′)

$$F_\xi^-\ \xi'\ \Lambda_+^\gamma\ \xi',\xi_n+i\tau\ =\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{\Gamma\ -\gamma}\theta\ x_n\ x_n^{-\gamma-1}F_{\xi'}^{-1}\ \xi'\ e^{-x_n(\ \xi'\ +\tau)}. \qquad (4.74)$$

В частности, $F_\xi^{-1}\ \frac{\xi'}{\xi_n+i\ \xi'}=-i\theta\ x_n\ F_{\xi'}^{-1}e^{-x_n\ \xi'}$. Далее, , $F_\xi^{-1}\ \frac{\xi'}{\xi_n-i\ \xi'}=i\theta\ -x_n\ F_{\xi'}^{-1}e^{x_n\ \xi'}$. Так как $F_\xi^{-1}\ \frac{\xi'}{\xi_n+i\ \xi'}-F_\xi^{-1}\ \frac{\xi'}{\xi_n-i\ \xi'}=F_\xi^{-1}\ \frac{-2\ \xi'\ ^2}{\xi_n^2+\ \xi'\ ^2}$ и $supp\ F_\xi^{-1}\frac{\xi'}{\xi_n\pm i\ \xi'}\subset R_\pm^n$, то при $x_n>0$

$$F_\xi^{-1}\ \xi'\ e^{-x_n\ \xi'}\ =piF_\xi^{-1}\frac{\xi'}{\xi_n+i\ \xi'}=2pF^{-1}\frac{\xi'\ ^2}{\xi_n^2+\ \xi'\ ^2}. \qquad 4.75$$

Таким образом, при $n>2$ п. д. о. $\Lambda'\Lambda_+^\gamma(D',D_n+i\tau)$ с символом $\xi'\ \Lambda_+^\gamma(\xi',\xi_n+i\tau)$ имеет в силу (4.74), (4.75) и (3.15") следующий вид:

$$\Lambda'\Lambda_+^\gamma u=-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}\Gamma\ \frac{n-2}{2}}{2\Gamma\ -\gamma\ \pi^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_n-y_n\ ^{-\gamma-1}e^{-\ x_n-y_n\ \tau}u\ y',y_n\ dy'dy_n}{x_n-y_n\ ^2+\ x'-y'\ ^2\ ^{\frac{n-2}{2}}},$$

$\forall u\in S.$ (4.76)

При $n=0$ п. д. о. $\Lambda'\Lambda_+^\gamma(D',D_n+i\tau)$ имеет в силу 4.74), (4.75) и (3.41) следующий вид:

$$\Lambda'\Lambda_+^\gamma u=-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{2\pi\Gamma\ -\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{\infty}\ x_2-y_2\ ^{-\gamma-1}e^{-\ x_2-y_2\ \tau}\times$$

$$\times\ln\ \ x_2-y_2\ ^2+\ x-1-y_1\ ^2\ u\ y',y_n\ dy'dy_n. \qquad 4.76'$$

Следовательно, при $s=m+\gamma$

$$\Lambda_+^\gamma\ D',D_n+i\tau\ u=\Lambda_{m1}\ -\Delta',D_n+i\tau\ \Lambda_+^\gamma\ D',D_n+i\tau\ u+$$

$$+\Lambda_{m2}\ -\Delta',D_n+i\tau\ \Lambda'\Lambda_+^\gamma u, \qquad (4.77)$$

где п. д. о. Λ_+^γ имеет вид (4.68), п. д. о. $\Lambda'\Lambda_+^\gamma$ при $n > 2$ имеет вид (4.76), а при $n = 2$ – (4.76′).

Аналогично показывается, что при $s = m + \gamma$ п. д. о. $\Lambda_-^s(D', D_n - i\tau)$ представим в следующем виде:

$$\Lambda_-^s\ D', D_n - i\tau\ u = \Lambda_{m1}\ -\Delta', D_n - i\tau\ \Lambda_-^\gamma\ D', D_n - i\tau\ u -$$

$$-\Lambda_{m2}\ -\Delta', D_n - i\tau\ \Lambda'\Lambda_-^\gamma u, \qquad (4.78)$$

где п. д. о. $\Lambda_-^\gamma\ D', D_n - i\tau$ задается формулой (4.69), п. д. о. $\Lambda'\Lambda_+^\gamma$ имеет вид

$$\Lambda'\Lambda_+^\gamma\ D', D_n - i\tau\ u =$$

$$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma}\Gamma\ \frac{n-2}{2}}{2\Gamma\ -\gamma\ \pi^{\frac{n}{2}}}\Delta' \int_{x_n}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_n - x_n\ ^{-\gamma-1} e^{\ x_n - y_n\ \tau} u\ y', y_n\ dy'dy_n}{x_n - y_n\ ^2 +\ x' - y'\ ^2\ ^{\frac{n-2}{2}}},$$

$$\forall u \in S, \qquad n > 2, \qquad (4.79)$$

$$\Lambda'\Lambda_+^\gamma u =$$

$$= \frac{-e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma}\partial^2}{2\pi\Gamma\ -\gamma\ \partial x_1^2}\int_{x_2}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_2 - x_2\ ^{-\gamma-1} e^{\ x_2 - y_2\ \tau} \ln\ \ x_2 - y_2\ ^2 +\ x_1 - y_1\ ^2\ \times$$

$$\times u\ y_1, y_2\ dy_1 dy_2, \quad n = 2. \qquad (4.79')$$

Отметим, что формулы (4.79), (4.79′), как и предыдущие остаются в силе и при $\tau = 0$.

Замечание 4.3. Найдем сужение функционала $F^{-1}\Lambda_+^s(\xi', \xi_n + i\tau)$ при $\tau \geq 0$, $s = m + \gamma$ – нецелом на полупространство R_+^n. Так как

$$F^{-1}\Lambda_+^s\ \xi', \xi_n + i\tau\ =\ D_n + i\ \xi'\ + i\tau\ ^m F^{-1}\Lambda_+^\gamma\ \xi', \xi_n + i\tau\ =$$

$$=\ D_n + i\ \xi'\ + i\tau\ ^m \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{\Gamma\ -\gamma}\theta\ x_n\ x_n^{-\gamma-1} e^{-x_n(\ \xi'\ +\tau)}, \qquad (4.80)$$

то $pF_\xi^{-1}\Lambda_+^s$ является регулярным функционалом, отвечающим бесконечно дифференцируемой при $x_n > 0$ функции. Следовательно, дифференцируя в (4.80) по x_n и используя формулу (4. 65), получим (ср. (2.41′))

$$pF^{-1}\Lambda_+^s\left(\xi',\xi_n+i\tau\right)=\frac{e^2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-s)\,\pi^{\frac{n}{2}}}\,\frac{x_n^{-s}e^{-x_n\tau}}{\left(x_n^2+|x'|^2\right)^{\frac{n}{2}}},\quad x_n>0. \qquad (4.81)$$

Замечание 4.4. При $n=2$ интегралы (4.65) и (4.75) легко вычисляются непосредственно. Действительно, при

$$x_2>0\ \ F_{\xi_1}^{-1}e^{-x_2|\xi_1|}=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{\xi_1(x_2-ix_1)}\,d\xi_1+\int_{0}^{\infty}e^{-\xi_1(x_2+ix_1)}\,d\xi_1\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2},\qquad F_{\xi_1}^{-1}e^{-x_2|\xi_1|}=\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{1}{\pi}\,\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}.$$

ГЛАВА ВТОРАЯ. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

§5. Интеграл типа Коши

1. Пусть $f(\xi', \xi_n) \in S$. Обозначим

$$F_+(\xi', \xi_n + i\tau) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i\tau - \eta_n} d\eta_n, \quad \tau > 0. \qquad (5.1)$$

Очевидно, $F_+(\xi', \xi_n + i\tau)$ – аналитическая функция $\xi_n + i\tau$ в полуплоскости $\tau > 0$.

Лемма 5.1. Для любой $f(\xi', \xi_n) \in S$ существует

$$F_+(\xi', \xi_n + i0) = \lim_{\tau \to +0} F_+(\xi', \xi_n + i\tau)$$

и

$$F_+(\xi', \xi_n + i0) = \frac{1}{2} f(\xi', \xi_n) + v.p. \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n - \eta_n} d\eta_n, \qquad (5.2)$$

где

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n - \eta_n} d\eta_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi_n - \eta_n| > \varepsilon} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n - \eta_n} d\eta_n$$

интеграл в смысле главного значения по Коши.

Доказательство. Имеем

$$F_+(\xi', \xi_n + i\tau) = F_1(\xi', \xi_n, \tau) + F_2(\xi', \xi_n, \tau), \qquad (5.3)$$

где

$$F_1(\xi', \xi_n, \tau) = \frac{i}{2\pi} \int_{|\xi_n - \eta_n| < 1} \frac{f(\xi', \eta_n) - f(\xi', \xi_n)}{\xi_n + i\tau - \eta_n} d\eta_n +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{|\xi_n - \eta_n| > 1} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i\tau - \eta_n} d\eta_n, \qquad (5.4)$$

$$F_2(\xi',\xi_n,\tau) = f(\xi',\xi_n)\frac{i}{2\pi}\int_{|\xi_n-\eta_n|<1}\frac{d\eta_n}{\xi_n+i\tau-\eta_n}. \tag{5.5}$$

Очевидно, $F_1(\xi',\xi_n,\tau) \xrightarrow[\tau\to+0]{} F_1(\xi',\xi_n,0)$. Найдем $\lim_{\tau\to+0} F_2(\xi',\xi_n,\tau)$. Обозначив $\xi_n-\eta_n=t$, получим

$$F_2(\xi',\xi_n,\tau) = f(\xi',\xi_n)\frac{i}{2\pi}\int_{|t|<1}\frac{dt}{t+i\tau}=$$

$$= f(\xi',\xi_n)\frac{i}{2\pi}\left(\int_{-1}^{1}\frac{tdt}{t^2+\tau^2}-i\tau\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2+\tau^2}\right)=$$

$$= f(\xi',\xi_n)\frac{1}{\pi}arctg\frac{1}{\tau}\to\frac{1}{2}f(\xi',\xi_n) \text{ при } \tau\to+0.$$

Таким образом,

$$F_+(\xi',\xi_n+i0) = \frac{1}{2}f(\xi',\xi_n) + F_1(\xi',\xi_n,0) =$$

$$= \frac{1}{2}f(\xi',\xi_n) + \frac{i}{2\pi}\int_{|\xi_n-\eta_n|<1}\frac{f(\xi',\eta_n)-f(\xi',\xi_n)}{\xi_n-\eta_n}d\eta_n +$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{|\xi_n-\eta_n|>1}\frac{f(\xi',\eta_n)}{\xi_n-\eta_n}d\eta_n. \tag{5.6}$$

Так как

$$\int_{\varepsilon<|\xi_n-\eta_n|<1}\frac{f(\xi',\eta_n)}{\xi_n-\eta_n}d\eta_n = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции, то

$$F_1(\xi',\xi_n,0) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{i}{2\pi}\int_{|\xi_n-\eta_n|>\varepsilon}\frac{f(\xi',\eta_n)}{\xi_n-\eta_n}d\eta_n = v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi',\eta_n)d\eta_n}{\xi_n-\eta_n}.$$

Лемма 5.1 доказана.

Пусть

$$F_-(\xi', \xi_n + i\tau) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i\tau - \eta_n} d\eta_n, \qquad \tau < 0, \qquad (5.7)$$

где $f(\xi', \xi_n) \in S$. Функция $F_-(\xi', \xi_n + i\tau)$ аналитична по $\xi_n + i\tau$ в полуплоскости $\tau < 0$ и аналогично (5.2) доказывается, что существует

$$F_-(\xi', \xi_n - i0) = \lim_{\tau \to -0} F_-(\xi', \xi_n + i\tau),$$

причем

$$F_-(\xi', \xi_n - i0) = \frac{1}{2} f(\xi', \xi_n) - v.p. \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n - \eta_n} d\eta_n \qquad (5.8)$$

Обозначим

$$\Pi^0 f = v.p. \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n - \eta_n} d\eta_n \qquad (5.9)$$

$$\Pi^+ f = F_+(\xi', \xi_n + i0) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i0 - \eta_n} d\eta_n \qquad (5.10)$$

$$\Pi^- f = F_-(\xi', \xi_n - i0) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n - i0 - \eta_n} d\eta_n \qquad (5.11)$$

В силу (5.2) и (5.8)

$$\Pi^+ f = \frac{1}{2} f + \Pi^0 f, \qquad \Pi^- f = \frac{1}{2} f - \Pi^0 f, \qquad (5.12)$$

и, следовательно,

$$f = \Pi^+ f + \Pi^- f, \qquad (5.13)$$

для любой $f \in S$.

2. Пусть θ^+ - оператор умножения на функцию $\theta(x_n)$, равную 1 при $x_n > 0$ и нулю при $x_n < 0$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 5.2. Для любых $f(x', x_n) \in S$

$$F(\theta^+ f(x', x_n)) = \Pi^+ f, \qquad (5.14)$$

где $f = Ff$ – преобразование Фурье $f(x', x_n)$.

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Имеем

$$F\left[\theta(x_n)e^{-x_n\tau}\right] = \int_0^\infty e^{-x_n\tau + ix_n\xi_n}dx_n = \frac{i}{\xi_n + i\tau}. \qquad (5.15)$$

Отметим следующее свойство преобразования Фурье (ср. (2.4)): если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – абсолютно интегрируемые функции, то

$$F[\varphi(x)\psi(x)] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi-\eta)\psi(\eta)\,d\eta. \qquad (5.16)$$

Следовательно, делая преобразование Фурье функции $\theta(x_n)e^{-x_n\tau}f(x', x_n)$ по x и применяя формулу (5.16) по x_n, получим

$$F\left[\theta(x_n)e^{-x_n\tau}f(x', x_n)\right] = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i\tau - \eta_n}d\eta_n. \qquad (5.17)$$

При $\tau \to +0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x_n)e^{-x_n\tau}f(x', x_n)e^{i(x,\xi)}dx \to \int_{-\infty}^{\infty}\theta(x_n)f(x', x_n)e^{i(x,\xi)}dx$$

(ср. пример 1.5). Так что переходя в (5.17) к пределу при $\tau \to +0$, получим (5.14).

Лемма 5.2 доказана.

Обозначим через θ^- оператор умножения на функцию $1-\theta(x_n)$ Аналогично (5.14) доказывается, что

$$F(\theta^- f) = \Pi^- f, \quad \forall f \in S, \qquad (5.18)$$

где $f(\xi)$ – преобразование Фурье . Таким образом, в силу (5.14) и (5.18) оператор Π^+ является Фурье-образом оператора θ^+ , а оператор Π^- - Фурье-образом оператора θ^-.

Лемма 5.3. При любом $|\delta| < \frac{1}{2}$ и любом $p \geq 0$ оператор*

$$\Pi_\delta f = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\xi_n + |\xi'| + 1}{\eta_n + |\xi'| + 1}\right)^\delta \ln^p\frac{\xi_n + |\xi'| + 1}{\eta_n + |\xi'| + 1}\,\frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i0 - \eta_n}\,d\eta_n \qquad (5.19)$$

удовлетворяет оценки

---

* Случай $p > 0$ понадобится нам лишь в главе IV.

$$\Pi_\delta f \quad_0 \le C \quad f \quad_0, \quad \forall f \in S. \tag{5.20}$$

Доказательство. Разобьем (5.19) на четыре слагаемых

$$\Pi_\delta f = \theta \;\xi_n\; \Pi_\delta \theta \;\eta_n\; f + \theta \;\xi_n\; \Pi_\delta \; 1 - \theta \;\eta_n \quad f +$$

$$+ \; 1 - \theta \;\xi_n \quad \Pi_\delta \theta \;\eta_n\; f + \; 1 - \theta \;\xi_n \quad \Pi_\delta \; 1 - \theta \;\eta_n \quad f. \tag{5.21}$$

Покажем, что $\theta \;\xi_n\; \Pi_\delta \theta \;\eta_n\; f$ удовлетворяет оценке

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \theta \;\xi_n\; \Pi_\delta \theta \;\eta_n\; f \;^2 d\xi_n d\xi' \le C \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \theta \;\eta_n \quad f \;\xi', \eta_n \quad ^2 d\eta_n d\xi'. \tag{5.22}$$

Сделаем в $\theta \;\xi_n\; \Pi_\delta \theta \;\eta_n\; f$ замену переменных

$$\xi_n = \; 1 + \; \xi' \quad t - 1 \;, \eta_n \; 1 + \; \xi' \quad t - 1 \;. \tag{5.23}$$

Получим

$$\theta \;\xi_n\; \Pi_\delta \theta \;\eta_n\; f = \theta \;t - 1 \int_1^{\infty} \frac{t}{\tau}^{\delta} \ln^p \frac{t}{\tau} \frac{f \;\xi', \;\; \xi' \; + 1 \quad t - 1}{t + i0 - \tau} \, d\tau \;. \tag{5.24}$$

Обозначим через $\Pi_\delta^{(1)}$ следующий оператор:

$$\Pi_\delta^{(1)} g = \int_0^{\infty} \frac{t}{\tau}^{\delta} \ln^p \frac{t}{\tau} \frac{g(\tau)}{t + i0 - \tau} \, d\tau. \tag{5.25}$$

Оценка (5.22) следует из оценки

$$\int_0^{\infty} \Pi_\delta^{(1)} g \quad ^2 dt \le C \int_0^{\infty} g \;\tau \quad ^2 d\tau, \tag{5.26}$$

если положить $g \;\tau \; = f \;\xi', \; 1 + \; \xi' \quad t - 1$ при $\tau \ge 1$, $g \;\tau \; = 0$ при $0 \le \tau < 1$, умножить (5.26) на $\; 1 + \; \xi'$ и затем проинтегрировать по ξ'.

Для доказательства оценки (5.26) естественно применить преобразование Меллина, так как ядро $M_0 \;t, \tau \; = \frac{t}{\tau}^{\delta} \ln^p \frac{t}{\tau} \frac{1}{t + i0 - \tau}$ – однородная функция t и τ порядка -1. Сделаем в (5.25) преобразование Меллина

$$\Pi_\delta^{(1)} g = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{\infty} t^{s-1} \int_0^{\infty} M_\varepsilon \;t, \tau \; g \;\tau \; d\tau \quad d\tau \,, \qquad -\delta < Re\, s < 1 - \delta, \tag{5.27}$$

где $M_\varepsilon \;t, \tau \; = \frac{t}{\tau}^{\delta} \ln^p \frac{t}{\tau} \frac{1}{t + i\varepsilon - \tau}$. Изменим в (5.27) порядок интегрирования и сделаем замену переменной $t=\tau t'$. Получим $\Pi_\delta^{(1)} g = M_0(s)\,g(s)$, где

$$g(s)=\int_0^\infty g(\tau)\,\tau^{s-1}d\tau -$$

преобразование Меллина $g(\tau)$,

$$M_0(s)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty t^{s+\delta-1}\ln^p t\,\frac{dt}{t+i\varepsilon-1}.$$

В силу примера 2.1

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty t^{s+\delta-1}\frac{dt}{t+i\varepsilon-1}=2\pi i\frac{e^{2\pi i(s+\delta)}}{1-e^{2\pi i(s+\delta)}}. \qquad (5.28)$$

Дифференцируя (5.28) по s, получим

$$M_0(s)=2\pi i\frac{dp}{ds^p}\frac{e^{2\pi i(s+\delta)}}{1-e^{2\pi i(s+\delta)}}.$$

Так как при $|\delta|<\frac{1}{2}$ функция $M_0(s)$ ограничена на прямой $s=\frac{1}{2}+i\eta$, то в силу равенства Парсеваля (2.16)

$$\int_0^\infty\left|\Pi_\delta^1 g\right|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\left|M_0(s)g(s)\right|^2d\eta\le C\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\left|g(s)\right|^2d\eta=C\int_0^\infty\left|g(t)\right|^2dt.$$

Оценка (5.26) доказана. Остальные слагаемые в (5.21) оцениваются аналогично. Их ограниченность в H_0 сводится к доказательству оценки (5.26) для интегрального оператора вида (5.25) в котором $\frac{1}{t+i0-\tau}$ заменено на $\frac{1}{t-i0-\tau}$ $\frac{1}{t+\tau}$.

Лемма 5.3. доказана.

Теорема 5.1. Операторы $\Pi^\pm$, *определенные на* $S(R^n)$ *по формулам (5.2) и (5.8) ограничены по норме* H_δ *при* $|\delta|<\frac{1}{2}$ *и, следовательно, продолжаются по непрерывности на* H_δ *как ограниченные операторы, действующие из* H_δ *в* H_δ^+.

Доказательство. Ограниченность оператора Π^+ на $S(R^n)$ по норме H_δ непосредственно вытекает из леммы 5.3 при $p=0$. Ограниченность оператора Π^- следует, например, из ограниченности Π^+ и соотношения (5.13). В силу (5.14) и (5.18) операторы θ^+ и θ^- ограничены по норме H_δ и, следовательно, продолжаются по непрерывности до ограниченных операторов в Π_δ. При $f(x) \in S supp\, \theta^\pm f \subset R^n_\pm$, так что $H^\pm_\delta f \in H^\pm_\delta$. Отсюда в силу замкнутости подпространств $H^\pm_\delta$ образ операторов $\theta^\pm$ лежит в $H^\pm_\delta$. Следовательно, $\Pi^\pm$ - ограниченные операторы, действующие из H_δ в H^+_δ.

Замечание 5.1. Пусть $f \in H_\delta(R^n)$, $|\delta| < \frac{1}{2}$. Обозначим $f_+ = \theta^+ f, f_+(\xi', \xi_n + i\tau) = F(f_+ e^{-x_n\tau}), \tau \geq 0$. Покажем, что при любом $\tau > 0$

$$f_+(\xi', \xi_n + i\tau) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi', \eta_n)\,d\eta_n}{\xi_n + i\tau - \eta_n}, \qquad (5.29)$$

т. е. функция $f_+(\xi', \xi_n + i\tau)$ в полуплоскости $\tau > 0$ представимо интегралом типа Коши. Так как при $\tau > 0$ $|\delta| < \frac{1}{2}, \frac{1}{\xi_n + i\tau} \in H_{-\delta}(R^1)$, то в силу неравенства

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f_+(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i\tau - \eta_n}\right| d\eta_n\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1 + |\xi'| + |\eta_n|)^{-2\delta}}{|\xi_n + i\tau - \eta_n|^2}d\eta_n \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}(1 + |\xi'| + |\eta_n|)^{2\delta}|f(\xi', \eta_n)|^2 d\eta_n \qquad (5.30)$$

интеграл (5.29) сходится при почти всех $\xi' \in R^{n-1}$ и любых $\xi_n + i\tau$, $\tau > 0$ и является аналитической функцией $\xi_n + i\tau$. если $f \in S$, то формула (5.29) совпадает с (5.17). Пусть f – произвольная функция из $H_\delta(R^n)$ В силу теоремы 4.1 существует последовательность $f_m \in S$, сходящаяся к f по норме $H_\delta(R^n)$. Из неравенства (5.30) вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_m(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i\tau - \eta_n}d\eta_n \to \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i\tau - \eta_n}d\eta_n \text{ в } S'(R^n).$$

Далее $f^+_m = \theta^+ f_m \to f^+ = \theta^+ f$ в H^+_δ в силу теоремы 5.1. и $f^+_m(\xi', \xi_n + i\tau) = F(f^+_m e^{-x_n t}) \to f^+(\xi', \xi_n + i\tau)$ в S' (см. теорему 4.5). Таким образом, переходя в (5.17) к пределу при $m \to \infty$, получим, что равенство (5.29) справедливо для $\forall f \in H_\delta(R^n)$. Из теоремы 4.5 вытекает, что при $\tau \geq 0$ $f_+(\xi', \xi_n + i\tau) \in H_\delta$ и при $\tau \to 0$ $f_+(\xi', \xi_n + i\tau) \to f_+(\xi', \xi_n) = \Pi^+ f$ по норме H_δ. Следовательно, в силу (5.29) при $\tau \to 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \eta_n)\, d\eta_n}{\xi_n + i\tau - \eta_n} \to \Pi^+ f \text{ по норме } H_\delta(R^n).$$

Лемма 5.4. При $\delta < \frac{1}{2}$ любая функция $f \in H_\delta$ однозначно представима в виде

$$f = f_+ + f_-, \qquad (5.31)$$

где $f_+ \in H_\delta^+, f_- \in H_\delta^-$, причем $f_+ = \Pi^+ f, f_- = \Pi^- f$.

Доказательство. Пусть $f \in H_\delta$. Тогда в силу теоремы 5.1. $\Pi^+ f \in H_\delta^+$, $\Pi^- f \in H_\delta^-$. Продолжая равенство (5.13) по непрерывности с S на H_δ, получим

$$f = \Pi^+ f + \Pi^- f, \qquad \forall f \in H_\delta. \qquad (5.32)$$

Докажем теперь единственность разложения (5.31). Пусть

$$f_+ + f_- = 0, \qquad (5.33)$$

где $f_+ \in H^+_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, f_- \in H^-_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, 0 < \varepsilon < 1$. Покажем, что $f_+ = 0, f_- = 0$.

Пусть $g_\pm(x) \in C_0^\infty(R^n_\pm)$. Тогда, очевидно, $\theta(x_n) g_+(x) = g_+(x)$, $\theta(x_n) g_-(x) = 0$. В силу ограниченности оператора θ^+ из $H_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ в $H^+_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ и лемм 4.2 и 4.3 получим $\theta^+ f_+ = f_+, \theta^+ f_- = 0$ для любых $f_\pm \in H^\pm_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Следовательно,

$$\Pi^+ f_+ = f_+, \ \Pi^+ f_- = 0, \qquad \forall f_\pm \in H^\pm_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \qquad (5.34)$$

Аналогично доказывается, что

$$\Pi^- f_+ = 0, \ \Pi^- f_- = f_-, \qquad \forall f_\pm \in H^\pm_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \qquad (5.35)$$

Тогда, применяя к (5.33) операторы Π^+ и Π^- получим $f_+ = 0, f_- = 0$.

Лемма 5.5. (Формула разложения интеграла типа Коши). Пусть $f \in H_{m+\delta}(R^n)$, $m > 0$ – целое, $\delta < \frac{1}{2}$. Тогда имеет место следующая формула:

$$\Pi^{+}f = \sum_{k=1}^{m} \frac{i\Pi'\Lambda_{+}^{k-1}f}{\Lambda_{+}^{k}} + \frac{1}{\Lambda_{+}^{m}}\Pi^{+}\Lambda_{+}^{m}f, \qquad (5.36)$$

где $\Lambda_{+}(\xi',\xi_n) = \xi_n + i(|\xi'| + i)$, $\Pi' g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi',\eta_n)\,d\eta_n$.

Доказательство. Раскладывая $\frac{1}{\xi_n - \eta_n}$ по формуле геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1}{\xi_n - \eta_n} = \frac{1}{\left(\xi_n + i(|\xi'| + i)\right)\left(1 - \frac{\eta_n + i(|\xi'| + i)}{\xi_n + i(|\xi'| + i)}\right)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(\eta_n + i(|\xi'| + i)\right)^{k-1}}{\left(\xi_n + i(|\xi'| + i)\right)^{k}} + \frac{\left(\eta_n + i(|\xi'| + i)\right)^{m}}{\left(\xi_n + i(|\xi'| + i)\right)^{m+1}\left(1 - \frac{\eta_n + i(|\xi'| + i)}{\xi_n + i(|\xi'| + i)}\right)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\Lambda_{+}^{k-1}(\xi',\eta_n)}{\Lambda_{+}^{k}(\xi',\xi_n)} + \frac{\Lambda_{+}^{m}(\xi',\eta_n)}{\Lambda_{+}^{m}(\xi',\xi_n)(\xi_n - \eta_n)}. \qquad (5.37)$$

Пусть $f \in S$. Умножая (5.37) на $\frac{i}{2\pi}f(\xi',\eta_n)$ и интегрируя по η_n, получим

$$\Pi^{0}f = \sum_{k=1}^{m} \frac{i\Pi'\Lambda_{+}^{k-1}f}{\Lambda_{+}^{k}} + \frac{1}{\Lambda_{+}^{m}}\Pi^{0}\Lambda_{+}^{m}f. \qquad (5.38)$$

Прибавляя к обеим частям (5.38) $\frac{1}{2}f(\xi',\xi_n)$, получим в силу (5.12) формулу (5.36) для $f \in S$. В силу теорем 4.1, 4.2 и 5.1 формула (5.36) остается справедливой для любых $f \in H_{m+\delta}$ после замыкания пространства S в норме $H_{m+\delta}$. Аналогично доказывается справедливость для любых $f \in H_{m+\delta}$ формулы

$$\Pi^{-}f = \sum_{k=1}^{m} \frac{i\Pi'\Lambda_{-}^{k-1}f}{\Lambda_{-}^{k}} + \frac{1}{\Lambda_{-}^{m}}\Pi^{-}\Lambda_{-}^{m}f, \qquad (5.39)$$

где $\Lambda_{-} = \xi_n - i(|\xi'| - i)$.

Замечание 5.2. Пусть $\delta = \pm\frac{1}{2}$. *Тогда операторы* $\Pi^{\pm}$ *являются неограниченными операторами в* H_{δ} *с плотной областью определения.*

Доказательство. Обозначим через $L_0(R^n)$ совокупность всех финитных интегрируемых с квадратом функций. Для произвольной функции $f(\xi) \in H_s$

обозначим через f_N функцию, равную $f(\xi)$ при $|\xi| \leq N$ и равную 0 при $|\xi| > N$. Тогда $f_N(\xi) \in L_0$ и $\|f - f_N\|_s \to 0$ при $N \to \infty$ для любого s. Следовательно, $L_0(R^n)$ плотно в H_s. Пусть $\delta = \frac{1}{2}$ и $g \in L_0$. Применяя формулу (5.36) при $m = 1$, получим

$$\Pi^+ g = \frac{1}{\Lambda_+} i\Pi' g + \Lambda_+^{-1}\Pi^+\Lambda_+ g.$$

Очевидно, $\Lambda_+^{-1}\Pi^+\Lambda_+ g \in H_{\frac{1}{2}}$, так как $\Pi^+\Lambda_+ g \in H_0$. Функция $\Lambda_+^{-1} i\Pi' g$ принадлежит $H_{\frac{1}{2}}$ тогда и только тогда, когда почти при всех ξ'

$$\Pi' g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi', \xi_n)\, d\xi_n = 0. \qquad (5.40)$$

Действительно,

$$\|\Lambda_+^{-1}\Pi' g\|_{\frac{1}{2}}^2 = C\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi'| + |\xi_n|)^{-1} |\Pi' g|^2 d\xi' d\xi_n = +\infty,$$

если $\Pi' g \neq 0$ на множестве положительной меры. Множество функций из $L_0(R^n)$, удовлетворяющих условию (5.40), обозначим через $L_0^{(1)}$. Покажем, что $L_0^{(1)}$ плотно в $L_0(R^n)$, а следовательно, и в $H_{\frac{1}{2}}$. Пусть $\varphi_N(\xi_n) = 1/C_N(1 + |\xi_n|)$ при $|\xi_n| \leq N, \varphi_N(\xi_n) = 0$ при $|\xi_n| > N$, где $C_N = \ln(1 + N)^2$. Очевидно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_N(\xi_n)\, d\xi_n = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi_n|)|\varphi_N \times (\xi_n)|^2 d\xi_n = \frac{1}{C_N} \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Пусть $g(\xi)$ – произвольная функция из $L_0(R^n)$. Обозначим $g_N(\xi) = g(\xi) - \varphi_N(\xi_n)\Pi' g(\xi)$. Тогда $g_N(\xi) \in L_0^{(1)}$, так как $g_N(\xi) \in L_0$ и $\Pi' g_N$=0. При $N \to \infty$

$$\|g - g_N\|_{\frac{1}{2}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi'| + |\xi_n|)|\varphi_N(\xi_n)|^2 |\Pi' g|^2 d\xi' d\xi_n \leq$$

$$\leq C\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi_n|)|\varphi_N(\xi_n)|^2 |\Pi' g|^2 d\xi' d\xi_n = \frac{C}{C_N}\int_{-\infty}^{\infty} |\Pi' g|^2 d\xi' \to 0.$$

Таким образом, $L_0^{(1)}$ плотно в $L_0(R^n)$. Оператор Π^+ неограничен на $L_0^{(1)}$, так как в противном случае $\Pi^+ f$ принадлежала бы $H_{\frac{1}{2}}$ для любой $f \in H_{\frac{1}{2}}$, что не имеет мести. Обозначим через $\Omega_{\frac{1}{2}}$ множество $f \in H_{\frac{1}{2}}$, таких, что $\Pi^+ f \in H_{\frac{1}{2}}$. Тогда $\Omega_{\frac{1}{2}}$ плотное в $H_{\frac{1}{2}}$ множество, так как $\Omega_{\frac{1}{2}} \supset L_0^{(1)}$, и оператор Π^+, определенный на $\Omega_{\frac{1}{2}}$ является неограниченным в $H_{\frac{1}{2}}$.

Пусть теперь $\delta = -\frac{1}{2}$. Тогда $\Pi^+ f \in H_{-\frac{1}{2}}$ для $\forall f \in L_0(R^n)$. Пусть $h_0(\xi', \xi_n) = \frac{\psi_0(\xi')\theta(\xi_n)}{\ln(\xi_n+2)}$, где $\psi_0(\xi') = 1$ при $|\xi'| \le 1, \psi_0(\xi') = 0$ при $|\xi'| > 1$. Тогда $h_0(\xi', \xi_n) \in H_{-\frac{1}{2}}$, так как

$$\|h_0\|_{-\frac{1}{2}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} (1 + |\xi|)^{-1} \left|\frac{\psi_0(\xi')\theta(\xi_n)}{\ln^2(\xi_n + 2)}\right|^2 d\xi' d\xi_n < \infty.$$

Положим $h_N(\xi', \xi_n) = h_0(\xi', \xi_n)$ при $|\xi_n| \le N, h_N(\xi', \xi_n) = 0$ при $|\xi_n| > N$. Очевидно, $h_N(\xi', \xi_n) \in L_0(R^n)$ и $\|h_0 - h_N\|_{-\frac{1}{2}}^2 \to 0$ при $N \to \infty$. С другой стороны, при $|\xi'| \le 1$ и $\xi_n \ne 0$

$$\Pi^+ h_N = \frac{i}{2\pi} \int_0^N \frac{\psi_0(\xi')\, d\eta_n}{(\xi_n + i0 - \eta_n)\ln(\eta_n + 2)} \to \infty, \text{если } N \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\Pi^+ h_N$ заведомо не сходится в $H_{-\frac{1}{2}}$, так как в противном случае из $\Pi^+ h_N$ можно было бы выделить подпоследовательность, сходящуюся при почти всех (ξ', ξ_n). Таким образом, $\Pi^+ -$ неограниченный оператор в $H_{-\frac{1}{2}}$ с плотной областью определения. Неограниченность оператора Π^- в $H_{\pm\frac{1}{2}}$ следует из соотношения $\Pi - g = g - \Pi^+ g,\ \forall g \in L_0$.

Теорема 6.1. Пусть $A(\xi) \in O_{\alpha+i\beta}^{\infty}$ - эллиптический символ. Тогда $A(\xi)$т допускает единственную, при условии нормировки (6.6), однородную факторизацию.

Доказательство. Функция $A(\xi) \in O^{\infty}_{\alpha+i\beta}$ может быть представлена в виде

$$A(\xi) = |\xi|^{\alpha+i\beta} A_0(\xi), \qquad (6.26)$$

где $A_0(\xi) \in O_0^{\infty}$. Функция $|\xi|^{\alpha+i\beta}$ факторизуется следующим образом:

$$|\xi|^{\alpha+i\beta} = (\xi_n - i|\xi'|)^{\frac{\alpha+i\beta}{2}} (\xi_n + i|\xi'|)^{\frac{\alpha+i\beta}{2}}, \qquad (6.27)$$

где $(\xi_n \pm i|\xi'|)^{\frac{\alpha+i\beta}{2}} = e^{\frac{\alpha+i\beta}{2}\ln(\xi_n \pm i|\xi'|)}$, причем, как и в предыдущих параграфах, выбирается ветвь логарифма, действительная на положительной полуоси.

Пусть $\xi' \neq 0$. Обозначим

$$\alpha_1 = A_0(0,+1), \qquad \alpha_2 = A_0(0,-1). \qquad (6.28)$$

В силу однородности функции $A_0(\xi', \xi_n)$

$$\lim_{\xi_n \to +\infty} A_0(\xi', \xi_n) = \lim_{\xi_n \to +\infty} A_0\left(\frac{\xi'}{\xi_n}, +1\right) = A_0(0,+1) = \alpha_1, \quad (6.29)$$

$$\lim_{\xi_n \to -\infty} A_0(\xi', \xi_n) = \lim_{\xi_n \to -\infty} A_0\left(\frac{\xi'}{|\xi_n|}, \frac{\xi_n}{|\xi_n|}\right) = A_0(0,-1) = \alpha_2. \quad (6.30)$$

Пусть $\gamma = \frac{1}{2\pi i} ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, причем ветвь логарифма выбирается произвольно.

Рассмотрим функцию $\alpha_1 \frac{(\xi_n + i|\xi'|)^{\gamma}}{(\xi_n - i|\xi'|)^{\gamma}}$, при $\xi' \neq 0$. При $\xi_n \to +\infty$

$$\alpha_1 \frac{(\xi_n + i|\xi'|)^{\gamma}}{(\xi_n - i|\xi'|)^{\gamma}} = \alpha_1 \frac{e^{\gamma(\ln|\xi_n + i|\xi'|| + i arg(\xi_n + i|\xi'|))}}{e^{\gamma(\ln|\xi_n - i|\xi'|| + i arg(\xi_n - i|\xi'|))}} \to \alpha_1,$$

так как $\ln|\xi_n + i|\xi'|| = \ln|\xi_n - i|\xi'||$ и $arg(\xi_n \pm i|\xi'|) \to 0$ при $\xi_n \to +\infty$. Когда ξ_n, оставаясь вещественной, изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, $arg(\xi_n + i|\xi'|)$ изменяется от нуля до π, а $arg(\xi_n - i|\xi'|)$ – от 0 до $-\pi$. Следовательно, при $\xi_n \to -\infty$

$\alpha_1 \frac{(\xi_n + i\,|\xi'|)^\gamma}{(\xi_n - i\,|\xi'|)^\gamma} \to \alpha_1 \frac{e^{i\gamma\pi}}{e^{-i\gamma\pi}} = \alpha_1 e^{2\pi i\gamma} = \alpha_2.$

Таким образом, функция

$$A_1(\xi', \xi_n) = \frac{(\xi_n - i\,|\xi'|)^\gamma}{\alpha_1 (\xi_n + i\,|\xi'|)^\gamma} A_0(\xi', \xi_n) \qquad (6.31)$$

имеет при $\xi_n \to \pm\infty$ пределы, равные 1

$$A_1(0, +1) = \lim_{\xi_n \to +\infty} A_1(\xi', \xi_n) = 1, \qquad A_1(0, -1) = \lim_{\xi_n \to -\infty} A_1(\xi', \xi_n) = 1.$$

Пусть $2\pi m$ – приращение аргумента $A_1(\xi', \xi_n)$ при фиксированном $\xi' \neq 0$ и ξ_n, изменяющемся от $+\infty$ до $-\infty$

$$2\pi m = \Delta arg A_1(\xi', \xi_n)\Big|_{\xi_n = +\infty}^{\xi_n = -\infty},$$

m - целое число, так как $A_1(0, +1) = A_1(0, -1) = 1$. При $n \geq 3$ сфера $|\xi'| = 1$ связна, и так как $\Delta arg A_1(\xi', \xi_n)\Big|_{\xi_n = +\infty}^{\xi_n = -\infty}$, очевидно, непрерывно зависит от ξ', то число m одно и то же для всех $\xi' \neq 0$. При $n = 2$ m может быть разным для $\xi' > 0$ и $\xi' < 0$. Будем в этом случае дополнительно предполагать, что m не зависит от ξ'. Обозначим

$$A_2(\xi', \xi_n) = \frac{(\xi_n - i\,|\xi'|)^m A_1(\xi', \xi_n)}{(\xi_n + i\,|\xi'|)^m} \qquad (6.32)$$

Так как при $\xi' \neq 0$ $\Delta arg \frac{(\xi_n - i\,|\xi'|)^m}{(\xi_n + i\,|\xi'|)^m}\Big|_{\xi_n = +\infty}^{\xi_n = -\infty} = -2\pi m$,

$$\Delta arg A_2(\xi', \xi_n)\Big|_{\xi_n = +\infty}^{\xi_n = -\infty} = \Delta \arg\left(\frac{\xi_n - i\,|\xi'|}{\xi_n + i\,|\xi'|}\right)^m\Big|_{\xi_n = +\infty}^{\xi_n = -\infty} + \Delta arg A_1(\xi', \xi_n)\Big|_{\xi_n = +\infty}^{\xi_n = -\infty},$$

то

$$\Delta arg A_2(\xi', \xi_n) \begin{matrix} \xi_n = -\infty \\ \xi_n = +\infty \end{matrix} = 0. \qquad (6.33)$$

Кроме того, $A_2\ 0, \pm 1\ = 1.$ Обозначим

$$b_2\ \xi', \xi_n\ = \ln A_2\ \xi', \xi_n\ = \ln |A_2\ \xi', \xi_n\ | + i \arg A_2\ \xi', \xi_n\ , \qquad (6.34)$$

причем выбирается ветвь логарифма так, чтобы $b_2\ 0, +1\ = 0$. Тогда в силу (6.33) $b_2\ 0, -1\ = 0$. Покажем, что $b_2\ \xi', \xi_n$ удовлетворяет условиям леммы 6.1. Очевидно, $b_2\ \xi', \xi_n$ непрерывно дифференцируема при $\xi' \neq 0$, $b_2\ \xi', \xi_n\ \in O'_0$ и $\partial b_2\ \xi', \xi_n\ /\partial \xi_k$ удовлетворяют оценкам

$$\frac{\partial b_2\ \xi', \xi_n}{\partial \xi_k} \leq \frac{C}{\xi'\ +\ \xi_n}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \qquad (6.35)$$

При $\xi_n >\ \xi'$ по формуле Лагранжа получим

$$b_2\ \xi', \xi_n\ | = \ b_2\ \frac{\xi'}{\xi_n}, +1\ - b_2\ 0, +1\ \leq \frac{C}{\theta \frac{\xi'}{\xi_n}\ + 1} \frac{\xi'}{\xi_n} \leq \frac{2C\ \xi'}{\xi'\ +\ \xi_n}. \quad (6.37)$$

Так как $b_2\ \xi', \xi_n\ \in O'_0$ и непрерывна при $\xi'\ +\ \xi_n\ > 0$, то при $\xi_n\ \leq\ \xi'$

$$b_2\ \xi', \xi_n\ \leq C \leq \frac{2C\ \xi'}{\xi'\ +\ \xi_n}. \qquad (6.38)$$

Из (6.36) – (6.38) следует, что

$$b_2\ \xi', \xi_n\ \leq \frac{C\ \xi'}{\xi'\ +\ \xi_n}. \qquad (6.39)$$

Таким образом, $b_2\ \xi', \xi_n$ удовлетворяет условию леммы 6.1 и, следовательно, функция $B_2^+\ \xi', \xi_n + i\tau\ = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_2\ \xi', \xi_n}{\xi_n + i\tau - \eta_n} d\eta_n$ аналитична по $\xi_n + i\tau$ при $\tau > 0$, непрерывна $\xi'\ +\ \xi_n\ + \tau > 0$, $\tau \geq 0$ и удовлетворяет неравенству

$$B_2^+\ \xi', \xi_n + i\tau\ \leq \frac{C_\epsilon\ \xi'\ ^{1-\epsilon}}{(\ \xi'\ +\ \xi_n\ + \tau)^{1-\epsilon}}, \quad \forall_\epsilon > 0. \qquad (6.40)$$

Аналогично функция $B_2^-(\xi',\xi_n+i\tau)=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_2(\xi',\xi_n)}{\xi_n+i\tau-\eta_n}d\eta_n$ аналитична по $\xi_n+i\tau$ при $\tau<0$, непрерывна при $|\xi'|+|\xi_n|+\tau>0,\ \tau\leq 0$ и удовлетворяет оценке вида (6.40) с заменой τ на $|\tau|$. Отметим, что

$$ord_{\xi,\tau}B_2^+(\xi',\xi_n+i\tau)=ord_{\xi,\tau}B_2^-(\xi',\xi_n+i\tau)=0.$$

В силу (5.31)

$$b_2(\xi',\xi_n)=\ln A_2(\xi',\xi_n)=B_2^+(\xi',\xi_n+i0)+B_2^-(\xi',\xi_n-i0). \qquad (6.41)$$

Следовательно,

$$A_2(\xi',\xi_n)=e^{B_2^-(\xi',\xi_n-i0)}e^{B_2^+(\xi',\xi_n+i0)}. \qquad (6.42)$$

В силу (6.26),(6.27),(6.31),(6.32) и (6.42) имеем

$$A(\xi',\xi_n)=A_-(\xi',\xi_n)A_+(\xi',\xi_n), \qquad (6.43)$$

где

$$A_+(\xi',\xi_n)=(\xi_n+i|\xi'|)^{\frac{\alpha+i\beta}{2}+m+\gamma}e^{B_2^+(\xi',\xi_n+i0)}, \qquad (6.44)$$

$$A_-(\xi',\xi_n)=\alpha_1(\xi_n-i|\xi'|)^{\frac{\alpha+i\beta}{2}-m-\gamma}e^{B_2^-(\xi',\xi_n-i0)}. \qquad (6.45)$$

Функции $A_\pm(\xi',\xi_n)$ удовлетворяют всем условиям однородной факторизации, причем $A_+(0,+1)=1$ и $x=ord_\xi A_+(\xi',\xi_n)=\frac{\alpha+i\beta}{2}+m+\gamma$.

Докажем теперь единственность факторизации при условии нормировки (6.6). Пусть

$$A(\xi',\xi_n)=A_-^{(1)}(\xi',\xi_n)A_+^{(1)}(\xi',\xi_n) \qquad (6.46)$$

некоторая другая однородная факторизация $A(\xi',\xi_n)$, причем $A_+^{(1)}(0,+1)-1, ord_\xi A_+^{(1)}(\xi',\xi_n)=x^{(1)}$. Тогда при $\xi'\neq 0$

$$\frac{A_+(\xi',\xi_n)}{A_+^{(1)}(\xi',\xi_n)}=\frac{A_-^{(1)}(\xi',\xi_n)}{A_-(\xi',\xi_n)} \qquad (6.47)$$

представляет собой аналитическую по $\xi_n+i\tau$ функцию во всей плоскости $\xi_n+i\tau$, имеющую степенной порядок роста по $\xi_n+i\tau$ и не имеющую нулей. Следовательно, по теореме Лиувилля $\frac{A_+(\xi',\xi_n)}{A_+^{(1)}(\xi',\xi_n)}=C(\xi')\neq 0$. Устремляя ξ_n к $+\infty$, получим

$$C(\xi')=\lim_{\xi_n\to+\infty}\frac{A_+(\xi',\xi_n)}{A_+^{(1)}(\xi',\xi_n)}=\lim_{\xi_n\to+\infty}\frac{\xi_n^{x}A_+(\frac{\xi'}{\xi_n},+1)}{\xi_n^{x}A_+^{(1)}(\frac{\xi'}{\xi_n},+1)}. \qquad (6.48)$$

Так как предел в (6.48) существует и отличен от нуля и бесконечности, то $x=x^{(1)}$ и, следовательно, $C(\xi')=\frac{A_+(0,+1)}{A_+^{(1)}(0,+1)}=1$. Таким образом, $A_+(\xi',\xi_n)\equiv A_+^{(1)}(\xi',\xi_n)$ и $A_-(\xi',\xi_n)\equiv A_-^{(1)}(\xi',\xi_n)$.

Теорема 6.1 доказана.

2. Формула для индекса факторизации. Порядок однородности $x=x_1+ix_2$ функции $A_+(\xi',\xi_n)$ называется индексом факторизации эллиптического символа $A(\xi)\in O_{\alpha+i\beta}^{\infty}$. В силу (6.44) $x=\frac{\alpha+i\beta}{2}+m+\gamma$, где $\gamma=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, вообще говоря, комплексное число, $\gamma=\gamma_1+i\gamma_2$. Отметим, что $\gamma_2=-\frac{1}{2\pi i}\ln|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}|$. Так как

$$A(\xi',\xi_n)=|\xi|^{\alpha+i\beta}\left(\frac{\xi_n+i|\xi'|}{\xi_n-i|\xi'|}\right)^{m+\gamma}\alpha_1A_2(\xi',\xi_n) \qquad (6.49)$$

и $\frac{1}{2\pi}\Delta\arg\left(\frac{\xi_n-i|\xi'|}{\xi_n+i|\xi'|}\right)^{m+\gamma_1+i\gamma_2}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty}=m+\gamma_1$, то в силу (6.33)

$$\frac{1}{2\pi}\Delta argA(\xi',\xi_n)|\xi|^{-\alpha-i\beta}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty}=m+\gamma_1. \qquad (6.50)$$

Таким образом,

$$x = \frac{\alpha + i\beta}{2} + \frac{1}{2\pi}\Delta arg A\left(\xi', \xi_n\right)|\xi|^{-\alpha - i\beta}\Big|_{\xi_n = +\infty}^{\xi_n = -\infty} - \frac{i}{2\pi}\ln\left(\frac{A(0, -1)}{A(0, +1)}\right). \quad (6.51)$$

Укажем некоторые примеры вычисления индекса факторизации эллиптического символа.

Пример 6. 1. Символ $A(\xi) \in O_{\alpha}^{\infty}, \alpha$— вещественное, называется сильно эллиптическим, если

$$A(\xi) = A_1(\xi) + iA_2(\xi), \quad (6.52)$$

где $A(\xi) \in O_{\alpha}^{\infty}$ — вещественные символы, $i = 1{,}2$ и

$$A_1(\xi) \neq 0, \qquad \forall \xi \neq 0. \quad (6.53)$$

При любом фиксированном $\xi' \neq 0$ и изменяющемся от +∞ до —∞, функция $A(\xi)|\xi|^{-\alpha}$описывает контур в комплексной плоскости, целиком лежащий в правой полуплоскости и соединяющий точки $A(0, +1)$ и $A(0, -1)$.Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\Delta arg A\left(\xi', \xi_n\right)|\xi|^{-\alpha}\Big|_{\xi_n = +\infty}^{\xi_n = -\infty} = \frac{1}{2\pi}\left(arg A(0, -1) - \arg(0, +1)\right).$$

Таким образом, в силу (6.51)

$$x = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\pi}\left(arg A(0, -1) - \arg(0, +1)\right) - \frac{i}{2\pi}\ln\left|\frac{A(0, -1)}{A(0, +1)}\right| =$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{A(0, -1)}{A(0, +1)}\right), \quad (6.54)$$

где — π/2 < arg A (0, ± 1) < π/2. Если, в частности, A (0, — 1) = A (0, +1), то x= α/2.

Пример 6.2. Пусть $A(\xi) \in O_{\alpha + i\beta}^{\infty}$ — четный эллиптический символ, т.е.

$A(\xi) = A(-\xi)$.Покажем, что при $n \geq 3$ индекс факторизации $A(\xi', \xi_n)$ равен (α+iβ)/2. Так как при $n \geq 3$ сфера | ξ' | = 1 связна, то

$$\Delta arg A(\xi', \xi_n)|\xi|^{-\alpha-i\beta}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty} = \Delta arg A(-\xi', \xi_n)|\xi|^{-\alpha-i\beta}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty} \quad (6.54')$$

В силу четности $A(\xi', \xi_n)$

$$\Delta arg A(-\xi', \xi_n)|\xi|^{-\alpha-i\beta}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty} = \Delta arg A(\xi', -\xi_n)|\xi|^{-\alpha-i\beta}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty} \quad (6.55)$$

Очевидно, при изменении направления отсчета приращение аргумента меняет знак. Следовательно, в силу (6. 54') и (6. 55)

$$\Delta arg A(\xi', \xi_n)|\xi|^{-\alpha-i\beta}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty} = \Delta arg A(\xi', \xi_n)|\xi|^{-\alpha-i\beta}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty} =$$
$$-\Delta arg A(\xi', \xi_n)|\xi|^{-\alpha-i\beta}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty} \quad (6.56)$$

Таким образом, $\Delta arg A(\xi', \xi_n)|\xi|^{-\alpha-i\beta}\Big|_{\xi_n=+\infty}^{\xi_n=-\infty} = 0$, и в силу (6.51) x=(α+iβ)/2.

Пример 6. 3. Факторизация однородного эллиптического многочлена. Однородный многочлен $P(\xi) = \sum_{|k|=r} a_k \xi^k$ называется эллиптическим, если $P(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$. Следовательно, при $\xi' \neq 0$ у многочлена $P(\xi', \xi_n)$ нет действительных корней относительно переменной ξ_n. Обозначим через $P_+(\xi', \xi_n + i\tau)$ многочлен относительно $\xi_n + i\tau$, натянутый на корни многочлена $P(\xi', \xi_n + i\tau)$, лежащие в полуплоскости τ <0 при ξ' ≠ 0. Пусть для определенности $P_+(0, +1) = 1$. Аналогично пусть $P_-(\xi', \xi_n + i\tau)$ — многочлен, натянутый на корни $P(\xi', \xi_n + i\tau)$, лежащие в полуплоскости τ>0 при ξ' ≠0. Потребуем также, чтобы $P(0, +1) = P_-(0, +1)$. Тогда

$$P(\xi', \xi_n) = P_-(\xi', \xi_n + i\tau)P_+(\xi', \xi_n + i\tau) - \quad (6.57)$$

однородная факторизация $P(\xi', \xi_n)$. Пусть $n > 3$. Так как $P(-\xi) = (-1)^r P(\xi)$, то, как и при рассмотрении примера 6.2, доказывается, что $x = ord P_+(\xi) = r/2$. Отсюда вытекает, что r—четное число, r = 2m $ord_\xi P_+(\xi) = ord_\xi P_-(\xi) = m$.

Пример 6.4. Пусть n=2 и $P\ \xi\ =\ -\xi_1+\xi_2$, т.е $P\ \xi\ -$ символ оператора Коши—Римана $\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}$. Тогда при $\xi_1<\ 0$ факторизация $\xi_2-\xi_1$ имеет следующий вид: $P_+\ \xi',\xi_n\ =\xi_2-i\xi_1, P_-\ \xi',\xi_n\ =1$. При $\xi_1>0$ факторизации $\xi_2-\xi_1$ — имеет вид: $P_+\ \xi',\xi_n\ =1, P_-\ \xi',\xi_n\ \xi_2-i\xi_{1.}$ Таким образом, при $\xi_1<\ 0$ индекс факторизации равен 1, а при $\xi_1>0$ индекс факторизации равен 0. В дальнейшем в случае n=2 будем рассматривать лишь такие эллиптические символы, индекс факторизации которых не зависит от ξ_1.

§ 7. Псевдодифференциальные уравнения в полупространстве

1. Пусть A — псевдодифференциальный оператор (п. д. о.) с символом $A(\xi)\in S_\alpha^0$ (см. §3)$Au=\frac{1}{(2\pi)^n}\ {}_{-\infty}^{+\infty}A\ \xi\ u\ \ \xi\ e^{-i\ x,\xi}\ d\xi,$ (7.1)

где $u(x)\in S\ (R'')$. В этом параграфе, как и во всей первой части книги, рассматриваются символы $A(\xi)$, не зависящие от *x.* Предположим, что символ A (ξ) можно представить в следующем виде:

$A\ \xi\ \ =A_0\ \xi\ \ +A_1\ \xi$ (7.2)

где $A(\xi)\in O_{\alpha+i\beta}^\infty$ удовлетворяет оценке

$|A_1\ \xi\ \ \leq C\ \xi|^{\alpha-e}$при $\xi\ \geq N$ (7.3)

для некоторых e>0 и N. Как будет показано во второй части книги, для теории краевых задач в ограниченной области псевдо дифференциальный оператор A_1 с символом $A_1\ \xi$ играет подчиненную роль по сравнению с п. д.

о. A_0в том смысле, что постановка краевой задачи для п. д. о. А и условия ее нормальной разрешимости не зависят от A_1 и определяются лишь $A_0\ \xi$ — главной однородной составляющей символа $A\ \xi$. Поэтому в этой и следующей главе мы специальным образом выберем $A_1\ \xi$ так, чтобы п. д. о. А с символом $A\ \xi\ = A_0\ \xi\ + A_1\ \xi$ обладал более простыми по сравнению с $A_0\ \xi$ свойствами. Выбор $A_1\ \xi\ = 0$,т.е. $A\ \xi\ = A_0\ \xi$ при всех ξ не вполне удобен, так как при α<0 функция $A_0\ \xi$ неограничена в окрестности ξ = 0 и, следовательно, п. д. о. A_0 неограничен из $H_s(R^n)$ в $H_{s-\alpha}(R^n)$ при любом s. В случае, когда α>0 и $A_0\ \xi\ \neq 0$ при ξ≠0, неограниченным в пространствах $H_s(R^n)$ становится оператор A_0^{-1}с символом $A_0^{-1}\ \xi$.

Пусть $\omega = \frac{\xi'}{\xi'}$. Для любой функции $A(\xi) \in O^{\infty}_{\alpha+i\beta}$ обозначим через A_0(ξ) функцию

$$A_0\ \xi', \xi_n\ = A_0\ (1 + \ \xi'\ \ \omega, \xi_n). \qquad (7.4)$$

Пусть $A_1\ \xi', \xi_n\ = A_0\ \xi', \xi_n\ - A_0\ \xi', \xi_n$. Покажем, что $A_1\ \xi', \xi_n$, у удовлетворяет оценке (7. 3). По формуле Лагранжа имеем

$$A_1\ \xi', \xi_n\ = A_0\ \xi', \xi_n\ - A_0\ \xi', \xi_n\ \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial A_0\ \xi' + \theta\omega, \xi_n}{\partial \xi_k} \leq$$

$$\leq C(\ \xi' + \theta\omega\ +\ \xi_n\ )^{\alpha-1} \qquad (7.5)$$

где 0<θ<1. Пусть $\xi'\ +\ \xi_n\ \geq 2$. Тогда

$$\frac{1}{2}\ \xi'\ +\ \xi_n\ \leq\ \xi'\ +\ \xi_n\ - 1 \leq\ \xi' + \theta\omega\ +\ \xi_n\ \leq\ \xi'\ + 1 +\ \xi_n\ \leq$$

$$\leq 2\ \ \xi'\ +\ \xi_n\ .$$

Следовательно, при любом знаке $\alpha - 1$ $(\ \xi' + \theta\omega\ +\ \xi_n\ )^{\alpha-1} \leq C(\ \xi'\ +\ \xi_n\ )^{\alpha-1}$. Таким образом,

$$A_1\ \xi', \xi_n\ \leq C(\ \xi'\ +\ \xi_n\ )^{\alpha-1} \text{ при } \xi'\ +\ \xi_n\ \geq 2 \qquad (7.6)$$

Отметим следующую простую лемму об эллиптических п. д. о. с символами $A\ \xi', \xi_n$.

Лемма 7.1. Пусть $A_0(\xi', \xi_n) \in O^{\infty}_{\alpha+i\beta}$*— эллиптический символ,* $A_0\ \xi', \xi_n\ = A_0\ \ 1+\ \xi'\ \ \omega, \xi_n$ *. Тогда при любом s псевдодифференциальное уравнение (п. д. у.)*

$$A_0 u = f, \qquad \forall f \in H_{s-\alpha}(R^n), \tag{7.7}$$

однозначно разрешимо в $H_s(R^n)$.

Доказательство. Так как $A_0\ \xi', \xi_n$ удовлетворяет оценкам (6. 3), то для $A_0\ \xi', \xi_n$ имеют место оценки

$$C_2(1+\ \xi'\ +\ \xi_n\ )^{\alpha} \leq |, A_0\ \xi', \xi_n\ | \leq C_1(1+\ \xi'\ +\ \xi_n\ )^{\alpha} \tag{7.8}$$

В силу леммы 4.4 оператор A_0, определенный на функциях из S по формуле вида (7. 1), продолжается до ограниченного оператора из $H_s(R^n)$ в $H_{s-\alpha}(R^n)$ при любом s. После преобразования Фурье по x уравнение (7. 7) приобретает вид

$$A_0\ \xi\ u\ \xi\ = f\ \xi\ , \qquad f\ \xi\ \in H_{s-\alpha}(R^n). \tag{7.9}$$

Очевидно, $u\ \xi\ = \frac{f\ \xi}{A_0\ \xi}$ — единственное решение уравнения (7. 9), причем в силу (7. 8)

$$|\ u\ |_8^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\ \xi\ )^{2s} \frac{|f\ \xi\ |^2}{|A_0\ \xi\ |^2} d\xi \leq C\ f\ {}^2_{8-\alpha} \tag{7.10}$$

Таким образом, п. д. о.A_0^{-1} с символом .$A_0^{-1}\ \xi$ ограничен из $H_{s-\alpha}(R^n)$ в $H_s(R^n)$ и является обратным к A_0.

2. Перейдем теперь к исследованию эллиптических псевдодифференциальных уравнений в полупространстве. Пусть A_0 — п. д.

о. с символом $A_0(\xi)$, где $A_0(\xi',\xi_n) \in O^{\infty}_{\alpha+i\beta}$. Псевдодифференциальным уравнением в полупространстве R^n_+ называется уравнение вида

$$pA_0u_+ = f, \qquad (7.11)$$

где, $u_+ \in H^+_s(R^n)$, т. е. $u_+ = 0$ при $x_n < 0$, $f \in H_{s-\alpha}(R^n_+)$, p — оператор сужения на полупространство R^n_+. Таким образом, уравнение $A_0u_+ = f$ выполняется при $x_n > 0$. Оператор, определяемый уравнением (7.11), ограничен при любом s из H^+_s в $H_{s-\alpha}(R^n_+)$. Действительно, если $u_+ \in H^+_s$, то $A_0u_+ \in H_{s-\alpha}(R^n)$ в силу леммы 4. 4. Следовательно, по определению пространства $H_{s-\alpha}(R^n_+)$, $pA_0u_+ \in H_{s-\alpha}(R^n_+)$ причем $\|pA_0u_+\|^+_{s-\alpha} \leq$ $\|A_0u_+\|_{s-\alpha} \leq C\|u_+\|_s$.

Пусть $A_0(\xi',\xi_n) \in O^{\infty}_{\alpha+i\beta}$ — эллиптический символ и

$$A_0(\xi',\xi_n) = A_-(\xi',\xi_n)A_+(\xi',\xi_n) - \qquad (7.12)$$

однородная факторизация $A_0(\xi',\xi_n)$, $x = ord_\xi A_+(\xi',\xi_n)$ — индекс факторизации $A_0(\xi',\xi_n)$.

Найдем решение уравнения (7. 11), принадлежащее пространству H^+_s, предполагая, что правая часть $f \in H_{s-\alpha}(R^n_+)$. Для определения u_+ применим метод факторизации, или метод Винера—Хопфа.

Пусть существует решение $u_+ \in H^+_s$ уравнения (7.11) при $f \in H_{s-\alpha}(R^n_+)$ и пусть $lf \in H_{s-\alpha}(R^n)$— произвольное продолжение $f \in H_{s-\alpha}(R^n)$ с R^n_+ на R^n.

Обозначим

$$u_- = lf - A_0u_+ \qquad (7.13)$$

Так как , $lf \in H_{s-\alpha}(R^n)$ и $A_0u_+H_{s-\alpha}(R^n)$, то и $u_- \in H_{s-\alpha}(R^n)$. Кроме того, в силу (7.11) $u_- = 0$ при $x_n > 0$. Следовательно, $u_- \in H^-_{s-\alpha}(R^n)$.

Сделаем в (7. 13) преобразование Фурье по x. Получим

$A_0(\xi)(u_+(\xi)+u_-(\xi))=lf(\xi).$ (7.14)

Подставим в (7.14) $A_0(\xi',\xi_n)=A_-(\xi',\xi')A_+(\xi',\xi_n)$, где $A_\pm(\xi',\xi_n)=A_\pm((1+|\xi'|)\omega,\xi_n)$, и умножим (7.14) на $A_-^{-1}(\xi',\xi_n)$. Получим

$A_+(\xi)u_+(\xi)+A_-^{-1}(\xi)u_-(\xi)=A_-^{-1}(\xi)lf(\xi).$ (7.15)

Обозначим

$v_+(\xi)=A_+(\xi)u_+(\xi),\qquad v_-(\xi)=A_-^{-1}(\xi)u_-(\xi)$ (7.16)

$g(\xi)=A_-^{-1}(\xi)lf(\xi)$ (7.17)

В силу теоремы 4. 4 и леммы 4. 4

$v_+(\xi)\in H^+_{s-Rex}, v_-(\xi)\in H^-_{s-Rex}, g(\xi)\in H_{s-Rex},$ (7.18)

так как $ord_\xi A_+(\xi)=x, ord_\xi A_-^{-1}(\xi)=x-\alpha-i\beta.$ Уравнение (7.15) в новых обозначениях приобретает вид

$v_+(\xi)+v_-(\xi)=g(\xi).$ (7.19)

Предположим, что

$Rex-s\neq\frac{1}{2}\ \mathrm{mod}k,$ (7.20)

где к — произвольное целое число. Тогда найдется такое целое число m, что

$Rex-s=m+\delta,$ (7.21)

где | δ | < 1/2.

Рассмотрим отдельно три случая: m = 0, m>0, m< 0.

3. Пусть m= 0, т. е. Rex — s = δ, | δ | < 1/2. Тогда в (7.19) $v_\pm(\xi)\in H^\pm_{s-Rex}=H^\pm_{-\delta}$, $g(\xi)\in H_{-\delta.}$ Так как | δ | < 1/2, то в силу леммы 5.4 разложение (7. 19) однозначно, причем

$v_+ = \Pi^+ g, v_- = \Pi^- g.$ (7.22)

Из (7. 16), (7. 17) и (7. 22) следует, что преобразование Фурье любого решения $u_+ \ x \ \in H_s^+$уравнения (7.11) имеет вид

$u_+ \ \xi \ = A_+^{-1} \Pi^+ A_-^{-1} lf$ (7.24)

Отметим, что (7.23) не зависит от выбора продолжения lf. Действительно, пусть $l_1 f \in H_{s-\alpha}(R^n)$ — другое продолжение $f \in \ H_{s-\alpha} \ R_+^n$, т.е. $p \, l_1 f = f$. Так как $f = lf - \ l_1 f \in H_{s-\alpha}^- \ R^n$, то в силу теоремы 4.4 $A_-^{-1} \ \xi \ \times f_- \ \xi \ \in H_{s-Rex}^- = H_{-\delta}^-$. Из леммы 5. 4 вытекает, что $\Pi^+ A_-^{-1} \ \xi \ f = 0$. Таким образом

$\Pi^+ A_-^{-1} lf = \Pi^+ A_-^{-1} lf.$ (7.24)

Если, в частности, f = 0, то можно выбрать If = 0, и, следовательно, в силу (7.23) $u_+ = 0$. Таким образом, решение уравнения (7.11) единственно в случае Rex — s = δ, |δ|<1/2. В дальнейшем всегда будем выбирать такое продолжение lf, чтобы

$lf \ _{s-\alpha} \leq 2 \ f \ _{s-\alpha}^{+}.$ (7.25)

Из (7. 23), (7. 25), леммы 4. 4 и ограниченности оператора Π^+ в $H_{-\delta} = H_{s-Rex}$ вытекает следующая оценка:

$u_+ \ _s = \ u_+ \ _s \leq C \ \Pi^+ A_-^{-1} lf \ _{s-Rex} \leq C \ A_-^{-1} lf \ _{s-Rex} \leq C \ lf \ _{s-\alpha} \leq$

$\leq C \ f \ _{s-\alpha}^{+}$ (7.26)

Отметим, что при любом $f \in \ H_{s-\alpha} \ R_+^n \ u_+ = F^{-1} A_+^{-1} \Pi^+ A_-^{-1} lf$ является решением уравнения (7.11). Действительно, так как $\Pi^+ A_-^{-1} lf = A_-^{-1} lf - \Pi^- A_-^{-1} lf$, то

$$A_0 \ \xi \ u_+ \ \xi \ = A_- \ \xi \ \Pi^+ A_-^{-1} lf = lf - A_- \Pi^- A_-^{-1} lf.$$

В силу теорем 4. 4 и 5. 1$A_- \ \xi \ \Pi^- A_-^{-1} lf \in H_{s-\alpha}^-$. Следовательно, $pA_0 u_+ = p(lf - F^{-1} A_- \ \xi \ \Pi^- A_-^{-1} lf = f$, т.е. $u_+ = F^{-1} A_+^{-1}(\xi) \Pi^+ A_-^{-1} lf$ — решение уравнения (7.11), принадлежащее пространству H_s^+ .

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7.1. Пусть $Re\,æ - s = \delta$, $|\delta|<1/2$. Тогда уравнение (7.11) при любой $f \in H_{s-\alpha}(R_+^n)$ имеет единственное решение $u_+ \in H_s^+$.

Пример 7.1. Пусть $\Lambda^{2æ}(\xi', \xi_n, \tau) = (\xi_n^2 + (|\xi'| + \tau)^2)^{æ}$, где $\tau > 0$, $æ$ —произвольное действительное число. Обозначим через $\Lambda^{2æ}(D', D_n, \tau)$ п. д. о. с символом $\Lambda^{2æ}(\xi', \xi_n, \tau)$. Факторизация символа $\Lambda^{2æ}(\xi', \xi_n, \tau)$ имеет следующий вид: $\Lambda^{2æ}(\xi', \xi_n, \tau) = \Lambda_-^{æ}(\xi', \xi_n, -i\tau)\Lambda_+^{æ}(\xi', \xi_n, +i\tau)$, где $\Lambda_\pm^{æ}(\xi', \xi_n, \pm i\tau) = (\xi_n \pm i|\xi'| \pm i\tau)^{æ}$ (см. пример 4. 5). Таким образом, индекс факторизации $\Lambda^{2æ}(\xi', \xi_n, \tau)$ равен $æ$, Рассмотрим п. д. у. в R_+^n

$$p\Lambda^{2æ}(D', D_n, \tau)u_+ = f(x), \quad f(x) \in H_{s-2æ}^+(R_+^n) \qquad (7.27)$$

предполагая, что $|s - æ| < 1/2$. В силу теоремы 7. 1 существует единственное решение $u_+ \in H_s^+$ уравнения (7.27), и это решение имеет вид

$$u_+(x) = F^{-1}\Lambda_+^{-æ}(\xi', \xi_n, +i\tau)\Pi^+\Lambda_-^{-æ}(\xi', \xi_n, -i\tau)lf = $$
$$= \Lambda_+^{-æ}(D', D_n, +i\tau)\theta + \Lambda_-^{-æ}(D', D_n, -i\tau)lf, \qquad (7.28)$$

где $\Lambda_\pm^{-æ}(D', D_n, \pm i\tau)$ — п. д. о. с символами $\Lambda_\pm^{-æ}(\xi', \xi_n, \pm i\tau)$. С помощью примера 4. 5 можно получить выражение для (7. 28) в виде интегродифференциальных операторов. Пусть, например, $æ > 0, lf \in S(R^n)$. Тогда в силу (4.68) и (4.69)

$$u_+(x) =$$
$$= -\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^n\Gamma^2(æ)}\int_0^{x_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x_n - y_n)^{æ}e^{-(x_n-y_n)\tau}}{\left((x_n - y_n)^2 + |x' - y'|^2\right)^{\frac{n}{2}}} \times$$
$$\times \left(\int_{y_n}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y_n - z_n)^{æ}e^{-(z_n-y_n)\tau}f(z', z_n)}{\left((y_n - z_n)^2 + |y' - z'|^2\right)^{\frac{n}{2}}}dz'dz_n\right)dy'dy_n. \qquad (7.28')$$

Отметим, что формулы (7.28) и (7. 28') сохраняют смысл и при τ = 0, $lf \in S(R^n)$.

4. Пусть $Rex - s = m + \delta,\ \ \delta < \frac{1}{2}, m > 0$ — целое. Тогда в (7.19)

$v_{\pm}(\xi) \in H^{\pm}_{s-Rex} = H^{\pm}_{-m-\delta}, g(\xi) \in H_{-m-\delta}$. Так как $-m-\delta < 1/2$, то к $g(\xi)$ неприменима лемма 5.4. Обозначим через $Q(\xi',\xi_n)$ — произвольный многочлен по ξ_n степени m: $Q(\xi',\xi_n) = \xi_n^m + \sum_{k=1}^{m} q_k(\xi')\xi_n^{k-1}$, где $ord_{\xi'} q_k(\xi') = m - k + 1$ и $Q(\xi',\xi_n) \neq 0$ при $|\xi'| + |\xi_n| > 0$. Пусть $Q(\xi',\xi_n) = Q((1 + |\xi'|)\omega, \xi_n)$. В силу леммы 4.4 $Q^{-1}(\xi) g(\xi) \in H_{-s}$ и, применяя к $Q^{-1}(\xi) g(\xi)$ лемму 5.4, получим

$$Q^{-1}(\xi) g(\xi) = \Pi^{+} Q^{-1}(\xi) g(\xi) + \Pi^{-} Q^{-1}(\xi) g(\xi), \qquad (7.29)$$

где $\Pi^{\pm} Q^{-1} g \in H^{\pm}_{s}$. Умножим (7.29) на $Q(\xi)$. Тогда

$$g(\xi) = Q(\xi)\,\Pi^{+} Q^{-1} g + Q(\xi)\,\Pi^{-} Q^{-1} g \qquad (7.30)$$

причем в силу теоремы 4.4 $Q(\xi)\,\Pi^{\pm} Q^{-1} g \in H^{\pm}_{-m-\delta}$.

Подставим (7. 30) в (7. 19) и перенесем «плюсовые» функции в одну часть равенства, а «минусовые» в другую. Получим

$$v_{+}(\xi) - Q(\xi)\,\Pi^{+} Q^{-1} g = Q(\xi)\,\Pi^{-} Q^{-1} g - v_{-}(\xi) \qquad (7.31)$$

Левая часть равенства (7. 31) принадлежит $H^{+}_{-m-\delta}$, а правая часть —$H^{-}_{-m-\delta}$.

Следовательно, в силу теоремы 5. 2 (теоремы Лиувилля) (7. 31) равняется многочлену по ξ_n степени $m - 1$

$$v_{+}(\xi) - Q(\xi)\,\Pi^{+} Q^{-1} g = \sum_{k=1}^{m} c_k(\xi')\,\xi_n^{k-1}, \qquad (7.32)$$

где $c_k(\xi')\ H_{s_k}(R^{n-1}), s_k = -m - \delta + k - \frac{1}{2} = s - Rex - \frac{1}{2}, 1 \le k \le m.$

Таким образом, в силу (7.32), (7.16) и (7.17) решение $u_{+}(x)$ уравнения (7.11) имеет следующий вид:

$$u_+(\xi) = A_+^{-1} Q \Pi^+ Q^{-1} A_-^{-1} lf + \frac{\sum_{k=1}^{m} c_k(\xi')\xi_n^{k-1}}{A_+(\xi)} \qquad (7.33)$$

Аналогично (7. 24) проверяется, что (7. 33) не зависит от выбора продолжения lf (x). Оценим (7. 33).

В силу (7. 25), леммы 4. 4 и теоремы 5. 1

$$\left\| \frac{\sum_{k=1}^{m} c_k(\xi')\xi_n^{k-1}}{A_+(\xi)} \right\|_s^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|c_k(\xi')\xi_n^{k-1}|^2 (1 + |\xi'| + |\xi_n|)^{2s}}{|A(\xi', \xi_n)|^2} d\xi' d\xi_n \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} |c_k(\xi')|^2 (1 + |\xi'|)^{2sk} d\xi' = C \sum_{k=1}^{m} \|c_k\|_{s_k}^2, \qquad (7.35)$$

где $s_k = s - Rex - \frac{1}{2}, 1 \leq k \leq m$. В силу (7.34) и (7.35)

$$\|u_+\|_s \leq C \left(\|f\|_{s-\alpha}^+ + \sum_{k=1}^{m} \|c_k\|_{s_k} \right), s_k = s - Rex - \frac{1}{2}. \qquad (7.36)$$

Проверим, что при $f \in H_{s-\alpha}(R_+^n)$ и произвольных $c_k' \in H_{s_k}(R^{n-1})$ функция, $u_+(x) = F^{-1}u_+(\xi)$, где $u_+(x)$ задается формулой (7.33), удовлетворяет уравнению (7. 11). Имеем

$$A_0 u_+(\xi) = A_- Q \Pi^+ Q^{-1} A_-^{-1} lf + A_- \sum_{k=1}^{m} c_k(\xi')\xi_n^{k-1} =$$

$$= A_- Q \left(Q^{-1} A_-^{-1} lf - \Pi^- Q^{-1} A_-^{-1} lf \right) + A_- \sum_{k=1}^{m} c_k(\xi')\xi_n^{k-1} =$$

$$= lf(\xi) - w_-(\xi), \qquad (7.37)$$

где

$$w_-(\xi) = -A_- Q \Pi^- Q^{-1} A_-^{-1} lf + A_- \sum_{k=1}^{m} c_k(\xi')\xi_n^{k-1}. \qquad (7.38)$$

В силу теорем 4. 4 и 5. 1 $w_-(\xi) \in H^-_{s-\alpha}$. Следовательно, $pA_0u_+ = f$, так как $pw_- = 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7.2. Пусть $Re\,x — s = m + \delta, m > 0$ — целое, $|\delta| < 1/2$. Тогда уравнение (7.11) при любой $f \in H_{s-\alpha}(R^n_+)$ имеет решение $u_+(x) = F^{-1}u_+(\xi) \in H^+_s$, где $u_+(\xi)$ определяется формулой (7.33). Это решение неединственно и зависит от m произвольных функций $c_k(x') \in H_{s_k}(R^{n-1}), s_k = s - Re\,x + k - 1/2, 1 \le k \le m.$ Имеет место априорная оценка (7.36).

5. **Псевдодифференциальные операторы типа потенциала (кограничные операторы).** Прежде чем перейти к случаю $Re\,x — s = m + \delta, m < 0$ $|\delta|$ <1/2, изучим некоторый класс операторов, действующих из пространства функций, заданных при $x_n = 0$, в пространство функций в R^n_+ или в R^n. Пусть $C(\xi) \in S^0_\alpha$. Псевдодифференциальным оператором типа потенциала называется оператор, определяемый по формуле

$$C(v(x') \times \delta(x_n)) = F^{-1}(C(\xi', \xi_n)v(\xi')), \forall(x') \in C^\infty_0(R^{n-1}), \qquad (7.39)$$

где F^{-1} — обратное преобразование Фурье регулярного функционала $C(\xi', \xi_n)v(\xi')$. Так как $F(v(x') \times \delta(x_n)) = v(\xi')$ и $\int_{-\infty}^{\infty}|v(\xi')|^2(1 + |\xi'| + |\xi_n|)^{-1-2\varepsilon}d\xi' d\xi_n < \infty$, то $v(x') \times \delta(x_n) \in H_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(R^n), \forall_\varepsilon > 0$. Таким образом, формула (7. 39) представляет собой результат применения п. д. о. С к обобщенной функции $v(x') \times \delta(x_n) \in H_{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(R^n)$. Аналогично (3. 7), если $\mathcal{A}$ —

произвольный функционал над $S(R^n)$, $a = F^{-1}\mathcal{A}$, то п. д. о. типа потенциала А с символом $\mathcal{A} \in S'$ определяется по формуле

$$A(v(x') \times \delta(x_n)) = F^{-1}(\mathcal{A}v(\xi')) = a * (v(x') \times \delta(x_n)),$$

$\forall v\ x' \ \in C_0^\infty\ R^{n-1}$ (7.40)

Отметим, что свертка функционала $a \in S'$ с финитным функционалом $v\ x' \ \times \delta\ x_n$ определена согласно п. 7 § 2.

Пример 7.2. Пусть P_n— п. д. о. с символом $\xi_n/|\xi|^2, n \geq 2$. Тогда в силу (3. 16) и (3.42)

$$P_n\ v\ x' \ \times \delta\ x_n \ = -\frac{i\Gamma\ \frac{n}{2}}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{R^{n-1}} \frac{x_n v\ y'\ dy'}{x_n^2 + (x'-y')^2\ ^{\frac{n}{2}}}, \qquad (7.41)$$

т.е. $iP_n\ v\ x' \ \times \delta\ x_n$ является потенциалом двойного слоя для уравнения Лапласа.

Если $\Lambda_+^x\ D', D_n, +i\tau$ – п. д. о. с символом $\Lambda_+^x\ \xi', \xi_n, +i\tau\ , \tau \geq 0, x < 0$, то в силу (4.68)

$$\Lambda_+^x\ D', D_n, +i\tau\ \ v\ x' \ \times \delta\ x_n \ = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}x}\Gamma\ \frac{n}{2}}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(-x)} \times \int_{R^{n-1}} \frac{\theta(x_n)x_n^{\ x}\ e^{-x_n\tau}v(y')}{x_n^2 + (x'-y')^2\ ^{\frac{n}{2}}} dy',$$

$$x < 0. \qquad (7.42)$$

6. Пусть $Rex — s = m + \delta, m < 0$— целое, |δ|<1/2. Тогда $s - a = Rex — \delta - m - \alpha > Rex - \delta - \alpha$. Следовательно, если $f \in H_{s-\alpha}\ R_+^n$, то и подавно $f \in H_{Rex-\delta-\alpha}\ R_+^n$. В силу теоремы 7. 1 существует единственное решение $w_+ \in H_{Rex-\delta}$ уравнения $pA_0u_+ = f$, причем имеет вид

$$w_+\ \xi \ = -A_+^{-1}\ \xi\ \Pi^+ A_-^{-1}\ \xi\ lf\ \xi\ . \qquad (7.43)$$

Так как $A_-^{-1}\ \xi\ lf\ \xi \ \in H_{s-Rex} = H_{\ m\ -\delta}$, то в силу формулы (5.36) разложения интеграла типа Коши $w_+\ \xi \ = \sum_{k=1}^{|m|} \frac{i\Pi' \Lambda_+^{k-1} A_-^{-1} lf}{A_+(\xi)\Lambda_+^k(\xi)} + \frac{1}{A_+(\xi)\Lambda_+^{|m|}} \times \Pi^+ \Lambda_+^{|m|} A_-^{-1} lf$. Обозначим

$$v_k\ \xi' \ = i\Pi' \Lambda_+^{k-1} A_-^{-1} lf, u_+(\xi) = A_+^{-1} \Lambda_+^{-\ m}\ \Pi^+ \Lambda_+^{\ m}\ A_-^{-1} lf, \qquad (7.44)$$

где $\Lambda_+ \ \xi \ = \xi_n + i \ \xi' \ + i, \quad \Pi' g = \frac{1}{2\pi} \ _{-\infty}^{\infty} g(\xi', \xi_n) d\xi_n$. Тогда

$$w_+ \ \xi \ = \ _{k=1}^{m} \frac{1}{A_+ \ \xi \ \Lambda_+^k} v \ \xi' \ + u_+ \ \xi \ , \tag{7.45}$$

Заключение

В этой работе мы рассмотрели пространства Шварца, а затем ввели определение обобщенных функций и их свойств через преобразование Фурье и его характеристики. Чтобы войти в важный предмет (псевдо-дифференциальный оператор) и теорию символов для этих операторов, которые играют важную роль в нашем определении пространств Соболева, эллиптические символы, которые играют большую роль в решении граничных задач псевдо-дифференциального уравнения. наконец, удалось определить картину, существование и единство решения этих задач в положительной полуплоскости пространства R^{n}.

До сих пор молчаливо подразумевалось, что речь идет о ПДО на гладких поверхностях (многообразиях) или в областях, ограниченных

гладкими

поверхностями. Однако в математической физике, в механике и электродинамике сплошной среды, в различных разделах теории дифференциальных уравнений с частными производными, в теории приближенных методов возникают многочисленные задачи на негладких поверхностях и в областях с негладкой границей. Важный класс таких объектов составляют области с кус очно гладкой границей .

Литература

-диканский А.С. сопряженные задачи к эллиптическим псевдодифференциальным краевым задачам-докл.АН СССР.200.№ 5 (1971).1020-1023

-дынин А.С. к теории псевдодифференциальных оператеров на многообразии с краем - докл.АН СССР.186.№ 2 (1969).251-253

-шубин М.А. факторизация матриц .зависящих от параметра и эллиптические уравнения в полупространстве –матем.сб.85. № 1(1971).65-84

-*Boutet de monvel*. operateurs pseudo-differentiels et problems aux limites elliptiques-Ann. Inst .Fourier,1969(1970),19,N 2 ,169-268

- *Boutet de monvel*. Boundary problems for pseudo-differential operators-Acta.math,126,N1-2(1971),11-51

-*Hormander L.* pseudo-differential operators – Communs pure and Appl.math 18(1965), 501-517.(перевод в сб (псевдо-дифференциальные операторы) .М.изд-во (мир) 1967.

-*kohn J.J, .Nirenberg L.* on algebra of pseudo-differential operators-Communs pure and Appl.math 18(1965), 269-305.(перевод в сб (псевдо-дифференциальные операторы) .М.изд-во (мир) 1967.

-*Shamir E*. Elliptic systems of singular integral operators I.-Trans .Amer.Math.soc., 127(1967),107-124.