

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
(НИУ "БелГУ")

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ
НАУК

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**ДИФФУЗИОФОРЕТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ КРУПНЫХ
ИСПАРЯЮЩИХСЯ КАПЕЛЬ С ОДНОРОДНЫМ
ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ**

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 03.03.02 Физика
очной формы обучения, группы 07001310
Шостак Юлии Ивановны

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Малай Н.В.

Белгород 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
I. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия	6
II. Решение уравнений теплопроводности и диффузии	12
III. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления	19
IV. Вывод выражения для силы и скорости диффузиофореза крупной испаряющейся капли сферической формы. Анализ полученных результатов	24
Заключение	29
Литература	30

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В многокомпонентных газах с неоднородным распределением температуры и концентраций возникает упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярной природы. Их появление вызвано передачей не скомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. В частности, движение частиц относительно центра инерции неоднородной по составу газовой смеси при наличии градиентов относительных концентраций ее компонентов называется диффузиофоретическим. Скорость, которую приобретают частицы, когда сила вязкого сопротивления среды уравнивает диффузиофоретическую, называется скоростью диффузиофореза. Диффузиофоретическое движение происходит в каналах тепло- и массообменников, химических реакторов, зонах просветления облаков и туманов, окрестности вымывающих частицы капель, в устройствах, предназначенных для улавливания аэрозольных частиц и нанесения тонких покрытий [1,2]. В связи с этим значительный научный и практический интерес представляет вывод формул, позволяющих оценивать скорость диффузиофоретического переноса частиц.

В опубликованных до настоящего времени работах по теории диффузиофореза аэрозольных частиц сферической формы рассматривался диффузиофорез как при малых, так и значительных относительных перепадах температуры [3].

Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы T_{is} и температурой вдали от нее T_{∞} к последней. Относительный перепад температуры считается малым, если имеет место следующее неравенство $\frac{T_{is} - T_{\infty}}{T_{\infty}} \ll 1$, и значительным в противном случае, т.е. $\frac{T_{is} - T_{\infty}}{T_{\infty}} \sim 0(1)$.

В физике аэродисперсных систем классификацию частиц по размерам проводят из сравнения характерных размеров частицы (R) со средней длиной свободного пробега молекул газа (λ). Для классификации частиц по размерам применяют критерий Кнудсена: $Kn = \frac{\lambda}{R}$. Частицы называются крупными, если $Kn \leq 0,01$ и умеренно крупными при $0,01 \leq Kn \leq 0,3$.

Если на поверхности частицы происходит испарение (сублимация) или конденсация образующего их вещества, то такие частицы называют летучими. В случае отсутствия фазового перехода на поверхности частиц их называют нелетучими.

В дипломной работе рассматривается влияние нагрева поверхности на

диффузиофорез крупных испаряющихся капель, за счет внутренних источников тепла, однородно распределенные в их объеме при малых относительных перепадах температуры. В этом случае коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) можно считать зависящими от средней температуры поверхности капли, а газ рассматривать как несжимаемую среду.

Тема исследования. Диффузиофоретическое движения крупной испаряющейся капли.

Объектом исследования является изучение явления диффузиофореза в газообразной среде.

Предметом исследования: влияние нагрева поверхности на диффузиофорез крупных испаряющихся капель, за счет внутренних источников тепла, однородно распределенные в их объеме при малых относительных перепадах температуры.

Цель исследования – получить аналитические выражения для диффузиофоретической силы, действующей на крупную испаряющуюся каплю сферической формы и скорости ее диффузиофореза, с учетом внутренних источников тепла, однородно распределенные в ее объеме при малых относительных перепадах температуры.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие *задачи исследования:*

- изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в сферической системе координат;
- решить уравнения теплопроводности, диффузии и систему уравнений Навье-Стокса с соответствующими граничными условиями;
- получить аналитические выражения для диффузиофоретической силы, действующей на крупную испаряющуюся каплю сферической формы и скорости ее диффузиофореза, с учетом внутренних источников тепла, однородно распределенные в ее объеме при малых относительных перепадах температуры;
- провести качественный анализ влияния нагрева поверхности на силу и скорость диффузиофореза.

Научная новизна исследования. В дипломной работе изучается влияние средней температуры поверхности частицы незначительно отличающейся от

температуры окружающей ее бинарной газовой смеси на диффузиофореz крупной летучей капли.

Практическая значимость исследования заключается в том, что его материалы и выводы дополняют и углубляют исследования по данной проблеме и могут быть использованы при разработке общих курсов и факультативов по экологическим вопросам для школ, гимназий, лицеев.

Апробация исследования. Основные результаты докладывались на Международной научно-практической и научно-методической конференцию профессорского и преподавательского состава и аспирантов «Современные проблемы математики и механики» (г. Белгород, БУКЭП, 3 апреля 2017 г.).

Структура работы. Дипломная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы.

Глава I. Постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим сферическую испаряющуюся каплю радиуса R , взвешенную в неоднородной по концентрации бинарной газовой смеси с температурой T_e , плотностью ρ_e , теплопроводностью λ_e и вязкостью μ_e при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности. Внутри капли действуют однородно (равномерно) распределенные в ее объеме тепловые источники плотность q_i . Наличие источников тепла внутри капли приводит к тому, что средняя температура поверхности испаряющейся капли незначительно отличается от температуры окружающей ее газообразной среды. Нагрев поверхности капли может происходить, например, за счет поглощения электромагнитного излучения. Внутренние источники тепла - это модельное представление, удобное для описания реальных процессов, сопровождающихся выделением тепла в объеме испаряющейся капли. Однородный нагрев поверхности капли вызывает, с одной стороны, усиление испарения, что сказывается на процессе теплообмена и массообмена между каплей и окружающей средой и так называемого реактивного эффекта; с другой стороны, влияет на величину теплового и диффузионного скольжения, а также и на термокапиллярный дрейф, связанный с возникновением касательных напряжений на поверхности капли за счет изменения коэффициента поверхностного натяжения σ с температурой T_i (эффект Марангони). Все это важно как при теоретическом описании движения испаряющейся капли, так и для практических приложений. Таким образом, с помощью внутренних источников тепла мы можем влиять на величину силы и скорости диффузиофореза.

С помощью внешних источников в объеме бинарной газовой смеси поддерживается постоянный малый градиент относительных концентраций ее компонентов, которые мы обозначим, соответственно, $\nabla C_{1\infty}$ и $\nabla C_{2\infty}$. Здесь $C_1 = \frac{n_1}{n_e}$, $C_2 = \frac{n_2}{n_e}$, $C_1 + C_2 = 1$, $n_e = n_1 + n_2$ - полное количество молекул в единице объема, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$ - плотность бинарной газовой смеси, $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, где n_1 , m_1 и n_2 , m_2 - соответственно, концентрация и масса молекул первого и второго компонента бинарной газовой смеси. Вещество, из которого состоит капля, испытывает фазовый переход на сферической границе раздела капля - внешняя среда.

Предположим (для упрощения рассмотрения), что один из компонентов бинарной внешней смеси по физико-химическому составу совпадает с веществом капли. Таким образом, окружающая испаряющуюся каплю газообразная среда состоит из двух компонентов: основной (несущей) компоненты, ко-

торую мы обозначим через C_2 граничная поверхность для ней непроницаема и компоненты C_1 , испытывающий фазовый переход на поверхности капли. Поскольку $C_1 + C_2 = 1$, то $\nabla C_1 = -\nabla C_2$ и, следовательно, для описания полей относительных концентраций бинарной газовой смеси достаточно описать одну из компонент смеси, например, первую компоненту (решить уравнение диффузии с соответствующими граничными условиями).

Заданный вдали от испаряющейся капли (на бесконечности) малый постоянный градиент относительной концентрации $\nabla C_{1\infty}$ вызывает неоднородное распределение концентрации в окрестности капли, что приводит к диффузиофоретическому движению капли. Индексы "e" и "i" здесь и далее будем относить к газу и капле, индексом "s" - обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности капли равной T_s , а индексом " ∞ " - обозначены средние значения физических величин, характеризующие бинарную газовую среду в отсутствии внешнего градиента концентрации $\nabla C_{1\infty}$.

Предполагается, что капля при движении сохраняет сферическую форму. Это справедливо, если силы внешнего давления малы по сравнению с давлением от поверхностного натяжения, что можно выразить в виде соотношения

$$\frac{\sigma}{R} \gg \mu_e \frac{|U|}{R}, \quad (1)$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела капля - бинарная газовая смесь; $|U|$ - абсолютное значение скорости газовой смеси относительно капли.

Задача решается в сферической системе координат r, θ, φ ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), начало которой совпадает с центром масс испаряющейся капли. При указанном выборе начала системы координат каплю можно считать покоящейся, а бинарную смесь - движущейся с постоянной скоростью \mathbf{U}_∞ относительно центра капли. Таким образом, наша задача сводится к анализу обтекания испаряющейся капли бесконечным плоскопараллельным потоком, скорость которого \mathbf{U}_∞ подлежит определению. Определенная в такой системе координат скорость газа на бесконечности равна с обратным знаком величине скорости диффузиофореза испаряющейся капли. Вектор $\nabla C_{1\infty}$ направлен вдоль полярной оси $z = r \cos \theta$. Распределения скорости \mathbf{U}_e , давления P_e , температур T_e, T_i и относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси C_1 должны быть симметричны относительно оси, проходящей через центр, т.е. зависят только от радиальной координаты r и полярного угла θ (см. рис. 1).

Остановимся на некоторых аспектах процесса испарения, которые необ-

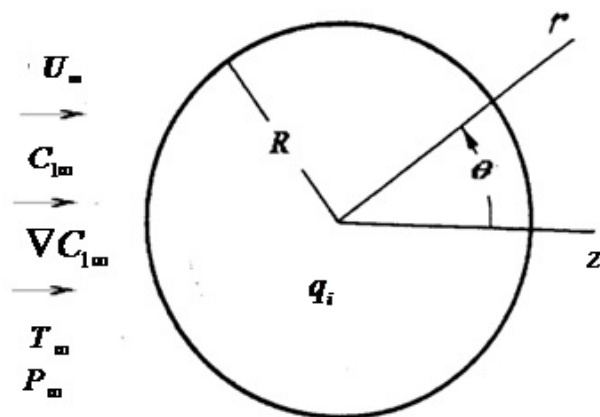


Рис. 1: Обтекание крупной испаряющейся капли

ходимы нам при описании диффузиофореза испаряющейся капли:

1. характерные значения времен установления распределения полей концентраций, температуры и скорости конвективного течения в среде малы по сравнению с характерным временем испарения капли и временем нагрева ее до максимальной температуры;

2. радиус капли будем считать неизменным. Это верно в случае, если время заметного изменения радиуса капли значительно больше времени релаксации диффузионных и тепловых неоднородностей вблизи капли;

3. предполагается, что примеси в капле отсутствуют, т.е. она образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом. Комплексный показатель преломления капли постоянен. По поводу последнего отметим, что информация о поведении комплексного показателя преломления капли при высоких температурах в настоящее время очень мало и не представляется возможным дать обоснованную оценку этому допущению;

4. молекулы конденсированной фазы испаряются или конденсируются при числах Маха много меньших единицы, т.е. испарение капли протекает в диффузионном режиме, когда основное влияние на процесс переноса массы в окрестности частицы определяется молекулярной диффузией.

При теоретическом описании диффузиофореза будем также предполагать, что в силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации процессы теплопереноса и массопереноса в системе капля - газ протекают квазистационарно.

С учетом указанных выше допущений, распределения массовой скорости \mathbf{U}_e , давления P_e , температур T_e, T_i и относительной концентрации первого компонента C_1 описываются следующей линеаризованной системой уравнений:

$$\mu_e \Delta \mathbf{U}_e = \nabla P_e, \quad \text{div} \mathbf{U}_e = 0, \quad (2)$$

$$\mu_i \Delta \mathbf{U}_i = \nabla P_i, \quad \text{div} \mathbf{U}_i = 0, \quad (3)$$

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}, \quad \Delta C_1 = 0. \quad (4)$$

Система уравнений (2)-(4) решалась со следующими граничными условиями в сферической системе координат.

— непроницаемость поверхности капли для радиального потока второго компонента бинарной газовой смеси

$$n_2 U_r^e + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

— непрерывность радиального потока первого компонента бинарной газовой смеси, испытывающего фазовый переход

$$n_1 U_r^e - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r} = n_{li} U_r^i, \quad (6)$$

Здесь в (5) - (6) $n_1 U_r^e, n_2 U_r^e$ - радиальные конвективные потоки соответствующих компонентов, а $D_{12} \frac{n_e m_1}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r}, D_{12} \frac{n_e m_2}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial r}$ - радиальные диффузионные потоки, n_{li} - концентрация молекул вещества капли.

— разность касательных составляющих скоростей внешней и внутренних сред равна сумме касательного и диффузионного скольжений, пропорциональные коэффициентам K_{TS} и K_{DS}

$$U_\theta^e - U_\theta^i = K_{TS} \frac{\nu_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS} \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial C_1}{\partial \theta}, \quad (7)$$

— непрерывность температуры и радиального потока тепла с учетом тепла, идущего на фазовый переход и на излучение

$$T_e = T_i, \quad -\lambda \frac{\partial T_e}{\partial r} + \lambda_i \frac{T_i}{\partial r} = L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12} \frac{\partial C_1}{\partial r} - \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_\infty^4), \quad (8)$$

— концентрация компонента, испытывающего фазовый переход на поверхности капли, с учетом зависимости насыщенной концентрации от температуры во внешней к капле газовой среде, удовлетворяет соотношению

$$C_1 = C_1^{(H)} + C_{1S}^* \delta T_i, \quad (9)$$

где $C_1^{(H)}$ - насыщенная концентрация паров вещества капли первого компонента бинарной газовой смеси, зависящая от средней температуры поверхности частицы T_{iS} , $C_{1S}^* = \left. \frac{dC_1^{(H)}}{dT_i} \right|_{T_i=T_{iS}}$ - производная от насыщенной концентрации первого компонента по температуре T_i , δT_i - определяется из решения уравнения теплопроводности внутри частицы.

— непрерывность касательных составляющих напряжений

$$\mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial T_i} \frac{\partial T_i}{\partial \theta} = \mu_i \left(\frac{\partial U_\theta^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^i}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^i}{r} \right), \quad (10)$$

Здесь поверхностное натяжение σ , входящее в уравнение (10), представлено в линейном приближении по малому параметру ϵ и может быть записано в виде $\sigma = \sigma_0 + \left. \frac{\partial \sigma}{\partial T_i} \right|_{T_i=T_{iS}} \delta T_i$, σ_0 - среднее значение коэффициента поверхностного натяжения на границе раздела капля - бинарная газовая смесь.

Рассмотрим граничные условия вдали от крупной капли, т.е. при $r \rightarrow \infty$:

— в качестве граничных условий для радиальной U_r^e и тангенциальной U_θ^e составляющих массовой скорости \mathbf{U}_e можно записать

$$\mathbf{U}_e = U_\infty \cos \theta \mathbf{e}_r - U_\infty \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (11)$$

— для температуры T_e , давления P_e , и относительной концентрации C_1 справедливы условия

$$T_e = T_\infty, P_e = P_\infty, C_1 = C_{1\infty} + |\nabla C_{1\infty}| r \cos \theta, \quad (12)$$

Учтем конечность температуры, скорости и давления в центре аэрозольной частицы, при $r \rightarrow 0$:

$$T_i \neq \infty, P_i \neq \infty, |\mathbf{U}_i| \neq \infty. \quad (13)$$

В приведенных выше уравнениях газовой динамики и граничных условиях для крупной частицы введены следующие обозначения: L - теплота фазового перехода; σ_0 , - постоянная Стефана-Больцмана, σ_1 - интегральная степень черноты; D_{12} - коэффициент диффузии; $U_\infty = -|\mathbf{U}_\infty|$ - величина скорости набегающего потока; λ_e, λ_i - коэффициенты теплопроводности газовой среды и капли; \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ - единичные векторы сферической системы координат.

Определяющими параметрами в нашей задаче являются материальные постоянные $\mu_e, \rho_e, \lambda_e, c_p$ (удельная теплоемкость при постоянном давлении) и сохраняющиеся в процессе движения испаряющейся сферической капли $R, |\nabla C_{1\infty}|, T_\infty$ и U_∞ ($U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$). Из этих параметров можно составить три безразмерные комбинации: числа Рейнольдса и Пекле и $\varepsilon = R|\nabla C_{1\infty}| \ll 1$. Малость последнего параметра вытекает из следующих соображений. Величина $|\nabla C_{1\infty}|$, как правило, не больше $10^3 \text{ м}^{-1} \div 10^4 \text{ м}^{-1}$. В свою очередь, для крупных капель $10 \cdot 10^{-6} \leq R \leq 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, и тогда $\varepsilon = R|\nabla C_{1\infty}| \ll 1$.

Обезразмерим уравнения и граничные условия следующим образом: $\mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e/U_\infty, p_e = P_e/P_\infty, t_e = t_e/T_\infty$. Тогда при $\varepsilon \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние и поэтому решение уравнений газовой динамики можно использовать метод теории возмущения, т.е. $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)} + \dots, p_e = p_e^{(0)} + \varepsilon p_e^{(1)} + \dots, t_e = t_e^{(0)} + \varepsilon t_e^{(1)} + \dots, C_1 = C_1^{(0)} + \varepsilon C_1^{(1)} + \dots$. С учетом этого, при нахождении силы и скорости диффузиофореза крупной испаряющейся капли мы ограничимся первым приближением.

Полная сила, как мы отмечали в главе 1, определяется интегрированием компонент тензора напряжений по поверхности частицы и имеет следующий вид [4,5]:

$$F = 2\pi \int_0^\pi \left(-P_e \cos\theta + \sigma_{rr} \cos\theta - \sigma_{r\theta} \sin\theta \right) r^2 \sin\theta d\theta, \quad (14)$$

$$\text{где } \sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^\theta}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r} \right).$$

Глава II. Решение уравнения теплопроводности и диффузии

Чтобы найти силу и скорость диффузиофореза, необходимо знать поле температуры в окрестности частицы. Для этого необходимо решить уравнения (4). В общем случае уравнение теплопереноса имеет следующий вид:

$$\rho_e c_p (\mathbf{U}_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e \quad (15)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Здесь слева — конвективный перенос тепла (за счет движения бинарной газовой смеси), а справа — перенос тепла, обусловленный теплопроводностью.

Линеаризуем это уравнение следующим образом. Скорость диффузиофореза равна взятой с обратным знаком скорости центра инерции среды на большом расстоянии от частицы, поэтому

$$|\mathbf{U}_e| \sim |K_{DS} D_{12}| \frac{\Delta C_1}{L} \sim |K_{DS} D_{12}| |\nabla C_{1\infty}|$$

Отношение правой части уравнения (15) к его левой части равно:

$$\frac{\rho_e c_p (\mathbf{U}_e \nabla) T_e}{\lambda_e \Delta T_e} \sim \frac{K_{DS} D_{12}}{\chi_e} R |\nabla C_{1\infty}| \quad (16)$$

Здесь $\chi_e = \lambda_e / (c_p \rho_e)$ — коэффициент температуропроводности.

Для большинства газов величина $\frac{K_{DS} D_{12}}{\chi_e}$ всегда меньше единицы. Поэтому величина, стоящая в (16) всегда меньше $R |\nabla C_{1\infty}|$. Следовательно, в уравнении (15) можно пренебречь правой нелинейной частью, и мы получаем уравнения (4), т.е.

$$\Delta T_e = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) можно получить и из следующих допущений. Если в уравнении (15) к безразмерным переменным, то оно принимает следующий вид:

$$Pe (\mathbf{V}_e \nabla) t_e = \Delta t_e \quad (18)$$

где $Pe = Re Pr$ — число Пекле, $Re = \frac{\rho_e U_\infty R}{\mu_e}$ — число Рейнольдса, $Pr = \frac{c_p \mu_e}{\lambda_e}$ — число Прандтля.

Поскольку мы решаем задачу при $Re \ll 1$, то уравнение (18) принимает следующий вид:

$$\Delta T_e = 0. \quad (19)$$

Поступая аналогичным образом, мы получаем уравнение, описывающее распределение температуры внутри крупной летучей капли:

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}. \quad (20)$$

Чтобы найти распределение концентрации в окрестности нашей летучей капли, необходимо решить уравнение конвективной диффузии

$$(\mathbf{U}_e \nabla) C_1 = D_{12} \Delta C_1. \quad (21)$$

где D_{12} — коэффициент взаимной диффузии.

По аналогии линеаризуем это уравнение и получаем в конечном итоге:

$$\Delta C_1 = 0. \quad (22)$$

Таким образом, рассматривая задача о диффузиофоретическом движении крупной летучей сферической капли радиуса R , уравнения для полей температуры внутри и вне ее и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси подчиняются уравнениям Лапласа:

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i} \quad r \leq R, \quad (23)$$

$$\Delta T_e = 0, \Delta C_1 = 0 \quad r \geq R. \quad (24)$$

Эта система уравнений решается с граничными условиями (8), (9), (12), (13).

Уравнения (23) — (24) решаются в сферической системе координат методом разделения переменных. Рассмотрим решение уравнения

$$\Delta T_e = 0.$$

В сферической системе координат оно имеет вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) = 0,$$

перейдем в этом уравнении к новым переменным: $y = r/R$, $x = \cos \theta$ и, введем безразмерную температуру $t_e = T_e/T_\infty$. В результате получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial t_e}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - x^2 \right) \frac{\partial t_e}{\partial x} \right] = 0, \quad (25)$$

Будем искать решение полученного уравнения в виде:

$$t_e(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{en}(y) P_n(x), \quad (26)$$

где $t_{en}(y)$ – произвольная функция, зависящая от координаты y , а $P_n(x)$ – полиномы Лежандра [6,7,8].

Полиномы Лежандра могут быть определены представлением

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(x^2 - 1 \right)^n \right],$$

которое называется формулой Родрига [8]. В частности: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$,.... В дальнейшем нам потребуются следующие свойства полиномов Лежандра:

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 - x^2 \right) \frac{d P_n(x)}{dx} \right] + n(n+1) P_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Подставляя (26) в (25) и, учитывая свойство полиномов Лежандра, получаем следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения функции $\tau_{en}(y)$:

$$y^2 \frac{d^2 \tau_{en}}{dy^2} + 2y \frac{d\tau_{en}}{dy} - n(n+1)\tau_{en} = 0. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) ищем в виде:

$$\tau_{en}(y) = y^\nu. \quad (28)$$

После подстановки (28) в (27), получаем следующее характеристическое уравнение: $\nu^2 + \nu - n(n+1) = 0$, корни которого равны соответственно $\nu_1 = n$, $\nu_2 = -(n+1)$.

Таким образом, получаем следующее общее решение уравнения $\Delta T_e = 0$:

$$T_e(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_n}{r^{n+1}} + A_n r^n \right) P_n \cos \theta.$$

Аналогично решается уравнение $\Delta C_{1e} = 0$:

$$C_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M_n}{r^{n+1}} + N_n r^n \right) P_n \cos \theta.$$

Найдем решение уравнения (23). Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Согласно общей теории его решение складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения есть уравнение Лапласа и оно ищется в виде разложения в ряды по полиномам Лежандра, то, следовательно, и правая часть должна разлагаться в ряд по полиномам Лежандра. Обезразмерим уравнение (23), имеем:

$$\Delta t_i(y, \theta) = -\frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty}. \quad (29)$$

С учетом выше сказанного мы можем записать:

$$-\frac{q_i R^2}{\lambda_i T_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{in}(y) P_n(x), \quad (30)$$

где функция $q_{in}(y)$ определяется, если воспользоваться вторым свойством полиномов Лежандра. Имеем:

$$q_{in}(y) = -\frac{R^2}{\lambda_i T_\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} q_i P_n(x) dx, \quad (31)$$

Решение для функции $t_i(y, \theta)$ ищем в виде:

$$t_i(y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{in}(y) P_n(x), \quad (32)$$

где $t_{in}(y)$ — произвольная функция, зависящая от координаты y , а $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

Подставляя (32), (31) в (29) и, учитывая свойство полиномов Лежандра, получаем следующее обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения функции $\tau_{in}(y)$:

$$y^2 \frac{d^2 \tau_{in}}{dy^2} + 2y \frac{d\tau_{in}}{dy} - n(n+1)\tau_{in} = q_{in}. \quad (33)$$

Таким образом, мы получили линейное обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Согласно общей теории [6] общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x), \quad (34)$$

где функции $f(x), g(x), h(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ имеет следующий вид:

$$y(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \phi_2(x) \int_{x_0}^x \frac{\phi_1(x)h(x)}{W(x)} - \phi_1(x) \int_{x_0}^x \frac{\phi_2(x)h(x)}{W(x)}. \quad (35)$$

Здесь C_k — произвольные постоянные, x_0 — любая точка из отрезка $[a, b]$, $W(x)$ — определитель Вронского [6], а $\phi_1(x), \phi_2(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения, т.е.

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \quad (36)$$

В нашем случае $\phi_1(y) = y^n, \phi_2(y) = \frac{1}{y^{n+1}}, W(y) = -\frac{2n+1}{y^2}$ и далее по формуле (35) находится поле температуры внутри капли.

Таким образом, распределение полей температур вне и внутри летучей капли и первого компонента бинарной газовой смеси ищутся в виде:

$$T_e(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_n}{r^{n+1}} + A_n r^n \right) P_n \cos \theta,$$

$$C_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M_n}{r^{n+1}} + N_n r^n \right) P_n \cos \theta,$$

$$T_i(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{D_n}{r^{n+1}} + B_n r^n \right) P_n \cos \theta.$$

Здесь $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра; $\Gamma_n, A_n, M_n, N_n, B_n, D_n$ — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий (8)–(13).

Вид граничных условий вдали от летучей капли ($y \rightarrow \infty$) показывают, что: $A_0 = 1, A_n = 0 (n \geq 1), N_0 = C_{1\infty}, N_1 = R|\nabla C_{1\infty}|, N_n = 0 (n \geq 2)$. Из граничного условия конечности температуры при $y \rightarrow 0$ имеем: $D_n = 0 (n \geq 1)$.

Таким образом, имеем следующие выражения для распределения полей температур и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси в

окрестности крупной летучей капли, удовлетворяющие граничным условия при $y \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow 0$:

$$t_e(y, \theta) = 1 + \frac{\Gamma_o}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n}{y^{n+1}} P_n \cos \theta,$$

$$C_1(y, \theta) = C_{1\infty} + \frac{M_o}{y} + \varepsilon \cos \theta \left(y + \frac{M_1}{y^2} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M_n}{y^{n+1}} P_n \cos \theta,$$

$$t_i(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n y^n P_n \cos \theta,$$

и оставшиеся неизвестные постоянные интегрирования определяем из граничных условий на поверхности летучей капли.

Таким образом, имеем следующие выражения для распределения полей температур и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси в окрестности крупной летучей капли, удовлетворяющие нашим граничным условия:

$$t_e(y, \theta) = 1 + \frac{t_{eS} - 1}{y} + \varepsilon \cos \theta \frac{\Gamma_1}{y^2},$$

$$C_1(y, \theta) = C_{1\infty} + \frac{C_1^H - C_{1\infty}}{y} + \varepsilon \cos \theta \left(y + \frac{C_{1S}^* \Gamma_1 - 1}{y^2} \right),$$

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon \cos \theta B_1 y, \quad t_{i0}(y) = B_0 + \frac{D_0}{y}.$$

Здесь $\delta = 1 + 2 \frac{\lambda_e^{(S)}}{\lambda_i^{(S)}} + 2L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{T_\infty \rho_e^{(S)} \lambda_i^{(S)}} D_{12}^{(S)} C_{1S}^* + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3}{\lambda_i^{(S)}} t_{iS}^3$, $t_{iS} = t_{i0}(y = 1)$,

$D_0 = \frac{R^2}{3\lambda_i^{(S)} T_\infty} q_i$, $\Gamma_1 = 3L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{T_\infty \rho_e^{(S)} \lambda_i^{(S)}} D_{12}^{(S)}$, $B_1 = \Gamma_1$. Индексом "S" обозна-

чены физические величины, взятые при средней температуре поверхности $T_{iS} = T_\infty t_{iS}$ крупной летучей капли, которая связана со средней относительной температурой $T_{eS} = T_\infty t_{eS}$ соотношением:

$$\begin{cases} t_{eS} = t_{eS}, \\ \frac{\lambda_e^{(S)}}{\lambda_i^{(S)}} (t_{eS} - 1) = \frac{R^2}{3\lambda_i^{(S)} T_\infty} q_i + L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{T_\infty \rho_e^{(S)} \lambda_i^{(S)}} D_{12}^{(S)} \left(C_{1\infty} - C_1^H \right) - \Phi, \end{cases} \quad (37)$$

в котором $t_{eS} = 1 + \Gamma_0$, $\Phi = \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3}{\lambda_i^{(S)}} (t_{iS}^4 - 1)$.

III. Решение уравнений гидродинамики. Нахождение полей скорости и давления

Уравнения гидродинамики, описывающие течение газа в окрестности крупной летучей капли (уравнение Навье-Стокса и непрерывности) имеют вид [4,5]:

$$\rho_e(\mathbf{U}_e \nabla) \mathbf{U}_e = -\nabla P_e + \mu_e \Delta \mathbf{U}_e, \quad \text{div} \mathbf{U}_e = 0 \quad \text{при } r > R, \quad (38)$$

$$\rho_i(\mathbf{U}_i \nabla) \mathbf{U}_i = -\nabla P_i + \mu_i \Delta \mathbf{U}_i, \quad \text{div} \mathbf{U}_i = 0 \quad \text{при } r < R. \quad (39)$$

В эти уравнения входит нелинейный (конвективный) член $(\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U}$. Если число Рейнольдса много меньше единицы, то этот конвективный член квадратичен по скорости и тогда в уравнениях (38) – (39) мы можем им пренебречь. В литературе такой способ решения уравнения Навье-Стокса получил название линеаризованные по скорости уравнения Навье-Стокса, который впервые применил Стокс в 1827 году. С учетом выше сказанного имеем следующую систему гидродинамических уравнений, описывающих поле скорости и давления в окрестности крупной испаряющейся капли:

$$\nabla P_e = \mu_e \Delta \mathbf{U}_e, \quad \text{div} \mathbf{U}_e = 0 \quad \text{при } r > R, \quad (40)$$

$$\nabla P_i = \mu_i \Delta \mathbf{U}_i, \quad \text{div} \mathbf{U}_i = 0 \quad \text{при } r < R. \quad (41)$$

Найдем сначала решение уравнения (40). В сферической системе координат уравнение непрерывности и линеаризованного по скорости уравнение Навье-Стокса в сферической системе координат имеют вид [4,5]:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r} \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \quad (42)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{3}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \quad (43)$$

$$\frac{\partial U_r^e}{\partial r} + \frac{2}{r}U_r^e + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r}U_\theta^e = 0, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu_e \frac{\partial U_r^e}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{r}\mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + U_r^e \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2}{r}\mu_e \left(U_r^e + ctg\theta U_\theta^e \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что аналогичным образом запишутся уравнения и для (41).

Исходя из граничных условий вдали от крупной летучей капли, будем искать решения системы уравнений (42)–(44) в виде:

$$U_r^e(y, \theta) = \cos\theta G(y), \quad U_\theta^e(y, \theta) = -\sin\theta g(y). \quad (45)$$

Здесь $G(y)$, $g(y)$ – произвольные функции, зависящие от радиальной координаты $y = r|R$.

Связь между функциями $G(y)$, $g(y)$ находим из уравнения непрерывности. Подставляя (45) в (44), получаем:

$$\frac{1}{y^2}\cos\theta \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 G(y) \right) - \frac{1}{y\sin\theta} g(y) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2\theta \right) = 0, \quad g(y) = \frac{1}{2}y \frac{dG}{dy} + G(y). \quad (46)$$

Подставляя (45), (46) в уравнения (42)–(43), имеем:

$$\frac{dP_e}{dy} = \mu_e U_\infty \cos\theta \left(\frac{d^2 G}{dy^2} + \frac{4}{y} \frac{dG}{dy} \right), \quad (47)$$

$$\frac{dP_e}{d\theta} = -\mu_e U_\infty \sin\theta \left(\frac{y^2}{2} \frac{d^3 G}{dy^3} + 3y \frac{d^2 G}{dy^2} + 2 \frac{dG}{dy} \right). \quad (48)$$

Уравнение (47) продифференцируем по θ , а уравнение (48) по y и, вычитая, из первого второго получаем обыкновенное дифференциальное четвертого порядка для нахождения функции $G(y)$:

$$y^3 \frac{d^4 G}{dy^4} + 8y^2 \frac{d^3 G}{dy^3} + 8y \frac{d^2 G}{dy^2} - 8 \frac{dG}{dy} = 0 \quad (49)$$

Решение этого уравнения ищем в виде постановки Эйлера [3,4] и, в результате, окончательно имеем следующее выражение для функции $G(y)$:

$$G(y) = \left(A_0 + S_0 y^2 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right), \quad (50)$$

и, учитывая связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$ находим выражение для функции $g(y)$:

$$g(y) = \left(A_0 + 2S_0 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3} \right). \quad (51)$$

Таким образом, имеем следующие выражения для компонент массовой скорости \mathbf{U}_e :

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta \left(A_0 + S D_0 y^2 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right), \quad (52)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta \left(A_0 + 2S_0 y^2 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3} \right). \quad (53)$$

Подставляя (50) в (48), после интегрирования получаем следующее выражение для поля давления:

$$P_e = P_\infty + \mu_e \cos \theta \frac{U_\infty}{Ry^2} A_2. \quad (54)$$

Из граничного условия на бесконечности (11), имеем $A_0 = 1$, $S_0 = 0$ и, следовательно, имеем следующие выражения для компонент массовой скорости и давления, которые удовлетворяют граничным условиям на бесконечности (11):

$$\begin{aligned} U_r^e(y, \theta) &= U_\infty \cos\theta \left(1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right), \\ U_\theta^e(y, \theta) &= -U_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3} \right), \\ P_e &= P_\infty + \mu_e \cos\theta \frac{U_\infty}{Ry^2} A_2. \end{aligned} \quad (55)$$

Аналогично решаются уравнения (41). В конечном результате мы должны поставить другие постоянные интегрирования и учесть конечность физических величин в центре летучей капли.

Таким образом, в приближении Стокса нами получены выражения для компонент массовой скорости и давления вне и внутри крупной летучей капли, и они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U_r^e(y, \theta) &= U_\infty \cos\theta \left(1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right), \\ U_\theta^e(y, \theta) &= -U_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3} \right), \quad \text{при } r > R, \\ P_e &= P_\infty + \mu_e \cos\theta \frac{U_\infty}{Ry^2} A_2. \end{aligned} \quad (56)$$

и соответственно:

$$U_r^i(y, \theta) = U_\infty \cos\theta \left(A_4 + A_5 y^2 \right), \quad (57)$$

$$U_\theta^i(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta \left(A_4 + 2 A_5 y^2 \right), \quad \text{при } r < R, \quad (58)$$

$$P_i = P_{i0} + \mu_i 10 \cos\theta \frac{U_\infty}{R} y^2 A_5. \quad (59)$$

Входящие в (56) –(59) постоянные интегрирования A_1 , A_2 , A_4 и A_5 определяются из граничных условий на поверхности крупной летучей капли.

IV. Вывод выражений для диффузиофоретической силы и скорости крупной испаряющейся капли сферической формы. Анализ полученных результатов

Во второй главе нами получены выражения для распределения полей температур и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси в окрестности крупной летучей капли, удовлетворяющие нашим граничным условиям, которые имеют следующий вид:

$$t_e(y, \theta) = 1 + \frac{t_{eS} - 1}{y} + \varepsilon \cos \theta \frac{\Gamma_1}{y^2}, \quad (60)$$

$$C_1(y, \theta) = C_{1\infty} + \frac{C_1^H - C_{1\infty}}{y} + \varepsilon \cos \theta \left(y + \frac{C_{1S}^* \Gamma_1 - 1}{y^2} \right),$$

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon \cos \theta B_1 y, \quad t_{i0}(y) = B_0 + \frac{D_0}{y}.$$

Здесь $\delta = 1 + 2 \frac{\lambda_e^{(S)}}{\lambda_i^{(S)}} + 2L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{T_\infty \rho_e^{(S)} \lambda_i^{(S)}} D_{12}^{(S)} C_{1S}^* + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3}{\lambda_i^{(S)}} t_{iS}^3$, $t_{iS} = t_{i0}(y = 1)$,

$D_0 = \frac{R^2}{3\lambda_i^{(S)} T_\infty} q_i$, $\Gamma_1 = 3L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{T_\infty \rho_e^{(S)} \lambda_i^{(S)}} D_{12}^{(S)}$, $B_1 = \Gamma_1$. Индексом "S" обозначены физические величины, взятые при средней температуре поверхности

$T_{iS} = T_\infty t_{iS}$ крупной летучей капли, которая связана со средней относительной температурой $T_{eS} = T_\infty t_{eS}$ соотношением:

$$\begin{cases} t_{eS} = t_{eS}, \\ \frac{\lambda_e^{(S)}}{\lambda_i^{(S)}} (t_{eS} - 1) = \frac{R^2}{3\lambda_i^{(S)} T_\infty} q_i + L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{T_\infty \rho_e^{(S)} \lambda_i^{(S)}} D_{12}^{(S)} \left(C_{1\infty} - C_1^H \right) - \Phi, \end{cases} \quad (61)$$

в котором $t_{eS} = 1 + \Gamma_0$, $\Phi = \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3}{\lambda_i^{(S)}} \left(t_{iS}^4 - 1 \right)$. а в третьей главе в приближении Стокса нами были получены выражения для полей скорости и давления в ее окрестности.

— вне испаряющейся капли ($r > R$) :

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos\theta \left(1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right), \quad (62)$$

$$U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3} \right), \quad (63)$$

$$P_e = P_\infty + \mu_e \cos\theta \frac{U_\infty}{Ry^2} A_2. \quad (64)$$

— внутри испаряющейся капли ($r < R$) :

$$U_r^i(y, \theta) = U_\infty \cos\theta \left(A_4 + A_5 y^2 \right), \quad (65)$$

$$U_\theta^i(y, \theta) = -U_\infty \sin\theta \left(A_4 + 2 A_5 y^2 \right), \quad (66)$$

$$P_i = P_{i0} + \mu_i 10 \cos\theta \frac{U_\infty}{R} y^2 A_5. \quad (67)$$

Поскольку выражения для компонент массовой скорости и поля давления нам известны, то мы можем найти общую силу, действующую на крупную летучую каплю сферической формы. Полная сила, как мы отмечали в главе 1, определяется интегрированием компонент тензора напряжений по поверхности частицы и она имеет следующий вид [4,5]:

$$F = 2\pi \int_0^\pi \left(-P_e \cos\theta + \sigma_{rr} \cos\theta - \sigma_{r\theta} \sin\theta \right) r^2 \sin\theta d\theta,$$

$$\text{где } \sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^\theta}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r} \right).$$

Подставляя сюда соответствующие выражения и после интегрирования, имеем:

$$\mathbf{F} = -4\pi R\mu_e U_\infty A_2 \mathbf{n}_z, \quad (68)$$

где \mathbf{n}_z — единичный вектор в направлении оси OZ.

Из (68) видим, чтобы найти общую силу, необходимо знать коэффициент A_2 . Постоянная интегрирования A_2 определяется из граничных условий на поверхности нашей летучей капли и она имеет следующий вид:

$$A_2 = -\frac{3}{2} \frac{1 + \frac{2\mu_e^{(S)}}{3\mu_i^{(S)}}}{1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}}} + \frac{\varepsilon}{U_\infty} \frac{1}{1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}}} \left\{ 3LD_{12}^{(S)} \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\lambda_i^{(S)} \delta \rho_e^{(S)} T_\infty} \times \right. \quad (69)$$

$$\left. \times \left[K_{TS} \frac{\nu_e^{(S)}}{R t_{eS}} + K_{DS} \frac{D_{12}^{(S)}}{R} C_{1S}^* + \frac{1}{3\mu_i^{(S)}} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} + 2D_{12}^{(S)} C_{1S}^* \frac{n_e^2}{n_2} \Delta_1 \right] - 3 \frac{n_e^2}{R n_2} \Delta_1 \right\},$$

$$\text{где } \Delta_1 = \frac{m_1}{\rho_e^{(S)}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}} \right) + \frac{1}{n_{1i}^{(S)}}.$$

Подставляя (69) в выражение (68), получаем, что общая сила, действующая на крупную летучую каплю аддитивно складывается из силы вязкого сопротивления среды \mathbf{F}_μ и диффузиофоретической силы \mathbf{F}_{df} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{df}, \quad (70)$$

где $\mathbf{F}_\mu = 6\pi R\mu_e^{(S)} U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z$, $\mathbf{F}_{df} = -6\pi R\mu_e^{(S)} f_{df} \mathbf{grad} C_{1\infty}$. Коэффициенты f_μ , f_{df} определяются по формулам:

$$f_\mu = \frac{1 + \frac{2\mu_e^{(S)}}{3\mu_i^{(S)}}}{1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}}},$$

$$f_{dh} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 + \frac{\mu_e^{(S)}}{\mu_i^{(S)}}} \left\{ 3LD_{12}^{(S)} \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\lambda_i^{(S)} T_\infty \delta \rho_e^{(S)}} \times \right. \quad (71)$$

$$\left. \times \left[K_{TS} \frac{\nu_e^{(S)}}{t_{eS}} + K_{DS} D_{12}^{(S)} C_{1S}^* + \frac{R}{3\mu_i^{(S)}} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} + 2D_{12}^{(S)} C_{1S}^* \frac{n_e^2}{n_2} \Delta_1 \right] - 3 \frac{n_e^2}{n_2} \Delta_1 \right\}.$$

Приравнивая полную силу \mathbf{F} к нулю, получаем выражение для диффузиофоретической скорости крупной летучей капли сферической формы \mathbf{U}_{df} ($\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_{df}$):

$$\mathbf{U}_{df} = -\frac{f_{df}}{f_\mu} \text{grad} C_{1\infty}. \quad (72)$$

В дипломной работе получены аналитические выражения, позволяющие оценивать общую силу, действующую на крупную летучую каплю сферической формы, движущейся во внешнем заданном поле градиента концентрации, внутри которой действуют однородно распределенные по ее объему тепловые источники плотностью q_i . В граничном условии на поверхности частицы учтены все эффекты, линейные по числу Кнудсена в данной постановке задачи: тепловое и диффузионное скольжения; внутренние течения, реактивный эффект, связанный с испарением и зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Наличие источников тепла внутри капли приводит к тому, что средняя температура поверхности испаряющейся капли незначительно отличается от температуры окружающей ее газообразной среды. Нагрев поверхности капли может происходить, например, за счет поглощения электромагнитного излучения. Внутренние источники тепла - это модельное представление, удобное для описания реальных процессов, сопровождающихся выделением тепла в объеме испаряющейся капли. Однородный нагрев поверхности капли вызывает, с одной стороны, усиление испарения, что сказывается на процессе теплообмена и массообмена между каплей и окружающей средой и так называемого реактивного эффекта; с другой стороны, влияет на величину теплового и диффузионного скольжения, а также и на термокапиллярный дрейф, связанный с возникновением касательных напряжений на поверхности капли за счет изменения коэффициента поверхностного натяжения σ с температурой T_i (эффект Марангони). Все это важно

как при теоретическом описании движения испаряющейся капли, так и для практических приложений. Таким образом, с помощью внутренних источников тепла мы можем влиять на величину силы и скорости диффузиофореза.

Из приведенных формул для силы и скорости диффузиофореза (71)–(72) видно, что они складываются из следующих составляющих: радиометрической, обусловленной диффузионным и тепловым скольжением, реактивной и термокапиллярной. Термокапиллярная сила направлена противоположно радиометрической и реактивной силы. Величина термокапиллярной силы линейно возрастает с увеличением радиуса. В связи с этим существует критический радиус, при котором сила диффузиофореза обращается в ноль.

Если мы имеем сферически симметричное испарение, то температура поверхности капли будет во всех ее точках одинаковой. Это приводит к тому, что тепловое скольжение и термокапиллярный дрейф (зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры) будут отсутствовать. В этом случае, в полученных выше формулах, будет иметь место только диффузионное скольжение и реактивный эффект. Однако следует отметить, что при движении испаряющейся капли в вязкой бинарной газообразной среде всегда будет иметь место несимметричное испарение и, следовательно, возникает тепловое скольжение и термокапиллярный дрейф.

Полученные аналитические выражения для силы и скорости диффузиофореза позволяют провести качественный и количественный анализ влияния средней температуры поверхности частицы (нагрев поверхности) незначительно отличающейся от температуры окружающей ее бинарной газовой смеси на диффузиофорез крупной летучей капли.

Из приведенных выше формул (71)–(72) видно, что в случае малых относительных перепадов температуры имеет место линейная зависимость влияния средней температуры поверхности частицы на диффузиофорез крупной летучей капли. Это вытекает, как видно из формул, коэффициент динамической вязкости и коэффициент диффузии экспоненциально зависят от температуры. В случае малых относительных перепадов температуры в окрестности нелетучей капли будет иметь место линейная зависимость и вклад будет не более 10 %. Если не учитывать влияния средней температуры поверхности частицы на диффузиофорез крупной летучей капли, полученные выше формулы переходят в известные ранее полученные формулы [1].

Заключение

В квазистационарном приближении при малых числах Рейнольдса и Пекле (тепловом и диффузионном) получены аналитические выражения, позволяющие оценивать диффузиофоретическую силу и скорость крупной испаряющейся капли сферической формы, внутри которой действуют однородно распределенные по ее объему внутренние источники тепла, когда средняя температура поверхности капли незначительно отличается от температуры вдали от нее. Проведенный качественный анализ показал, что случае малых относительных перепадов температуры имеет место линейная зависимость влияния средней температуры поверхности частицы (нагрев поверхности) на силу и скорость диффузиофореза крупной летучей капли сферической формы, который дает вклад не более 10 %.

Список литературы:

1. Галоян В.С., Яламов Ю.И. Движение капель в вязких средах. Ереван: Луйс. 1985. - 209 с
2. Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей. Учебное пособие для студентов и аспирантов. М.: МПУ. 1992. 297 с.
3. Щукин Е.Р., Малай Н.В. Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц //Инженерно-физический журнал. 1988. Т. 54. № 4. С. 628-634
4. Дж. Хаппель, Г. Бреннер Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 630 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. Москва: Техничко-теоретической литературы. 1954. 795 с.
6. Н.М. Матвеев Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1967. 409 с.
7. В.А. Шалдырван, В.С. Герасимчук Методы математической физики. М.: Вузовская книга. 2006. 511 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.