ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕНННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПРИМЕНЕНИЕ MIN-ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ МАРКОВА К РЕШЕНИЮ КАНОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 03.01.01Математика
очной формы обучения, группы 07001309
Топчий Яны Павловны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
Флоринский В.В.

БЕЛГОРОД 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проблема быстродействия, в частности линейная задача быстродействия, занимает в современной теории оптимального управления одно из центральных мест. Время быстродействия есть наиболее естественный критерий оптимальности, поэтому задача быстродействия является одним из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. Решение линейных, в частности, канонических задач важно тем, что к ним можно свести решения некоторых нелинейных задач [8, 10].

Компьютерное применение помогает связывать теоретические исследования с практикой, что является важным элементом в разработке для решения задач быстродействия численных методов. Чем больше размерность задач быстродействия, тем больший интерес она представляет. Сложность решения подобных задач заключается в том, что в ходе выполнения приходится работать с плохо обусловленными матрицами. В наше время для решения задач быстродействия, разработка численных методов и компьютерных программ является **актуальной**.

Цель работы состоит в изучении методов решения линейных задач быстродействия и построение численного решения канонической задачи быстродействия, основанного на min-проблеме моментов А. А. Маркова.

Задачи исследования.

- Изучить методы решения задач быстродействия
- Изучить решение канонической задачи быстродействия, основанной на min-проблеме моментов А. А. Маркова
- Построить численное решение канонической задачи быстродействия, основанной на min-проблеме моментов А. А. Маркова.

В работе рассматриваются методы решения задач быстродействия. Один из методов основан на принципе максимума Понтрягина [3, 4, 15, 17].

Другой метод предложенный В.И. Коробовым и Г.М Скляром - на основе min проблеме моментов Маркова [11].

Структура выпускной квалификационной работы состоит из введения, четырёх разделов, а также заключения, списка используемой литературы и приложений.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

1.1. Общая постановка задачи оптимального управления

Задачу оптимального управления определяет наличие некоторого динамического объекта. Пусть положение объекта в каждый момент времени t полностью характеризуется набором параметров $x^1(t), \dots, x^n(t)$.

Вектор

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

называют фазовым вектором объекта. Считают, что объект снабжен некими рулями, от положения которых зависит его поведение. Набор параметров $u^1(t), \dots, u^m(t)$ характеризует положение рулей в каждый момент времени t.

Вектор

$$u(t) = u^1(t), \dots, u^m(t)$$

называют управлением или управляющим параметром объекта. В данный момент времени t состояние объекта не зависит от будущего поведения управления, а зависит от того, какие значения принимает управление u(t) до момента времени t.

Разные динамические объекты рассматривают в зависимости от того, как выражается зависимость вектора фазового состояния x(t) от управления u(t). Например, эта зависимость может описываться системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u). \tag{1.1}$$

Если известно управление $u(t)$ в каждый момент времени t, то траектория объекта $x(t)$ определяется как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)).$$

Предполагается, что динамика объекта задана, т.е. закон изменения вектора состояния $x(t)$ в зависимости от изменения вектора управления $u(t)$.

Управление $u(t)$ в конкретных физических объектах может не быть произвольным. Из физического смысла управления вытекают определенные ограничения.

Например, если $u^1(t)$ — тяга двигателя, то в каждый момент времени она должна удовлетворять ограничению

$$u^1_{min} \le u^1(t) \le u^1_{max}.$$

При этом тяга $u^1(t)$ может принимать также и крайние значения u^1_{min} и u^1_{max}. Предполагается, что в каждый момент времени t вектор управления $u(t)$ удовлетворяет ограничению

$$u(t) \in U, \tag{1.2}$$

где U — некоторое заданное множество. Часто, в конкретных физических объектах множество U замкнуто. Эта замкнутость в общем случае не позволяет исследовать поведение управляемого объекта методами классического вариационного исчисления. Кроме ограничения вида (1.2) могут быть наложены ограничения на зависимость управления $u(t)$ от времени. Например, из физического смысла допустимыми управлениями могут быть либо кусочно-непрерывные, либо непрерывные, либо гладкие функции и т.п.

Состояния объекта. Допустим, задан начальный момент времени t_0 и множество допустимых начальных состояний объекта M_0. Нужно управлять объектом так, чтобы в какой-то конечный момент времени t_1 объект перешел на некоторое множество допустимых конечных состояний M_1. Тогда допустимое управление $\mathrm{u(t)}$ переводит объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$. фазовое состояние объекта $\mathrm{x(t)}$ соответствующее этому управлению $\mathrm{u(t)}$ удовлетворяет условиям

$$x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in \ M_1 \tag{1.3}$$

Заметим, что конечный момент времени t_1 может быть, вообще говоря, не фиксированным, а определяться из условия попадания вектора $\mathrm{x(t)}$ на конечное множество M_1. Итак, предположим, что допустимые множества M_0 и M_1заданы.

Критерий качества. Иногда управляемый объект можно перевести из множества M_0 на множество M_1 разными способами. Среди всех таких переходов желательно выбрать в каком-то смысле наилучший. Принято, что каждому допустимому управлению $\mathrm{u(t)}$, заданному на отрезке $[t_0, t_1]$, и соответствующей ему траектории объекта $\mathrm{x(t)}$ сопоставлено некоторое число J, оценивающее качество пары $\mathrm{u(t), x(t)}$, т.е. задан функционал, или критерий качества $\mathrm{J(u(t), x(t))}$.

Этот функционал может иметь вид

$$\mathrm{J(u(t), x(t))} \ = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{f}^0 \, \mathrm{(s, x(s), u(s))ds}. \tag{1.4}$$

Задача оптимального управления заключается в нахождении таких допустимого управления u*(f) и соответствующей ему траектории объекта x*(t), переводящей объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1, что при этом функционал качества J(u(f), x(t)) принимает минимальное значение, т.е.

$$J(u^*(f), x^*(t)) = \min J(u(f), x(t)).$$

Здесь минимум берется по всевозможным допустимым управлениям $\mathrm{u(t)}$ и соответствующим траекториям $\mathrm{x(t)}$, переводящим объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1.

1.2 Линейная задача быстродействия

Простейшая задача оптимального управления — линейная задача быстродействия. В этой задаче динамика объекта описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + u, \tag{1.5}$$

где x — n-мерный вектор фазового состояния объекта, A — постоянная матрица размером nxn, u — n-мерный вектор управления, на который наложено ограничение $\mathrm{u(t)} \in U$. Если известна допустимая функция управления $\mathrm{u(t)}$ и начальное состояние объекта $x(t_0) = x_0$, то единственная функция $\mathrm{x(t)}$ вектора фазового состояния объекта вычисляется как решение дифференциального уравнения (1.5).

Начальное и конечное состояния объекта будем выбирать как элементы некоторых непустых и компактных подмножеств M_0 и M_1 соответственно из n-мерного фазового пространства. Критерием качества будет служить время перехода из множества, M_0 на множество M_1, т. е.

$$J(u(t), x(t)) = t_1 - t_0.$$

Этот критерий качества получается из (1.4), когда подынтегральная функция имеет вид

$$f^0(t, x(t), u(t)) = 1.$$

Линейная задача быстродействия заключается в нахождении допустимого управления $u^*(t)$ и соответствующего ему решения $x^*(t)$ уравнения (1.5), переводящего объект из множества начальных состояний M_0 на множество конечных состояний M_1за минимальное время.

Преимущества линейной задачи быстродействия.

Во-первых, для линейного дифференциального уравнения (1.5) можно получить зависимость траектории $x(t)$ от управления $u(t)$ в явном виде. Это позволяет эффективно исследовать все основные вопросы математической теории оптимального управления.

Во-вторых, на примере линейной задачи быстродействия достаточно ярко проявляются все характерные трудности, присущие общим задачам оптимального управления.

2 ПРИНЦИП MAX ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

2.1 Принцип максимума Понтрягина

Принцип максимума Понтрягина является эффективным средством исследования задач оптимального управления, а также необходимым условием оптимальности [3, 4, 15, 17].

Пусть задано некоторое допустимое управление $\mathrm{u(t)}$ на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, такое, что соответствующее решение $\mathrm{x(t)}$ уравнения

$$\dot{x} = Ax + u$$

переводит объект из начального множества M_0 на конечное множество M_1 на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, т.е. удовлетворяет граничным условиям $x(t_0) \in M_0,\ x(t_1) \in\ M_1$. Пара $\mathrm{u(t), x(t)}$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, если существует такое нетривиальное решение вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \tag{2.1}$$

что выполнены следующие три условия:

1) условие максимума

$$\langle u(t), \psi(t) \rangle = c(U, \psi(t)) \tag{2.2}$$

для почти всех$t \in I$;

2) условие трансверсальности на множестве M_0

$$\langle x(t_0), \psi(t_0) \rangle = c(M_0, \psi(t_0)); \tag{2.3}$$

3) условие трансверсальности на множестве M_1

$$\langle x(t_1), -\psi(t_1)\rangle = c(M_1, -\psi(t_1)). \tag{2.4}$$

Система дифференциальных уравнений (2.1) называется сопряженной, а ее решение $\psi(t)$ − сопряженной функцией. Это решение $\psi(t)$ называется нетривиальным, если $\psi(t) \not\equiv 0$.

В силу теоремы: Пусть функция u(t) в уравнении $\dot{x} = Ax + u$ интегрируема по Лебегу на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Тогда для любого начального значения $x(t_0) = x_0$ абсолютно непрерывное решение x(t) существует, является единственным и для любого $t \in I$ задается формулой Коши

$$x(t) = e^{(t_0 - t_1)A}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t-s)A}\,u(s)ds$$

причем интеграл в этой формуле понимается в смысле Лебега.

Решение $\psi(t)$ сопряженной линейной системы уравнений (2.1) существует на всем отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, единственное для любого начального значения $\psi(t_0)$ и задается формулой Коши

$$\psi(t) = e^{(t_0 - t)A^*}\psi(t_0) \tag{2.5}$$

Это решение $\psi(t)$ нетривиально, если $\psi(t) \not\equiv 0$, поскольку матрица $e^{(t_0 - t)A^*}$ невырождена. Если начальное значение для сопряженной функции $\psi(t)$ задано на правом конце отрезка $[t_0, t_1]$, т.е. в точке t_1, то решение $\psi(t)$ системы уравнений (2.1) имеет вид

$$\psi(t) = e^{(t_1 - t)A^*}\psi(t_1) \tag{2.6}$$

Это решение будет нетривиальным, если $\psi(t_1) \not\equiv 0$, также в силу невырожденности экспоненциала $e^{(t_0-t)A^*}$.

Пусть сопряженная функция $\psi(t)$ задана. Посмотрим, какой геометрический смысл имеют условия (2.2) - (2.4). Условие (2.2) означает, что вектор $\psi(t)$ является опорным вектором к множеству U в точке u(t), для почти всех моментов времени t на отрезке $[t_0, t_1]$, т.е. вектор u(t) выбирается из множества U таким образом, чтобы скалярное произведение $\langle u(t), \psi(t) \rangle$ было максимальным (рис. 1). Аналогично, условие трансверсальности на множестве M_0 (2.3) означает, что вектор $\psi(t_0)$ является опорным вектором к множеству M_0 в точке $x(t_0)$ (рис. 2), а условие трансверсальности на множестве M_1 (2.4) означает, что вектор — $\psi(t_1)$ является опорным вектором к множеству M_1в точке $x(t_1)$ (см. рис. 38). Условие трансверсальности (2.3) автоматически выполняется с любой сопряженной функцией $\psi(t)$, если множество M_0 состоит из одной точки, т.е. $M_0 = \{x_0\}$. Аналогичное утверждение справедливо и для множества M_1.

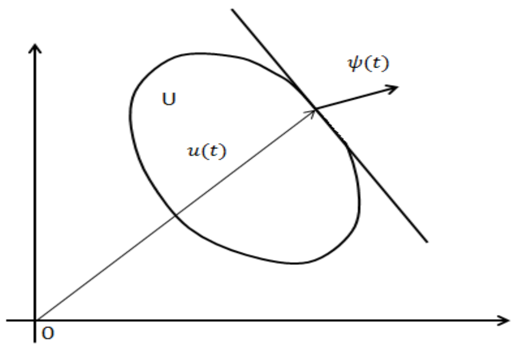

Рис. 1

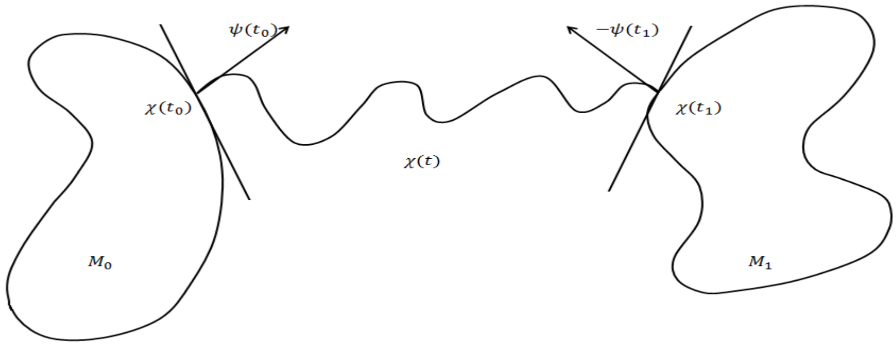

Рис. 2

2.2 Лемма об эквивалентной формулировке принципа максимума Понтрягина

Пусть допустимое управление $\mathrm{u(t)} \in U, t \in [t_0, t_1]$, таково, что соответствующее решение x(t) системы уравнений $\dot{x} = Ax + u$ удовлетворяет граничным условиям $x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1$. Пусть, далее, $\psi(t)$ - некоторое решение сопряженной системы уравнений (2.1). Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1) пара $\mathrm{u(t), x(t)}$ удовлетворяет принципу максимума с сопряженной функцией $\psi(t)$ на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$;

2) при всех $t \in I$ вектор $\psi(t)$ является опорным вектором к множеству достижимости X(t) в точке x(t), т.е. выполняется равенство

$$\langle x(t), \psi(t) \rangle = c\big(X(t), \psi(t)\big). \tag{2.7}$$

Кроме того, выполнено условие трансверсальности на множестве M_1(2.4);

3) при всех $t \in I$ вектор является опорным вектором к множеству управляемости Y(t) в точке x(t), т.е. выполняется равенство

$$\langle x(t), -\psi(t) \rangle = c(Y(t), -\psi(t)). \tag{2.8}$$

Так же, выполнено условие трансверсальности на множестве M_0(2.3).

<u>Доказательство.</u> Решение x(t) уравнения (1.5) с допустимым управлением $u(t)$ запишем в виде формулы Коши с начальными условиями в моменты времени t_0 и t_1:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, u(s) ds \tag{2.9}$$

$$x(t) = e^{(t-t_1)A}x(t_1) + \int_t^{t_1} e^{(t-s)A}\, u(s)ds \tag{2.10}$$

Учитывая свойства экспоненциала, из формул (2.5) и (2.9) получаем выражение

$$\langle x(t), \psi(t)\rangle = \langle e^{(t-t_0)A}x(t_0), e^{(t-t_0)A^*}\psi(t_0)\rangle +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \langle e^{(t-s)A}u(s), e^{(t-t_0)A^*}\psi(t_0)\rangle\, ds = \langle x(t_0), \psi(t_0)\rangle +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \langle u(s), e^{(t_0-s)A^*}\psi(t_0)\rangle\, ds =$$
$$= \langle x(t_0), \psi(t_0)\rangle + \int_{t_0}^{t} \langle u(s), \psi(s)\rangle\, ds \tag{2.11}$$

Аналогично из формул (2.6) и (2.10) получаем выражение

$$\langle x(t), -\psi(t)\rangle = \langle x(t_1), \psi(t_1)\rangle + \int_t^{t_1} \langle u(s), \psi(s)\rangle\, ds \tag{2.12}$$

Опорные функции множеств достижимости X(f) и управляемости Y(t):

$$c(X(t), \psi) = c(M_0, e^{(t-t_0)A^*}\psi) + \int_{t_0}^{t} c(U, e^{(t-s)A^*}\,\psi)ds \tag{2.13}$$

$$c(Y(t), \psi) = c(M_1, e^{(t-t_1)A^*}\psi) + \int_t^{t_1} c(U, -e^{(t-s)A^*}\,\psi)ds \tag{2.14}$$

Подставляя в формулу (2.13) вместо вектора ψ при каждом $t \in I$ вектор $\psi(t)$, заданный формулой (2.5), получаем соотношение

$$c\big(X(t),\psi(t)\big) = c\left(M_0, e^{(t-t_0)A^*} e^{(t_0-t)A^*}\psi(t_0)\right) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} c(U, e^{(t-s)A^*}\, e^{(t_0-t)A^*}\psi(t_0))ds =$$

$$= c\big(M_0,\psi(t_0)\big) + \int_{t_0}^{t} c(U, e^{(t_0-s)A^*}\psi(t_0))ds =$$

$$= c\big(M_0,\psi(t_0)\big) + + \int_{t_0}^{t} c(U,\psi(s))ds \qquad (2.15)$$

Аналогично, подставляя в формулу (2.14) вектор $-\psi(t)$ заданный формулой (2.6), получаем соотношение

$$c(Y(t),-\psi(t)) = c\big(M_1,-\psi(t_1)\big) + \int_{t}^{t_1} c(U,\psi(s))ds \qquad (2.16)$$

Докажем теперь эквивалентность утверждений 1 — 3. Пусть пара u(t),x(t) удовлетворяет принципу максимума на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Из условия максимума (2.2) и условия трансверсальности на множестве M_0 (2.3) следует, что правые части выражений (2.11) и (2.15) совпадают. Таким образом, выполняется равенство (2.7). Аналогично из формул (2.2) и (2.4) следует, что правые части выражений (2.12) и (2.16) совпадают. Таким образом, выполняется равенство (2.8). Следовательно, из утверждения 1 получаем 2 и 3.

Пусть выполнено утверждение 2. Из равенства (2.7) при $t_0 = t_1$ получаем соотношение

$$c\big(X(t_1),\psi(t_1)\big) - \langle x(t_1),\psi(t_1)\rangle = 0$$

Используя формулы (2.15) и (2.11), преобразуем его к виду

$$\left[c\left(M_0,\psi(t_0)\right)-\langle x(t_0),\psi(t_0)\rangle\right]+\int_{t_0}^{t_1}[c(U,\psi(s))-\langle u(s),\psi(s)\rangle]\,ds=0 \tag{2.17}$$

Из включений $x(t_0)\in M_0$ и $u(t)\in\ U$ при всех $t\in I$ согласно свойствам опорных функций следует, что первое слагаемое в формуле (2.17) неотрицательно, подынтегральная функция также неотрицательна, значит, и интеграл неотрицателен. Таким образом, из равенства (2.17) получаем следующие равенства:

$$c\left(M_0,\psi(t_0)\right)-\langle x(t_0),\psi(t_0)\rangle=0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}[c(U,\psi(s))-\langle u(s),\psi(s)\rangle]\,ds=0$$

Из первого равенства вытекает условие трансверсальности на множестве M_0 (2.3), а из второго, с учетом неотрицательности подынтегральной функции и свойства интеграла Лебега— условие максимума (2.2) при почти всех $t\in[t_0,t_1]$; Следовательно, из утверждения 2 получается утверждение 1.

Аналогично из утверждения 3 следует утверждение 1. Действительно, из равенства (2.8) при $t=t_0$ получаем соотношение

$$c(Y(t_0),-\psi(t_0))-\langle x(t_0),-\psi(t_0)\rangle=0$$

Используя формулы (2.16) и (2.12), преобразуем его к виду

$$\left[c\left(M_1,-\psi(t_1)\right)-\langle x(t_1),-\psi(t_1)\rangle\right]+[c(U,\psi(s))-\langle u(s),\psi(s)\rangle]=0 \tag{2.18}$$

Из включений $x(t_1) \in M_1$ и $u(t) \in U$ получаем, что оба слагаемые в формуле (2.18) неотрицательны, следовательно, равны нулю.

$\left[c\big(M_1, -\psi(t_1)\big) - \langle x(t_1), -\psi(t_1)\rangle\right]$ – дает условие трансверсальности на множестве M_1 (2.4).

$[c(U, \psi(s)) - \langle u(s), \psi(s)\rangle]$ – условие максимума (2.2) при почти всех $t \in I$.

Таким образом, лемма полностью доказана.

2.3 Схема применения принципа максимума Понтрягина для решения линейной задачи быстродействия

Линейная задача быстродействия заключается в нахождении допустимого управления $\mathrm{u(t)} \in U$, переводящего объект, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + u, \tag{2.19}$$

из начального множества M_0 на конечное множество M_1за наименьшее время. Допустимым управлением является произвольная измеримая функция $\mathrm{u(t)} \in U$, множества M_0, M_1, $U \in E^n$ предполагаются непустыми и компактными.

Теорема о необходимых условиях оптимальности. Пусть в задаче быстродействия множества M_0и M_1 выпуклы. Пусть, далее, $\mathrm{u(t)}$ - оптимальное управление, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$ и x(t) — соответствующее решение уравнения (2.19). Тогда пара u(t), x(t) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени I.

Согласно этой теореме, по определению пара u(t), x(t) удовлетворяет принципу максимума на отрезке $[t_0, t_1]$, если существует такое нетривиальное решение вспомогательной сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \tag{2.20}$$

что выполнены следующие три условия:

1) условие максимума

$$\langle u(t), \psi(t) \rangle = c(U, \psi(t)) \tag{2.21}$$

для почти всех $t \in I$;

2) условие трансверсальности на множестве M_0

$$\langle x(t_0), \psi(t_0) \rangle = c(M_0, \psi(t_0)); \tag{2.22}$$

3) условие трансверсальности на множестве M_1

$$\langle x(t_1), -\psi(t_1) \rangle = c(M_1, -\psi(t_1)). \tag{2.23}$$

Таким образом, для решения задачи быстродействия можно поступить следующим образом. Найти все управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, а затем среди этого множества управлений каким-либо образом найти действительно оптимальное управление. Эффективность такого подхода определяется тем, как много управлений будет удовлетворять принципу максимума. Чем уже множество таких уравнений, тем проще выбрать из него действительно оптимальное управление. Оказывается, что принцип максимума Понтрягина в этом смысле является довольно эффективным средством решения линейных задач быстродействия.

Заметим, что если сопряженная функция является решением линейной системы уравнений (2.20) и удовлетворяет равенствам (2.21)—(2.23), то функция $\lambda\psi$, где λ — произвольное неотрицательное число, также является решением системы (2.20) и удовлетворяет равенствам (2.21)—(2.23). Это следует из того факта, что система уравнений (2.2) линейна и однородна, а опорные функции в равенствах (2.21)—(2.23) положительно однородны. По свойству 1 опорных функций: Опорная функция $c(F,\ \cdot): E^n \to E^1$ положительно однородна, т.е.

$$c(F, \lambda\psi\ ) = \lambda c(F, \psi)$$

для любого вектора$\psi \in E^n$и любого числа $\lambda \geq 0$.

В частности, $c(F, 0) = 0$.

Таким образом, при отыскании сопряженных функций $\psi(t)$, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина, можно нормировать эти функции в какой-нибудь момент времени, например при $t = t_0$, $\|\psi(t_0)\| = 1$, и перебирать сопряженные функции$\psi(t)$ с начальными условиями из единичной сферы, $\psi(t_0) \in S$.

Рассмотрим, как построить все управления, удовлетворяющие принципу максимума. Для этого можно предложить следующую схему:

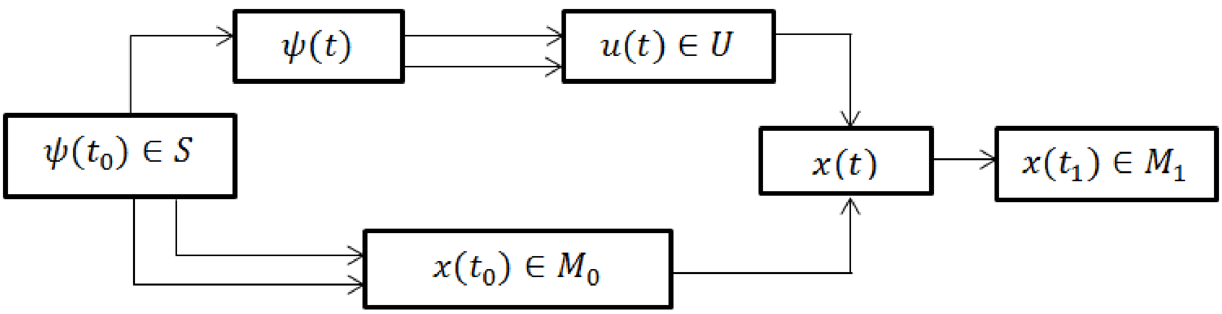

Рис.3

Начальный момент времени t_0 в нашей задаче зафиксирован. Возьмем произвольный начальный вектор $\psi(t_0)$ из единичной сферы $S \subset E^n$. Найдем решение $\psi(t)$ сопряженной системы (2.20) с этим начальным значением $\psi(t_0)$. В силу теоремы: Пусть функция u(t) в уравнении (2.19) интегрируема по Лебегу на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Тогда для любого начального значения $x(t_0) = x_0$ абсолютно непрерывное решение x(t) уравнения (2.19) существует, является единственным и для любого $t \in I$ задается формулой Коши

$$x(t) = e^{(t_0-t_1)A}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t-s)A}\, u(s)ds,$$

Это решение $\psi(t)$ существует и единственно на любом отрезке времени $[t_0, t_1], t_1 \geq t_0$. Единственность этого решения на схеме обозначается одинарной стрелкой. Затем, зная решение $\psi(t)$ сопряженной системы, найдем все допустимые управления $\mathrm{u(t)} \in U$, удовлетворяющие условию максимума (2.21). Таких управлений u(t) может быть несколько, на схеме обозначаются двойной стрелкой. По данному начальному вектору $\psi(t_0)$ найдем все начальные значения вектора фазового состояния объекта $x(t_0)$ из начального множества M_0, удовлетворяющие условию трансверсальности на множестве M_0 (2.22). Этих начальных значений $x(t_0)$ может быть несколько. Это также показано на схеме двойной стрелкой. Зная допустимое управление u(t) и начальное состояние объекта $x(t_0)$, можно найти решение уравнения (2.19). В силу теоремы решение x(t) находится однозначно начальному условию $x(t_0)$ и по функции u(t). Когда решение x(t) построено, нужно проверить, достигнет ли это решение при каком-либо $t_1 \geq t_0$ множества M_1 или нет. Если решение x(t) достигнет в какой-то момент t_1 множества M_1, то выполняется ли условие трансверсальности на множестве M_1 (2.23). Если это условие выполнено, то пара $\mathrm{u(t), x(t)}$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на полученном отрезке времени $[t_0, t_1]$; в противном случае пара $\mathrm{u(t), x(t)}$ не удовлетворяет принципу максимума.

При таком подходе все пары $\mathrm{u(t)}, \mathrm{x(t)}$, удовлетворяющие принципу максимума, зависят лишь от начального вектора $\psi(t_0) \in S$, причем эта зависимость на двух этапах может быть неоднозначной. Отметим, что если объект является управляемым из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$, то решения $\psi(t)$ и $\mathrm{x(t)}$ в данной схеме можно строить лишь на этом отрезке времени.

3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ MIN-ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ МАРКОВА

3.1 Min-проблема моментов

Классическую (-L,L) проблему моментов Маркова можно сформулировать следующим образом.

Дана последовательность непрерывных на [a,b] функций $\{g_k(t)\}_{k=1}^{n}$. Требуется:

1) Найти условия, которым должен удовлетворять вещественный вектор S=$\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, если известно, что существует хотя бы одна измеримая функция f(t), $t\epsilon[\mathrm{a,b}]$. Такая, что

$$S_k = \int_a^b g_k(t)\,\mathrm{f(t)dt},\ \mathrm{k=1,\ldots,\ n};\ |f(t)| \le L, t\epsilon[\mathrm{a,b}].$$

2) Исследовать некоторые простейшие функции f(t) для заданного вектора S.

Min-проблема моментов заключается в том, что для любых заданных моментов S указать минимальный возможный отрезок $[a, a+Q_s]$ и функцию $f_s(t)$ такие что

$$S_k = \int_a^b g_k(t)\,\mathrm{f(t)dt},\ \mathrm{k=1,\ldots,n};\ |f(t)| \le L, t\epsilon[a, a+Q_s].$$

Если $g_k(t) = t^{k-1}$, то степенная проблема моментов.

Если $g_k(t) = e^{i(k-1)t}$, то тригонометрическая проблема моментов.

Критерий управляемости для $\dot{x} = Ax + bu$.

Рассмотрим задачу $\dot{x} = Ax + bu, |u| \le 1, x(0) = x_0,\ x(\Theta) = 0, \Theta \to min.$ A- матрица n×n, b-вектор-столбец.

Система управляема тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}(\mathrm{b, Ab, \dots}\, A^{n-1}b) = n.$

Решение.$x(t) = e^{At}(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}\, bu(\tau))d\tau$,

учитывая, что$x(0) = x_0,\ x(\Theta) = 0, \Theta \to min$,можно записать:

$$x = \int_0^{\Theta} e^{-A\tau}\, bu(\tau)d\tau$$

x – заданная начальная точка.

Для оптимальности по быстродействию функция $u(t)$ кусочно постоянная, принимающая значения $\neq 1$. Кроме того, если матрица А имеет вещественный спектр, то число точек разрыва не превышает n-1 (т. Фельдбаума).

Обозначим $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n$= Θ – точка разрыва функции $u(t)$, которые называются моментами переключения; $\tilde{u} = \mp 1$ – управление на $[T_{n-1}, \Theta]$.

Решение задачи быстродействия сводится к нахождению времени быстродействия T_n= Θ, рода управления $\tilde{u}$ и моментов переключения $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$.

Таким образом, если $S_k = -x_k$, g(t)=$e^{-A\tau}b$, то задача сводится

$S_k = \int_0^{\Theta} g_k(t)\, u(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ – проблема моментов, $k = 1, 2, \dots, n$.

3.2 Канонические переменные

Для решения задачи:

$$\dot{x_1} = u, |u| \leq 1. \tag{3}$$
$$\dot{x_i} = x_{i-1}, \qquad i = 2, \dots, n,$$
$$x(0) = x, \qquad x(\Theta) = 0, \Theta \to min.$$

В [5] вводятся две последовательности полиномов $\alpha_k(x, \Theta)$и $\beta_k(x, \Theta)$следующими уравнениями:

$$\alpha_1 = \frac{\Theta - x_1}{2}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 & \dots & (k-1)\alpha_{k-1} & k\alpha_k \\ -1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \frac{\Theta^k + (-1)^k k!\, x_k}{2}, \quad k = 2, \dots, n; \tag{3.1}$$

$$\beta_1 = \frac{\Theta + x_1}{2}, \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & \dots & (k-1)\beta_{k-1} & k\beta_k \\ -1 & \beta_1 & \dots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \frac{\Theta^k - (-1)^k k!\, x_k}{2}, \quad k = 2, \dots, n. \tag{3.2}$$

Обозначим через $\tilde{u}$ управление на последнем интервале $[T_{n-1}, \Theta]$. Если$\tilde{u} = -1$, то $\tilde{u}$ будем называть управлением первого рода, если $\tilde{u} = +1$, то это управление второго рода. В работах [12,13] вводится в рассмотрение последовательность полиномов $\gamma_k(x, \Theta, \tilde{u})$ следующим образом:

$$\gamma_k(x, \Theta, \tilde{u}) = \begin{cases} \alpha_k(x, \Theta), \text{если } \tilde{u} = -1 \\ \beta_k(x, \Theta), \text{если } \tilde{u} = +1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Тогда, используя равенства (3.1) и (3.2). последовательность $\gamma_k(x, \Theta, \vec{u})$ можно получить из аналогичных уравнений:

$$\gamma_1 = \frac{\Theta + \tilde{u} x_1}{2}, \begin{vmatrix} \gamma_1 & 2\gamma_2 & \dots & (k-1)\gamma_{k-1} & k\gamma_k \\ -1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{k-2} & \gamma_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \frac{\Theta^k - (-1)^k \tilde{u} k!\, x_k}{2}, \quad k = 2, \dots, n. \tag{3.4}$$

Обозначим правые части равенств (3.4), (3.1) и (3.2) через G_k, A_k, B_k, т.е

$$G_k = \frac{\Theta^k + (-1)^{k+1}\tilde{u}k!\,x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3.5}$$

$$A_k = \frac{\Theta^k + (-1)^{k}k!\,x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3.5а}$$

$$B_k = \frac{\Theta^k + (-1)^{k+1}k!\,x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3.5б}$$

Очевидно, что

$$G_k = \begin{cases} A_k, \text{если } \tilde{u} = -1 \\ B_k, \text{если } \tilde{u} = +1 \end{cases} \tag{3.6}$$

Раскрывая определитель в равенстве (3.4) по последнему столбцу, получим

$$G_k = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i G_{k-i} + k\gamma_k, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3.7}$$

Отсюда следует рекуррентная формула для γ_k:

$$\gamma_1 = \frac{\Theta + \tilde{u}x_1}{2}, \gamma_k = \frac{1}{k}\left(G_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i G_{k-i}\right), \qquad k = 2, \dots, n; \tag{3.8}$$

Аналогичным образом введем последовательности полиномов $\alpha_k(x, \Theta)$, $\beta_k(x, \Theta)$, $\gamma_k(x, \Theta, \tilde{u})$:

$$\overline{\alpha_1} = -\frac{\Theta - x_1}{2}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 & \dots & (k-1)\alpha_{k-1} & k\alpha_k \\ -1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \\ = -\frac{\Theta^k + (-1)^k k!\, x_k}{2}, \qquad k = 2, \dots, n; \tag{3.9}$$

$$\overline{\beta_1} = -\frac{\Theta + x_1}{2}, \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & \dots & (k-1)\beta_{k-1} & k\beta_k \\ -1 & \beta_1 & \dots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \\ = -\frac{\Theta^k - (-1)^k k!\, x_k}{2}, \qquad k = 2, \dots, n; \tag{3.10}$$

$$\overline{\gamma_1} = -\frac{\Theta + \tilde{u} x_1}{2}, \begin{vmatrix} \gamma_1 & 2\gamma_2 & \dots & (k-1)\gamma_{k-1} & k\gamma_k \\ -1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{k-2} & \gamma_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \\ = -\frac{\Theta^k - (-1)^k \tilde{u} k!\, x_k}{2}, \qquad k = 2, \dots, n; \tag{3.11}$$

Откуда видно, что

$$\overline{\gamma_k}(x, \Theta, \tilde{u}) = \begin{cases} \overline{\alpha_k}(x, \Theta), \text{если} \tilde{u} = -1 \\ \overline{\beta_k}(x, \Theta), \text{если} \tilde{u} = +1 \end{cases} \tag{3.12}$$

Обозначим правые части равенств (3.9), (3.10) и (3.11) через $G_k,\ A_k,\ B_k$ соответственно, т.е

$$\overline{G_k} = -\frac{\Theta^k - (-1)^{k+1} \tilde{u} k!\, x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3.13}$$

$$\overline{A_k} = -\frac{\Theta^k - (-1)^k k!\, x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3.13а}$$

$$\overline{B_k} = -\frac{\Theta^k + (-1)^{k+1} k!\, x_k}{2}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3.13б}$$

Очевидно, что

$$\overline{G_k} = \begin{cases} \overline{A_k}, \text{если } \tilde{u} = -1 \\ \overline{B_k}, \text{если } \tilde{u} = +1 \end{cases} \tag{3.14}$$

Раскрывая определитель в равенстве (3.11) по последнему столбцу, получим равенство, аналогичное (3.7):

$$\overline{G_k} = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{\gamma_i}\,\overline{G_{k-\iota}} + k\overline{\gamma_k}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3.15}$$

Отсюда следует рекуррентная формула, аналогичная (3.8):

$$\overline{\gamma_1} = -\frac{\Theta + \tilde{u}x_1}{2}, \overline{\gamma_k} = \frac{1}{k}\left(G_k - \sum_{i=1}^{k-1} \overline{\gamma_i}\,\overline{G_{k-\iota}}\right), \qquad k = 2, \dots, n; \tag{3.16}$$

Замечание. Канонические переменные γ_k можно вычислять, используя явную формулу

$$\gamma_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}, \begin{vmatrix} G_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ G_2 & G_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{k-1} & G_{k-2} & G_{k-3} & \dots & k-1 \\ G_k & G_{k-1} & G_{k-2} & \dots & G_1 \end{vmatrix}, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3.17}$$

если в данной формуле заменить γ_k и G_k на $\overline{\gamma_k}$ и $\overline{G_k}$. соответственно, то получим аналогичную формулу для вычисления переменных $\overline{\gamma_k}$.

Из равенств (3.5) и (3.13) видно, что

$$\overline{G_k} = -G_k, \qquad \overline{A_k} = -A_k, \qquad \overline{B_k} = -B_k.$$

Дополним систему (3) уравнением $\Theta = -1$ и рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \dot{x_1} = u, \\ \dot{x_i} = x_{i-1}, \\ \dot{\Theta} = -1. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.1. Полиномы $\gamma_k(x, \Theta, \tilde{u})$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\overline{\gamma_k}} = -(k-1)\overline{\gamma_{k-1}}, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{3.19}$$

и системе

$$\dot{\overline{\gamma_k}} = 1, \dot{\overline{\gamma_k}} = -k\overline{\gamma_{k-1}}, \qquad k = 2, \dots, n, \tag{3.20}$$

где производные $\dot{\overline{\gamma_k}}$ в (3.19) и (3.20) берутся в силу системы (3.18) с управлением $u = \tilde{u}$ и $u = -\tilde{u}$ соответственно.

3.3 Уравнения для нахождения всех моментов переключения

В [11] описан аналитический метод нахождения времени быстродействия Θ и рода управления $\tilde{u}$ для канонической задачи быстродействия.

Используется последовательность определителей Маркова:

$$\Delta_1 = \gamma_1, \qquad \Delta_2 = \gamma_2, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_{2p-1} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{2p} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \cdots & \gamma_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} & \cdots & \gamma_{2p} \end{vmatrix}$$

Время быстродействия Θ_0 является наибольшим вещественным корнем уравнения

$$\Delta_n(\gamma_1(x, \Theta, -1), \ldots, \gamma_n(x, \Theta, -1) \cdot \Delta_n\big(\gamma_1(x, \Theta, +1), \ldots, \gamma_n(x, \Theta, +1)\big) = 0$$

При этом если наибольший вещественный корень Θ_0 получается из уравнения

$$\Delta_n(\gamma_1(x, \Theta, -1), \ldots, \gamma_n(x, \Theta, -1)) = 0,$$

то $\tilde{u} = -1$ (управление 1-го рода);

если наибольший вещественный корень Θ_0 получается из уравнения

$$\Delta_n\big(\gamma_1(x, \Theta, +1), \ldots, \gamma_n(x, \Theta, +1)\big) = 0$$

то $\tilde{u} = +1$ (управление 2-го рода).

Теорема. Пусть для системы (3) время оптимального быстродействия Θ. Тогда моменты переключения $T_i, i = 1, \dots, n-1$, оптимального управления $u(t)$ определяются как корни следующих уравнений:

1) для $n = 2p$

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

для нахождения четных моментов переключенияT_2, T_4, T_{2p-2}, и

$$\begin{vmatrix} 1 & \bar{\gamma}_1 & \cdots & \bar{\gamma}_p \\ -\bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \cdots & \bar{\gamma}_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \cdots & \bar{\gamma}_{2p-1} \\ -1 & z & \dots & z^p \end{vmatrix} = 0 \tag{3.22}$$

для нахождения нечетных моментов переключенияT_1, T_3, T_{2p-1};

2) для $n = 2p - 1$

$$\begin{vmatrix} \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \cdots & \bar{\gamma}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\gamma}_{p-1} & \bar{\gamma}_p & \cdots & \bar{\gamma}_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.23}$$

для нахождения четных моментов переключенияT_2, T_4, T_{2p-2}, и

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.24}$$

для нахождения нечетных моментов переключенияT_1, T_3, T_{2p-3}.

Замечание. Уравнение для нахождения всех моментов переключения (четных и нечетных $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$) в случае $n = 2p$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \cdots & \gamma_{2p-1} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \\ -\gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-1} \\ -1 & z & \dots & z^p \end{vmatrix} = 0, \qquad (3.25)$$

а уравнение для нахождения всех моментов переключения для случая

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \cdots & \gamma_{2p-2} \\ 1 & z & \dots & z^{p-1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.26)$$

Поскольку для заданной начальной точки $x = x(0)$ время быстродействия Θ определено, то в левых частях равенств (3.25) и (3.26) $\gamma_1 \dots . . \gamma_{2p-1}$- известные числа, тогда левые части этих равенств представляют собой полиномы степени n - 1 относительно z, корнями которых являются все моменты переключения и только они.

Рассмотрим еще одну систему относительно вспомогательных переменных $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$:

$$\dot{\psi} = -A^* \psi,$$

где A^*матрица, транспонированная к матрице А. Решение этой системы вектор ψс компонентами $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$, который является опорным вектором к области управляемости системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \ |u| \le 1, x(0) = x_0, \ x(\Theta) = 0, \Theta \to min,$$
$$(\mathrm{b}, \mathrm{Ab}, \dots A^{n-1} b) = n \qquad (*)$$

в начальной точке $x(0)$. Оптимальное управление

$$u(t) = sign(\psi, -e^{-At}b) = -sign(\psi, e^{-At}b) \tag{3.27}$$

Скалярное произведение $(\psi, \exp(-At)\, b)$ представляет собой полином

$$(\psi, -e^{-At}b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \psi_k t^k}{k!} \tag{3.28}$$

Корни этого полинома согласно равенству (3.27) являются моментами переключения. Следовательно, полином (3.28) с точностью до постоянного множителя совпадает с левой частью уравнения (3.25) при $n = 2p$и с левой частью уравнения (3.26) при $n = 2p - 1$. Если записать левую часть вышеуказанных уравнений в виде

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},$$

то

$$\psi_k = (-1)^k k!\, c_k, \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

То есть вектор g с компонентами

$$(c_0, -c_1, 2!\, c_2, \dots, (-1)^{n-1}(n-1)!\, c_{n-1} \tag{3.29}$$

является опорным вектором к области управляемости системы(*).

Пример.

Рассмотрим теперь задачу быстродействия для системы (3) при n = 6 из начальной точки $x = (0,0,0,0,0,x_6)$ в начало координат.В этом случае p = 3,

$$\gamma_1(x,\Theta) = \frac{\Theta}{2};\ \gamma_2(x,\Theta) = \frac{\Theta^2}{8};\ \gamma_3(x,\Theta) = \frac{\Theta^3}{16};\ \gamma_4(x,\Theta) = \frac{5\Theta^4}{128};$$

$$\gamma_5(x,\Theta) = \frac{7\Theta^5}{256};\ \gamma_6(x,\Theta) = \frac{21\Theta^6}{2^{10}} - 60\tilde{u}x_6;$$

$$\overline{\gamma_1}(x,\Theta) = -\frac{\Theta}{2};\ \overline{\gamma_2}(x,\Theta) = -\frac{3\Theta^2}{8};\ \overline{\gamma_3}(x,\Theta) = -\frac{5\Theta^3}{16};$$

$$\overline{\gamma_4}(x,\Theta) = -\frac{35\Theta^4}{128};\ \gamma_5(x,\Theta) = -\frac{63\Theta^5}{256};$$

Находим время оптимального быстродействия

$$\Theta = \Theta(x) = 4\sqrt[6]{30x_6}$$

и род управления, которое является управлением второго рода, т.е. $\tilde{u} = +1$.

Из (3.21а) находим, что уравнение для нахождения четных моментов переключения имеет вид

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix} = 0$$

или $16t^2 - 16\Theta\mathrm{t} + 3\Theta^2 = 0$, корни этого уравнения.

Из (3.22а) находим, что уравнение для нахождения всех нечетных моментов переключения имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ -\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ -\gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ -1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = 0$$

или $32t^3 - 48\Theta t^2 + 18\Theta^2 \mathrm{t} - \Theta^3 = 0$, корни этого уравнения

$$T_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\Theta, \qquad T_3 = \frac{\Theta}{2}, \qquad T_5 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\Theta.$$

4 ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

4.1 Общий алгоритм решения

Общий алгоритм решения канонической задачи быстродействия представлен на рис.3.

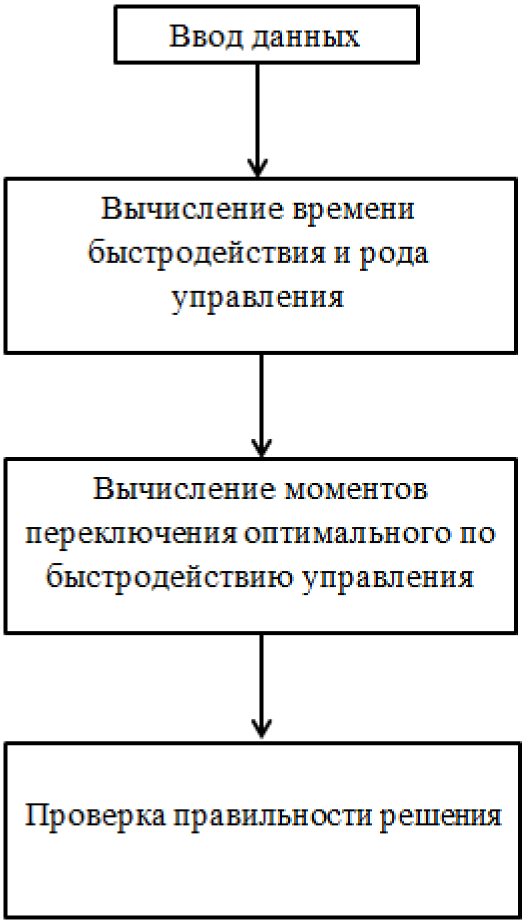

Рис. 3 Общий алгоритм решения канонической задачи быстродействия.

4.2 Численная реализация аналитического метода

Для численной реализации аналитического метода был выбран программный продукт maple.

В ходе компьютерных экспериментов создаются разные подходы к задаче, анализируются частные решения, а также при программировании возможна сортировка фрагментов, которые требуют особой скорости, все это происходит с помощью программы maple, которая представляет для них удобную среду. С помощью программ можно создавать интегрированные среды, которые взаимодействуют с другими системами, а так же используют универсальные языки программирования высокого уровня. При окончательном результате произведенных расчетов, для оформления проделанной работы, можно использовать средства пакета maple, который предоставит возможность визуализировать полученные данные и подготовить иллюстрации для публикации.

Ниже представлено численное решение для n=7.

```
> restart;n:=7;
                                        n := 7
> Digits:=70:
> with(linalg):

> opred:=proc(ga,dd);
> if frac(n/2)=0 then
> p:=n/2: de:=matrix(p,p);
> for i from 1 to p do
> for j from 1 to p do
> de[i,j]:=ga[i+j]; od; od;
> else
> p:=(n+1)/2: de:=matrix (p,p):
> for i from 1 to p do
> for j from 1 to p do
> de[i,j]:=ga[i+j-1]; od; od; fi;
> dd:=det(de);
> end:

> opred(ga,ddd):
> i:='i':k:='k':l:='l':
> x:=vector(n,[1,1,1,1,1,1,1]);
                                        x := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
> for l from 1 to 2 do u1:=2*l-3;
> for k from 1 to n do
> g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2; od;
> i:='i':for k from 1 to n do
> ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k; od;
> opred(ga,dde);
> s1:=evalf(fsolve(dde=0,q));
> q[l]:=max(s1);dde:='dde';od:
> ga[0]:=-1:
> if q[1]>q[2] then q:=q[1];u1:=-1; else q:=q[2];u1:=1;fi;
           q := 32.83111093049424437412995848933628367219726506624757840818297372357979
                                        u1 := -1
```

```
> T:=array(1..n,[]):
> i:='i':k:='k':j:='j':
> for k from 1 to n do
> g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2;g1[k]:=-g[k]: od:
> i:='i':k:='k':for k from 1 to n do
> ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k: ga1[k]:=(g1[k]-sum(ga1[j]*g1[k-j],j=1..k-1))/k: od
> k:='k':j:='j':l:='l':i:='i':
> if frac(n/2)=0 then
> p:=n/2: deev:=matrix(p,p):deev1:=matrix(p+1,p+1):
> for i from 1 to p-1 do
> for j from 1 to p do
> deev[i,j]:=ga[i+j]: od: od:j:='j':for j from 1 to p do
> deev[p,j]:=t^(j-1): od;j:='j':i:='i':ga1[0]:=-1:
> for i from 1 to p do
> for j from 1 to p+1 do
> deev1[i,j]:=ga1[i+j-2]: od: od:j:='j':for j from 1 to p+1 do
> deev1[p+1,j]:=t^(j-1):od:ddeev:=det(deev):
> momev:=solve(ddeev=0,t):j:='j':
> ddeev1:=det(deev1):
> for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:od:
> momod:=solve(ddeev1=0,t):j:='j':
> for j from 1 to p do T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:
> else i:='i':j:='j':
> p:=(n+1)/2: deod:=matrix (p,p): deod1:=matrix(p,p):
> for i from 1 to p-1 do
> for j from 1 to p do
> deod[i,j]:=ga[i+j-1]:deod1[i,j]:=ga1[i+j-1]: od: od:
> j:='j':
> for j from 1 to p do
> deod[p,j]:=t^(j-1):deod1[p,j]:=t^(j-1):od;
> ddeod:=det(deod): ddeod1:=det(deod1):
> momev:=solve(ddeod1=0,t):j:='j':
> momod:=solve(ddeod=0,t):
> for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:
> T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:fi:
>
```

```
> j:='j':for j from 1 to n do
> print(T[j]);od;
>
```

3.365433927001324556507078187295276516288169436194824594854712508714046

8.893320438867399913412509840059152358221324963092796549840428144052775

15.497374344565935578150974865645186345547447091169537561342941447271115

22.124396123264802424849852417313144128731610104546294402509746920461 78

27.749633300219635242401629247436248382308112830417566020752695106284 90

31.510280474901815225862299287672556593289426823266626428691660859522 74

32.831110930494244374129958489336283672197265066247578408182973723579 79

```
> z:=vector(n);
```

$$z := \mathrm{array}(1\,..\,7, [\ ])$$

```
> eaq:=matrix(n,n);
```

$$eaq := \mathrm{array}(1\,..\,7, 1\,..\,7, [\ ])$$

```
> k:='k':j:='j':
```

```
> for k from 1 to n do
> s2:=sum((-1)^(j+1)*(T[j])^k,j=1..n-1);
> z[k]:=x[k]+(-1)^(n-k)*2*u1*(s2+(-1)^(n+1)*((T[n])^k)/2)/k!;
> s2:='s2';od:
> i:='i':j:='j':
> for i from 1 to n do
> for j from 1 to n do
> if j>i then eaq[i,j]:=0;
> else eaq[i,j]:=q^(i+j-2)/(i+j-2)!;fi;od;od;
> xf:=evalm(eaq&*z); i:='i';
```

$$xf := [-.4540\ 10^{-64}, .64998125463970059254791663247275659684342281276004803718152594711900 81\ 10^{-60},$$
$$-.13243190582744040683938210428071009984843558390697204622257945503645 88\ 10^{-56},$$
$$.65821687281298587483585798117843578149578330199193333650321328412266 48\ 10^{-54},$$
$$-.11793267580277780383400929649964008811951298157247836189135010596435 64\ 10^{-51},$$
$$.98082632231146046391762728754091814033034851418608302895733898497633 10\ 10^{-50},$$
$$-.44357782449813986456958752815243572577407586670028249581865578213660 10\ 10^{-48}]$$

$$i := i$$

```
> R:=sqrt(sum((xf[i])^2,i=1..n));
```

$$R := .44368626564556373057828387232706294891647354318478138980223353034077 51\ 10^{-48}$$

Таким образом, мы получили следующие результаты для n=7:

1.Время быстродействия

q=32.8311109…57979

первый род управления, так как u= -1.

2. Моменты переключения

3.3654339…14046

8.8933204…52775

15.497374…27115

22.124396…46178

27.749633…28490

31.510280…52274

32.831110…57979

3. Погрешность вычисления составляет

R=.443686…07751$\cdot 10^{-48}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из обширных классов является класс экстремальных задач. Он состоит из задач оптимального управления, задач оптимизации управляемых процессов, которые имеют большое прикладное значение.

Управляющий орган и объект управления являются основными частями структурной схемы задач управления. Примером объекта управления может выступать: технологический процесс, космический эксперимент, система машин, семейный бюджет и т. д. С момента происхождения задач управления, управляющее звено прошло немало этапов прогрессирования−от простейшего регулятора до современной ЭВМ.

В ходе проделанной выпускной квалификационной работе, были выполнены следующие задачи:

- изучены методы решения задач быстродействия
- изучено решение канонической задачи быстродействия, основанной на min-проблеме моментов А. А. Маркова
- Построено численное решение канонической задачи быстродействия, основанной на min-проблеме моментов А. А. Маркова.

Из всего выше перечисленного можно сделать вывод, что принцип максимума Понтрягина подходит для любой задачи управления (не обязательно задачи быстродействия), но этот метод не очень удобен в программировании.

Метод, предложенный Валерием Ивановичем Коробовым, позволяет решать линейные задачи быстродействия, для систем любой размерности и удобен для программирования.

Принцип max Понтрягина для задачи быстродействия не очень удобен, так как возникают проблемы в программировании при больших размерностях. Данный подход, основанный на min-проблеме моментов, позволяет решать задачи любой размерности, все зависит лишь от возможностей компьютера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Атанс, М., Фалб, П. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968. 763 с.

2. Ахиезер, Н.И. Классическая проблема моментов. М.: Госиздат, физ.-мат. литературы, 1961. -310 с.

3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория): М.: Высшая школа, 2001. - 239 с.

4. Благодатских В.И. Линейная теория оптимального управления. -М. Изд-во МГУ 1978.

5. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во ТбГУ, 1977. - 264 с.

6. Гамкрелидзе Р.В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1958. – Т.22, №4. – С. 447 – 474.

7. Коробов В.И. Метод функции управляемости. – М., - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. – 576 с.

8. Коробов В.И., Иванова Т.И. Отображение нелинейных управляемых систем специального вида на каноническую систему // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2001. Т. 8, №1. С. 42 – 57.

9. Коробов, В.И., Скляр, Г.М. Проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке // Докл. АН СССР. 1989. — Т. 308.-№3,-С. 525-528.

10. Коробова Е.В., Скляр Г.М. Один конструктивный метод отображения нелинейных систем на линейные // теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1991. №55. – С. 68 – 74.

11. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов //Мат. сборник.-1987. - 134(176), №2(10). – с.186-206.

12. Коробов В.И., Скляр Г.М., Флоринский В.В. О нахождении оптимального времени и моментов переключения в задаче быстродействия // Вестник Харьковского университета, серия «Математика, прикладная математики и механика». – 1999. - № 444, с. 24-43.

13. Коробов В.И., Флоринский В.В. Методы построения оптимальных по быстродействию управлений для канонических управляемых систем //Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999.- Т.6. № 3/4, с. 264-287.

14. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. - 551 с.

15. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.- М.: Наука, 1971. – 574 с.

16. Минюк С.А. О точном решении задачи быстродействия в случае линейных стационарных систем // Дифференциальные уравнения. 1996. - Т. 32, №12. - С. 1645 - 1652.

17. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1976. – 362 с.

18. Скляр Е.В. О классе нелинейных управляемых систем, отображающихся на линейные // Математическая физика, анализ, геометрия. 2001. - Т. 8, №2. - С. 205 – 214

19. Скляр Е.В., Флоринский В.В. Новые способы нахождения моментов переключения для некоторых задач быстродействия //IV Крымская Международная математическая школа "Метод функций Ляпунова и его приложения". Тезисы докладов. Симферополь. - 1998. - С. 61.

20. Хайлов Е.Н. О моментах переключения экстремальных управлений в линейной задаче оптимального быстродействия // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 1996. -4. - С. 225 - 265.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Численное решение для n=15.

```
> restart;n:=15;
                                        n := 15
> Digits:=70:
> with(linalg):

> opred:=proc(ga,dd);
> if frac(n/2)=0 then
> p:=n/2: de:=matrix(p,p);
> for i from 1 to p do
> for j from 1 to p do
> de[i,j]:=ga[i+j]; od; od;
> else
> p:=(n+1)/2: de:=matrix (p,p):
> for i from 1 to p do
> for j from 1 to p do
> de[i,j]:=ga[i+j-1]; od; od; fi;
> dd:=det(de);
> end:

> opred(ga,ddd):
> i:='i':k:='k':l:='l':
> x:=vector(n,[0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1]);
                              x := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
> for l from 1 to 2 do u1:=2*l-3;
> for k from 1 to n do
> g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2; od;
> i:='i':for k from 1 to n do
> ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k; od;
> opred(ga,dde);
> s1:=evalf(fsolve(dde=0,q));
> q[l]:=max(s1);dde:='dde';od:
> ga[0]:=-1:
> if q[1]>q[2] then  q:=q[1];u1:=-1; else q:=q[2];u1:=1;fi;
          q := 42.15078572289032996375402797014811505494109648910270942932577279736017
                              u1 := -1
> T:=array(1..n,[]):
```

```
> i:='i':k:='k':j:='j':
> for k from 1 to n do
> g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2;g1[k]:=-g[k]: od:
> i:='i':k:='k':for k from 1 to n do
> ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k: ga1[k]:=(g1[k]-sum(ga1[j]*g1[k-j],j=1..k-1))/k: od:
> k:='k':j:='j':l:='l':i:='i':
> if frac(n/2)=0 then
> p:=n/2: deev:=matrix(p,p):deev1:=matrix(p+1,p+1):
> for i from 1 to p-1 do
> for j from 1 to p do
> deev[i,j]:=ga[i+j]: od: od:j:='j':for j from 1 to p do
> deev[p,j]:=t^(j-1): od;j:='j':i:='i':ga1[0]:=-1:
> for i from 1 to p do
> for j from 1 to p+1 do
> deev1[i,j]:=ga1[i+j-2]: od: od:j:='j':for j from 1 to p+1 do
> deev1[p+1,j]:=t^(j-1):od:ddeev:=det(deev):
> momev:=solve(ddeev=0,t):j:='j':
> ddeev1:=det(deev1):
> for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:od:
> momod:=solve(ddeev1=0,t):j:='j':
> for j from 1 to p do T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:
> else i:='i':j:='j':
> p:=(n+1)/2: deod:=matrix (p,p): deod1:=matrix(p,p):
> for i from 1 to p-1 do
> for j from 1 to p do
> deod[i,j]:=ga[i+j-1]:deod1[i,j]:=ga1[i+j-1]: od: od:
> j:='j':
> for j from 1 to p do
> deod[p,j]:=t^(j-1):deod1[p,j]:=t^(j-1):od;
> ddeod:=det(deod): ddeod1:=det(deod1):
> momev:=solve(ddeod1=0,t):j:='j':
> momod:=solve(ddeod=0,t):
> for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:
> T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:fi:
```

```
> j:='j':for j from 1 to n do
> print(T[j]);od;
>
```

.4968170800644348449246616700986185006491722267557537240922606164691568

1.9585088955764721930249006164539260069477357360668510045879254576335588

4.302255970162897560708073564441903846365699629353677972228751759183042

7.4005188130929193302185793337331912299372145988753793156315848628833320

11.093600102384657430048104142383028717513106424126074141243172773115 99

15.202328158860591104796060429159815217332259458090116379617271141364 86

19.538673709757461801711912864411408790755218968017237995976791160630 07

23.913749479084503197915898246031606431563929842438548765058266875588 74

28.143936209959487157175939437681548119397683851423938445529479269080 71

32.056187414870879874556752528350005723496764552528191837446333835048 73

35.493120137145312031889613215158046184858605369915860301090028463134 44

38.317943992284269917381623310953063938650573124953475603419576239965 01

40.418989775215847968918420946132070077339514184264525324342482205308 87

41.713549092365628159359925360699073216421071585455859713406674070805 57

42.150785722890329963754027970148115054941096489102709429325772797360 17

```
> z:=vector(n);
```

$z := \mathrm{array}(1 .. 15, [\ ])$

```
> eaq:=matrix(n,n);
```

$$eaq := \mathrm{array}(1..15, 1..15, [\ ])$$

```
> k:='k':j:='j':
> for k from 1 to n do
> s2:=sum((-1)^(j+1)*(T[j])^k,j=1..n-1);
> z[k]:=x[k]+(-1)^(n-k)*2*u1*(s2+(-1)^(n+1)*((T[n])^k)/2)/k!;
> s2:='s2';od:
> i:='i':j:='j':
> for i from 1 to n do
> for j from 1 to n do
> if j>i then eaq[i,j]:=0;
> else eaq[i,j]:=q^(i+j-2)/(i+j-2)!;fi;od;od;
> xf:=evalm(eaq&*z); i:='i';
```

$$xf := [.355967537490\ 10^{-56}, -.28197616688045148898377090994565169796688585352287811889162461906469\,45\ 10^{-51},$$
$$.14882443125973485402003320313241183616440674590354601004642106193526\,97\ 10^{-47},$$
$$-.18308422323531071585924841364566163385356367357312164761055002705856\,21\ 10^{-44},$$
$$.82708266037084905674749918262004464007690536116779683853840356244370\,76\ 10^{-42},$$
$$-.17441170252799448383392001537564596654703118129292570861352230236192\,94\ 10^{-39},$$
$$.19917170882638070873750157409155173297547651519279890316844305106312\,72\ 10^{-37},$$
$$-.13624137863350313997299757215365403143686271033462584340817324956427\,70\ 10^{-35},$$
$$.60043980460437338447581821736820033618314502887183462534106252923383\,13\ 10^{-34},$$
$$-.18014331731367898006795219985557469072887928368102345817850798744111\,73\ 10^{-32},$$
$$.38409274711043515849597986739596131153299645469639702572216735457185\,80\ 10^{-31},$$
$$-.60243609021206983894506382685531370888709449051474167222585008497721\,32\ 10^{-30},$$
$$.71503429343659679652177123098051577420172795505319226623884000755591\,84\ 10^{-29},$$
$$-.65755305672183790663486370572080915085496456804133826582647884285305\,50\ 10^{-28},$$
$$.47796665456842893766145440482054813929907214444154213865710710773203\,46\ 10^{-27}]$$

$$i := i$$

```
> R:=sqrt(sum((xf[i])^2,i=1..n));
```

$$R := .48252189060727719136049983511634143695124158183113911532692357410749\,17\ 10^{-27}$$

Численное решение для n=36.

```
> restart;n:=36;
```

$$n := 36$$

```
> Digits:=100:
> with(linalg):
```

```
> opred:=proc(ga,dd);
> if frac(n/2)=0 then
> p:=n/2: de:=matrix(p,p);
> for i from 1 to p do
> for j from 1 to p do
> de[i,j]:=ga[i+j]; od; od;
> else
> p:=(n+1)/2: de:=matrix (p,p):
> for i from 1 to p do
> for j from 1 to p do
> de[i,j]:=ga[i+j-1]; od; od; fi;
> dd:=det(de);
> end:
```

```
> opred(ga,ddd):

> i:='i':k:='k':l:='l':
> x:=vector(n,[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1]);
                              x := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
> for l from 1 to 2 do u1:=2*l-3;
> for k from 1 to n do
> g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2; od;
> i:='i':for k from 1 to n do
> ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k; od;
> opred(ga,dde);
> s1:=evalf(fsolve(dde=0,q));
> q[l]:=max(s1);dde:='dde';od:
> ga[0]:=-1:
> if q[1]>q[2] then q:=q[1];u1:=-1; else  q:=q[2];u1:=1;fi;
          q := 49.755668441446853212175484621947835972302087218261004342976150549052837209559238895227841859723733349
                                                  u1 := 1
> T:=array(1..n,[]):

> i:='i':k:='k':j:='j':
> for k from 1 to n do
> g[k]:=(q^k+(-1)^(k+1)*u1*k!*x[k])/2;g1[k]:=-g[k]: od:
> i:='i':k:='k':for k from 1 to n do
> ga[k]:=(g[k]-sum(ga[i]*g[k-i],i=1..k-1))/k: ga1[k]:=(g1[k]-sum(ga1[j]*g1[k-j],j=1..k-1))/k: od:
> k:='k':j:='j':l:='l':i:='i':

> if frac(n/2)=0 then
> p:=n/2: deev:=matrix(p,p):deev1:=matrix(p+1,p+1):
> for i from 1 to p-1 do
> for j from 1 to p do
> deev[i,j]:=ga[i+j]: od: od:j:='j':for j from 1 to p do
> deev[p,j]:=t^(j-1): od;j:='j':i:='i':ga1[0]:=-1:
> for i from 1 to p do
> for j from 1 to p+1 do
> deev1[i,j]:=ga1[i+j-2]: od: od:j:='j':for j from 1 to p+1 do
> deev1[p+1,j]:=t^(j-1):od:ddeev:=det(deev):
> momev:=solve(ddeev=0,t):j:='j':
> ddeev1:=det(deev1):
> for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:od:
> momod:=solve(ddeev1=0,t):j:='j':
> for j from 1 to p do T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:
> else i:='i':j:='j':
> p:=(n+1)/2: deod:=matrix (p,p): deod1:=matrix(p,p):
> for i from 1 to p-1 do
> for j from 1 to p do
> deod[i,j]:=ga[i+j-1]:deod1[i,j]:=ga1[i+j-1]: od: od:
> j:='j':
> for j from 1 to p do
> deod[p,j]:=t^(j-1):deod1[p,j]:=t^(j-1):od;
> ddeod:=det(deod): ddeod1:=det(deod1):
> momev:=solve(ddeod1=0,t):j:='j':
> momod:=solve(ddeod=0,t):
> for j from 1 to p-1 do T[2*j]:=momev[j]:
> T[2*j-1]:=momod[j]:od:T[n]:=q:fi:
```

```
> j:='j':for j from 1 to n do
> print(T[j]);od;
>
```

.09466767003335715378370281301867624904468540837155548864490640496645444019624669582652707416768626847
.37795020200257273860347390282652891073597474108392511336008742907287932939810766335596189049051680 86
.84769164478869152782340955073246472167101200738004597068257700742034069810530814531272386616994044 26
1.5003169823744730720606746428691414143109175138461081774215748135823066469989546541754778391530195 72
2.3308593418749365899236076464126190066142568304253062142924208228084781359608432113491106451457584 45
3.3329977944390955174931546828759387920389218955819759657650719293799885426338591944878452976783005 92
4.4991054613351947081061128336410637815018402175087896305368756619793580766799915821585513583242908 97
5.8203075591030943789033569591668684116884077122955935801388050168068975709628110466460444393473853 67
7.2865489420151425410367195309861920752422213689758250292972929813411104652298243938997779717571359 46
8.8866706278066254214117517880590985946850478945580201781450045443302550993414661556412805040987291 56
10.608494724268779648852597949312662451355479930036158919484075852928526606383335960093138109187859 18
12.438917110361713303043871155486958993075521804565251085744037637263209302389493137240941503194949 18
14.364007166488004111018847174679931783840249087465898740648905826564346438582487075212121423574997 97
16.369113794919373923279464425741348302201970455656407106703158159269042834835669435003694046764186 54
18.438976923496975592874432330720190632579834247534723112873359300605648837646232107550011245598704 47
20.557843643994805299245059994676190988773553410681016768770845071301827680815288133602274486146336 62
22.709588101263168487905237123745473211263460222047018755243620435355538664053744371621856266629157 48
24.877834220723426606087742310973917986151043609130502171488075274526418604778844381204389192899134 45
27.046080340183684724270247498202362761038626996213985587732530113697298545483180225386222560054200 71
29.197824797452047912930424627271644983528533807579987574205305477751009528778027472043954970729220 20
31.316691517949877619301052291227645339722252970726281230102791248447188372619077794157933907772880 95
33.386554646527479288896020196206487670100116762604597236272992389783794373862285245734331813407716 30
35.391661274958849101156637447267904188461838130795105602327244722488490754584962256908454060045774 56
37.316751331085139909131613466460876979226565413695753257232112911789627916866905557044196693900874 98
39.147173717178073563322886672635173520946607288224845423492074696124310782489811080491008514082314 84
40.868997813640227790763732833888737377617039323702984164831146004722582052446172507022583725759618 41
42.469119499431710671138765090961643897059865849285179313678857567711725665088666716376417487615989 82
43.935360882343758833272127662780967560613679505965410762837345532245939834405935228055399614972621 39
45.256562980111658504069371788306772190800247000752214712439274887073482970412037013509787468930974 25
46.422670647007757694682329939071897180263165322679028377211078619672848283778878546906108072991879 51
47.424809099571916622251876975535216965687830387835698128683729726244350836178585139955883748440282 09
48.255351459072380140114809979078694557991169704414896165554575735470530967467296304912346435402336 42

48.255351459072380140114809979078694557991169704414896165554575735470530967467296304912346435402336 42
48.907976796658161684352075071215371250631075210880958372293573541632506627029284434081670352170707 28
49.377718239444280473572010719121307061566112477177079229616063119979957711488520553856958647554529 48
49.661000771413496058391781808929159723257401809889448854331244144086377969243475302502086825370051 59
49.755668441446853212175484621947835972302087218261004342976150549052837209559238895227841859723733 49

```
> z:=vector(n);
```

$z := \mathrm{array}(1\,..\,36, [\ ])$

```
> eaq:=matrix(n,n);
```

$eaq := \mathrm{array}(1\,..\,36, 1\,..\,36, [\ ])$

```
> k:='k':j:='j':
> for k from 1 to n do
> s2:=sum((-1)^(j+1)*(T[j])^k,j=1..n-1);
> z[k]:=x[k]+(-1)^(n-k)*2*u1*(s2+(-1)^(n+1)*((T[n])^k)/2)/k!;
> s2:='s2';od:
> i:='i':j:='j':
> for i from 1 to n do
> for j from 1 to n do
> if j>i then eaq[i,j]:=0;
> else eaq[i,j]:=q^(i+j-2)/(i+j-2)!;fi;od;od;
> xf:=evalm(eaq&*z); i:='i';
```

$xf := [.12208231630885443862902908\ 10^{-72}, -.80285513797149182993174647726376496941997281076352397663811924487337556571304248791873871621737508 66\ 10^{-68},$

$.79469950768285287305051524441219040957440636354553192992102687934488109192787081648707941150227995 94\ 10^{-64},$

$-.22153244561706011777460520895380189343825177905449386759062967104422069813071622031529262762092716 38\ 10^{-60},$

$.23166290927985029127425827574328524517994535595574897791676686543529033095563302889371454649142673 25\ 10^{-57},$

$-.11168810054605604981496374421294838008793794135049609326468165474513998048287136577100958526448736 24\ 10^{-54},$

$.28623091784775509988154777576743536808669735709642901907022836207190588089886083972692073239065169 04\ 10^{-52},$

$-.43126053976897730163003574673212655849282343062027697286495382552760613571613694474515560921419545 03\ 10^{-50},$

$.41140511161355080584981023800591460487422661482901772419940064206381084865737872466227334630201976 10\ 10^{-48},$

$-.26294004530877310102040386833288911115679760734535961895364694417249791514153805116889219573320195 97\ 10^{-46},$

$.11770410350092701453137551871728613160341080545806421238847366862468911056186427518407757425591948 73\ 10^{-44},$

$-.38248106217257346186204518245189086353023436625223417122891611728970080503723039166361134197083207 90\ 10^{-43},$

$.9291379734273580118115984529050389159486573514962399355156057395091440127166702023420933486248234314\ 10^{-42}$,
$-.1729323585346348921370099233332285387017301607844549078779403854276440487974303696152955269415820435\ 10^{-40}$,
$.2517965625104349016098142012446397166727255533033762319780980058003224360237397111360120931306826626\ 10^{-39}$,
$-.2919923649331698027555926435076653995371163709769186868391460259582699792761607533075266076478323589\ 10^{-38}$,
$.2738944538835409249546028317632028276571111618738381840775461146535955761387279101111492161204453546\ 10^{-37}$,
$-.2106630702769681175660117362882467203156228801195071806302345637161289015295265054002750982980644514\ 10^{-36}$,
$.1344615577252818240447353216661545610879630410311188816769094715086200031933412997038038767813542808\ 10^{-35}$,
$-.7198557348635654622825388362398687990696287859221459667626692504861824477062234936900555804278575680\ 10^{-35}$,
$.3263441023237069146735333960551517663424232518999537045610584492753742953736454082169679563907429928\ 10^{-34}$,
$-.1263627973349194794651349012956785356902376306425577171592202744453694898099331661075547407898806015\ 10^{-33}$,
$.4211624997139922451262995189568973902941629697121527277780431250327658971478402010558658256825180456\ 10^{-33}$,
$-.1216838231897601582691685248901815416249002023591689388811917616849003904617152575473330867135036332\ 10^{-32}$,
$.3067369638596015519714466979732113361564951557064269900584998369564906573791095129279209237407571758\ 10^{-32}$,
$-.6785970350513081455493050425461393348050727697345652843561676773366216693487701119342901082546370382\ 10^{-32}$,
$.1324725421705959818499787760215089885012422588676004642436797330358160249599402522640363383221914995\ 10^{-31}$,
$-.2293401614968307051803542562625197462390835340522452913961585300729196411393868938065251346297377710\ 10^{-31}$,
$.3537398277049922216546390449141470952978881556834668358634255282507902598868209986424152923238268554\ 10^{-31}$,
$-.4882037023316080448200725286651137716877343536966114470003630404849166393052743729733115779140117023\ 10^{-31}$,
$.6052913820178171986472544435522880505051777562027152872954172809737969640624863143778770717473684690\ 10^{-31}$,
$-.6766898898562975850789255668789045123325741838892886252427981856491368819623683915248417725448684584\ 10^{-31}$,
$.6845196049450730271224653687779588054087111472471972056355245984481993161976084735538657065044576063\ 10^{-31}$,
$-.6285879482820295940894219247357148603783446393157922226083435711249608736708702103240514937410633839\ 10^{-31}$,
$.5256002854086621948404765853309906098620242599031223065233131442149023457081820812563270602092692991\ 10^{-31}$,
$-.4013286445346374423347015471308497479341250843835849304513649697142261970413114031833711654406904729\ 10^{-31}$]

$$i := i$$

```
> R:=sqrt(sum((xf[i])^2,i=1..n));
```

$$R := .1601446545823530530015037763505864065526416790273952616784879843313571194291442531062705783878639915\ 10^{-30}$$